国家出版基金项目

Jean Piaget

总主编 李其维 赵国祥

皮亚杰文集

Collected Works of Jean Piaget

第七卷（下）

本卷主编 蒋 柯

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS

ISBN 978-7-5649-4479-7
9 787564 944797 >
（上、下册）
定价：890.00 元

国家出版基金项目

总主编 李其维 赵国祥

皮亚杰文集

Collected Works of Jean Piaget

（第七卷）

Volume Seven

皮亚杰心理逻辑学

（下）

Jean Piaget's Psycho-Logic

（Part Ⅱ）

主　编　蒋　柯

副主编　曹宁宁　李梦霞

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS
·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

皮亚杰文集. 第七卷/李其维,赵国祥总主编;蒋柯分卷主编. —郑州:河南大学出版社,2020.9

ISBN 978-7-5649-4479-7

Ⅰ.①皮… Ⅱ.①李… ②赵… ③蒋… Ⅲ.①皮亚杰(Piaget, Jean 1896—1980)—文集 Ⅳ.①B84—53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 190625 号

责任编辑 王 慧 姜 畅
责任校对 纪庆芳
封面设计 马 龙

出 版 河南大学出版社
地址:郑州市郑东新区商务外环中华大厦 2401 号 邮编:450046
电话:0371—86059701(营销部) 网址:hupress.henu.edu.cn
排 版 郑州市今日文教印制有限公司
印 刷 河南瑞之光印刷股份有限公司
版 次 2020 年 12 月第 1 版 印 次 2020 年 12 月第 1 次印刷
开 本 787 mm×1092 mm 1/16 印 张 118.75
字 数 2531 千字 定 价 890.00 元

总目

卷目

目　录

英译者前言:心理学家指南

当被醒目的心理学标题所吸引的读者从陈列书架上取出这本书时,他们却发现这本书很多页面上都充满着∨,⊃,p,q,他们可能又会把书放回。但是,他们的兴趣并没有错位,因为这确实不是关于逻辑的作品。这本书,无论对研究认知的实验心理学家,还是对为儿童和青少年工作的临床心理学家,抑或其他愿意更多地了解自我发展的心理学家,都是有指导价值的。逻辑确实会出现,一方面出现在儿童和青少年思维更为严格的逻辑方面,它们反映了本书的主题;此外,还会以逻辑符号的形式出现,以提供其思维过程的结构模型。但我们认为,这些还不足以让人放下这本书,即使很多人高中数学的惨痛经历已经为这部分被冠以"抽象象征主义"的认知领域设置了屏障。

无论如何,这本书为不熟悉作者的方法和基本假设、没有受训过逻辑知识的读者提出了一些挑战。一方面,对于儿童心理进程的长期实证研究来说,这是一个新的突破:它在基因水平上向前推进了一步,并且覆盖了到青春期的整个过渡过程。但此外,它在这一方面远远超出了大多数早期的成果,它是在尝试分离并且描述出这些思维过程所基于的心理结构。正是在这里,逻辑出现了。通过使用符号逻辑作为工具对经验材料进行结构化的分析,7—11岁儿童推理过程的典型心理结构被分离出来,且区分于12—15岁青少年推理过程的典型结构。

正如作者在序言中所述,这是一个基于事实收集后的协同工作。英海尔德教授主要是一个实验儿童心理学家,在那个时期其工作被视为青少年思维研究的一部分。另一方面,皮亚杰教授是一个跨学科的思想者,除了著名的儿童思维方面的工作,他也独立地进行逻辑方面的研究。对照他们各自近期工作的成果,我们可以发现皮亚杰教授的逻辑分析为英海尔德教授收集的关于青少年推理的数据提供了合适的结构模型。

他们的合作基于皮亚杰已在别处所揭露的逻辑和心理学之间的关系。① 简要概括为,逻辑和心理学是两个独立的学科:前者关注通过技术性提炼的符号化来形式化和抽象化内在的一致系统;后者处理在全人类实际发现的心理结构,不管它是否经过正规训练或使用特定的符号表征,也不论一致的、不一致的,真实或虚假的。

尽管系统的形式化过程按照其自身的活动性质,应该只隶属于逻辑范畴,但是,逻辑也可以当作一种理论化的工具,用来描述控制日常推理过程的心理结构,就像这里所

---

① 见皮亚杰,《逻辑学与心理学》(New York: Basic Books,1957)。

做的。当前工作在尝试描述心理结构，显然符合心理学家们的兴趣。但是，因为皮亚杰的工作需要对两个领域的概念和方法都有些理解（而且他没有为非专业人士翻译这些学术概念），他的创新工作不容易被吸收。因此，在这份"指南"中，为了实验心理学家和临床心理学家便于理解，我们将尝试使用美国心理学更熟悉的方式对一些运用的基本概念设置一些更易理解的标识。

尽管在过去的几十年里，整体上儿童心理学在美国比欧洲受到更广泛的关注，皮亚杰学派的工作在大西洋这边没有产生重大影响。这些概念传播的失败，在一定程度上可以归因为，无论在理论和方法论上，皮亚杰占据的是美国心理学主流取向的一种中间点。他直接投入人类的复杂功能，忽视统计显著性表格或系统反应变量，使得他脱离了那些非常强调方法精度的研究群体。但是他的工作也和临床取向的心理学家，涉及社会学、社会心理学或人类学的心理学家有所不同，因为他并不涉及动机理论，并且大多数情况下他专注于研究独立于任何动机变量的认知功能问题。然而，美国心理学界的这两方都倾向于与任何哲学传统划清界限，他的理性主义框架和对哲学的革新难以被任何一方轻易地吸收。也许人们会说皮亚杰使用逻辑在某种程度上类同于美国人使用动机理论（或者强化理论、心理动力学），将其作为研究学习过程的外部参考系。

但在其自身框架内，皮亚杰的方法既是灵活的也是连贯的，而且在某种意义上与临床和实验方法达成了一致。它的基础是发生的，也就是说，智慧行为可以在成长的连续统一过程中得以分析。它的实验性体现在，给不同年龄的儿童呈现相同的问题，样本量足以进行常规统计，比如，超过 1500 名被试进行测试，以发现不同年龄阶段儿童的区别。有时候测试已经被使用过，这种情况下，特定年龄层被试的成功是基于统计规范来进行判断的。① 也使用了其他的量化方法，例如在儿童的自发表达中，计算特定逻辑联结的出现与年龄阶段的相关性。对于进一步的问题，反应类型可能仅与年龄部分相关，中位数已经呈现了年龄变量至少可以解释一些系统变异。② 因此，智慧中一些可观测的成长，就被分离了出来。

但是皮亚杰并没有止步于收集这些可测量的数据。像大多数的临床医生一样，他一直非常关注量化测试所固有的一些局限性和系统偏差。鉴于皮亚杰设置的目标是描述儿童的自发智慧而不是通过成人的眼睛，他经常以精神分析家所能发现的比实验心理学家更移情的方式来选择问题和评估其回答。一些成果，特别是在《儿童关于世界的概念》③一书中，几乎完全是基于一种探索内在世界的直觉尝试，没有使用超出精选问

---

① 直到 75%的儿童测试成功，我们才认为这个测试是通过的。见皮亚杰，《儿童的判断与推理》(Humanities Press，1952)。

② 见皮亚杰，《儿童的道德判断》(Free Press，1948)。我们发现儿童对惩罚的期望在年龄上有显著差异，且至少在某种程度上与家庭的社会化方式无关。

③ 见皮亚杰，《儿童的世界概念》(Humanities Press，1951)。参阅此书的引言，理解儿童心智所采用的测验及临床方法与后者概念间关系的观点。

题和细致评估答案之外的任何方法。

但是，实际上，大部分的研究既不是实验的也不是临床的。它很少依赖具体反应的量化结果，因为就像当前命题逻辑的研究，智慧被视为一个整体，通常是以其非常复杂和高度整合的形式存在。然而，它是系统的和实证的，因为儿童智慧的各个方面已经被逐一揭示，并且在大样本的被试中通过采用同样明确定义的问题任务而被证实。在超过25年的时间里，验证假设和重建理论整体的工作在持续不断地进行，已经形成了坚实的知识体系。批评的评论指向于皮亚杰忽略动机因素致使研究结果的意义有所减损。但是，正如皮亚杰在《发生认识论导论》中所陈述的一样，①科学和哲学间的不同在于前者试着把任何事情和别的一切事情联系起来，而后者试着划出问题界限并找到处理它们的具体方法。这种格式在不同文化上的效度问题，动机因素在功能上的变化性等等，仍然是开放的议题。② 在本书最后一章中，作者超越了纯粹的认知并试图描述青少年的情感和社会心理的智力发展结果。

一系列的成果揭示了个体连续发展过程中不同时间点上职能的表现，聚焦在不同的功能上，这些系列研究的总体目标是，在其处理复杂度逐步增加的任务或者用效能逐步增长的方式处理简单任务的过程中去追踪智慧的发展轨迹。以下是定义过的四个主要成长阶段，目前的工作主要是处理第三阶段到第四阶段的过渡时期③。

首先，从出生到大约两岁的这段时期是感觉运动阶段。这个时期幼儿学习协调知觉和运动功能，学习运用某些基本格式（指一种概括化的行为模式或配置）来处理外部对象。他开始了解到即使在他知觉所及的范围之外，物体也存在，并且把它们从不同角度得到的部分整合出一个可辨认的整体。象征性行为的基本形式开始出现，例如当儿童在"思考"他如何能从一个半开的表盒中取出一条表链时会打开和关上自己的嘴巴。表达性的象征也开始出现，例如，皮亚杰1岁3个月的女儿躺下假装开始睡觉，她拿走桌布的一角假装当作枕头，此时她自己大笑起来④。《儿童智慧的起源》⑤已经从行为的角度研究了这个时期，《儿童"现实"的建构》则从知觉领域的组织和永久客体的构建

① 皮亚杰，《发生认识论导论》(Presses Universitaires de France, 1950), Vol. Ⅰ，第7页。

② 已经有些研究把皮亚杰的发现和心理分析上的发现结合起来。皮亚杰自己开始从事与情感有关的问题且在《儿童的游戏、梦与模仿》(Norton, 1952)一书中讨论自己理论和弗洛伊德的理论间的关系，且查尔斯·欧吉尔(Charles Odier)在 *Anxiety and Magic Thinking* (International Universities Press, 1956)一书中试图把精神分析的回归理论和皮亚杰自我形成的初级阶段模型联系起来。见拉帕波特(Rapaport)，大卫(David)等人所著的 *Organization and Pathology of Thought* (Austen Riggs Foundation, 1951)，第154－192页。

③ 这些阶段的简要定义参见坦纳(Tanner)和英海尔德(Inhelder)编辑的《儿童发展研究》(Tavistock Publications, 1956)和皮亚杰的《智慧心理学》(Routledge & Kegan Paul, 1956)。

④ 《儿童的游戏、梦与模仿》，第96页。

⑤ International Universities Press, 1952.

的角度研究了这个时期①。

前运算或具象阶段从开始组织象征性行为而有所扩展，尤其在语言上，一直到6岁左右。儿童开始借助于符号代表外在世界，但他首先通过动机模式的普遍化开始，例如，他相信太阳转动是因为"上帝在推动太阳"，而星星，就像他自己，不得不上床睡觉。相比于运算阶段的儿童，他还远不能从实现目标的方式中分离出他们自己的目的，当他所尝试的操作遭遇现实挫败后，他必须改正，他这样做是直觉的方式而不是经过运算，简言之，规则是实践上的相关性，类同于反馈机制的修正（例如，第121页的注释）。例如，在天平平衡问题中（第十一章），我们看到，前运算阶段的被试要使天平保持在一个位置时会手动调整不平衡。他们可能依据着对对称的直觉，在较轻的一边增加重量，但是也同样可能在已经超载的那边增加更多重量，因为他们认为这样就会自动成功。

这个阶段的协议贯穿这些成果，包括这一个。《儿童的世界概念》主要从思维内容的角度对它进行研究③。《儿童"现实"的建构》没有处理知觉方面和空间领域的建构，《儿童的空间概念》②专门研究这些。

在7—11岁之间，儿童习得执行具体运算的能力，这极大地扩大了他组织方式的能力，不限于朝向目标的直接动力。这些是用来处理即时呈现的客观世界的方法。

对具体运算阶段的研究可能比其他任何阶段都更为广泛，但也是在这个阶段英文翻译列表上存在最大缺口。《儿童的物理因果性概念》一书覆盖了很多在本书中使用的实验，但它写于理论发展的主要阶段之前。《儿童的空间概念》在理论上更接近本书，覆盖从前运算阶段到具体运算阶段的过渡时期；它为某些逻辑的形式化过程提供了更全面的基线，用以讨论到青春期的过渡过程。

最后，成人思维之前的第四阶段，发生在12—15岁之间，与具体运算截然相反的形式运算出现了。在本书中，它首次被详细地揭示。它的首要特征是发展出了使用假设推理和控制实验的能力，假设推理是基于所有可能组合的逻辑过程。

与前两个阶段的不同是，第三和第四阶段都是运算性的。从皮亚杰早期的著作开始，运算的概念逐步被阐释得越来越详尽，部分回应了来自格式塔心理学④的批评，智慧的言语方面被过分强调了，忽视了对动作的重视。运算是一种动作，它能在对物体的操作中直接执行，也可以当其为类别（在形式逻辑的情况下）或命题被操纵时在内部执行。概略地说，运算是一种意识化地转换来自现实世界数据的方法，使得它们能够被组织并选择性地用于解决问题。运算不同于简单的动作或目标导向的行为，因为它是内化的和可逆的。根据作者的论述：⑤

① Basic Books, Inc., 1954.

② 皮亚杰和英海尔德，儿童的空间概念（Routledge & Kegan Paul, 1956）。

③ Harcourt, Brace and Co, 1930.

④《逻辑学与心理学》，第12页。

⑤ 定义来自作者。

运算是一种可逆的、内在化的动作，与其他的动作集合成一个整合的结构。

从平衡的角度来看（见第十六章），当可以完全补偿时，转换是可逆的。从结构的角度来看（见第十七章），当它能通过逆向的转换取消时，该转换是可逆的（例如，顺运算和逆运算组合成形式思维阶段所发现的转换“群”）。

具体阶段可观测的可逆运算，其最简单定义是一种可以对称取消的已执行动作：举例来说，儿童把砝码放在天平上，当他意识到天平倾斜太多，能拿掉砝码并且系统地搜索一个更轻的，而不是为了矫正而加重砝码。随着运算的出现，尝试错误大大减少了，因为儿童根据内部结构而挑选操作方式（在这个例子中结构是砝码重量的序列排列）。但即使是命题逻辑最复杂的运算，我们也可以理解它们是从动作的内化过程开始，逐步发展为高度分化的意识结构。

从理论的角度来看，本书最关注的是具体和形式运算的结构整合。尽管儿童在任一年龄所具备的智慧行为的数量，显然依赖于学习的数量，对于他偶然碰到的情况，所获得运算的范围可以通过一定数量的相互依赖的结构来描述。所发现的结构和它们整合的方式取决于所考量的发展阶段；每套结构都常和逻辑形式的某个方面联系在一起。因此，具体结构取决于类的逻辑（类包含运算）和关系的逻辑（序列排列），然而青少年的命题逻辑取决于在结构化整体中“格”和“群”结构的整合。这显然并不意味着儿童或青少年获得了形式意义上的类逻辑或命题逻辑。不如说，它意味着在处理具体问题的过程中他找到了某种逻辑形式的解决办法，尽管他没有像逻辑学家那样把它们从内容中分离出来。这两种逻辑形式都出现在儿童的推理中，可以用来分析推理采用的结构模型。

可以说，结构在每个阶段都是整合的，因为每个部分运算的运用都是根据那些可获得的总体进行的：①

当元素们被放在一个具备整体特性的整体中时，且当元素的性质部分或全部地取决于整体的特征时，结构化的整合就出现了。一些例子如：分类，序列排列，对应关系，矩阵，“群集”，格，等等。

对于特定的领域而言，每一套结构都有它自身的局限性。具体阶段协议显示了“群”结构所能覆盖的极限点，一个新的整合形式亟待得到发展。

以下是一些运算的定义，基于具体阶段期间发展的“群”结构（见柏斯对《逻辑学与心理学》的介绍，一套更形式化的定义）：

1. 类包含运算。这些与儿童在一套分类中操作部分—整体关系的能力有关。为了定义类包含的运算，逻辑学家使用术语加法、减法和乘法，在性质上类似于定义数学运算的用法。两个类可以做加法，因此它们包含在一个更大的类中：男生+女生=儿童；儿童+成人=人类，即 $A+A'=B$。同样，可以从整体中减去一个部分：人类-成人=

① 定义来自作者。

儿童。当儿童能系统地完成这些时,可逆性就出现了,因为儿童需要概括或区分,他能在部分和整体之间做转换,并且能复原。

同样,类也能相乘。儿童根据两个交互标准在物体和特性上进行区分,获得四个子集:把 A(几何图形)分成 B(正方形)和 B'(圆圈)与 A(它们的颜色)分成 B(红色)和 B'(绿色),相乘(×)就得到 $BB+BB'+B'B+B'B'$(红色的正方形,绿色的正方形,红色的圆圈和绿色的圆圈)。这些是文中多次引用的双元列表。类的乘法运算是7—11岁儿童用来在两个(或更多)独立变量间进行区分的方法。

这样的关系似乎是显而易见的,但实验显示,前运算阶段的儿童并没有系统地使用类的运算。例如,约在7岁以前,给儿童一个盛有18个棕色和2个白色木质珠子的盒子,问他们棕色珠子多还是木质珠子多,他们回答棕色珠子多因为仅有两个珠子是白色的[1]。类别是可习得的,观察也可以是正确的,因为若对年龄更小的儿童,分别提问棕色、白色和木质珠子的相对比例问题,他们能做出正确的回答。然而,如果没有类包含运算,他们就不能同时处理部分和整体,因此他们做出的概括是错误的。

2. 序列排列运算。这些运算跟沿线性维度进行概括或按序列排列对象(或其潜能)的能力有关。它们都是基于关系的逻辑而不是类的逻辑;符号是>和<(大于或者小于)。给7岁的儿童一套棍子,要求把棍子按照尺寸大小进行排序,他按先拿最小的(或最大的)方式来进行,然后再拿剩下中最小的,依此类推,而不是随便开始,是注意到差异时再做整理。他能够在意识上推断,从 $A<B$ 和 $B<C$,到 $A<C$。在具体运算阶段,其他的经验因素在不同的点上按照相同的方式进行排列,比如,在9—10岁,按重量排序迟于按长度排序。当他习得序列排列运算时,儿童能够具体地安置给定变量大小上的变化,比如,在角度问题中(第一章),他看到球路线的改变与入射角直接相关。实际上,在心理运算上,他把角度放置在一个逐渐增大的系列中,每个角度对应一次尝试。

其次,已知两个独立的系列,儿童学着找出它们间的对应关系(符号↔)。换句话说,他通过观察共同的变化来准确地建立两个变量的关系。在角度问题中,他发现入射角的序列对应于小球朝向目标的发射角序列,因此他能正确地调整他的发射方向。与前运算阶段儿童截然相反的是,他开始明白始末的过程。

总而言之,具体运算是以类和关系的逻辑为基础的;它们是即刻结构化当前现实的工具。另一方面,在形式运算阶段,青少年开始掌握形式逻辑。他们不再直接仅仅根据给定的数据进行推理,他开始运用命题和假设。"具体运算"的概念发展为一种将逻辑分析应用于儿童处理客体过程中的运算的方式,从而避免了依照逻辑学家的方法去评判儿童智慧的错误做法。但在青少年推理的研究中,相比7岁儿童他们更加接近逻辑学家的做法,运算的概念无论如何不会被抛弃。不如说,形式逻辑可以被理解为一套心理运算,尽管它们基于不同的结构。从这个角度来看,形式运算和具体运算的区别在于,

① 《智慧心理学》,第133页。

它们在命题层次执行而非现实层次[1]：它们是一套转换，可以通过对当前数据进行概括而实现。与被当前现实经验地限定的具体运算截然相反的是，形式运算使得被试可能分离变量和推断潜在的关系，这种推断可以被后续的实验所证实。

形式运算所执行的命题，既指作为起因的变量假设，也指它们在实验中产生的作用。例如，在弹性形变问题中（第三章），青少年能够在弹性上分离和组合变量（取决于一些因素）。从行为的角度来看，被试所做的就是确定一些事实并把它们形式化为命题，举例来说，"这根棒是钢的；它也是长的，""那根棒是钢的，但它更短，"等等。这些都反映了他拟测试的棒的潜在因果属性。他也确认了他实验的结果，比如，一根长的钢棒弯曲，一根短的铜棒则不会，一根短的钢棒则会，等等。形式运算能使他在心理上组合这些命题，并且分离那些证明其假设的弹性决定因素。组合系统是使得他能够完成这些组合的结构机理。

换句话说，形式运算是转换命题的方法，以分离出相关变量并推理出它们间的关系。所描述的运算（见第912—913页，16种二元运算）是不同种类的组合，其中任一个都可能是符合的，取决于所观察的特定情境。频繁重复出现的术语"结合"指的是观察到的事实的合取，比如，"这根棒是钢的"和"这根棒（相同的）足够弯曲能碰到水面"这类关系明确地表达了基于观测事实的特定联合：举例来说，蕴涵意味着一个变量一旦出现就会出现特定的结果，每次延长钟摆的悬线，摆动的振幅就增大；如果不出现变量，这个结果永远不会出现，不延长悬线，振幅则不会增大。蕴涵的公式是 $p \supset q$。另一种组合是析取，比如在弹性形变问题中，被试看到有时短棒会弯曲但在其他时候它们不弯曲（$p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$），你能得到弯曲的短棒，或者不弯曲的短棒，或者弯曲的长棒，或者不弯曲的长棒，用 $\vee$ 表示"或者"。p、q 和它们的否定 p、q 代表实验中发现或没有发现一个给定变量或它的结果。当观察到析取关系时，被试推断长度不能单独决定形变。因为，不像具体运算阶段的儿童，他不会总是把他的考虑局限在单一关系中，然后他会继续考虑可能决定结果的其他变量。他把他的信息"供给"到一个通用机制：组合系统或者"结构化的整体"，它以命题的形式同化这些事实，根据所有可能的组合整理它们（逻辑术语是构成）。他能在这些可能性中回转（可逆性和完全补偿）以便挑选一种情况，表明其他的变量已被包含，并且一些潜在的解释在事实上说明了他所看到的：例如，长度不能独自决定弹性形变，对于弯曲的短棒来说还包含另一个因素；长度只是部分地决定弹性形变，长棒不弯曲，说明存在一个有反作用的因子等等。因此，命题运算经常起整体作用，并且是一个内部结构化的整体。青少年既能区分这些部分（变量或所发生的事件，比如棒的弯曲超过了弹性形变所需要的度数，等等）也能将其推广到对结果的全面解释和其他潜在情境中。就像在格式塔心理学中，思维的发展被视为一种趋向整体的建设，但是，正如在更大程度上强调的一样，它也朝向整体内部元素间的更精

1 这并不意味着形式逻辑是言语的，具体逻辑是非语言的（见第128—130页）。

确识别。就各部分间既分离又整合的意义而言，结构化的整体被更精确地组织。

阅读本书，读者可以在不同实验任务中清晰地看到各个方面的结构模型。因此，组合系统在染色液体问题(第七章)中呈现出了其最纯粹的形式，其中实验自身需要一些给定离散变量的系统组合；青少年的方法与儿童的方法之间的差异在实验计划上的差异变得明显，前者每次都囊括所有可能性，后者是一对一地进行组合，总是漏掉一些步骤。第三章多元弹性任务描述了，离散变量必须从呈现出的组合中抽离出来的对比过程。可以看到，在具体阶段变量总是混在一起，在形式阶段，既可以看到特定的组合，也可以看到简单的可分离性，两者之间形成强烈的对比。总而言之，通过结构化的整体，被试既能把部分组合成一个整体，也能从整体中分离出部分，结构化的整体的特征，可以形象地比喻为一种心理的脚手架，这个脚手架通过一些彼此相连的撑杆竖起，因此一个聪明的被试总是能够从任意一点进入，垂直地或水平地到达另一点，不会陷入死胡同。另一个结构形式"格"或"群"，我们最好留给逻辑学家。

安妮·帕森斯

① 在翻译"结构化的整体(structured whole)"时，我们不得不为了保护一个有意义和可代入的等价物牺牲一些原始的内涵。法语术语是 *ensemble des parties*，其中 *ensemble* 既意味着"整体(whole)"(有格式塔心理学所指的整合的涵义)，也意味着数学集合论中使用的"集合(set)"。对于逻辑学家来说，这个术语应该翻译为"所有子集的集合"。梅斯(Mays)译的 *Logic and Psychology* 读者在其中将会注意到术语的不同，他曾使用"结构化的整体"表示更一般的结构集合(*structures d'ensemble*)。这些 *structures d'ensemble*，在具体和形式阶段我们已把它翻译为"结构整合"或者"整合的结构"，但两者的结构类型被发现有不同之处。另一方面，组合系统或者"结构化的整体"是定义形式思维的结构化整合的典型特征。而且，术语结构集合(*structures d'ensemble*)由一些数学家使用，特别是布尔巴基，其结构研究奠定了这份成果的基础。而且，在集合理论中，集合 *ensemble* 的意思是"set"，与"whole"或"integrated"一样。

序　　言

这本著作的双标题（在最初的法文版本中，标题是《儿童和青少年的逻辑：形式运算结构的建构过程》）不仅表达了作者们在以一种全新的方式进行合作，还表达了他们想要区分合作中各自贡献的心愿。实际上，这反映了他们所提出的问题的双重性质，并且丝毫没有影响最终结论的整合。关于这个标题的选择，有一件事情值得一提，它是一个典型的例子，呈现了目前的实验法和演绎法如何能在智慧运算分析的领域中进行会合，假设演绎分析基于精确的逻辑技术。恰好第一作者为了完成他的《发生认识论导论》①、《论逻辑》和《论逻辑运算的转换》，离开实验工作了一段时间。后来的两本著作旨在为思维的实际过程提供一种可能的符号模型。在此期间，第二作者和她的助手对儿童和青少年进行了一系列物理定律的归纳法的实证研究。但是这个经验归纳法的发生学研究引起了两个出乎意料的结果。

首先，在早期的工作中，我们已经反复强调了开始于11—12岁的发展阶段的重要性。在我们新的研究中，越来越清晰地发现，这个阶段不单单是7—11岁阶段的顶点（此时儿童能算出具体运算）而且包含一个新的建构时期，是11—15岁下一个平衡水平的起点。所以，根据经验归纳方法的建构过程，尤其是根据在儿童身上没有发现的那些系统验证方法，来描绘青少年思维似乎是可能的。

其次，青少年并非儿童期间所出现的发现和经验验证的方法与一整套新的运算结构是紧密相关的。这些都是基于命题运算和"形式的"思维方式，以区别于在7—11岁儿童的"具体"运算思维。（除去类与关系的逻辑，后者只需要有限数量的运算。）

第一作者在这一点上介入，更好地阐明了上文所提及的实验结果与其演绎间的整合。众所周知的命题逻辑技术不足以分析在青少年形式思维阶段所出现的运算整合结构，这一事实变得明朗。因为我们也不得不使用四种转换的群（反演性和互反性），我们中的一位已经把这四种转换视为形式思维的机制产生作用所必需的功能。②

目前，实证调查数据的显著特点是它们呈现了形式思维不仅仅是言语上的推理（命

① 皮亚杰：《发生认识论导论》（Presses Universitaires de France，[illegible]），第一卷即将出版英译本。

② 见皮亚杰：《逻辑通论》（Colin，[illegible]）第[illegible]—[illegible]页，特别是《论逻辑运算的转换》（Presses Universitaires de France，1952），Chap. Ⅱ。这些作品都没有英文版。

题逻辑），它也蕴涵着一系列的伴随出现的运算格式：包括组合运算，命题，双重参考系，力学平衡格式（作用力与反作用力的相等），乘法概率，相关等等。但是在尝试解释这些运算格式和命题逻辑如何共同发展时，我们发现仅参考命题逻辑的某些运算是不够的，因为，除此之外，最重要的是，我们不得不考虑它们所基于的"整合结构"，也就是，第一作者在其命题运算转换的研究中所分析的四种转换群（克莱因群或四元群）与格的双重结构。

换句话说，我们中的一位从事于从儿童到青少年思维发展的实证研究，而另一位研究出了解释结果所需要的分析工具。只有在我们比较了观察记录且做出了最终解释后，我们才能看到实验和分析结果间的显著一致性。这促使我们在一个新的基础上再次合作，就形成了当前这个研究。

不过这些并非全部。青少年逻辑的运算格式不仅有其自身价值，它还向后投射光亮，映射了更早期的思维结构，即儿童的具体逻辑。实际上，具体阶段的儿童唯一能够运用的逻辑运算是类和关系的"基本群集"：类群是基于可称为反演（否定）可逆性的形式，关系的群则是基于互反性的形式。在这个阶段还不存在可以通过反演和互反转换整合到一个单一系统的普遍结构。但是对于青少年命题逻辑所发现的四种转换的分析，显示了这两种具体运算可逆性的形式最终是如何整合到一个单一系统中的。同时，作为分类普遍化的结果，命题格的组合系统得以发展。换言之，形式思维阶段出现的双重结构显然是一系列协调的最终结果，因为它们达到了最终的平衡水平（与成人思维中新的整合和持续发展无障碍接轨）。因此，要描述智慧的运算原理，以一步步地解释思维发展过程中连续的和分层的组织方式，就必然要分析形式思维的机制。

这本书有两个目的：描述从儿童到青少年逻辑运算的变化过程，描绘标志着智慧运算发展完成的形式结构。为了把这些联结在一起，作者尽可能以突出两者密切关系的方式来呈现材料。前十五章的每章（第一部分和第二部分）都包括第一作者进行的实验部分和第二作者进行的分析部分。这个分析旨在于分离每种情境中所发现的形式或命题结构。第十六和十七章（第三部分开始）是第二作者的成果，而第十八章是合作的成果。此外，从功能性的角度（区别于当下结构的分析）来理解实验所引出的具体问题，是第一作者所特定的研究主题。③

B. 英海尔德 J. 皮亚杰

① 四种转换：反演，互反，互反反演或反演互反和同一性转换。

② 对于命题运算象征意义的更详细描述，在章节总结和第十七章，参见《逻辑通论》第五章。

③ 本书中的实验图表已包含在此译文内。——英译者注

第一部分 命题逻辑的发展

若要揭示从儿童具体思维到青少年形式思维的转换过程，我们必须从描述形式逻辑的发展过程开始，尽管这是具体思维阶段（阶段Ⅱ：从 7—8 岁到 11—12 岁）的儿童还不能掌握的部分。实证研究的结果显示，在较长的一段时期内，儿童所使用的运算仅限于类和关系群集及其应用下的数和空间结构运算，而阶段Ⅲ（子类ⅢA：从 11—12 岁到 14—15 岁；子类ⅢB：14—15 岁以上）开始的标志是能够进行新的基于命题本身的运算，而不仅仅基于构成其内容的类和关系。

为了研究这一发展过程带来的诸多问题，我们必须分析阶段Ⅲ的儿童或青少年是如何解决那些表面看上去很具体、但按照我们预期仅在阶段Ⅲ才能解决，并且需要实际地运用内在命题的运算。第一部分的工作将致力于对这一问题进行分析。

第一章 入射角与反射角相等和互反蕴涵运算

本章的研究目的，包括第一部分的后续部分，不是对两个角相等的概念的系统研究。事实上，我们已经知道这个概念是如何建构的：它在具体运算水平就已经被认识了。但是，很清晰的事实是，要有意识地发现入射角与反射角相等，需要发展到阶段Ⅲ推理过程参与之后才能实现。因而，本研究的目的之一是，当推理过程依赖于具体运算水平已经形成的观点时，分离出这种形式运算推理过程所包含的运算机制。

本实验装置由一种弹子游戏组成。弹子从一种管状弹簧发射器射出，发射器可绕固定点旋转，能瞄准任何方向发射。弹子要被弹到反射挡板，而后反射到装置的内

与如下研究者合作完成：H. 艾伯利，日内瓦大学科学系心理实验室培训研究助理，苏黎世高等师范学院教授；L. 缪勒，日内瓦大学教育科学研究所培训研究助理，教育科学研究生。

参见皮亚杰、英海尔德：《儿童的空间概念》（Routledge & Kegan Paul, 1956），Chap. Ⅻ 和皮亚杰、英海尔德、斯泽明斯卡：《儿童的自发性几何学》，Chap. ⅩⅢ（无译本）。

③ 一种橡胶的缓冲板。

向。靶子相继地放置在不同的位置，被试只是被要求要击中靶子。然后，要求被试报告他所观察到的情况。

但是，仅在阶段ⅢA(11—12岁到14岁)的儿童能够发现入射角与反射角相等，并且通常要到阶段ⅢB(14—1 岁)才能公式化地表达出来。我们的问题是去理解为什么像两个角相等这样7—9岁以后就熟悉的概念，要到如此晚的时间才能被归纳为一个基本定律，更重要的是，这个过程中为什么必须使用形式运算。为了回答这个问题，我们将简要回顾儿童达到形式运算水平前的背景历程，而后更加细致地探析形式运算。

(一)阶段Ⅰ

在阶段Ⅰ(7—8岁以前)，被试多数关注他们的操作成功与否，不关注路径，甚至经常忽略弹子反弹的作用。结论是，除了在这个阶段的最后，弹子的路线通常被表述为一种弧线，而非折线。

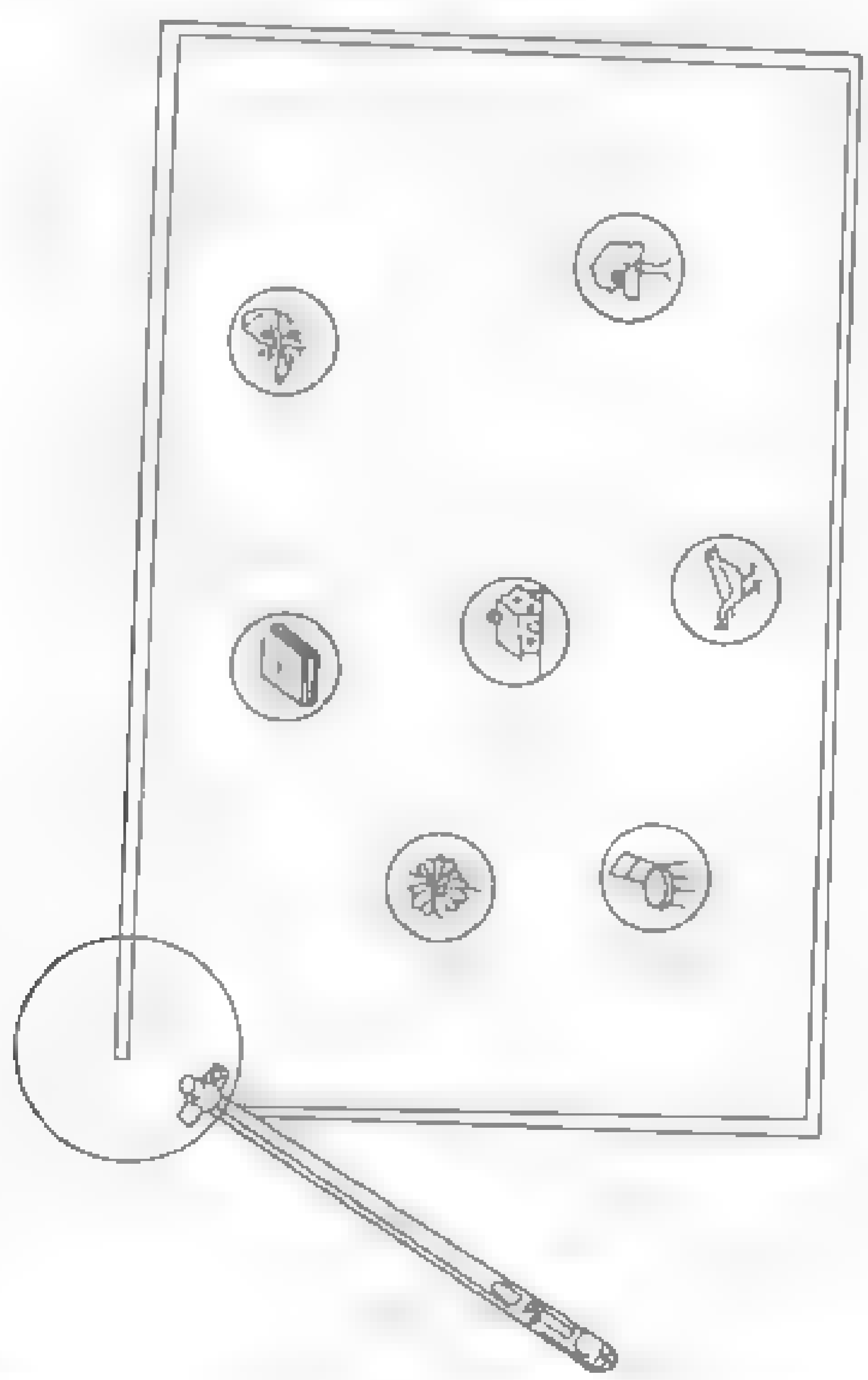


图1　这个弹子游戏的原理用来呈现入射角和反射角的关系。这个管状弹簧发射器可绕固定点旋转，能瞄准任何方向发射。弹子从这个发射器射出，达到反射挡板，而后反射到装置的内面。这些圆圈标识出了靶子，它们被相继放置在不同的位置。

[Dan(、岁2个月)　第一个完成了："我想它可以是因为它在相同的方向。"他自己调整发射器，但是通过尝试错误的方式来操作。然后他自发地问："你为什么

有时要转动发射器呢？……不，你必须把它放在那里（他失败了）。如果把它推远一点。"（他这么做了，并且成功了。）尽管他知道怎样有效地控制反射，但是 Dan 不了解其中的转角：他用手指描画的弧线并未切到反射壁；他关注了起点和目标，但未关注反射点。

Wirt（5岁5个月） "它从这里出来，到那里去了……我知道怎么弄它"等。他偶尔可以成功但是他用手指描画的路线仅是圆弧的形状，没有碰到装置的反射壁；他只关注目标，好像不存在反射一样。

Van（5岁1个月） 令人惊喜的是，他描画的弹子绕行轨迹第一个碰到了反射壁。"它总是去那里"。但是，他不能成功地调整他的目标："噢，它总是去那里……过一会它就好了。"

Pit（5岁2个月） 说出了他多次尝试中失败的一次："它很奇怪（好像是一个例外）。它为什么会击不中？我原以为它会击中的。"（没有理解）

Ant（6岁6个月） 在他注意到弹子轨迹中的折线特征的同时，意识到了反射的存在："弹子碰到了这里，然后，它转向那里。"（他用手示意了直线段）

Per（6岁6个月） 尽管6岁，然而他用弧线模型来说明："它去了那里，然后它又转向了另一个方向。"（手势表达了一个弧线）

这个阶段的表现非常有趣，因为尽管孩子们用他们的行为展现了他们知道在实验情境下应该如何做，有时也会成功，但是他们尚未把他们的行为内化为运算，即使是具体运算。广义地说，第一，具体运算的行为不仅实现了内化，还实现了与其他行为的整合，形成一般的可逆的系统。第二，在内化和整合性的基础上形成了具体运算，具体运算的儿童不仅能够认识事物技术的部分而且能够相应地调整自己的行为。这些特征不同于简单的目标取向的运算，从严格意义上说，在最初的阶段这些特征并不存在：被试的操作仅仅为了达到目标，他并没有问自己为什么能够成功。在实验的自我报告部分，他就没有掌握运动轨迹的折线特征，也没有发现反射的存在，直到临近这个阶段的结束（接近6岁或6—7岁）。因此，他无法注意到反射点上入射角和反射角的存在。

（二）阶段Ⅱ（子阶段ⅡA和ⅡB）

子阶段ⅡA 的特征是出现具体运算，如下文描述：

Vir（7岁？个月） 多次尝试之后成功了。他指出并用两个清晰的折线部分描绘了轨迹，说道："靶子越靠左，你越需要向左转动发射器。"

Truf（7岁10个月） "我知道它会去哪里。"事实上，他用手势表明他发现了当发射器抬起时，反射的角度会变小；当发射器降低时，反射的角度会变大。因此，他向我们呈现了他对入射角和反射角的相等有着模糊的整体的直觉。但是，他还不能明确地表达这一点，因为他不能把他描画的那个合并的角分成两个相等的角。

Bend(8 岁) "是这个角(反射角)让它转向;与你改变发射器(发射器的角度)时,你改变了这个轮廓(角度大小)。"他用直接做到的方式展示了上述过程:当发射器轻微倾斜时,角度非常小;当发射器剧烈倾斜时,角度非常大。我们问他"轮廓"代表什么,他用手势示意了角的开度,表明他正在考虑发射器转动的增加引起了角度的增加,和由此引起的幅度递增的反射。

Desi(8 岁 2 个月) "弹子总是随着发射器的增高而飞得更高"。然后"弹子会飞向那边(更远),因为发射器更倾斜了;我让我的眼睛跟上(——我辨认反射点),从橡胶处(——橡胶带固定在弹子反射的反射壁上)我看到了那些圆环(——用作靶子的碟片)"。

在子阶段ⅡB,儿童进行的运算,形成了包括直线和夹角模型,他们对发射器的倾斜度与发射线的倾斜度之间的关系形成了更加准确的规则。

Na(9 岁 1 个月) "你必须根据靶子的位置移动发射器;弹子必须对靶子走一条倾斜的线路。"

Kar(9 岁 6 个月) "我把发射器沿这个方向(向左——比如,朝上)移动的越多,弹子就越这样飞行(非常小的夹角);我把它沿这个方向(向右)移动的越多,弹子就越那样飞行(夹角不断增加)。"Kar 做到了这一点,他发现与发射器是"直的"(例如,垂直正对反射壁)时,弹子将返回到起点。

Baur(9 岁 6 个月) "你怎么解释它?"——"它必须处在与靶子相同的距离上。"(他指出夹角随着目标的后退而增大,发射器和反射点的距离或者后者与靶子的距离不增大。)

Lam(9 岁 8 个月) "与你把发射器抬高,弹子的轨迹越来越像这样(尖角)。我越是把它这样放(向右降低),弹子的轨迹就越像这样(钝角)。"——"但是,请你多说一些你观察到了什么?"——"我还在看靶子,就这些,因为它会随发射器而转向。"(——因为反射点和靶子间的反射线的方向会随着发射器的倾斜度而改变。)

Dom(9 岁 9 个月) "它撞到了那里,然后往那边去了。"(他重复着发射器不同倾斜度的措辞,指出了相等的倾斜角。)

因此,我们看到,被试能够成功分离出所有发现发射角和入射角相等这一规律的所有元素,但是他们既不能构建这个规律,更不必说也不能用语言把它形式化。他们使用两部分轨迹(反射之前和之后)倾斜度的序列次序和一致性进行简单的具体运算,但是他们没有去寻找他们所发现的关系的原因。他们仅关注了方向方面的视角,而没有考虑到分割,这样一来,他们就没有出现能够将两部分线段形成的整体的夹角分割成相等的两个倾斜角(入射角和反射角)的想法。

然而,对照阶段Ⅰ的被试,子阶段ⅡA 的被试和ⅡB 的被试不再把自己完全局限在成绩上,而是用调整或不调整的运算方式来内化他们的行为:这样他们就能够明白发射器可以调整到不同的倾斜度,弹子的轨迹由两条直线组成,最重要的是这两条直线形成

夹角(夹角的顶点即反射点)的大小随发射器的倾斜度而变化。他们能够序列地排列倾斜度的大小,能够区分"更尖锐"或者"更向右","更高","更平缓"等,从最初Ⅰ阶段中或多或少的有顺序的运算,转变为了系列排序的协调运算。同样,他们还成功地对倾斜度进行了排序,或者对反射点和靶子间轨迹的方向进行排序(弹子越飞越高,或者越低,它会飞向这个方向,或者那个方向,等)。最后,也是最重要的,他们在发射器的倾斜度或方向(相应地就是反射前弹子轨迹的倾斜度或方向)与反射后轨迹的倾斜度或方向之间建立了相应关系,"发射器越(倾斜),弹子会越向那个方向(比如向下)"。

如果我们用字母 α、β、γ 表示发射器(也表示弹子飞出发射器的第一部分轨迹,入射线)不断增加的倾斜度,用字母 α'、β'、γ' 表示第二部分(从反射点到靶子,反射线)的倾斜度,其中序列排序和对应关系的运算可以用下式表示:

$$\alpha<\beta<\gamma<\cdots\text{或 }\alpha'<\beta'<\gamma'<\cdots \tag{1}$$

并且

$$\alpha\leftrightarrow\alpha',\quad \beta\leftrightarrow\beta',\quad \gamma\leftrightarrow\gamma',\text{等} \tag{2}$$

(此处符号↔代表对应关系)

那么,为什么两个序列间的对应关系没有引起对入射角和反射角相等这一规律的认识?这是因为被试固着在具体的序列排序和对应关系中,没有去寻找这种对应性背后的原因,就像阶段Ⅰ的被试只关注如何打到靶子而不去探究隐藏在他们的反应中的原因(比如,改变发射器的位置,等)。阶段Ⅱ的被试固着于去处理由排序和关系运算决定精确度的事情中,但是,他们还不能去寻求这些现象背后的解释,这种解释需要形式运算的参与,是假设演绎的思维过程。

既然他们不能为观察到的现象找到解释,他们就必须停留在粗糙的、笼统的观察的水平,当然,比阶段Ⅰ有明显的进步,但是仍然过于笼统无法对观察到的夹角进行分析式的分解。因此,因为他们满意于指出方向的倾斜度,满意于处理两部分轨迹的整体夹角(Bond,"轮廓";Ulm:"它转弯";等等),他们不会把这个整体的夹角分成我们需要的入射角和反射角两个相等的部分。这就是为什么尽管被试们已经非常接近发现这个规律,也已经掌握了它所有的元素,但是仍然不能发现的原因:需要形式运算,因为缺少一个解释性假设。

(三)形式运算阶段(子阶段ⅢA和ⅢB)

在这个最后的阶段,被试最终会发现角度相等这一定律。最初,这个发现是缓慢的、部分的,需要证明或否定若干特定的假设,然后,会变得全面和快速,因为被试会想到这个假设:弹子轨迹两个连续的部分之间是相等的。

首先,我们先看一个子阶段ⅢA的典型个案:

Bon(14岁8个月) 最初探索发射的力量,然后发现无论弹子被大力发射还

是轻轻发射，它的轨迹都是一样的。然后，他探索"距离"的作用，即"你必须怎样放置这个棒"。然后，他和阶段Ⅱ的被试一样建立了具体的对应关系："这是发射器操纵杆的位置；你的靶子越高，发射器这里要越高。"他使用一种规则来标记弹子在反射点和靶子之间的轨迹，用这种方式来证实发射器的角度与该轨迹的对应关系。然后，他假设这个夹角总是一个直角："它必须跟操纵杆形成一个直角。"但是，经过几次尝试，他总结到："不，上面(一发射器被拉直时)不是这样的。"——"它不再是一个直角了？"——"是的，它只在一个位置时正确。"——"那么其他的情况呢？"——"当你转动了，它应该变小，另一边变大……噢！它们是相等的。"(他指着入射角和反射角)

因此，后面的阶段，被试在寻找一种普遍的假设，用来解释他们即时发现的倾斜度之间的具体的对应关系。被试Bon最初想到了直角，然后确定了整体的夹角的大小；然后他把它分割开形成了两个相等的角(入射角和反射角)。

但是子阶段ⅢA的被试所发现的假设仍与具体的对应关系非常接近，他们仅试图去表达对应关系中所包含的一般规律。然而，子阶段ⅢB的特性体现在它出现了一个在子阶段ⅡB中不存在、子阶段ⅢA中仍潜在的新的认识：有必要去探索不仅是普遍的而且是必要的规律——比如，能够提供具体关系背后的原因的解释。

换句话说，处于子阶段ⅢB的被试并不完全满意于建立发射器和反射线倾斜度的对应关系，像子阶段ⅡB的被试一样；也不满意于寻找一个简单的不变的因素来解释这些对应关系，像子阶段ⅢA的被试一样。事实上，他们会问自己：为什么发射器倾斜度 i 的特定变化会引起反射线的变化 r？……对这些必要原因的探索，在特定情境中，常常是被试即时萌发的对必要性探索的需要，这一点就是形式思维与具体思维的主要区别，前者是含义和等价(一相互相等的含义)的运算，后者是对于恒定性的简单说明。这些可以从下述被试的表现中得到证实，他像Bon一样，也是从假设直角开始，但是很快开始转向寻找必要性。

Def(11岁8个月)　最初假设两个轨迹部分总是形成一个直角。但是，尝试三次之后，他说："靶子越靠近发射器，发射器就必须(必要性)也靠近靶子。"(发射器的两个倾斜度和反射线的倾斜度隐含互相对应的关系，这个现象证明了上述表达。)——"你说'必须也接近靶子'是什么意思？"——"比如，如果这里有一条线(他指的是一条垂直于反射壁的线)，弹子将准确地以相同的路径弹回。"然后，他把发射器放置在4……："这样这里可以形成一个直角，并且，你必须和那边有相同的距离"(一两个角的开边)。然后，他使用几个任意选择的角，再次证明了他的相等定律。我们反驳说这个定律不一定全部适用："它也依赖反射壁：它必须是好的和直的……也依赖于这个平面……它也必须是完全水平的。但是，如果反射壁是倾斜的，你也必须沿着垂直地对着反射壁的方向并且你仍然需要保持入射线和反射线相同的距离，这个定律还是一样的。"反射壁被转向，用木头代替橡皮："可能木头缺

少弹性，弹子回弹的力度会变小。”——“那么，你的定律会如何呢？”——“定律不变。”

即使在第一个例子中我们也可以发现一些新的因素的出现，它们在心理上是形式思维区别于具体思维的特征：对必要性的需要（“发射器也必须……”“它必须在这边和那边有相等的宽度”“你仍然需要保持相等的距离”等）；形成假设或假设建构的能力不是通过直接观察得到了（比如，理想的反射壁的垂直线等）；对于定律普遍性的自信是因为认识到了它的必要性，因此即使情况被调整了，仍然坚持定律是正确的（“定律不变”等）。

虽然这个阶段（经过以了阶段ⅢA为开始的准备阶段）出现了超越具体运算的新的运算，特别的是，新的运算由什么组成？我们将通过检验下述协议的过程逐步明了，这个过程跟前面的过程是关联在一起的。

（Gug（11岁1个月）　他尝试几次之后，说：“你越朝向这个正好的夹角去（比如，发射器越接近垂直于反射壁的位置）弹子反射后越靠近起点。”——“这句话总是对吗？”——“是的，或者，至少我这么认为。你最好确认一下。”他继续他的尝试，当因为装置的缺陷而出现离差的情况时，他总结为：“一定是哪里有问题。”重新尝试后，他总结到：“你必须找到夹角。”然后他第一次发现了装置墙面与发射器或者反射线之间的相互补偿的角度是相等的。最后，他发现“你必须沿着垂直线”（垂直于反射壁）。然后他认识到入射角和反射角一直相等。

Mul（11岁3个月）　从一列对应关系开始：“我在这里，它飞向了这个方向”等，“你可以改变这个角度去看看它怎么飞”。通过系统地缩小总夹角，他发现了这个基础的假设：“如果我直直地发射，以一个正好的角度（例如，发射器垂直于反射壁的时候），它会正好反弹回来。”然后，他不断增加发射器的倾斜角，根据角度α，β，γ，等，确信随着这些角度的增大，它们的对应角α'，β'，γ'减小（α'，β'，γ'代表发射器和反射壁之间的夹角）：“这边的夹角（α'，β'等）越小，那边的夹角越大（α，β，γ）。”当他理解了在发射器垂直时弹子会回到起点这种情况时，他就开始认识到他一直在探寻的相等关系：“这个角（α）和另一个角（α'）相等：你必须让它与另一个角平行（α'）。我再继续看看（他检查了几个不同大小的角）。是的，我想就是这样。你必须正好是那个角度。”（α'_1和α'_2互补，等。）

Pom（1□岁□个月）　开始也在关注角度间的对应关系：“我在观察一个夹角……你想射得越高，角度必须越大。”（他和Mul一样，计算补偿性。）为了验证这个假设，他自发地把发射器垂直对向发射壁：“如果发射器操纵杆是直的，弹子就可以准确地返回。”然后，他调整发射器到三个不同的位置，但是，没有移动靶子，也没有发射，就立即下结论：“你必须有两个夹角；操纵杆的倾斜度等于弹子轨迹的夹角。”（从反射壁到靶子。）

Lam（13岁2个月）　“反弹依赖于发射器的倾斜度，……是的，它依赖于角

度——我想象了一条线垂直于发射壁：靶子和发射器同这条想象的垂直线之间形成的夹角将会相等。"

Rev(15岁4个月)："他是直角(数次尝试)——不，这个斜度必须跟那个相等。"当由于装置的问题出现偶然的误中时，他说："我没有动它；这个装置不公平。"

God(17岁9个月)：经过数次无效的尝试："你需要找到反射角。"最初，他认为 α' —— α' 和 Mu 一样。然后，他沿垂直方向，指出入射角和反射角相等："它们两个必须相等。"

Fort(16岁)：开始经过数次尝试："你必须根据靶子位置移动这个操纵杆，反之亦然——你必须在那里有个角度，但是它总不是一样的(他继续他的尝试)——很显然，所有状况都会变化。"然后，"你必须用直线去考虑——操纵杆移位到什么程度，你会在另一边看到同样的距离，你必须根据中间线(——从反射点到发射壁的垂直线)移动它。这两个距离(夹角的开边)，两条边，总会形成夹角。"(入射角和反射角)

Jan(16岁1个月)："你必须发现对应的夹角：靶子夹角越小，操纵杆越要靠近中间，反之亦然。"——"你可以测量它吗？"——"它是一个直角——不，它这边的变化跟那边相同。"(跟 Fort 相同的设计)

Berg(16岁[illegible]个月)：类似的解释之后，被呈现了一个木制的反射壁，代替了原来的橡胶材质。"我想应该是一样的规律。是的，我确定这一点——我保持垂直并关注距离。是的，现在这些角度必须是相等的。"

尽管他们在很多方面互不相同，但是这些推理的例子在几个关键要素上是一致的。在我们描述形式思维和具体思维的区别之前，需要先辨析清楚这些要素。

在定律的发现过程中，这些被试普遍先发现发射器和反射线倾斜度之间具体对应关系，这一发现似乎会自动地导向对必要的相互作用的认识，例如，其中一个倾斜意味着另一个也倾斜，反之亦然。例如，Fort 表达了这一点："你必须根据靶子移动操纵杆，反之亦然"。这种相互作用，让一对一的对应关系增加了双向的应用，但是，两角相等的认识并不是由相互作用本身所必需产生的(比如，Fort 的例子可以说明，他最初是被角度的变化性所吸引的。)

从相互作用到相等这两个认识的桥梁——这是所有答案的第一点共通之处，在于被试得出如下论断这个实际发现所实现的：当发射器垂直于反射壁时弹子会返回到起点。随后被试认识到的是，如果发射器的倾斜度为零就意味着弹子回弹的倾斜度也为零，两者中的任一倾斜度就意味着另一个有着相同的倾斜度。

一旦获得了这两种认识(倾斜度的相互暗示，倾斜度为零时弹子返回起点)，被试或者会想象出一条从反弹点引出的反射壁的垂直线，或者会去寻找相互补偿的倾斜角(位于发射器和发射壁的一组；或者位于发射器和反弹轨迹的一组)，这些步骤也会引导被试发现角度相等的定律。

在这两种情况下，定律的建构都基于对观察到的倾斜度进行必要解释的需求；之前

建立的系列排序和对应关系对于被试发现角度之间的关系是不充分的,甚至对于他把轨迹两个相邻部分形成的总夹角分割成两个夹角也不充分。

(四) 结论:从(具体的)对应到(形式的)互反蕴涵之间的转化

尽管我们已经对阶段Ⅱ的被试进行了上述讨论,但是我们还需要去理解在特定的情境下形式运算比具体运算增加了什么,毕竟阶段Ⅱ的被试似乎已经非常接近该定律的形式运算。形式运算在解决这个一眼看去似乎仅仅对应关系和相等就已足够的问题上,有什么作用? 事实上,阶段Ⅲ反应的背景已经与前面的阶段很不相同:通过假设进行推理和验证的需要已经取代了对于关系的简单陈述。换句话说,自此以后,思维过程包含了可能性、假设和演绎推理的过程,不再局限于仅能从即时发生的事实情境中进行推论。

只要我们尚未准确地阐述两个阶段运算的不同,倾斜角间一对一的对应关系(阶段Ⅱ)和引出角度相等定律的互反关系(阶段Ⅲ)之间的差异就非常细微。然而,它们确实存在差异。尽管在这个第一部分中非常细微,但是它仍然为我们呈现了一个具体运算和形式运算一般化对应的实例,在后续的章节中我们会看到越来越清晰的形式。

这种差异可以如下描述:尽管具体运算包含有组织的系统(分类、系列排序、对应等),但是它们以一步一步的形式从一个部分连接到另一个部分,不能将任一部分同剩余的其他部分联系起来。形式运算不同,在每个情境中,所有可能的连接都被考虑到。因此,每个部分的联系都被引入整体,也就是说,推理的过程是连续地进行的,就像一种"结构化整体"的功能。

用符号化的形式来表达,A 和 A 表示两个类,A' 和 A' 表示它们的互补类,具体分类逻辑只提供四种元素组合($A \cdot A + A \cdot A' + A'A + A'A'$)。另一方面,形式逻辑使用两个命题 p、q 和它们的反命题 p、q,可以从四种命题结合 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$ 中生成 16 种可能的组合,它们分别定义了蕴涵、析取等关系,通过一个接一个、两个接两个、三个接一个、四个全部或全部没有的方式组合这四种结合,形成各种可能组合。例如,q 被 p 蕴涵,对应于三个结合的合并 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$;$p$ 被 q 蕴涵,对应于三个结合的合并 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$;$p$ 和 q 的等价(互反蕴涵),对应于两个结合的合并 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$。但是,为了确认 $p \supset q$ 或 $q \supset p$ 或 $p = q$ 三个连接中某个为真,还需要提出其相应为假的结合,比如 $(p \cdot q)$ 对 $p \supset q$,$(p \cdot q)$ 对 $q \supset p$,$(p \cdot q)$ 和 $(p \cdot q)$ 对 $p = q$。

换句话说,具体运算水平被试(他们局限于发射器和弹子反射线之间倾斜度的一对一关系的格式)与形式运算水平被试(他们立即寻找必要的相互关系)的差异可以整体地理解为,前者是基于类与关系群集中简单关系的一对一的运算;后者是基于建构命题逻辑的"结构化的整体"的组合运算。因此,阶段Ⅱ的被试局限于不断地表达问题中对

应关系，局限于从结果中建构这样的结论：发射器倾斜度越大，弹子的反射线倾斜度越大。当然，这一点也可以被称为一个定律，但是它是对通过一对一的方式得出的格式的简单总结。

与之不同的是，阶段Ⅲ的被试一开始就从所有可能性的总量和从必要联系的方式看待实验，因为他们获得了组合的并且包含演绎可能性的潜在确认的运算方式。在他们最初的对应运算中，他们没有仅仅关注直观的关系，而是立即去探寻原因解释——比如，他们把对应关系考虑为蕴涵。当然，在某种意义上，蕴涵 $p \supset q$ 仅仅是事实的一种解释，等价于认为 $(p \cdot q)$ 的情况不存在。同时，能够提出这一点前提是有必要考虑到四种可能性 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$；无论在任何情况下，蕴涵不会比三种可能性（第一项、第三项和第四项）的合并更多，它们由运算（$\vee$）组合起来，它代表"或者"——例如，它是可能的情况和并未真实发生的情况的合并。

事实上，当面临一种 $p \cdot q$ 的对应时（p 代表发射器的特定的倾斜角，q 代表相应弹子反射线的倾斜角），阶段Ⅲ的被试不固着于指出关联的存在，不像阶段Ⅱ的被试满足于这一点。他们排除了可能性 $(p \cdot q)$——例如，他们借助假设引入了 p 和 q 之间的蕴涵关系；但是，他们还排除了可能性 $(p \cdot q)$——例如，他们借助假设引入了 q 和 p 之间的蕴涵关系。因而，他们立即从表达 $p \cdot q$ 的结合发展到表达一种互反蕴涵的假设 $p \underset{\subset}{\supset} q$，认为这种互反蕴涵 $p \underset{\subset}{\supset} q$ 或者 $p\ q$（不是其自身内容的相等，而是从命题为真中推论出来的相等的观点）解释了一些现实因素的相等性。

在这一点上，11—16 岁被试的推理过程，从一开始就基于可能性组合和必要联系两个方面的考虑，被细化为真实的假设演绎的建构过程。不像阶段Ⅱ的被试，他们受限于仅关注不同对应关系的存在，[1]阶段Ⅲ的青少年或早或晚（通常很早）试图去发现零倾斜度这种特定情况背后的普遍原则。当发现弹子会回到起点之后，他们会立即得到结论：相应的倾斜度必须相等，因而决定它们的角度也必须相等；当检证一两次之后，他们就能够把这个结论推广到所有情况。[2]

用符号来表达，被试在了阶段ⅢB的推理过程大致可以如下描述（可参照 Del 这个非常清晰的例子）：

$$p \underset{\subset}{\supset} q, \tag{1}$$

因为 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$ 为真并且 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$ 为假，p、q 代表相应的倾斜度，x、y 分别代表其值。但是

$$(x=0) \underset{\subset}{\supset} (y=0) \tag{2}$$

① 这些可能包括发射器不倾斜和小球回到原点的情况，但是他们没有从中抽象出一般化的原则。

② 要注意，能够重现这一基本的思维过程，本身就是在具体水平可以获得的（参见《儿童自发的几何学》，第九章，第4节），在这个任务中它出现的如此之晚是因为被试的所有推理都被开始的相互蕴涵所引导。

并且

$$(x=\alpha)\supseteq(y=\alpha) \tag{3}$$

这里 α 代表一个倾斜度，$\alpha>0$。因此

$$x\supseteq y \tag{4}$$

并且

$$\wedge x\supseteq\wedge y \tag{5}$$

这里的 $\wedge x$ 和 $\wedge y$ 指入射角和反射角（或者它们的补角）。

总而言之，角度相等的发现源于起初假定的相应的倾斜度之间的互反蕴涵，而非相反；这一互反蕴涵不同于简单的具体对应关系，因为它是一种可能性计算的结果，不仅仅是对经验情境的考量。

第二章 浮体定律与矛盾的消除[1]

给被试呈现一些不同的物体，要求被试根据这些物体能否漂浮在水上进行分类然后(分类完成以后)要求被试逐一解释他们分类的依据。接下来，给被试一桶或几桶水，让他们自己实验；最后，他们需要归纳他们的观察，后者需要建议他们去寻找定律，仿佛这些不是他们已经自发地知晓了一样。②

不像第一章中所考虑的定律，在具体运算水平完全可理解的概念中，无法得到浮体定律。无论是体积守恒，还是密度守恒，在子阶段ⅢA(11—12岁)之前，是不可能以系统方式得到的；然而，在子阶段ⅡB，儿童掌握了重量守恒和密度概念的预备格式(schemata)。

但是，假设浮体定律可以被发现，即如果物体的密度或比重比水小，那么物体可以漂浮在水面，要解决这个问题，两个关系是必要的：密度——例如，重力和体积的关系；比重——例如，物体的重量(如果它是固体就指密度，或者它材料的重量加上它所包含的空气的重量)和等体积的水的重量的关系。

另外，这个问题需要分类的概念，它包括了漂浮的物体、不漂浮的物体，还包括另两个特别的类型——有一些情况下会漂浮，其他情况下不会(比如中空的物体，可以被装满空气或者装满水)，另一种一直保持悬浮。最终被发现的定律表述的是两大类之间的关系：一种是密度低于水的物体，一种是密度高于水的物体。

因此，这个定律表述了一个简单的、不存在矛盾的关系。但是为了经验地形成该定律，被试首先必须消除一系列的矛盾，这是早期阶段常常出现的特征。例如，最初可能只用重量来解释，尽管事实上有时较重的物体会漂浮，有时较轻的物体会漂浮。第二，几种不同解释中普遍的要素(重量、体积、空隙等)必须是能被分离的。尽管最简单的矛盾可以仅通过具体运算的途径给予克服，但是更加复杂的矛盾的消除，尤其是要形成统一的解释，就需要运用蕴涵——例如，形式命题运算的参与。基于这些分析，我们感到浮体的问题，和角度相等的问题一样，是分析具体运算到形式运算的转变过程的合适的机会。

① 与心理实验室培训研究助理 J. Nicolas 和 M. Meyer Gantenbein 合作完成。

② 对于年纪大一些的被试，除了这些需要分类的物体，我们呈现三个密度不同体积相同的方块和一个由树脂玻璃或塑料围墙做成的方块(密度约为1)，用水跟水的密度之间进行更精细的比较。

(一) 阶段Ⅰ(子阶段ⅠA和ⅠB)

阶段Ⅰ的反应非常有趣,因为他们完全不认为需要寻找单一的、不矛盾的解释。相反,我们发现,年龄最小的儿童满意于多样的、经常矛盾的解释。尽管问题是要求被试把物体分为两类(漂浮和不漂浮的物体),子阶段ⅠA的特征是被试甚至不能明确表达这种基础的二分法,因为及时的正确判断跟单一物体仍存矛盾有关。

尽管第一个子阶段的儿童,一旦已经决定某一特定物体是否漂浮,就可能去预测这是它所独有的特征,因为他们缺乏参照的普遍框架,他们不能把相同的特征延伸到其他类似的物体上。甚至,他们并不总是认为这些特征是不变的,即使对一个已经识别的物体:

Lea(4岁) 比如,对一块木头,他说"它一直在上面。有一天我曾把它丢到水里,它一直在上面。"但是一会儿以后:"木头? 它能在任何地方游泳。" "那么,这个呢?"(一个更小的木块) "小木块会沉下去。" "但是你告诉过我木头会游泳。" "不,我没这么说过。"最开始呈现电线时,他说,"电线会沉到底"(他还没做实验)。 "那么,这个重的呢?"(金属) "它会游泳。" "这个木头?" "它能在任何地方游泳。" "这个电线?"(第三次呈现) "它会游泳。"最后,对于两个外形完全相同的金属把手,他说的正好相反:"这个呢?" "它会浮起来。" "那么那个呢?" "它会沉下去。"必须补充的是,尽管Lea归纳得很少,但是他的解释可以让我们减少这种看法:"这块卵石呢?" "它会沉下去。"——"为什么?"——"因为它一直待在底上。"

Mic(5岁) 判断一个厚木板会沉下去。接下来的实验没有让他改变自己的想法:(他用尽全力压着这块木板让它沉在水里)"你想待在下面的,傻瓜!" "它总是想待在水里吗?" "不知道。" "下次它可以待在底上吗?" "是的。"

从这些反应中,分类无法进行。首先,不具备把物体分成浮体和非浮体两类的基础。建构这两个类别的途径需要建立稳定不变的特征,该特征本身能够提供漂浮与否的解释。然而,这个阶段的被试还不能应用这种解释,他们受限于寻找描述具体事物的原因。

从另一个角度可以认为,在观察了物体的特征之后,被试可以后验地(a posteriori)进行分类。但是,这种情形仍然需要这些特征被感知为常量。因此,分类仍不可能,因为这些被试:(1)相同的物体并不会一直保持它们的特征(如Lea看待电线,Mic看待厚木块);(2)给两个相同的物体分配了不同的特征(比如,Lea看待把手);(3)相似的物体可能被赋予不同的特征(比如,小块木头会下沉,大块木头会上浮——Lea)。

读者可能会反驳儿童的推理在实际上并不是矛盾的,因为就好像气象学家,他们知道同一块云朵在某个时刻会带来降雨,但另一个时刻不会,或者两个相似的云朵,一个

会产生降雨而另一个不会。在这里，这种波动性或者非稳定性是现实本身的特征，而不是观察者的思考。尽管如此，气象学家也在寻找普遍规律。尽管在他的专业上存在风险，他仍假设人们可以提出适合经验世界的规律；他把随机因素的运算归结为误差，并且得到结论在稳定的情况下，他们的预测是准确的。相反，子阶段ⅠA的儿童不能根据情况推出适应的推论，并且不知道如何分离出随机性的干扰，他们不认为在同样的情况下结论是相似的。然而，他们仅在特定情境中会建立稳定的和可推论的特征（比如，木块会漂浮是因为它曾在"另一天"漂浮过 Ilea）。但是恰恰是这一点：因为他们的假设总是随情况而变，他还不能分辨哪些是稳定性的原因，哪些是变化性的原因。①

因此，子阶段ⅠA的被试要学会气象学家的概率推理能力，要先学会"蕴涵的谬论"。作为补充的例子，我们可以说，既然被试从子阶段ⅡA开始寻找稳定性，并且能够构建具备普遍特征的类别，没有理由质疑我们为什么不能把这种成功的反应解释为逐步出现的。因此，从子阶段ⅡA开始，我们可以假设被试开始努力消除矛盾；对于阶段ⅠA的被试，或者假设他们发现矛盾的努力，或者假设他们有一种彻底的不可兼容性可以相同地产生误导；在因果问题还不能解决时，我们必须在谈及矛盾之前，先谈到漠不关心（这个问题在子阶段ⅡA也没有解决，但是儿童确实假设了一种可能可以一致地解决问题，并且这种期待足够推动他们努力去解决矛盾）。

在子阶段ⅠB，儿童努力以稳定的方式将物体分为浮体和非浮体，但是因为下述三种原因（第一种是逻辑的合理性，后两种是关于前运算的思维过程），他们不能获得一致的分类方式：(1)虽然没有发现定律（尽管他开始去寻找定律），被试满意于多种解释或者难以层次化的一系列子类；(2)在实验情境中，他会去寻找新的解释，因此为他的分类增加新的分割，但是不能统合整体；(3)在这些分类中存有矛盾之处。

Tosc([illegible]岁6个月) 在实验前把呈现的物体分成了两类：B类（浮体）和B'类（非浮体）。B类包括7种子类：(A_1) 物体可以"游泳"或漂浮因为它们本身的属性：船和鸭子（"我的小鸭子像真的鸭子一样游泳"）。(A_2) 小的物体（"微小的卵石"，代币，针）。(A_3) 轻的物体（小卵石浮起来"因为它们不重"，这样A_2和A_3有些相似，但是一个铝质的飞机浮起来是因为它轻，尽管它不小）。(A_4) 扁的物体（例如："这个卵石，因为它是那么扁"）。(A_5) 瘦的物体（一个木制的刀片）。(A_6) 和容器颜色一样的物体［"为什么这个厚木板一直待在上面？" "因为它们是相同的颜色"（木板和水桶）］。(A_7) 曾经漂浮过的物体（例如：一块木头"因为它以前就待在上面"）。

B'类包括以下子类 (A_1) 那些自然就"不属于在水上"的物体（例如，一块蜡烛："它会去哪里？" "沉下水底。" "为什么？" "因为蜡烛不属于水

① 更多证明子阶段ⅠA的被试尚不能理解概率推理的实验证据，请参考皮亚杰和英海尔德：《儿童概率概念的起源》(*Press Universitaires de France*)，1951。——英译者注

上的东西。"我们把它放到水里："它浮起来了，为什么？" "因为它在水面游泳。"这样，蜡烛就同时还被划分到 B 类的子类 A)。(A) 大的物体。(A_3) 重的物体(同 B 类的 A 、A 一样，有相同的分辨困难和相同的干扰)。(A_7) 那些"以前沉入底的"。(A_8) 长的物体(铜线会下沉，"因为它是长的")。(A) 那些已经被挤过的(例如：金属盖子)。

我们注意到在这个分类中有一些形成同化的努力(小 轻，有时瘦 扁，或者扁小)，但是它失败了是因为采纳的标准不够全面。最初，这个孩子假设 B 类仅有两个子类组成，而且不是正统的，一类是功能上或本性上就漂浮的物体(A)和"小的物体"(A)。当定义了这个最初的分类后，被试不再寻找普遍的特质。第二，他认为"小"这一特质包含了其他的特征，例如轻等。然而，在实验前，当他列举如此收集的这些物体时，他感到他必须详细说明概念"小"的内涵：轻的、扁的和瘦的(没有顺序和层次)。另外，在一些特定的点上，与这个过程无关的新的标准也被带入进来 比如，颜色。最终，他建构了一个与 A 相似的整体的分类(但是在事实之后)：那些曾经浮于水面的物体。

至于那些判断为下沉的 B' 类的物体，我们发现一个子类，对应于 A 、A、A 的取反。但是从扁、瘦或者颜色三个特征抽取的分类是没有相应的取反特征的；相互地，A_8 和 A_9 两个子类在 B 类中没有对应项。

总而言之，这种分类类型(也存在其他的同类的例子)可以概括为如下特征：(1)子类不是全部都分割的；(2)它们不是都有相反特征；(3)它们既无法用单一分层的方式归类(包含和互补)，也无法用多层的方式归类(维或 维列表)。因此，对于儿童来说，这个实验与其说是简化问题，不如说是复杂化问题。例如，对于 Tosc，在 B' 类中引入在 B 类中没有对应项的子类 A_8 和 A_9，这是造成事后的原因。用"长"来对应"小"是对的，但问题是：被试预测电线会浮起来因为它"瘦"(A)，然后预测它会沉下去因为它"长"(A_8)，尽管"长"没有被视为"瘦"的反面，因为"瘦"是从"小"细分出来的。

因此，这种子类的多样性不能层次化，迟早会引起矛盾。事实上，在 Tosc 的推理中，矛盾从一开始就出现了，因为"小"和"轻"这两个干扰的类别，被内隐地认为是相等的，或者互相包含的：单一类别的蕴涵关系没有被从二维列表的系统关系中区别出来。随着新信息的增加，两种分类方式的这种混淆会凸显出来，直到矛盾变得外显 例如，"长"使一个物体下沉，"瘦"使一个物体漂浮，但是一个铜质电线又长又瘦；相同地，"小"使物体漂浮，"重"使物体下沉，但是很多物体又小又沉。

从子阶段ⅠB 的被试中，可以发现很多各种矛盾的典型例子，如下文所述：

Tosc(5 岁 6 个月相同被试) 对厚木板说："它会向底部下沉。" "为什么？" "因为它重，"过了一会儿补充"因为它大。"然后他看到木板浮在水面，就解释到："它太大了，然后(要碰到水底)太多水了。"过了一会儿，他试图把另一块厚木板和木球压到水底；这两个又浮了上来"因为这块厚木板比较大所以它上来

了。”　“那么为什么球会上来?”　“因为它比较小。”　“这个盖子呢?”　“它会上来。”　“为什么?”　“因为它比这块木头小，比厚木板小。”　“试试。”——“它一直在下降因为我推得太高了。”

Bez(5岁9个月)通过重量解释漂浮(与Tosc相反)：“为什么这些东西(前面分类过的)沉底?”　“它们是小东西。”　“为什么小东西会沉底?”　“因为它们不重，它们不能在上面游泳是因为他们太轻了。”　“那这些呢?”(浮体一类)　“因为它们重，它们在水上游泳。”我们继续进行实验：钥匙沉下去“因为它太重了不能待在上面”然而盖子沉下去“因为它轻”。比较两个钥匙：大的不待在水面“因为它轻”　“小的呢?”　“它也会沉底。”　“为什么?”　“因为它太轻了。”

Gio(6岁)“这些东西(前面分类过的)会沉底吗?”　“是的。那个”(木球)　“为什么?”　“因为它重。”　“这些呢?”(浮体一类)　“这个游泳因为它轻。”我们用盖子进行实验：它漂浮“因为它轻”　“如果你压它呢?”(它沉下去)“因为它轻，轻的东西永远不待在上面。”　“那个厚木板呢?”　“它会待在上面。”　“为什么?”　“因为它重。”　“为什么?”　“因为它大。”　“如果你压它呢?”　(他做了)“它再上来因为它轻。”　“那么这个呢?”(大的针)　“它沉下去因为它大。”　“如果你压那个(金属盘)呢?”　“它会沉在水底。”——“为什么?”——“因为它轻”。

Eli(6岁11个月)“那个?”(蜡烛)　“它会沉下去。”　“为什么呢?”　“因为它是圆的。”　“那个呢?”(球)　“它待在上面。”　“为什么?”　“因为它也是圆的。”因此，矛盾不只出现在重量上。“那么那个针呢?”(被放在水面上)　“它会漂浮因为它轻。”　“如果你压它呢?”　“它会沉下去。”　“为什么?”　“因为它将会变重。”这里矛盾伴随着非保存性。

根据类似的观察，意味逻辑学家曾经提出这些观点并不矛盾，仅仅是因为相同的结果可以归咎为两个相反原因的任意一个。例如，付税比例较低的那些人，要么是非常富有的，要么是几乎一无所有的。但是目前阶段的儿童与这种精细格式还相距太远，我们认为以下三个方面的考虑可以证明他们对于矛盾还停留在漠不关心的阶段，或者，更加准确地说，他们还没有觉察到他们的前后矛盾：

1. 从一开始，被试们根据两个相反的解释(已经显示了他们所使用的概念是模棱两可的)进行了单一的分类。浮体是那些或者轻的因为它们小，或者重的因为它们大。然而，这两种解释的任何一种，已经包含了一些内隐的矛盾型，因为轻和重并不与小和大相一致，并且漂浮被归咎于相对的而非绝对的重量。

2. 实验并没有要求儿童要正确回答，但是他还是通过不断调整解释尽量实现整体的一致，而没有觉察到不一致：物体无论沉还是浮都一样地进行解释，无论它们是大的、小的、重的还是轻的(或者，甚至通过结合的方式，因为它们是圆的、长的，等)。这样一

来，矛盾被明确显现，但是，它仍没有被儿童注意到，毫无疑问因为最初这些模棱两可的概念：小的与轻的，重的与大的。

3. 同样的观点，被子阶段ⅠB的被试判断为成熟地兼容的，在子阶段ⅡA的初始就被认为显得不一致。这里，我们找到了最好的证据，证明他们并不是通过内涵的一致性来建构反应的，而是通过一个思维过程，该过程因为缺乏协调性（运算的分类等）的指导而处于不平衡的状态，仅在形成具体运算之后才能保持平衡性。

（二）阶段Ⅱ（子阶段ⅡA和ⅡB）

7—9岁被试行为的特征是努力消除主要的矛盾，这些矛盾他们以前就提出过，但是没有对此反应：某些大的物体可以漂浮，某些小的物体会沉下去，却没有排除一般而言轻而非重的物体会漂浮的可能性。在这一点上，矛盾倾向于通过对重量概念的重新认识而得以克服，现在它会被跟体积联系起来看待。例如，儿童开始宣布放弃绝对重量的观念，而去转而考虑密度，尤其是考虑比重。

比重指物体既定体积的重量和相等体积的水之间的关系，密度指单位体积的物体的质量。但是，我们将从更基础的含义上使用这两个概念。当被试外显表达质量和体积的关系时，我们使用密度这个概念。例如，当这个概念被理解为一种关系时；当被试理解到对于相同的体积来说不同的物质有着特定的质量时，我们使用比重这个概念（在后面的例子中，被试并没有外显地指出体积）。因此，子阶段ⅡA的儿童掌握了最初的比重概念，并诉诸这个概念，试图去解决较早出现的矛盾。

这个阶段，在逻辑运算的发展中出现的两个问题是：(1)阶段Ⅰ的矛盾会因被试理解了比重的观点而自行消失，还是他在努力克服这些矛盾的过程中建构了这一概念？(2)如果后者为真，儿童是如何在仅有具体运算的帮助下理解这些矛盾的呢？

> Ker(7岁6个月) 认为浮体包括：木块、火柴、软木塞、盖子、金属钳夹、橡皮擦、小钉子、小的中空金属圆筒；非浮体包括：钥匙、一些石块、金属圆盘、针和重的木制球。实验以后，他提出了第三类，这些物体是否沉浮依赖于它们是否中空还是灌满了水——盖子和针（它们有洞眼可以注进水）。前面两类分别被定位为“轻的”和“重的”，但是观察到Ker犹豫于这些概念的两种可能意思：较早的或绝对的意思（小钉子是“轻的”，大木球是“重的”）和新的或相对的意思——例如，比重。“小卵石会沉底吗？”——“是的。”——“但是，它不是轻的吗？”——“不，它是石头。”——“那么钉子呢？”——（他做了实验）“因为它是铁的”。
>
> Bar(7岁11个月) 最初把物体分成以下三类：一类会漂浮因为它们轻（木头、火柴、纸、铝质盖子）；一类会沉下去因为它们重（大的和小的钥匙、各种大小的卵石、环形螺丝钳、针和钉子、金属圆筒、橡皮擦）；一类是悬浮在中间的（鱼）。“针呢？”——“它会沉下去因为它是铁的。”——“钥匙呢？”——“它也会沉下去。”——

"这些小东西呢?"(钉子,环形螺丝钳。)——"它们也是铁的。"——"这个小卵石呢?"——"它重因为它是石头。"——"那个小钉子呢?"——"它只有一点重。"——"这个盖子,它为什么浮在上面?"——"它有边缘,如果装满水也会沉下去。"——"为什么?"——"因为它是铁的。"

Duf(7 岁 6 个月)——"那个球呢?"——"它浮在上面,它是木头,它是轻的。"——"钥匙呢?"——"沉下去,它是铁,它是重的。"——"哪一个更重,钥匙还是球?"——"球。"——"为什么钥匙沉下去?"——"因为它重。"——"那么钉子呢?"——"它轻但是它会沉下去,它是铁的,铁的总是会沉下去。"

这些反应和子阶段ⅠB反应的主要区别在于解决矛盾的实际努力。实现这一点需要运用类别蕴涵运算提高分类系统。这些能力允许被试能够通过可逆加法系统地区分"全部"和"有些":由 $A+A'=B$ 和 $B-A'=A$ 得出 $A<B$。一旦这些运算使得被试能够准确地判断部分在整体中蕴涵关系,被试就可以实现第一个运算水平的最重要发现:小的物体不一定总是比大的物体轻。换句话说,认为所有小的物体都是轻的,所有大的物体都是重的是错误的。尤其在浮体的情况中,所有漂浮的物体不一定都是小的,所有沉下去的物体不一定都是大的。这样一来,儿童就能够形成一个重量和体积二维列表的分类,提供了四种可能性:小又轻的,小又不轻的,大又轻的,大又重的。作为这种分类蕴涵运算的结果,被试对矛盾变得敏感,通过把目前觉察到区别的两类整合起来,被试就可以分离地形成一个二维列表。如果重量和体积按现在的四种子类的方式被认识,就可能出现矛盾。

这样会引起儿童重新认识他对于重量的观点,改变绝对重量的概念——例如,重量等于体积,或者等于物质的数量——相反,被试形成新的重量的概念,将与物质的关系也纳入考虑——例如,把重量看成不同类型物质的一种品质——与比重的概念大致接近。但是,我们必须说明,他们获得重构重量概念的能力,如果不考虑借助由类和关系的具体运算所组成的逻辑框架,是无法理解的。事实上,实验中的报告与重量和物质的数量有关,是能够把部分从整体中分辨出来的先决条件("全部"和"有些")——例如,要避免矛盾,出现一个有一致性的结构是非常必要的。

然而,用这种方式形成的大致的重量的观点,还是不充分的。因为它仅仅是各种类型的物质所固有的一个特征,而非重量和体积之间的关系。这个原因很简单。就像我们在其他地方认识到的,这个水平的儿童尚不能对重量和体积的守恒形成概念,他所能理解的不变的因素只有物质的数量;因此,他不能从物体或它们内在构成的关系的角度,形成重量和体积之间关系的任何精确的组合。不用再去回溯以前的实验,因为它们的结果与本实验完全相符。① 我们已经可以充分地说,无论重量还是体积,儿童都没有

① 皮亚杰和英海尔德:《儿童量化观念发展》(*Delachaux and Niestle*),1941。See Chaps. Ⅰ—Ⅲ,尤其是Ⅶ—Ⅸ中关于重量和体积关系合成的部分。

建立起守恒性或者关系的组合性，比重不能被认识为有别于简单数量是每种物质所固有的属性。

进一步说，在比重的概念未完成的情况下，儿童在这个阶段自然仍然无法去辨识绝对重量和比重的区别。尽管可以看到儿童在努力克服矛盾，但是这是矛盾剩余的根源。（例如，在Ker的报告中，大木球有时被他认为是重的，有时是轻的；钉子也是一样的，等等。）被试在他所赋予的重量的两个概念之间摇摆，因为他并没有完全认识到他在处理的是两个概念，尽管他能在某种程度上区分它们。事实上，为了明确地区分这两个概念，他需要掌握进行这种区分的运算的方法，但是我们已经看到他还没有掌握这些。直到了阶段ⅡB，儿童才能掌握相同体积的物体间重量的系列排序。① 因此，建立初步的比重的概念仅仅是刚刚开始，尚未与重量和体积两个属性完全分离。这种发现通过这些表达呈现：不是所有小的物体都轻，也不是所有大的物体都重；但是这个阶段的概念仅仅是初级的分类，还未达到更高级的组织水平。

在9岁左右②，重量会被儿童视为守恒。因此，从此他能够运用重量的具体运算，序列排序、平衡、测量一个特定的值。至于比重和密度，他不再局限于仅仅通过重量来标定各种材料的质量：铁是重的，木头是轻的，等等。相反，他引入了一个新的普遍的解释格式：比重较高的物体比其他物体更"充满的"③。但是，因为在这个阶段，体积不能被自动视为守恒，我们尚未看到重量和体积间的运算关系的形式化。

因为这个原因，"当将特定物体的重量与水相比时，（从这个阶段开始）儿童并不能将物体的重量与等体积的水的重量相联系，而是去跟整个容器里的水相比较。"④

在这一点上，我们可以在这个阶段观察到矛盾的一种新的核心。尽管程序水平的很多矛盾随着前述的进展已经消除，但是被试仍然用容器中所有体积的水与物体的重量相比，不同的是，使用大量的力量或者机动的活动，提供一组相互矛盾的动态的解释。另外，"被充满的"这个念头，尽管也可用于均匀的固体以求统一的解释，其主要作用在于解释中空的物体（船、盖子、等），假设后者漂浮是因为它们被充满了空气。但是，虽然没有错，这个解释还会带来其他的可能的麻烦。

以下实例呈现了各种类型的反应：

Bar（9岁） （类1） 漂浮的物体：球，小木块，软木塞，铝盘。（类2） 下沉的物体：钥匙，金属砝码，针，石头，大木块，一块蜡。（类3） 既可能漂浮也可

① 《量的发展》，第233页。

② 术语"conservation"有作者特定的意思，在观察变化的整个阶段中，一个特定的实证因素（重量，体积，等）在孩子的头脑中是保持不变的。对于不同的因素来说，守恒出现的时间点是不同的，但是这里所讨论的都是在具体阶段出现的。

③ 《量的发展》，第173页。

④ 参见皮亚杰：《儿童的物理因果性概念》（Harcourt Brace and Co.，1930），Chap. Ⅵ。在这个阶段，一艘可以漂浮在湖上的小船，对于Rhone等来说，过重了。

能下沉的物体：盖子。而后，Bar 在水底看到一根针，他说："噢！它们对水来说太重了，所以水承不住它们。" "代币呢？" "我不知道；它们更可能沉下去。" "为什么这些东西漂浮着？"(类 1) "因为它们相当轻" "盖子呢？" "它们可以沉下去因为水可以上来漫过顶。" "那么这些东西为什么沉下去？"(类 2) "因为它们重。" "大木块？" "它会沉下去。" "为什么？" "它待在上面需要太多水了。" "针呢？" "它们轻些。" "所以呢？" "如果木头的大小跟它一样大，它会更轻。" "把蜡烛放水里，为什么它待在上面？" "我不知道。" "那么盖子呢？" "它是铁的，那不是太重，有足够的水撑着它。" "那么现在呢？"(它沉了) "那是因为水进到里面了。" "那么把这个木块压进去。" "噢！因为它是木头，它够宽不会沉。" "如果它是立方体呢？" "我想它会沉下去。" "如果你把它压下去呢？" "我想它还会浮起来。" "如果你压这个盘子呢？"(铝制) "它还会待在水底。" "为什么？" "因为水压上去了。" "那个更重，盘子还是木头？" "这块木头。" "那么为什么盘子待在水底？" "因为它比木头轻一点，与水在上面它的阻力小些，它可以沉在下面。木头有阻力它就又升上来了。" "这个小块的木头呢？" "不，它会升上来因为它甚至比盘子还轻。" "如果我们再开始一次，把这个大木块放到这个最小的桶里，同样的事情还会发生吗？" "不，它会再浮上来，因为水不够强；水没有足够的重量。"

Bru(9 岁) "水承载不了卵石，可以承载木头。" "如果把他压下去呢？" "它还会浮上来因为水不够强壮；水没有足够的重量。"(这次，这个重量用于把它留在底部，而不再承载它了。)过一会儿，"当你让它走时，木头会浮上来，因为它弹起来。"

Bar 的例子清晰地呈现了这个阶段的大多数特征。首先，他根据比重而非绝对的重量来分类物体；有三个例外，其中两个因为不了解(蜡和铝)，另一个(大块木头)受桶里水的总体积的影响。另一方面，被试甚至能够外显地认识到物体重量和体积的关系：针比木头重是因为"如果木头跟针一样大，木头会更轻。"在这个例子中，为什么被试可以如此好地开始，却无法发现浮体规律，最后迷失在不断增加的矛盾中？他的失败源于：在体积和重量的关系上，他尚未找到一种普遍的运算形式(相同体积不同重量或者相同重量不同体积的逻辑乘法)，仅停留在铁和木头两个具体实物之间作比较的局限里。另外，只要与规律的形式化相关的核心关系一出现——例如，当考虑物体的重量和水的重量时——他并没有与等体积的水的重量相比较，而是与全部数量的水相比较："比水重"的意思是"对水来说太重了，水不能承载它。"但是，一旦他开始使动力来概念化重量之间的关系时，随着观察的进行所有的解释都变得有可能，这样他迟早会陷入重重矛盾之中。在我们最后追问 Bar(Bru 也一样)时，这种现象发生了，Bar 返回去解释绝对重量，就是为了更容易地与其动态构想相调和。

这些最初在统一性和内在一致性上的努力，由于缺乏充分的运算工具，没能取得最后的胜利，可能在很多情况下出现，但很难形成一个整合的解释：中空物体，其中空气占了部分空间，针，在特定情况下因为水面张力的原因，可能漂浮在水面上。因此，那些用“充满”的程度解释比重的被试，可以概括盖子或者船的情况：当它们空着的时候漂浮在水面，当它们盛满水时会沉下去，可以用这一观点作为解释所有物体比重的原型。

> Bay(9 岁) “木头与铁不同。它更轻，它中间有洞。” “那么钢呢?” “它会待在下面因为中间没有任何洞。”

> Dum(9 岁 6 个月) 木头漂浮“因为它里面有空气”；钥匙不漂浮“因为它里面没有空气”。

但是这种类比不能被视为有效的，除非木头中的洞保持关闭。这一点引起另一种解释，用于针可以被很小心地平衡放置于水平面上的情况：

> Bay(9 岁，相同被试) “针会刺，会沉下水因为它又细又重。”——“看。”(它漂浮着) “噢！因为刚才沉下去的那根针有个洞。” “但是这个针也有洞。” …… “那个环形钳夹呢?” “它会沉下去因为有洞，水会进来。”

> And(10 岁) “针漂浮因为这里有个小洞。” “如果是大洞呢?” “它沉下去。” “在事前你如何解释?” “根据洞是大还是小，如果水不穿出漫过它，它就会浮在上面。”

整体来讲，了阶段ⅡB在内在一致性的方向上有了有意义的进步，初步基于重量和体积的关系提出或多或少“充满”的格式，在寻找一个统一的解释方面有重要进展。然而，因为他们所考虑的水的体积不是换位的水，而是容器中所有的水，物体的重量和水的重量的关系被理解为活动的力量，这样一来，再次带来了富含矛盾的复杂性。当空气被纳入考虑、当洞是否开口被纳入考虑，这种复杂性就更高了。总之，由于缺乏运算关系以充分决定重量和体积间的整体关系，解释并没有被清晰地揭示，尽管被含糊地感知到，一个一致的系统尚未被形式化的建立。

（三）阶段Ⅲ

我们已经用了很多篇幅强调前运算水平和形式运算阶段的重要性，基于两个目的：其一，为了能够阐明，思维过程要经历多么长的路径才能仅仅尝试找出一种一致的不矛盾的解释；其二，为什么没有形式运算的帮助，这些解释的模型也无法完成，即便在当前所发现的法则可以使用纯粹的具体运算的方式所表达的情况下。现在，我们必需尝试去分析解释这些法则所必需的形式运算的作用。但是，这个问题比上一章研究过的两角相等的法则问题更加复杂。事实上，在后者的情况下，于阶段ⅡA和ⅡB所发现的倾斜度的对应关系，已经是该法则最初的相似形式；仅仅这些对应关系的原因在被试间一直存在，形式运算仅仅在已经被准确形式化的一系列关系中引入了必要蕴涵的要素。

然而,在当前这个例子里,法则在子阶段ⅡB并没有被完全发现,形式思维对于法则的完整形成都是必要的。以下两种解释可以说明这种不同:

其一,即使密度关系,从它一被发现,就能用纯粹具体运算的形式来表达,要搞清楚相关的概念仍然需要形式的格式化。密度的概念实际上预测了体积的概念。但是,我们之前已经论证过,在形式运算开始以前——例如11—12岁,儿童无法获得体积的守恒性。[1] 毫无疑问,这个原因在于,与被试可以通过简单加法补偿而习得的守恒性的简单形式相比,各种形式变化的体积守恒性,就需要儿童首先具备掌握比例的能力。[2] 然而,我们将在本书第十一至十四章看到为什么比例的概念不会在形式运算之前自发地出现,它的出现伴随着命题运算群结构的普遍特征。

其二,形式运算在浮体定律的形成中尤其重要,这是因为需要它来排除阶段Ⅱ过于简单的解释,也用来排除纯粹的假想结构,与任何直接观察到的具体数据都无对应关系。阶段Ⅱ的解释实际上不是荒诞的,也不是直接与事实相矛盾,并且如果它们可以被排除的话,那么它们不够一致的事实能够被儿童觉察到。但是,要做到这一点只能通过一种思维过程,这种思维过程可以根据需要推演出那些简单假设的结果。另一方面,物体重量和等体积的水的重量的关系问题是一个没有实际联系的创设出来的情境,因为只有容器中水的总体积是可以被实际观察到的。然而,与物体等体积的水的体积的观念化,是对变量精细分离的产物,这个过程更加需要假设-演绎思维的参与。

毫无疑问,我们正在测试的被试目前更加可能使用已习得的知识,因为他们正在接近可以处理这些问题的学术水平。但是,当这些习得的知识不能对应于同化过程必要的心理结构时,这一点可以通过问话的过程立即被觉察,并且我们没有过早地用这种方法影响被试。另外,我们已经发现,被试Bar早在9岁是如何对相同体积的木块和金属进行比较的。相同的心理运算推广到水上,在阶段Ⅲ可以如此自然地实现,以至于很难不考虑数据积极建构过程中自发性的作用,即便周边社会环境会进一步促进它。以下示例从两个中间的情况开始,展示了这个阶段:

Pran(12岁1个月)既没能发现这个定律,也不再接受早期的任何假设。他把呈现的物体都进行了正确的分类,但是在铝质电线前非常犹豫。"为什么你一直在犹豫?""因为它们的轻,但是不,那是没有影响的。""为什么?""重量没有影响,跟物质的类别有关,比如,木头可以很重但是它们仍然漂浮。"对于盖子:"我考虑了它的表面。""表面在起作用?""可能,是这个表面接触水,但是这第一点没有什么意义。"因此,他否定了自己所有的假设,没有找到解决方法。

Fis(12岁6个月)也是处在阶段Ⅱ和阶段Ⅲ的转换期,接近解决方案,指着

[1] 见《儿童量化观念发展》,Chap. Ⅲ and《儿童自发的几何学》,Chap. ⅩⅣ。

[2] 如果一种大小的体积 x, y, z 被转换成了 x', y', z',当从公式 $xyz = x'y'z'$,得到 $x/x' = y'/y \cdot z'/z$,这里存在一种守恒。这是乘法的补偿,而后是比例。

一个铅笔说它会沉"因为它小，它没有被拉伸得足够大……你必须有一个更大的东西以待在水面上，这个东西的重量是一样的，但是需要延伸得更大。"

Ala(11 岁 9 个月)　"你为什么说这个钥匙会沉下去？"　"因为它比水沉。"　"这个小钥匙比水沉？"(指着水桶)　"我是说相同体积的水会没有钥匙重。"　"你的意思是什么？"　"你可以把它们(金属或水)放在容纳相同数量的容器里，然后称量它们。"

Jim(12 岁 8 个月)　根据它们"比水轻还是比水重"来区分物体是漂浮还是下沉。　"你的意思是什么？"　"你要有比金属更多的水才能组成相同的重量。"　"那么这个盖子呢？"　"当你拿起这些边，里面就有了空气；当你把它们推下去，它会沉下去，因为水会流进去，把它变得更重了。"　"木块为什么漂浮呢？"　"因为它轻。"　"那么小钥匙呢？"　"不，这块木头更重。"　"所以？"　"如果你同钥匙一起称量重量，要达到钥匙的重量，比起铅你需要更多的木头。"　"你是什么意思？"　"如果你用金属，你需要更多的木头以达到金属相同的重量。"

Mal(12 岁 2 个月)　"银币是重的，这是它下沉的原因。"　"如果你拿棵树呢？"　"这个树更重，但是它是木头做的。"　"银币比这水更重吗？"(水桶)　"不，你应该拿跟那个东西一样大小的数量的水；你应该取同样量的水。"　"你可以证明这一点吗？"　"是的，用这瓶水。如果它的数量与软木塞相同，软木塞会浮起来因为它比等量的水要轻。"然后："一满瓶水会沉底如果它是满的，因为它完全没有充入空气。如果你仅仅充半瓶水，瓶子会待在水面。"

我们看到，被试是怎样完全抛弃了把物体的重量与容器中所有的水的重量相比的任何想法，这些被试是怎样实现了与相同体积的水比较重量。Fran 通过分析接触表面可能的作用而开始这一过程；Fis 相信一块金属可以漂浮，如果能不增加它的重量但能扩展它延伸的大小的话；然后，Ala、Jim 和 Mal 能够用与物体等体积的水的重量进行分析原因。例如，Mal 说，"你取与物体等尺寸的水"。因此，子阶段 Ⅱ B 所用的"更满或更不满"的格式已经转换成为重量和适当体积的关系(对于 Fis，"拉伸"变成了重量和"伸展大小"的关系)，并最终转换为相关的物体重量和体积以及被物体取代的相应的水的重量和体积的关系。

这些事实引发了三个有关联的问题：(A)被试是如何开始放弃他已经形成的那些假设的？(B)他是如何建构新的假设的？(C)他如何验证这个假设？

A. 对于第一个问题，值得注意的是，在被试放弃原来那些未经验证的粗略假设的那个时刻起，他就越来越可能去验证更加高级的假设。当 Fran 说，"那没有用"或者"那不意味着任何事儿"时，他甚至没有任何外显原因地放弃了第一个假设。换句话说，他发现在语言上或者心理上认识到所研究的因素引起了相反的结果这个情况，就足够否定原来的解释了。因此 Fran 取消绝对重量时说，"例如，木头可以重，但是它漂浮。"同

样地，Ala 和 Mal 放弃了与容器中总体积的水比较，当他们发现这个体积的变化不会引起物体漂浮与否的改变。和阶段Ⅱ相比，浮体问题与第一章中研究的角度相等的问题有相同的创新性；被试通过所有可能的结合来看待问题，他们不是从缊涵或非缊涵中脱离出来，而是简单地去关注实际中的关联，从它们中抽取出对应或分类的表格关系。在第一章中我们已经看到了缊涵怎么取代了简单对应，过一会儿我们将再回到被试的缊涵以构建反应这个阶段特征的新的假设。但是，否定这些被视为不充分的假设，可以通过下述的三个步骤来完成，每一步都涉及了对非缊涵的理解。

首先，如果我们用 p 代表物体会漂浮，用 q 代表与 p 有关的任何因素 例如，轻（绝对的） 被试将会发现要证明组合 $p \cdot q$ 的存在就需要排除所有 q 因素。例如，大木块是重的，但是它却漂浮 所以，$p \cdot q$ 是缊涵 $p \supset q$ 的否定：

$$p \cdot \bar{q} = \overline{p \supset q} \tag{1}$$

其次，被试可能注意到了两种可能性的结合 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$ 例如，$p \cdot (q \vee q)$ 的一部分 经过这样的运算，我们可以说 p 是独立于 q 的真假的。但是，这个运算包括 $p \cdot q$，也会导致否定 $p \supset q$。例如，这就是当 Fran 说"木头可以是重的(或者轻的)，它是漂浮的"时的意思：

$$p \cdot (q \vee \bar{q}) = (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot \bar{q}) \tag{2}$$

最终，被试可能不再保留任何一个因素，因为他知道各种可能的结合都可以正确 例如，如果 p 代表物体漂浮，q 代表在当前的水位上容器中有大量的水，被试不会对 q 赋予任何更多的重要性，因为他们已经知道人们可以观察到以下四种结合的出现：$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$ 例如，一个物体在水多水少的时候可以一样好地漂浮，另外一个可能在两种情况下都下沉 但是，对这四种结合的运算，可以称之为"同义反复"或者"完全地论断"，同样包括了非缊涵 $(p \cdot q)$：

$$(p \circ q) = (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \tag{3}$$

B. 为了解释儿童如何形成阶段Ⅲ发现的假设，根据谁"比水更轻(或更重)"同样是指"在相同体积下"，我们既可以通过运算也可以通过概念本身来解释。

对于概念，阶段Ⅱ的儿童已经习得一个物体在相同体积下比另一个物体重(参见 Bar 对于木头和针材质金属的评论)，但是他认为被询问的物体的重量要跟容器中所有水的重量做比较。然而，阶段Ⅲ的儿童抛弃了这一假设。他还需要做的是把物体的重量跟水的量做比较 不再是任何水量而是与物体自身体积相同的量。换句话说，阶段Ⅲ的独特发现恰恰在于将阶段Ⅱ两个固体之间形成的比较模式给予普遍化，进而应用到水和物体与其重量的比较上。当它涉及一个固体和水的比较，而非两个固体时，这种比较应该更困难，因为与浸入固体的体积相等的水的体积，它没有可见的轮廓，只能通过初步的抽象之后才能得到概念化。但是，这一发现绝不逊于相对重量或比重前期概念化的结果。

因此，从相关运算的观点来看，这种与假设的相同体积的比较引发了一种推理过

程。这种过程我们之后会有非常多的例子，它包括把一个单一因素的变化理解为“所有其他的事物可以相同”。如果我们用 p 代表一个指定的物体漂浮，$\bar{p}$ 代表它不漂浮，q 代表它的体积与特定重量的水的体积相等，r 代表它比等量的水更轻，$\bar{r}$ 代表更重，那么被试建立的关系如下：

$$p \cdot q \cdot r \vee \bar{p} \cdot q \cdot \bar{r} \tag{4a}$$

该关系事实上是建立在“所有其他的事物都是相同的”这一假设之上的格式。但是这一表达自身等价于两个形式运算的结果：$(p \supset r)$ 和 $(q \cdot r) \vee (q \cdot \bar{r})$。例如，物体的漂浮与其重量（相对于等体积的水）是互反蕴涵的（等价的），重量和体积的变化是相互独立的。运算 $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$，例如，命题(?)。通过这种方式，被试发现一个指定的因素并不是起因，运算 $(q \cdot r) \vee (q \cdot \bar{r})$ 也一样。

因此，阶段Ⅲ所发现的解释涵盖了所有可能的情况，包括中空物体，并没有要求去探讨水和空气的相反作用或者泪的任何类型。当物体的重量与等体积的水相等，我们当然可以得到（如果 p_0 既不漂浮也不下沉，r_0 既不比水重也不比水轻）：

$$p_0 \cdot q \cdot r_0 \vee \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r \tag{4b}$$

例如Ray（12岁7个月）说过，针对一个非常薄的塑料立方体（它的密度近似与水相等），如果它充满了水，“它会待在中间，在液体里，因为重量是一样的”。

经过在整个阶段Ⅱ所呈现的寻找统一解释的各种努力之后，被试最终获得一种统一的、没有矛盾的解释：前面形成矛盾的两个主要的根源（绝对重量和活动力量）被一个统一的假设消除了：密度或重量与体积的关系。

C. 如果研究被试所使用的验证过程，我们发现他们对早期说过的话完全确信，尤其允许我们去证实被试的推理过程不再用一种对关系和具体对应进行简单形式化的方式运算，而是需要形式化的组合系统。在前运算水平的初期，被试不掌握任何证据。在具体运算水平（子阶段ⅡA，尤其是ⅡB）他并不会自发地认为需要进行验证，但是如果被要求，他可以完成。然而，当完全保持在具体运算的逻辑中，仅仅是对原始经验结果的组织过程（通过分类、建立关系等），他所意识到的进行验证的唯一办法是去不断地积累经验直到达到或多或少地完全确定的结论，却不存在例外。例如，没有引入必要的联系，把实物与他们互相依赖的环境分离开来，分离地推导关系。

> Bon（11岁）想要证明“所有木质的物体都是浮体。”因此，他把两个物体放到水里（木质的立方体和球体）：“我只需要把这两个东西放到水桶里，它们都会浮起来。所有木质物体都会漂浮。”

但是，从“某些”特定的情况到“全部”这个跨越该如何验证，这是一种广义的归纳法，是经典逻辑视为推理过程的基础部分。当不存在概率推理（在子阶段ⅡB）时，仅仅是无价值的外推，对于 $p \cdot q$，$(p \supset q)$，$(p \supset q) \vee (p \cdot q)$，因 $(p \cdot q) \supset (p \circ q)$。例如，“一些木质物体会漂浮”可以蕴涵特定情况下的任意一种结果。

另一方面，在形式思维水平（从子阶段ⅢA开始），要证明一个特定的或普遍的命题

是否正确需要考量(或试图去考量)所有可能组合的总量，然后允许被试用可论证的方式对这些组合进行分组。然而，对这些组合进行分组的过程，与如下情况完全相同：一个变量变化(其他变量保持不变)以便于将单一、偶然变化的结合从普遍的关系中分离出来，从而能够发现变量间的必需的关系。这种关系的组合要求我们必须诉诸第一章中所谓的"结构化的整体"(这些组合有0，1，2，3，4种结合方式)；由此，它可以区分于单一相加和乘法分类的内容——例如，"有些"和"全部"——这些具体运算的特征。

换句话说，在阶段Ⅲ中发现的这些验证的过程，明确使用了"所有其他变量保持相等"这一格式，用于我们刚刚比较过的被试所觉知(4a，4b)的明确假设。根据子阶段ⅢA和子阶段ⅢB的不同，以及当前议题和后续章节议题的关系，我们可以得出两条更深入的评论。

作为普遍规律和其真实的形式，"所有其他变量保持相等"这一格式仅在子阶段ⅢB出现，正如后文对灵活性的讨论，如此一来问题就是：假设n个因素A，B，C，D，…之间相互独立，改变A保持B，C，D等不变。但是在当前的情况下，质量和体积两个因素，并不是相互独立的，因为被试正在试图发现它们之间的关系，试图使用一个新的概念——例如密度，来连接它们。因此，与保持很多独立因素(例如温度、压力等)的恒定性相比，当比较一个物体是否浮于水面时，被试研究重量的作用，更容易让重量变化而使体积保持不变。这就是"所有其他变量保持相等"这一格式是解决当前问题所必备的基础形式的原因，它早在子阶段ⅢA开始出现。

Ger(12岁7个月) 试图证明硬币的密度比水大，他说："如果有一个罐子装满水和另一个一样的罐子装满便士……后一个会更重，将会沉到湖底。"

Al(12岁8个月) "在体积相同时，水比那把钥匙要轻。"为了证明这一点："我可以用一些塑形黏土，做出跟钥匙相同的形状，然后在里面注满水，这样水就有跟钥匙相同的体积……并且它更轻。"

但是，只有在子阶段ⅢB这种格式才获得其普遍的价值。事实上，对于当前的问题来说，只有到13—14岁才有能力去寻找一种普遍的度量单元。我们实验采用的物体有一些(与其他物体混合在一起)是木质的立方体、铁质的立方体和中空的塑料立方体，三个有相同的体积。但是，当发现子阶段ⅢB的被试或早或晚地注意这些立方体时，让人感到很惊喜；他们是如此自发地做到了这些：

Lamb(13岁3个月) 正确地分类了会下沉的物体："我这样分因为觉得它们都比水重，我根据相同的重量做比较，而不根据与水相同的体积。"——"你能证明一下吗？"——"可以，我拿着两个瓶子，我给它们称重……噢！(他注意到这些立方体)我把塑料立方体中装满水然后称重，然后我把这个水的体积跟木头立方体进行比较。你总是需要跟相同体积的水比较一下体积。"——"跟这个木头球呢？"——"通过计算。"——"但是其他的呢？"——"噢，是的，你设好水面(在水桶里)；你把球放进去，把多余的水拿出来让水面继续保持原来的水平。"——"然后你比较什

么?”——“拿出来的水的重量和球的重量。”

Wur(14岁1个月) “我拿了一个木头立方体和一个装满水的塑料立方体。我称它们的重量,从刻度上可以看到它们的差异,根据这个物体比水轻或者重。”

这里我们注意到,与对普遍单元的探寻一样,保持不变的因素经常在体积上发现,尽管在理论上,水和目标物体有相同重量的可能性也是一样的,如果后者有更大的体积也会漂浮在水面上(参见Fis和他钱币的情况,如果它延展更多,就能漂浮)。但是这种情况下的实证更加困难。

因此,总结来讲,阶段Ⅲ的验证过程包括两个步骤 (1)能够根据非直接观察得到的组合区分变量;(2)根据类似命题(1)的合取运算和蕴涵运算得到这些关系的构成。用这种方式,现在的问题和入射角等于反射角的问题一样,最终所需要的规律需要被形式化地总结出来,尽管该规律的整个探索过程需要一段长期的具体构建过程的准备。但是,毋庸置疑,两种情况都不具备充足的可能组合,不能将形式运算的作用清晰地与具体运算区分出来,尤其不能使“所有其他变量保持相等”这一格式获得其所有普遍的意义。因此,我们还需要继续深入分析更为复杂的问题

第三章 弹性形变和调节变量分离性的运算①

一根棒的弹性形变(flexibility)取决于制成它的材料，它的长度、厚度以及其截面的形状。在所有这些其他因素相同的情况下，它弯曲的程度与放在棒端的重量成函数关系。为了研究调节变量分离性的推理过程以及验证其各自的作用，似乎有必要给我们的被试一个比先前涉及更多经验困难的问题，尽管并不需要其解决方案的概念更加复杂。就浮体而言，我们仅仅简单看到"一切其他的变量保持相等"这一格式在假设演绎思维中的重要性。但是在弹性形变的问题中，五个不同变量的干扰提供了一个情境特别适合研究这一实验格式及其前提形式运算的形成，因为要想得到一个完整的解决必须要让每一因素独立变化并且其余因素保持不变②。

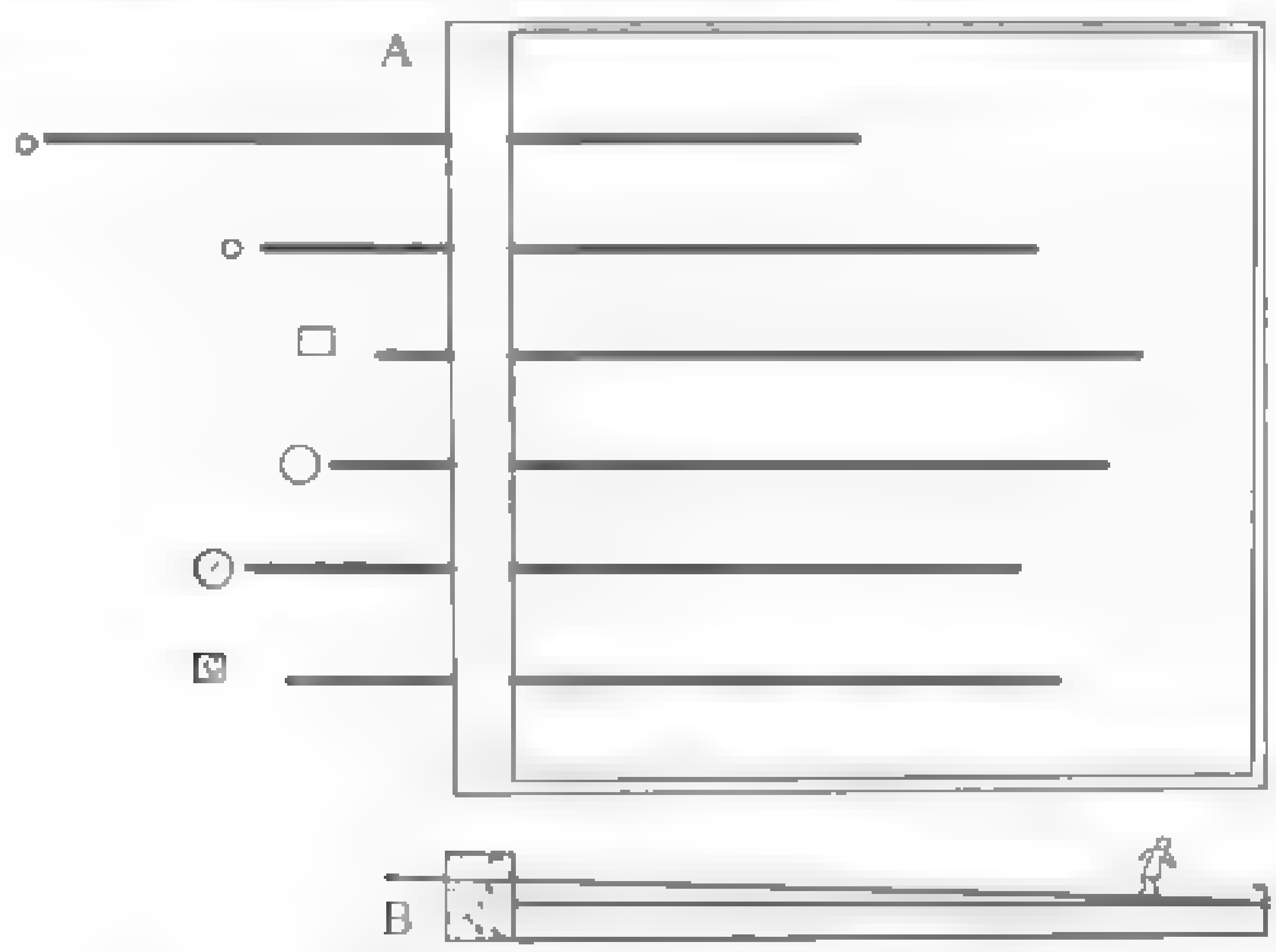


图2 A图示了弹性实验中所用的变量。棒的长度可以通过变化固定它的位置而调节(参见图B)。左边图示了每个棒的横截面，阴影表示黄铜棒，没有阴影的表示不是黄铜棒。玩偶是作为重量变量使用的(见B)。它们放在棒的底端。当棒的底端碰到水时，就表示它已经达到最大的弹性形变。

① 与教育科学研究所的助理研究员韦伊(A. M. Weil)和心理学实验室助理研究员拉施曼(J. Rutschmann)合作完成。

② 这个实验方法如下：实验者给被试提供一大盆水和一组棒，棒的材质(铁的、铜的等)、长度、厚度和截面形状(圆的、正方的、矩形的)各不相同，并在棒的一端加上一种不同的重量。另外，棒被固定在水盆的一边，并与水盆保持水平位置，在这种情况下另一端重物施加的力是垂直于水面的。被试需要确定棒是否有足够的弹性形变可以碰到水面。观察被试所用的方法，并记下他认为影响弹性形变的因素有哪些，最后需要对他的论断做出证明。

(一) 阶段 I

如果想要理解阶段Ⅲ中的形式运算以何种方式替代了具体运算，我们必须首先找出后者如何有助于分离变量；但是要找到答案我们必须要从描述前运算阶段的反应开始(到 7 岁左右)。这个阶段的反应很简单，他所有的解释仅限于描述他所看到的东西。因为还不掌握系列排序的分类和组织运算，他用准因果联系(目的论、泛灵论、道德因果论等)补充他的观察：

Ric (5 岁) 在 10cm 长的方的钢棒上放置 200g："它不接触水面。"(这里，棒被称为移动的"桥梁"，依附在一块被称为"路"的厚木板上。)在这些桥梁的最后有一些小玩偶，或者称为"渔夫"，当"桥梁"足够弯曲时它们就会接触到水面。接下来他用的是直径为 7mm 的圆的铜棒，不同于前面的钢棒，铜棒是接触水面的。"为什么?" "因为铜棒下降得更下面。"对于长 22cm、直径为 16mm 的圆的钢棒："为什么它不接触水面?" "因为棒太高了。" "为什么它会待得那么高?" "因为它在一块厚木板上。"(依附在一块厚木板上，但是所有的棒都是这样) "但是为什么那一个(铜的)可以接触水面，这一个就不可以?" "因为它太小了。"(长度太短) "那么为什么对第一个也没有效呢?"(40cm) "对第一个没有效是因为有木块(依附的木块)……第二个(依附的)也是木块。我会再试一次(他又一次开始了试验)。还是没效。" "为什么?" "因为这个比较重并且下降到水里。" "那么这个呢?"(新的棒) "没有效是因为它太高了……"等等。

Hub(5 岁 5 个月) 在一系列的尝试后把 100g 放在一根棒上并等待，好像过一会棒会下降。"所有的棒的下降方式为什么不相同?" "因为重量不得不到水里。" 然后他在一根厚的棒上放 200g，在一根细小的棒上放 100g："哪一个最弯曲?" "那一个。"(细小的棒) "为什么?" "这里的重量比较大(他指向在另一个上的 200g)；它应该进入水里。" (我们把 200g 放到比较细的那根棒上，然后棒碰到了水面。他笑了。)"为什么它现在碰到了?" "因为它不得不碰到。"

我们看到，这些被试们通常局限于简单报告他们所感知的：棒与水面不接触是因为它仍然太高，或者棒与水面接触是因为它降得太低，等等。加上目的论，道德因果论("它不得不")，等等。他们也开始对关系形式化，这个过程对我们来说有一定的逻辑兴趣，因为孩子满足于无差别的、过于宽泛的分类。正如当从形式反应的定义转换为原始解释的目的论和道德因果论时，他从缺乏内在区分的宽泛类别来定义(就像当他陈述"一个妈妈"是"一位女士"时，没有提及她的孩子)，所以在现在这个阶段(立即遵循前因果解释的阶段)客观关系过程确实出现了，但是以泛型而非精细分化的包含形式。因此，Ric 声称某一根棒与水面不接触是因为它依附于厚木块，尽管那些接触水面的棒也

同样地依附厚木块。①片刻后他又给出了一样的解释："因为有木块"(厚木块)，但是自发地加上一句"第二个(依附的)也有木块"。在解释为什么一根细棒会比粗棒的弯曲更大时，Huc 被注意到最重的砝码放在弯曲最少的棒上所限制，好像暗指两根棒都"应该"(在道德上而不是逻辑上)碰到水面。在这种包含中仍然有一个巨大差距，完全泛化因为它的形式比起具体运算更原始，而形式化的包含比后者还要更高级。

(二) 阶段Ⅱ(子阶段ⅡA 和ⅡB)

随着具体分类和关系运算的出现，可以通过使用分类法对原始经验数据进行报告——连贯的和已分化的序列排序和对应关系——但是仅靠它自己不足以确认变量的分离，如确认一个有效经验的组成结构。

Mor(7 岁 10 个月)：他在将砝码放到一个狭窄的棒上后说："它下降的方式不会跟这个(厚的)一样，因为另一个更薄。"然后他改变了砝码："这个没有另一个重；"他把重的砝码放在一根短棒上，轻的砝码放在长棒上，预测弯曲更大"因为另一个砝码比这个轻"。实验与他的预测并不一致，然后他将短棒延长："噢！与另一个(厚的)你不得不那样做……"等等。——让被试根据棒的弹性顺序的排列来总结他所观察到的内容："哪一个最弯曲？"——"这个因为它最薄。"——"下一个？"——"那个。"(长而薄的，金属制的。)——"下一个？"——"那个。"(短的，木制的。)——"下一个？"——"那个(较厚的)，它会随着砝码下去。"(重的)——"下一个？"——"那个(重的，金属制的)，它不会进到水里因为我不得不那么做。"(延长它)

Baa(9 岁 2 个月)："有些棒弯曲得比其他的多是因为它们比较轻(他指着最薄的棒)而其他的比较重。"——"展示给我看一根轻的棒可以弯曲得比一根重的棒多。"(给了他一根短的厚的棒，一根长的薄的棒和一根短的薄的棒。)——(他把 200g 放在长的薄的棒上和 200g 放在短的厚的棒上，但他没有注意到的是他选择的那根细薄的棒也是最长的。)"你看。"——"展示给我看一根长的棒可以弯曲得比一根短的棒多。"——他又一次把 200g 放在同样的两根棒上，并且这一次的结果应该解释成长度的作用。——"如果我把长的那根棒拿走，你可以再比较一次来找出是否最轻的棒弯曲得多？"——"是的，这个和那个。"(两根短的棒，一根厚，一根薄。)——"哪一个弯曲得更多，是比较这两个还是比较你之前的方法？"——"这两个。"(长而薄的，短而厚的。)——"为什么？"——"他们区别更大。"

---

① 参见皮亚杰《儿童的道德判断》(Free Press，1948)：被试 Schma(6 岁 6 个月)认为一个小骗子掉进水里是因为他说谎了，但是如果他没有说谎，他掉下去不过是因为"这座桥旧了"。

这两个例子足以告诉我们超越阶段Ⅰ所实现的发展,以及子阶段ⅡA中的被试们也无法分离出经验上相关的变量。

如之前一样,超越阶段Ⅰ的发展在于被试变得有能力去系统地登记原始数据,比如直接观察到的事实,尽管还不是能够根据头脑中的问题进行筛选,这些问题用于去验证假设或者分离变量。数据的登记是系统的,不是依靠对简单全局关系的形式化(比如阶段Ⅰ中发现的未分化的泛型分类包含),因为被试有能力进行差异化的分类,序列排列或平衡化,对应,等等,独立地考虑时这些都是准确的。例如,Mor设法通过序列排列去比较长度,厚度,重量等,甚至按照观察到的倾角的顺序排列五根棒。此外,这些运算每一个都是正确的,包括最后最复杂的一个。但是,当被试由他自己的主观来决定时,这些合起来也证明不了什么。当实验者对某一特定因素选择两个方面进行比较,所有其他因素相同的情况下,被试所完成的对比运算似乎是有意义的。但是当被试由他自己做主时,一切都混乱了。因此,Mor安排的一系列的五个倾角,总结他自己观察得到的,是一个无从推断的多因素的混乱。同样的,为了解释长度的作用,并且当我们试图鼓励他分离两个因素,他回答的是最好比较两个完全不同的方面。

这两个实例之间的区别是明显的:(1)形式运算,使被试通过不可或缺的组合的系统去分离出变量;(2)具体运算需要报告事实,但不足以构成一个可以使用这个分离的经验。具体运算不够的原因并不太清楚。在进一步分析这个问题之前,让我们重新分析子阶段ⅡB的反应:这些把明确乘法模式加到子阶段ⅡA所用的运算,仅仅对内隐的逻辑乘法有吸引力(Bau知道他的棒是"更与众不同的"是因为"同时"更薄且更长,但是他并没有这么说,并且通过关系式的简单的加法进行)。

在子阶段ⅡB中发现的唯一改变就是在非对称关系式之间成功运用了乘法。在子阶段ⅡA中,被试除了基本形式下的一一对应外没有用到逻辑乘法,而在子阶段ⅡB中,被试使用双元列表,在不同方向上序列地排列着,类似于多因素群集(相同结果的几个链接):①

Ot(9岁3个月) 从提及长度开始:"你看因为棒比较长所以它可以弯曲的更多。" "那么如果你拿两根同样长度的棒呢?"(给了他一根薄的棒和一根厚的棒) "这一根下降得比较多,因为它比那根厚的棒更薄,但那一个就不是。"接下来,他确定了重量的影响并对一根短棒进行了预测:"它不起作用;这根棒太短了并且对这根棒来说它的重量太轻了。"

Hae(10岁9个月) 他发现了棒的材料、厚度和长度的作用。"不通过尝试,你可以告诉我这根棒会在那个(重物)下与水面接触吗?" "它可以,但是(只)把它拉进去一点;它和另一根棒都是由金属制成的但是它更厚一点,所以你不需要用

① 参见:空间的协作轴也在9—10岁的阶段出现(《儿童的空间概念》,Chaps. XIII—XIV)。

和另一个一样多的重量把它拉进去”因此，(A 和 B 一样由金属制成的)·(较厚的)×(较长的)=(同样的倾角)。另外，面向相反方向的两个关系式之间存在一个对补偿的理解：(不薄的)×(较长的)=(较薄的)×(较短的)。

最后一个例子表明了双元或三元列表(过渡的非对称关系的乘法，有或没有补偿)和多因素乘法(几个因素可能引起相同效果)的出现。

尽管如此，在这个阶段的被试还不能验证在其他所有已知因素不变时一个因素的作用。同样的，尽管他们理解相同物质的长度和厚度的补偿，但他们还不知道怎么将补偿的概念推广到对所有因素的相互补偿。为什么应该是这样，成了一个问题。当我们认为被试们似乎拥有所有必要的运算工具，他们的推广失败变得更加难以解释。例如，当给了被试 Ot 两根一样长度的棒，他可以很好地理解薄的那根棒会更加弯曲，但当被要求证明厚度的作用时，在没有确认其他因素等价的情况下，他比较不同宽度的两根棒，且并没有意识到他的验证是没有价值的。同样的，Hae 并没有更熟练，尽管他发现了两个特殊因子之间的潜在补偿。一切似乎都表明，我们遇到了两种不同系统的思想：一个是具体的，允许简单的关系构成和依赖于直接数据的类别构成，另一个是形式的，允许必要环节的重组。

具体系统包括类或关系的组合列表或对应关系。为了简化我们可以用类的语言来表达这些。让我们把棒的长度为 50mm 或者更长的这一类称为 A_1，长度短于 50 mm 的一类称为 A_1'；重量为 30g 或更重的这一类称为 A_2，重量轻于 30 g 的一类称为 A_2'；黄铜棒一类称为 A_3，不是黄铜棒一类的就称为 A_3'；等等。最后，棒接触水面的这一类称为 X，棒不接触水面的一类称为 X'。当把 A 和 A' 连到一起时，即为总类 B。

在这种情况下，对于两对类(一个单因子及其结果 X 或 X')，双元列表为：

$$(B_1)\times(X+X')=A_1X'+A_1X+A_1'X+A_1'X' \tag{1}$$

对于两个因子及其结果，得出 8 个组合项(三元列表)：

$$\begin{aligned}(B_1)\times(B_2)\times(X+X')=&A_1A_2X+A_1A_2X'+A_1A_2'X+A_1A_2'X'\\&+A_1'A_2X+A_1'A_2X'+A_1'A_2'X+A_1'A_2'X'\end{aligned} \tag{2}$$

同样地，三个因子及其结果可以得到 16 个组合项，四个因子及其结果得到 32 个组合项，最后五个因子及其结果 X 或 X'，得到 64 个组合项。在实验的过程中，按照或多或少经验主义的方式(根据他所处的阶段)孩子把这 64 个组合项完全或部分地执行；它们允许他用结果 X 或 X' 去关联变量的变化(实际上组合项有更多，因为长度、厚度、重量和倾角自身的因素会导致比 A 或 A' 更多的变化，而且因为非黄铜棒 A' 的这一类实际上是亚分类)。

首先，我们必须找出在子阶段 ⅡB 中的被试是否能构造这样的列表。很可能当包含一个或两个因子时他可以，因为根据一致的结构他可以进行推理，并且我们知道对于 7—10 岁的被试来说构造序列排序是多么容易。对于三个到五个因子，他们可以通过连续地添加新元素来进行(每一次使前面的表加倍)。但是，显然一个完整的计算是不

可能的，而且只要被试用从一个元素到下一个的即时对应来进行，也不需要这样做。

更进一步，当呈现单一因子及其结果 X 或 X' 时，孩子通常有足够的能力找到一个即时对应关系以建立 A 和 X 之间的联系：如果 $A.X+A'.X'$ 出现且 $A'.X$ 和 $A.X'$ 的组合项为零（因为没有出现，在观察报告中没有给出），显然被试会推断是 A 影响了 X。但是如果所有四个结合项或者三个结合项 $A.X+A'.X+A'.X'$ 经验主义地出现，形式化 A 和 X（或它们的否定之间）简单对应关系的方法将不再满足需要；被试必须假定第二个因子用于 $A'.X$ 情况下的运算（也就是，X 是由于 A 以外的因子而产生）。但是，尽管针对这些简单的情况（当宽度补偿长度，等等）他知道怎么做到，当因子的数量增加而且实验者没有简化实验，他的努力变得越来越没有系统性。换句话说，在具体运算的阶段（ⅡA 和ⅡB），被试知道如何根据实际出现的各种对应关系去观察实验，这意味着他可以根据经验的组合（肯定和否定）构造越来越多更复杂的表格。但是他不知道怎么去解释他的表格，除非即时的对应关系是充分的——而且他不知道当变量彻底混合时应该如何去分离变量。

失败的原因是分离变量需要轮流改变每一个因素而使其余因素保持不变（"所有其他因素相同"）。为了这么做，当给出所有的对应关系时，把列表视为全部已经不够了；组合项 $A.X$，等等，必须根据不同情境逐一分析，以便知道哪些是关联的哪些是互相排斥的。但是为了得到这个分析，被试必须使用一个完整的组合系统，它不再仅仅是简单列表的结构，比如四个组合项的表格（1）或八个组合项的表格（2）。这个完整的组合系统还需要考虑到一个与一个，两个与两个，以此类推的组合，所以从表（1）中可以分出 16 个组合项，从表格（2）中分出 256 个组合项来代替二元列表或三元列表中的 4 个或 8 个组合项。换句话说，尽管表（1）和（2）是由 4 个或 8 个部分（或组合项）组成的简单整体，对组合项进行形式分析所必需的组合系统是基于"结构化的整体"，它在情境（1）中由 16 个组合项、在情境（2）中由 256 个组合项构成。

此外，我们已经在第一章和第二章中得知，这个完整的组合系统恰恰是形式思维的标志，因为它的结构超出了类和关系的加法或乘法群集（它们简单而具体的推断是基于类包含或关系联结的传递性）并且引起命题逻辑的结构。实际上，对于两个命题 p 和 q，16 个可能的运算合取、析取、蕴涵、不相容性，等等准确对应表（1）分出的 16 个组合项，而对于三个命题 p、q 和 r，256 个可能的运算（可简化为二进制运算的组合）对应从表（2）分出的 256 个组合项。

也就是说，如果子阶段ⅡB 的被试还不能分离变量，仅能根据实验简单建立呈现的对应关系，这是因为他们还没有学到构成命题逻辑的组合系统。结果是，一方面他们不知道用什么方式去结合实验结果，以说明所呈现变量之间的可能关联，而在另一方面，他们不知道如何用蕴涵等方法进行推论，以结合各种实际数据，这些数据是以充要的方式观察到的。但是，这两个失败实际上可以被减少成一个，因为同样的组合系统将允许阶段Ⅲ的被试设计分离变量的实验，也允许通过命题间运算的方式来推

断实验结果。

此外，我们必须强调，就是因为被试尚不能使用这个命题逻辑，才使得用来证明经验假设的推理过程在子阶段ⅡA和B中无法连接起来。假设 $A\to B$ 和 $B\to C$（这里 $\to$ 可以是一个包含、一个等式，或者是一个可传递的非对称关系），这个具体的推论在于得出结论 $A\to C$。这种推论可以在Hal和Ot的反应中找到。但是这个可传递关系的应用不能引起命题间运算，比如蕴涵。它只相当于一定类包含顺序的基础上类或关系的彼此合并。

相比之下，命题运算在于结合各种实证的组合，此处乘法的类是所有可能方式的基础：例如，蕴涵会被定义为是源于组合项 $A_1X+A_1'X+A_1'X'$ 的，肯定形式为 $p\supset q$（如果设定 $p=A$ 肯定为真而 $q=X$ 肯定为真），因为如果只有 $(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$ 出现而 $p\cdot q$（对应 $A\ X'$）不出现，那么当 p 为真时 q 总是真的。这些是新的组合项，正如我们之后看到的，是阶段Ⅲ被试思维的典型特征，同时也引起了证明推理的推断能力和分离相关变量的实验能力，每一个都会影响最终结果。

（三）阶段Ⅲ（子阶段ⅢA和ⅢB）

这个阶段既具有假设演绎推理出现时发现的初期形式思维的特性，也具有积极尝试验证的特性。但是，被试一开始不能处理完整范围的命题间运算。因此，即使我们可以观察到蕴涵、排斥等等的发生，我们还没有发现他能够遵循“所有其他因素不变”的格式组织一个系统的论证，除了在某些情况并且甚至不是对所有相关因素。

Pey（12岁9个月）　他推测如果棒要接触水面，那么棒必须“又长又薄”。在几次尝试之后，他总结道：“棒越大越厚，它就越能忍住不弯下去。”　“你观察到什么？”　“这一根棒（黄铜的，正方形的，50cm长，横截面为 $16mm^2$ 的棒上有300g的重量）比那一根棒（钢制的；他所选择的其他的条件都是一样的）弯曲得多；这是另一种金属。然后这一根棒（黄铜的，圆的）比那一根弯曲得更多。”（黄铜的，正方形的；重量和长度是一样的，但是横截面是 $10mm^2$ 和 $16mm^2$）　“如果你想要买一根可能弯曲得最多的棒呢？”　“我会选择一根软金属制成的，又圆又薄又长的棒。”

Aule（12岁10个月）　想要证明一根长的棒比一根短的棒弯曲得多。他拿了两根钢制的棒，一根是圆的，22cm长；另一根是正方形的，20cm长，但是需要注意的是它们的横截面的形状不一样，他把两根棒都调整到22cm长：“这根棒（圆的）弯曲得更多因为它比较薄。”（它们有同样的宽度，但是一根是圆的，另一根是正方形的。）　“你证明出了什么？”　“我不认为我证明出了什么。噢！是的，圆的那根棒比正方形的那根棒弯曲得多。”

Dur（11岁10个月）　“现在有扁平的棒、较宽的棒、比较薄的棒和比较长的

棒。如果它们都是又长又薄，它们仍旧弯曲得比较多。" "你可以演示给我看一根薄的棒比一根宽的棒弯曲得多吗?" (他把100g放到圆的钢制的棒上——50cm长且横截面为16mm^2，把200g放到圆的钢制的棒上——50cm长且横截面为10mm^2。)"那一根棒弯曲得更多。"(横截面为10mm^2) "我只想让你演示给我看薄的棒比宽的棒弯曲得多。这个方法对吗?" (他把横截面为16mm^{2}的棒上的100g拿下来换成200g)"你看，这个方法是对的。"

Kra(14岁1个月) "你可以演示给我看一根宽的棒比一根窄的棒弯曲得少吗?" (他把200g放到圆的钢制的棒上——50cm长且横截面为10mm^2，把200g放到正方形的黄铜制的棒上——50cm长且横截面为16mm^2)"这一根棒(薄的钢制的)弯曲得多。" "为什么?" "它是圆的，更易弯曲，钢制的比较轻，它是圆的而且比较窄。" "好的，但是我想要一个严密的证明它这样是因为它比较窄。" (他把200g放到圆的钢制的棒上——50cm长且横截面为16mm^2，把200g放到圆的钢制的棒上——50cm长且横截面为10mm^2)"你看，这个弯曲得更多是因为它比较窄。" "好样的。你可以用其他的棒证明出同样的结果吗?" "可以。(钢制的方形的棒——50cm长且横截面为16mm^2，代替横截面为16mm^{2}的圆的钢制的棒。因此，比较不再是精确的。)这根棒(又窄又圆的)弯曲得多，它比较轻。" "那么你可以证明棒的形状的作用吗?" 他把200g放到一根矩形的黄铜制的棒上，50cm长且横截面为16mm^2。 "为什么这一根(圆的，钢制的)弯曲得多?" "因为它是圆的。" "只是这一个原因吗?" "黄铜制的棒也比较重。"(然后他不由自主地抛弃钢制的棒，拿起了一根方形的黄铜制的棒，50cm长且横截面为16mm^2!)

比起以具体运算为特征的设置，阶段Ⅲ被试的设置在本质上是全新的。它不满足于以事物直接呈现的方式去获得经验，而是从一开始就将其视为一个更大领域的一个方面——可能性的领域。实际上，阶段Ⅱ中的被试被限制在连续地记录数据上，以其多样性所要求的各种关系和类的方式，但是他们既不能分离变量也不能详细阐述假设或证明。另一方面，了阶段ⅢA的被试们从一开始就设想现实是各种因素被安排在一套组合项中产生的结果。这一点引起了两个先前不显著的行为模式的出现：假设的形式化包括这些可能的组合项的重组，因为它们可能现实地出现；验证的尝试包括决定哪些可能性实际上会发生。

毫无疑问，前面每一个被试的初始反应似乎都无异于阶段Ⅱ，他们通过关系和类的方式描述经验。但是，阶段Ⅱ被试接受所有事情的混乱状态，并且相信用这种方式他们发现的就是真相。阶段Ⅲ被试仅仅使用初步的具体描述作为建立假设和证明的素材，结果是一个更加灵活的设置。

这种新行为反应可以在被试选择用于比较的棒中观察得到，例如呈现出仅仅从已限定的问题角度去比较它们的倾向。然而阶段Ⅱ被试将任意棒与任意其他棒进行对

比，将自己限制在表达最明显的关系上。阶段Ⅲ被试明白如果要建立一个给定的关系，选择特定的一对棒而不是其他棒是很重要的。正是这种选择使得我们可以表达出所用的逻辑运算的自然特性，这种新反应是最早在阶段Ⅲ观察到的。

这些运算最重要的，或者至少在实验开始为阶段ⅢA被试指明分析方向的是蕴涵的形式运算，被试假设一个决定性因素导致了所有情况下观察到的现象。在阶段Ⅱ，一个可比较的因果关系已通过简单对应关系建立，例如棒更长，弹性变形更大，但是这种类型的推理不能合理地推广到所有情况。蕴涵运算的起点与对应关系相似（合取 $p \cdot q$ 反映 AX）。然而，在子阶段ⅢA两种新的行为形式出现了，形成一种类型的表达，它们是蕴涵的形式化运算区别于具体对应关系的状态。首先，或多或少使用系统的努力来判断减少或消除因素 A 后的结果，通过比较简单寻找因素 A 与结果 X 之间的组合，就像我们在具体水平阶段看到的（尽管这个努力在子阶段ⅢB之前不完全系统化）；因此形式水平的被试可以判断在某条件下 X 会自行消失或减小（关系 $A'X'$ 已被发现），然而其他条件下它很保守是因为它可以由一些因素引起而不是因素 A（发现了组合 $A'X$）。统一关系式 $AX \vee A'X \vee A'X'$（或命题：$p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$）因此建立一个比简单对应更广阔的解释系统，因为它同时综合了三种可能性（或者 AX 或者 $A'X$ 或者 $A'X'$），还因为这种方式将多种不同类和关系的群集整合成了一个单一的总体。

这种情况下我们有一个处理"结构化的整体"组合系统的基本示例：当蕴涵的情况，其三个部分（或组合）AX、$A'X$、$A'X'$ 按上述方式构成整体，而析取、不相容性以其他方式相结合。进而，出现在子阶段ⅢA的处理组合系统的能力，不仅仅在这次或那次的运算中呈现，而是呈现在系统中。例如，通过所有16种二进制运算和通过连接特定数量的变量的可能性，以致力于产生更高水平类型的运算。

另外，这是不同于阶段ⅢA和ⅢB的一种新的行为模式，总系统的形式化和使用水平在论证的发展过程中得以呈现，尤其在"保持其他变量不变"的格式中。后者假设使用一种包含多种不同类型的蕴涵（整合其他运算）的设置。从子阶段ⅢA开始，我们观察到了被试呈现出指向与论证和控制实验条件的搜索，但是阻止其实现的困难同样是显而易见的。事实上，被试只能部分论证。例如，为了论证金属材料的影响，Pey 选择两根棒，一根是铜棒，另一根是铁棒，同时确保其他因素一样；但是为了证明棒宽度的影响，他采用两种截面积 $10mm^2$ 和 $16mm^2$ 的棒，并且这两种的截面形状是不相同的（圆的和方的），而他并没意识到面临着两种不一致因素。同样地，Dur 也同时改变了宽度和重量，之后在两者之间缺少的平衡上进行了校正。我们在此当然也面对了一个寻找比较情境下的平衡性的问题，但同样发现要实现它也存在很多困难。为了更好地获取"保持其他量不变"这一格式所需要的运算的特征，研究上文所述的整体组合系统中运算的相互依赖性，我们将从对比子阶段ⅢA与ⅢB中观测到的反应开始，后一个子阶段的论证在被试的考虑后将会变得更加严谨。

一个很好的例子可以说明这一切：

Dei(16 岁 10 个月) “首先告诉我哪些因素在起作用(实验尝试后)。” “重量、材料、棒的长度、也许还有形状。” “你能证明你的假设吗?” (她对比了 200g 和 300g 的钢棒)“你看，重量因素获得了论证。对于材料，我不知道。” “将这些钢棒与那些铜棒对比。” “我认为我应该用相同形状的两根棒。然后通过对比这两根(分别为铁的和铜的，方形，50cm 长，截面积 16mm²，重量 300g)或者这两根(分别为铁的和铜的，圆形，分别为 50 和 22cm，截面积 16mm²)；对于长度，我将铜棒缩小到了 22cm，来论证材料因素。为了证明形状因素，我可以用这两个。”(圆形铜棒和方形铜棒，50cm 长，截面积 16mm²) “用这两个可以证明相同的事吗?”(分别为圆形和方形的铜棒，50cm 长，截面积分别为 16mm² 和 7mm²) “不行，因为 7mm² 太小了。” “那宽度呢?” “我可以对比这两个。”(圆形铜棒，50cm 长，截面积分别为 16mm² 和 7mm²)

我们的问题是了解被试如何获取这样一种系统的方法，表面上的简单不应该误导我们，直到 14—15 岁的被试才能正确且自如地组织和使用它。

如果我们回到表格(2)(第 [illegible] 页)，它给出了两种因素及其结果 X、X' 的 8 种基础的可能组合，我们必须首先假设，被试就像阶段Ⅱ一样，先从通过具体的类和关系运算收集事实开始。例如，对于因素 A_2(重量)和因素 A_3(材料)，他也许会得到下面的观察列表：

$A_2A_3X=300g$，铜，倾向 X(最大)；

$A_2A_3X'=300g$，铜，倾向 X'(因为太短等等)；

$A_2A_3'X=300g$，铁，倾向 X(足够薄等等)；

$A_2A_3'X'=300g$，铁，倾向 X'；

$A_2'A_3X=200g$，铜，倾向 X(足够长或薄等等)；

$A_2'A_3X'=200g$，铜，倾向 X'；

$A_2'A_3'X=200g$，铁，倾向 X(足够长等等)；

$A_2'A_3'X'=200g$，铁，倾向 X'。

这一观察从开始就向被试展示了因素 A_2、A_3 不是仅有的相关因素，因为相同的组合 A_2A_3 也许会给出 X 或 X'。这一表格事实上是从对应被试潜在观察的 64 位组合列表中抽取出来的。但是阶段Ⅲ的创新是，通过具体运算构造了一种复杂的状况，被试不将这些情况视为最终的排序，从最终的排序中足够抽取出这些关系和对应。相反，他将它们视为形成新组合的起点，例如把这 8 个基本组合中的每项按一个与一个、两个与两个、三个与三个等分别组合起来，能够提取出一个新的系列运算，对应于最初表格中的“结构化的整体”。这些新的运算使变量分离成为可能，得益于运用一系列的结合简单合取的蕴涵运算。

用命题方式表达这些新的推理过程，用 p、q、r、s 和 t 分别代表因素 A_1、A_2、A_3、A_4

和 A 的出现，$\bar{p}$、$\bar{q}$、$\bar{r}$、$\bar{s}$ 和 $\bar{t}$ 分别代表这些因素不出现，同时我们用 x 和 $\bar{x}$ 分别代表 X 和 X' 为真。因而，"其他变量保持相同"的验证格式仅仅是改变其中任何一个对应因素，其他因素都不改变。例如，对于 A_1，我们改变 p，就有

$$(p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t \cdot x) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t \cdot \bar{x}) \qquad (3)$$

比如，两根承载 300g（q）重物，很细的（s）圆形截面（t）铜（r）棒，初始长度为足够短的 50mm，以保证我们能够通过调整长度（从 p 变为 $\bar{p}$）改变结果（从 x 变为 $\bar{x}$）。

因此，我们看到 Pey 比较两根棒，诸如 $(p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r} \cdot s \cdot t \cdot \bar{x})$（$r$）；为了证明这种情况下材料因素起的作用，$(r \cdot x) \vee (\bar{r} \cdot \bar{x})$ 需要呈现等价（equivalence），因为其他的命题（$p \cdot q \cdot s \cdot t$）保持不变——例如 $(p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r} \cdot s \cdot t \cdot \bar{x})$ 在可能的命题里被选中。此外，这一选择假定理解这一事实：如果命题（$p \cdot q \cdot s \cdot t$）没有保持不变，那么 x 将会由 r 以外的因素造成：$(r \cdot x) \vee (\bar{r} \cdot \bar{x})$ 等价（相互蕴涵）事实上是从蕴涵 $(r \cdot x) \vee (\bar{r} \cdot x) \vee (\bar{r} \cdot \bar{x})$ 得来，继而与 p、q、r、s、t 和 x 中所有可能的蕴涵相整合。换而言之，这 5 个因素里面保持四个不变等价于假定每个因素轮流出现相同的组合。这就是为什么基于"保持其他变量不变"格式的证明过程是如此的复杂，实际上包含整个命题间的组合系统。

这一点的证据是在子阶段ⅢA，这种类型的证明过程仍然只能被部分理解。上文提到的被试 Pey，尝试证明形状因素（圆形 t 或方形 $\bar{t}$）的影响时，后来的推理过程不具备非系统性。他同时改变了 t、$\bar{t}$ 以及宽度（s），比如，他设置了命题 $(p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot r \cdot \bar{s} \cdot \bar{t} \cdot \bar{x})$。这种条件下没有什么单独与 t 相关的可以从 $(s \cdot t \cdot x) \vee (\bar{s} \cdot \bar{t} \cdot \bar{x})$ 推导出来。这种错误在子阶段ⅢA 里经常看到。另一方面，阶段ⅢB 的结论是非常严格的，例如，被试 Dei 将相同的格式（3）分别应用到所有她能够区分出的因素，并且毫无差错地完成了它。换言之，基于"结构化的整体"（区别于由基础组合形成的一对一的乘法）形式组合系统在子阶段ⅢA 开始建构，直到子阶段ⅢB 建构完成。

另一个收获是，呈现形式阶段（子阶段ⅢA 和ⅢB）特性的是一种对异质的关系能够定性地决定进行补偿的能力。我们已经知悉，补偿的逻辑运算基于具体关系的乘法运算。因此，Hal（11 岁）发现相同材料制成棒，粗棒如果长度更长的话，就可能与细棒有相同的弯曲量。这种情况下，补偿由下面的运算解释：如果 F 代表棒从粗变细的变化，L 代表由短变长，F 和 L 反向变化，那么我们有

$$\overrightarrow{F} \times \overleftarrow{L} = \overleftarrow{L} \times \overrightarrow{F} \qquad (4)$$

用简单的乘法很容易理解相反关系的补偿，因为这些关系是同质的。粗和长是空间尺寸，当它们在相反方向起作用，很容易用乘法来补偿以获得相同的结果。参照数量

的守恒，我们已经观察过相同的现象[1]：高而窄的杯子和矮而宽的杯子可以容下相同数量的水因为宽度的增加可以补偿高度的降低。尽管两种情境下都包括二个维度和逻辑乘法运算，就数量而言，相关运算的加法多于乘法。这是因为在被试的印象中，可以把物体的一部分从宽度方向上取下来而加到长度方向上，反之亦然，这将他引向一种加法的等价性。

现在让我们检查下面的补偿情况：

1. 相同的长度，一根圆细铁棒与一根圆粗铜棒有相同的弯曲性；
2. 相同的长度，一根圆细铁棒与一根截面更大的扁平铜棒有相同的弯曲性；
3. 相同的长度，一根圆的粗铁棒与一根方的窄铁棒有相同的弯曲性。

将这几组棒展示给小孩子，并要求他们解释上述承载相同重量的棒为什么弯曲性相同。然而，要正确回答这三个问题都需要形式运算水平：问题1在子阶段ⅢA，问题2和3在ⅢB，3困难最大。为什么这三个问题有这样的不同？

在问题1中，第一根棒的细补偿了铁材质弯曲度较差的影响。但是，由于这两个因素不相似，被试必须先分离出相关变量。与此同时，如果他要对两者的具体关系作乘法，他必须将两者视为同时起作用。在这里我们看到了这种双重要求与检验过程"保持其他变量不变"的不同。实际上，两种情况下被试都必须取消一个因素的影响以决定另一个因素有什么影响。由于两个因素经常同时起作用，两种情况下被试必须限制自己保持总量不变，除非这一变量不予考虑(意识上或现实上)。因此，他实际上不是取消了效果，而是取消了产生这一效果可能的变量。

然而，棒的金属材质与弯曲度，或者粗细与弯曲度的这些具体水平的关系，已经通过仅仅观察不同情况下的数据结果这种简单粗糙的方式而得以形式化，而不需平衡其他因素。结果是，在补偿确切的情况下，比如问题1，阶段Ⅱ被试不能确定由于材质造成的弯曲度的不同是否可由厚度因素单独补偿。相反，探知长度与弯曲度是一致的将会引导他们相信材料因素(或厚度)没有他们之前想象中的那么重要。因此只有当所有因素都分离，并同时综合考虑——例如，在这个层次蕴涵代替了简单的具体关系——被试才能认识到两个因素能准确地相互补偿，即使他不知道怎样确定两个因素在量方面的相互影响。当完成等价性，被试实现了变量分离，他的思维转变到变异是纯粹的、非混合的情况，并且它并不限制实际的混合变量。形式化演绎的补偿正是源于此("如果它……那么情况会是……")。它们会在使用对应关系和具体乘法不能充分补偿的情况下出现。

同样地对于问题2和3，由于这些情形下形状和厚度相互补偿，而形状自身也各不相同，厚度(横截面)没有持续给出，而必须以一种假设的可能性进行形式化。因此，后面这两个问题最大的困难，特别是问题3，很难数量化。几乎所有的事情都需要被试的

1 参见皮亚杰和斯泽明斯卡：儿童的数概念，Routledge & Kegan Paul，1952，Chap. Ⅰ。

推演。问题 3 里截面因素很难精确考虑。

作为智慧运算，除了蕴涵以外，还有一种比例可以调节被试对补偿的理解，这一点很有趣。因为我们没给被试任何的材料和数据信息，是一个纯粹的定性或逻辑格式。起点是双重蕴涵(用 p、q 来代表任意两个因素，r、s 代表金属和厚度，s、t 代表厚度和横截面，等等)：

$$p\cdot\bar{q}\supset x \quad 并且 \quad \bar{p}\cdot q\supset x \quad 或者 \quad x\supset(p\cdot q)\vee(p\cdot q) \tag{5}$$

这个双重蕴涵意味着因素 p 起作用和 q 不起(减弱)作用的组合方式与 q 起作用和 p 不起(减弱)作用的组合方式有同样的效果。

这种情况有如下形式化过程：(1)$(p\cdot q)$和$(p\cdot q)$的合取，表达了 p、q 之间的互反排斥关系导致相同的结果，即当前情境下的 x；(2)因此，因素 p 和 q 不仅起相反作用，而且可以在不影响结果的条件下相互替代。随后通过相互性(R)的形成逻辑均衡，对$(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$普遍成立。但是在此处它代表补偿的格式。在这种情况下相互性表示一种运算，即值相等方向相反(减弱或增强)：

$$\frac{p}{q}=\mathrm{R}\frac{p}{q} \tag{6}$$

表达式表示(根据对角、垂直或水平地读取)：(a)$p\cdot q=\mathrm{R}(p\cdot q)$；(b)$p\vee q=\mathrm{R}(p\vee q)$；(c)$\bar{p}\cdot q=\mathrm{R}(p\cdot\bar{q})$；(d)$\bar{p}\cdot p=\mathrm{R}(q\cdot\bar{q})$既然 $o=\mathrm{R}o$。

我们将会遇到很多这种逻辑均衡性(logical proportionality)的例子，它们或不依赖测量数据，或优先数据决定。此时，我们可以充分指出这些问题不仅包括命题推理，还包含各个元素的形式化结构，这一形式化结构是被试完成该任务的第一部分

第四章 单摆摆动与排除无关因素的运算[1]

我们刚刚已经看到在多因素的实验设定中，被试如何运用因素分离以测定各自的效果。本章继续讨论儿童和成人在类似情况下的反应，[2]但不同的是在各种可能因素中只有一个实际上起因果作用；由于其他几种因素根本毫无影响，因而在分离因素后必须将它们逐个加以排除。单摆的情况就是这样。当被试在观察本实验时，他可能会想到的实验变量为：线的长度、悬挂物的重量、起摆点的高度（即摆动时的幅度大小）以及实验所施加的引起摆动发生的外力大小。而实际上在这些因素中只是第一个因素（线的长度）在起作用。所以问题是要将它从其余三个因素中分离出来并将这三个因素排除掉。只有做到这些之后被试才能解释单摆摆动频率变化的原因。

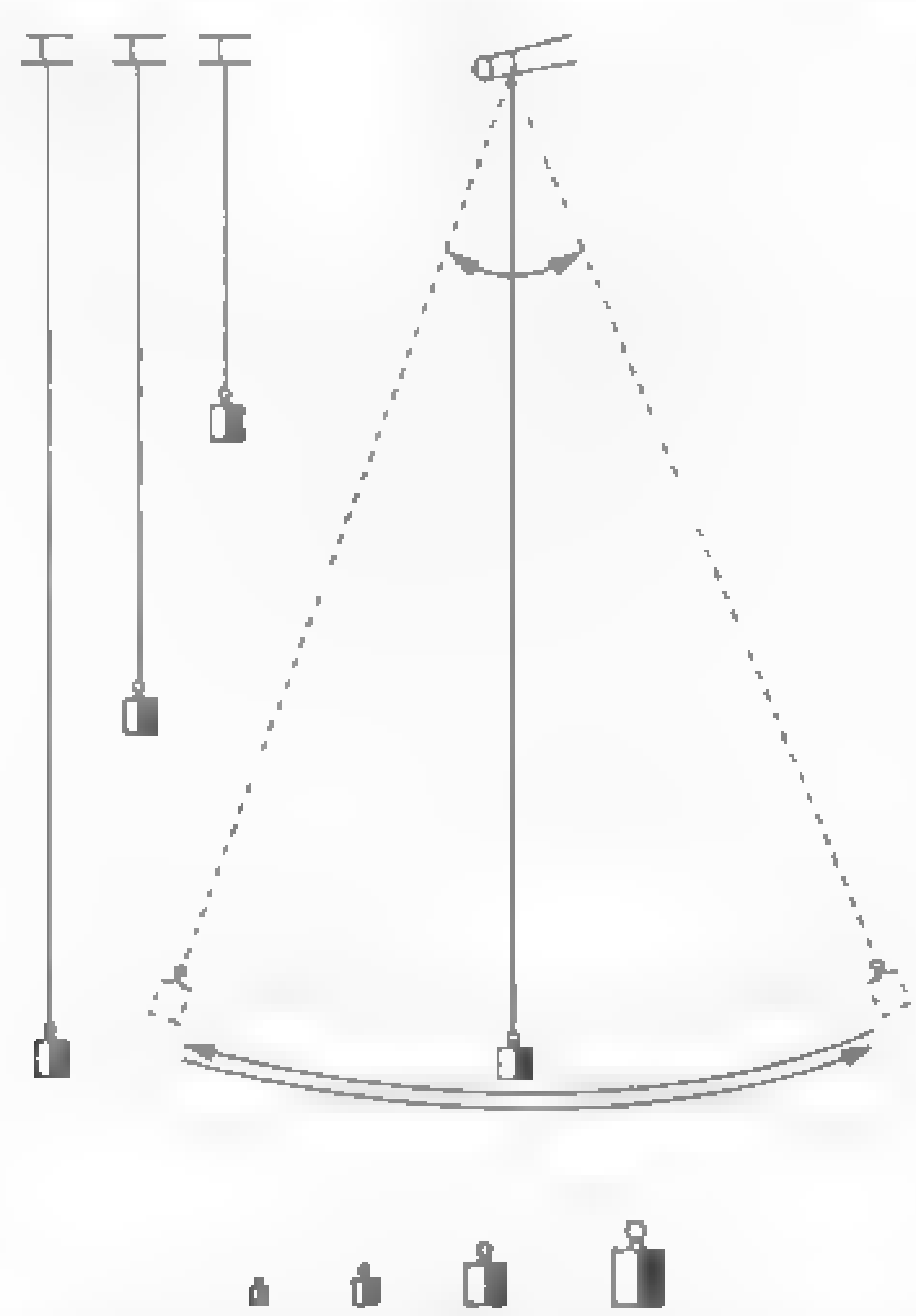


图3 单摆问题使用的一个简单装置，一根长度可调的细绳和一套重量不等的重物。最初会认为相关的其他变量是释放点的高度和被试施加的推力

[1] 与心理学实验室和教育科学学院助理研究员莫夫(A. Morf)、心理实验室前助理研究员迈尔(F. Maire)和教育科学学院前学生列维(C. Lévy)合作。

[2] 这一技术仅仅包括用在一根细绳下悬挂一个物体的方式呈现一个单摆，告知被试如何改变细绳的长度、悬挂重物的重量和摆幅等。问题是找到决定摆动频率的因素。

（一）阶段Ⅰ：被试自身的动作和单摆运动不相关

前运算阶段Ⅰ很有趣，因为被试的身体动作远远超越了他们的心理运算，被试或多或少不能区分自身的动作和单摆的运动。实际上，儿童此时将对单摆摆动频率变化原因的解释统统都归结为随他们所施加的推动力的大小而不同：

Hen(6岁) 他用不同的力推单摆，说："这回动得快了……这次动得更快了。" "真的吗？" "对啊！"(实际上他并没有进行正确的计数。)接着，他用一个重的悬挂物及一根短线说："动得更快了，"(他推了一下)"动得更快了。" "让它动得最快行吗？" "你只要把悬挂物拿掉让线自己动。"(说着他就拉着线动。)他还说："如果将物体举得很高就动得更快了。"(这时他使劲地用力推了一下)然后，他转向重量解释："如果加些重量，它就会动得快些。" 最后我们问他是否真的认为他改变了频率。 "不，你不能；是的，你可以改变频率。"

Dac(7岁3个月) 虽然已有些许进步，发现了线的长短与频率之间有些非系统性的对应关系。但是，杜克还缺乏自控，一直推动单摆，不能顺利地正确计数，他常常受到自己主观猜测的影响。

因为前运算儿童尚缺乏系列化运算及严格的一一对应运算，而他还不能客观地表述实验，还不能进行一致的不相互矛盾的解释。显然，儿童还没有把自身加给单摆的推动力与单摆的运动区分开来，他还不了解单摆的运动是同他的推动力无关的。

（二）阶段Ⅱ：序列排序和对应运算的出现，但无法进行变量分离

阶段Ⅱ被试能够将线的长度、起振高度等按照一个大小系列来进行实验，并能客观地判断他所观察到的单摆摆动频率的差异。因此，他们准确地掌握了对应运算的形式化，已经能够排除掉推动力的作用，但还无法分离其他变量。

子阶段ⅡA中，悬挂物重量的序列排序仍不准确：

Jac(8岁) 他经过几次尝试改变线的长度后说："线越短动得越快。"另一方面，悬挂物的重量也使他得出前后不一致的关系："重的容易摔的更快，比如，100g的比500g的动得慢些。"但与他进行了新的尝试后又说，"100g的动得快。" "你怎样才能让它动得更快呢？" "增加两个。" "还有别的方法吗？" "什么都不加；越轻就越快。"对于起振点(落点)，他说："如果落点低，那就动得快，"后来又讲："如果从高的地方放下去，它动得更快了。"然而实际上当他这样做的时候已经把线缩短了。

由于其他因素的序列排序是准确的，被试发现了线的长度与摆动频率的反向关系。但是因为他不知道如何分离变量，所以他推断线的长度不是问题中唯一相关的变量。

另外，如果他把悬挂物的重量和起摆点（落点）作为决定摆动快慢的因素，是因为他同时改变了几个条件。

尽管了阶段ⅡB中有明显的进步，是由于对重量（原始数据）作用的精确排序，各种因素并不能一直保持分离。

Bea（10岁2个月） 改变线的长度（分别是2个单位长度，4个单位长度和3个单位长度，顺序随机），得出了正确的结论："线的长度和振动频率之间存在反向对应关系：线越长动得越慢。"关于悬挂物重量，他通过比较线长度为2或5时悬挂100g砝码和长度为1时的50g砝码推断出悬挂物重量和振动频率之间也存在反向对应关系。之后，在不改变悬挂物重量或线的长度的情况下（并没有把它们作为常数，而只是简化了动作），他改变了落点的高度，并推断："两个落点高度动的频率相同。"最后他只改变了推力而其他因素保持不变，再次推断："结果是一样的。"

Cro（10岁2个月） 也不能分离悬挂物的重量和线的长度，但是与Bea相比，他确实改变了落点高度，起先，他用了长线悬挂100g的砝码做实验，然后缩短了绳子的长度，换了200g的砝码，从更高点落下："你发现了什么吗？" "这个小的（100g的砝码）动得更慢，短绳悬挂的200g砝码落点越高，动得越快。"但之后他把50g的砝码挂在同一根短绳上，说："这个轻的动得更快。"然而，被试忽略了最后的情况："要动得更快，你必须往上拉绳子（缩短长度），这个小的动得慢些，因为它更轻。" 那么："你还想知道你要做什么才能让它动得更快吗？" "小砝码动得更快。"——"你如何证明呢？"——"你得往上拉。"（缩短长度）

Per（10岁7个月） 他则是不能分离这些变量的典型案例，同时改变悬挂物重量和推动力，然后又同时改变重量，推动力和线的长度，接着又同时改变推动力，重量和落点高度。他得出结论说："快慢是因为悬挂物重量和推力变化而引起的，肯定不是线的缘故。"当追问他："你怎么知道线与此无关？"他答道："因为这是同一条线。"他在最后几次试验中没有改变线的长度；先前他同时改变了线的长度和推动力，因此使得实验的计数更加复杂。 "但是频率变吗？" "要看情况，有时候频率是一样的……是的，这种情况不多……频率也取决于你挂在绳子上的高度。当你放低一点时，频率就没那么快了。"然后他就得出结论，这四个因素都起了作用，他说："改变重量、推动力等都会改变频率，绳子短动得越快；对于高度，你可以放高一点或低一点。" "你如何证明呢？" "你得试着推一下，降低或者拉高绳子，改变高度和重量。"（他想要同时改变所有变量）

Mat（10岁6个月） 甚至将同时改变变量视为一个准则。当实验员问他："你怎么知道挂着重的东西时动得快些呢？"马特答："我挂上了一个大砝码就动得快些。" "你真的发现了吗？" "是的，我把线缩短了些同时挂上一个大砝码，发现动得快了。"

这些例子特别有启发性，因为表明了具体运算与形式运算的差异。第一，虽然被试

掌握了序列排序与对应运算，能使多种因素引起变化并能汇报结果，但是他们的推理还仅仅只是根据传递性（如 $A<B$、$B<C$，则 $A<C$）——他们尚无法进行任何形式推理。第二，具体运算的儿童犯了两点错误：一是他们同时在改变着几个因素，如使 A_1、A_2、A_3、A_4 变到 A_1'、A_2'、A_3'、A_4'，结果使 X 变到 X'，此时他们就认为任一因素的变化都依次暗示着 X'。用命题语言讲，就是从 $(p\cdot q\cdot r\cdot s)\supset x$ 得出了错误的结论：$(p\supset x)\cdot(q\supset x)\cdot(r\supset x)\cdot(s\supset x)$。他们没有想到其中的因素可能对 x 的变化并没有什么影响（例如 Mat 对于线的长度与悬挂物重量两个因素，发现了 $p\cdot q\supset x$，他同时改变这两个因素发现其快慢变化了，发现了 $q\supset x$ 认为快慢的变化是由于挂上了一个大砝码而引起的）；另一个错误是 Per 犯的，除了线的长度不变外，他同时改变了其余三个因素，然而他尚未确定快慢是否发生了变化就得出了缺乏依据的错误结论，他说这个固定不变的因素（即线的长度）一定是不起作用的（Per 说："总之，不是线在起作用……因为这是同一条线啊！"）。用符号表达 $p\cdot q\cdot r\cdot s(x)\vee p\cdot q\cdot r\cdot s(x\vee x)$ 得出了错误的结论：$\overline{p\supset x}$。

因此，显然，被试尚缺乏一些逻辑工具，他们尚无法分离因素，不单是因为他们疏于思考。例如第二章中的 Bau 在比较木棒的弹性形变时同时改变了两个因素，那样结果会"更加不同"。Mat 和之前的被试也明确地打算同时改变所有因素，为了完成更了不起的转变。在这个阶段，被试尚缺少形式组合系统——由于他们习惯于分类、序列排序和对应运算，他们被限制在简单的变量表中，而无法想到组合的多样性。由于他们缺少"结构化的整体"的组合系统，他们甚至不能开始分离相关变量。

（三）子阶段ⅢA：可能但不是自发的变量分离

在较低级的形式阶段即子阶段ⅢA，儿童在一个因素为变量、其他因素为常量的组合中能分离出因素。在这个案例中，他能正确推断，不再受到我们刚看到的几个例子中的那些影响。但是他自己仍不知道如何系统地产生这样的组合——即形式运算已经以一种原始的粗糙的形式表现出来，使得某些推断成为可能，但是尚未充分组织成为某种预期格式。

Jot（12 岁 7 个月）——相信"你得把线拉上去拉长"。他悬挂了 20g 的砝码，改变了长度："我降低线的时候动得更慢，拉高的时候动得更快。"——"就这样吗？""可能重量也会起作用。"但为了证明这点，他用了 100g 的砝码，拉长和缩短了线，然后换了 50g 的砝码，又拉长和缩短了线。他说："是的，高的时候动得更快（绳子短的时候）；是线在起作用。"换句话说，他改变的是线的长度而不是重量。之后他改变了重量但再次用同样的方式改变了线的长度。这个过程可能帮助他得出结论，如果他记住了不同的情况下各自的频率，但是没有帮助的是它使事情更复杂。当要求被试给出长度影响频率的证据时，他满足于一个纯粹的推断："线长时从一

端到另一端需要花更多的时间，线短花的时间更少。"

Ros(12 岁 8 个月)　在同样的重量下伸长和缩短线，立即发现了长度的作用。之后他减少了砝码，但同时缩短了线(长线悬挂 200g 砝码，短线悬挂 20g 砝码)。他的结论是"重量也起了作用"。他用同样的方式控制推动力，得出结论"推动力也起了作用"。但是他怀疑重量的作用，模糊看出需要让其他变量即线长保持不变；它缩短了线，相继挂了 50g 和 100g 的砝码。结果并没有变，他更加怀疑："我得再做一次确保结果是正确的。"他又开始了，但是又一次他同时改变了长度和重量。这次他怀疑线长，挂了 20g 的砝码拉长和缩短线。"线变短，砝码动得更快了，因为我没有增加相同的重量。这也是为什么什么也没证明的原因。现在我要增加相同的重量。"然而，他仍旧相信重量能产生影响。——然后我们在他面前同时改变了重量和长度："这证明什么了吗?"——"不，因为你加了相同的重量。"——"为什么呢?"——"因为重量使它动得更快。"

Lou(13 岁 1 个月)　他先将 20g 砝码放在一根短线上将 50g 放在一根长线上，对它们的摆动加以比较说："轻的动得快。"接着非常好奇地又用一根长线挂 50g，一个短线挂 100g，这回他说："线短动得快。"但是，他并没有下结论说重量不起作用。——"重量和它有关系吗?"——"有关系(他又取一根长线挂 100g，一根短线挂 20g)。我忘了改变线的长度了(他缩短了线，但没有保持重量恒定)。啊，重量不应该变。"——"为什么呢?"——"因为我在观察线(的作用)。"——"但是你看到了什么呢?"——"线长就动得比较慢。"Lou 证明了线的影响，尽管他自己既不明白要让不分析的因素都保持恒定，也不知道需要改变分析的因素。

这些过渡时期的案例显然是很有趣的。这些案例甚至比子阶段ⅡB 更好地呈现了在区分因素和使用"其他所有变量都均等"时出现的困难。第一，在子阶段ⅡB 的被试中，我们发现他们倾向于故意同时改变两个因素，甚至倾向于不改变正在考察的因素(针对 Lou)。但是在初期形式运算的影响下，这些相同的被试者感到在他们操作的过程中，并没有证明任何事，因此他们要么设法实际上转换他们想要保持不变的因素(像 Lou 一样)，要么设法轮流改变所有因素，不知道如何专注于待分析点(像 Jot 一样)。在这样的情况下，有关线长的结论是正确的，线长是唯一一个有效因素；但是因为被试缺乏能排除因素的组合系统，重量或推动力等的结论是不正确的。换句话来说，形式逻辑正在形成过程中，高于这些被试者的实验能力，还不能充分构成正确的证明方法。结果，他们能进行最简易的运算但是尚无法进行较困难的运算，他们还不能排除那些无效的因素。

(四) 子阶段ⅢB：变量分离和无关因素的排除

对于摆锤问题，类似于弹性形变(第三章)，子阶段ⅢB 的被试采用每次只改变单一

变量而保持其他变量不变的方法来分离变量。但是，在实验中，四个因素中实际上只有一个因素是起作用的，故而应排除其余三个因素。这种排除运算是一种新出现的现象，和子阶段ⅢA 以及弹性实验是非常不同的，子阶段ⅢA 中这种排除运算是难以实现的，而在弹性实验中它又是不需要的。

> Eme(15 岁 1 个月) 她选取了一根长线和一根适中的线各吊 100g 重物，又取了一根同样长的长线及一根短线各吊 200g，最后又选了一根同样的长线及一根短线各吊 200g，最后得出结论说："正是线的长度使它摆得快些或慢些，而重量根本不起作用。"她用同样的办法排除了落点高度和推动力这两个无关因素。
>
> Ecc(15 岁 9 个月) 一开始认为四个因素都起作用。她用相同长度的绳子(适中长度)吊起不同重量的砝码，没有观察到不同："频率没有变化。"然后她用不同长度的绳子吊 200g 砝码，发现"绳子短，摆动快"。最后，她又用不同的推动力和同一根适中长度的绳子从不同的落点吊 200g 砝码，对这两个不同变量的结论是："它们不起作用。"

虽然这些回答如此简单，和子阶段ⅢA 中的迟疑完全不同，但是，我们并不会被误导。之所以能得到这些回答其实是一个复杂讨论的结果，这个复杂讨论中的运算机制必须是分离变量。

用 p 表示绳子长度变化，$\bar{p}$ 表示绳子长度不变；q 表示重量变化，$\bar{q}$ 表示重量不变；r 表示落点高度有变化，$\bar{r}$ 表示落点高度不变；s 表示推动力有变化，$\bar{s}$ 表示推动力不变；最后，x 表示结果的变化即摆动频率有变化，$\bar{x}$ 表示摆动频率不变。

当 Eme 用不同长度的绳子吊相同重量的砝码时(以及接着吊一种重量的砝码时)，她正在进行下面的组合：

$$(p \cdot q \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot \bar{x}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{x}) \tag{1}$$

这就是说，不论砝码重量是否变化，绳子长度的改变对应频率的变化，并且不论砝码重量是否变化，没有长度的变化就不会有 x 结果的出现。

另外，在$(p \cdot q \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot x)$四种组合中，没有任何一种会产生。因为当 p 出现时，x 不会出现；反之，当 x 出现时，p 不会出现。

但是(1)式可以分为两个运算。首先，当被试说："正是线的长度使它摆动得快或者慢。"这就表示 p 与 x 之间存在互反缊涵关系 即 $p \supseteq x$。其次，因为 q 和 x 之间四种可能的组合$(q \cdot x) \vee (q \cdot x) \vee (q \cdot x) \vee (q \cdot x)$都出现了，所以它们没有关系 可以写成$(q * x)$的形式，可以称为赘余或"全称肯定"]。也就是被试说"重量不起作用"时所要表达的。至于 p 和 q 之间的关系，可以写成 $p \cdot (q \vee q)$或者简写为 $p[q$ 即不管有没有 q，p 是肯定的；同样地，我们还有 $p \cdot (q \vee q)$ 即不管有没有 q，p 是肯定的(这一肯定和否定合在一起就是 $p * q$)。

那么式(1)可以写成：

$$(p \supseteq x) \cdot (q * x) = p \cdot (q \vee \bar{q}) \supseteq x\text{，或者，简写为，}$$

$$p[q]\supseteq x \tag{2}$$

在这些式子中我们可以发现，重量这一变量在摆动频率实验中被排除就是因为被试意识到了$(q^{\circ}x)$——即q和x之间的所有组合都出现了；排除重量这一变量就意味着排除了q和x之间的任何可能的联系。

排除落点高度和推动力的推理过程与此完全相同。然而，被试在分析落点高度(r和$\bar{r}$)的作用时，同时考虑了长度和重量两个因素，因而存在8种组合：

$$\begin{aligned}&(p\cdot q\cdot r\cdot x)\vee(p\cdot q\cdot \bar{r}\cdot x)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r\cdot x)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r}\cdot x)\vee\\&(\bar{p}\cdot q\cdot r\cdot \bar{x})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r}\cdot \bar{x})\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r\cdot \bar{x})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r}\cdot \bar{x})\\&=(p\supseteq x)\cdot(q^{\circ}x)\cdot(r^{\circ}x)=p[q\vee r]\supseteq x\end{aligned} \tag{3}$$

其中$p[q\vee r]$表示$p\cdot(q\vee r)\vee p\cdot(q\cdot\bar{r})$。

接着，在被试研究推动力的作用时，他要考虑线的长度、砝码重量、落点高度三个因素。因此，他发现16种组合：

$$\begin{aligned}&(p\cdot q\cdot r\cdot s\cdot x)\vee(p\cdot q\cdot r\cdot \bar{s}\cdot x)\vee(p\cdot q\cdot r\cdot s\cdot x)\vee(p\cdot q\cdot r\cdot s\cdot x)\\&\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r\cdot s\cdot x)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r\cdot \bar{s}\cdot x)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r}\cdot s\cdot x)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r\cdot s\cdot x)\\&\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r\cdot s\cdot \bar{x})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r\cdot \bar{s}\cdot \bar{x})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r}\cdot s\cdot \bar{x})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r\cdot s\cdot x)\\&\vee(p\cdot q\cdot r\cdot s\cdot x)\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r\cdot \bar{s}\cdot \bar{x})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r}\cdot s\cdot \bar{x})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r}\cdot \bar{s}\cdot \bar{x})\\&=(p\supseteq x)\cdot(q^{\circ}x)\cdot(r^{\circ}x)\cdot(s^{\circ}x)=p[q\vee r\vee s]\supseteq x\end{aligned} \tag{4}$$

由此可见，排除三种不起作用的因素(开始看起来简单)以及发现绳长和结果x之间的与反蕴涵关系，实际上是以一个复杂的组合运算为前提的。如果被试每次只变一个变量，而使其他变量固定不变，那么他才有可能掌握这种运算。例如，在(4)式中，前两个组合$(p\cdot q\cdot r\cdot s\cdot x)\vee(p\cdot q\cdot r\cdot s\cdot x)$已经足够使被试推导出摆动频率和推动力无关$(s\cdot x)$，而且加上最后两种组合，他也能推导出$(s^{\circ}x)$——即，完全排除这一变量。但是，其中没有表达的是，为了用此方式得到最后的组合，他必须至少对其他所有组合有一个大致的概念。这也解释了为什么通过“保持其他变量不变”分离变量的方法以及排除不起作用的因素要到最后那么晚的时候，即在子阶段ⅢB才出现。

这个运算系统需要的最有力的证明就是子阶段ⅢB被试在实验过程中极容易地推导出各种组合，进而得出结论，但是他对这样的结果不是很满意。他避免了子阶段ⅡB和ⅢA中出现的所有不合理推论。但是，对比子阶段ⅢB出现的正确推理和早先的错误推理，我们可以发现这一阶段出现了能够获得正确结论的一两种组合方式。而且这种组合的存在再一次证明了它是以掌握全部可能的组合系统作为前提条件的。

例如，当儿童假设重量q有影响时，他可能对于出现在子阶段ⅢA中运算(3)的$p[q]\supseteq x$和$(p\vee q)\supseteq x$或者$(p\cdot q)\supseteq x$等犹疑不决，他们认为摆动频率的变化要么是绳长的影响要么是重量的影响，或者这两者都有影响$(p\vee q)$或者两者一起起了作用$(p\cdot q)$。这样的话，我们可以得出：

$$[(p\vee q)\supseteq x]=(p\cdot q\cdot x)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot x)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot x)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{x}) \tag{5}$$

$$[(p\cdot q)\supseteq x]=(p\cdot q\cdot x)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{x})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{x})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{x})\qquad(6)$$

这里，我们可以看到(5)式和(1)(2)没有区别，它们其实是相等的，除了用$(p\cdot q\cdot x)$替换了$(p\cdot q\cdot x)$。(6)式也没有什么不同，除了用$(p\cdot q\cdot x)$替换了$(p\cdot q\cdot x)$。但是子阶段ⅢB中的青少年很清楚如何排除$(p\cdot q\cdot x)$和$(p\cdot q\cdot x)$，因为他准确地证明了$p\cdot x$和$p\cdot x$的错误性(——绳长不变时摆动频率变化或其互反命题)，甚至还证明了当绳长与重量同时改变时，$q\cdot x$和$q\cdot x$(——频率和重量一个变化或两者同时变化)的正确性。

需要明白的是，到了阶段ⅢB曾自由接受的推理模式再一次被抛弃，需要以下能力为前提：从可能组合中做出特定的选择——包括需要被排除的和正确的组合。联系一个具体的例子，读者会想到Ros(在ⅢA中)同时改变了重量和长度，得出结论说第一个起了作用：从$(p\cdot q\cdot x)\vee(p\cdot q\cdot x)$组合中他提取了$q\supset x$或者$x\supset q$。实验中Eme的不同点在于她不满足于这两种组合，因此保留了(1)式中的四种组合的正确命题，显然，$(p\cdot q\cdot x)$排除了$x\supset q$(因为$q\cdot x$——重量不变，频率变化)，$(p\cdot q\cdot x)$排除了$q\supset x$(因为$q\cdot x$——重量变化，频率不变)。当然，类似的选择在落点高度和推动力实验中也存在。分析子阶段ⅢB中被试所接受的所有推论和所有否定，可以推断他明白(1)式的组合。明白这一点是以了解其他否定的16种组合为前提条件的——即在32种基本组合中进行选择——毕竟，这些选择包含对一套基本组合的选择。我们再一次发现这种选择包含一种建立在"结构化的整体"之上的形式组合系统的运算，然而，具体运算只相当于建立对应关系，在这些对应中形成基本组合。

弹性实验中五种因素和结果形成64种基本运算。但是为了证明每一种因素的影响，有必要将它们分成一些组合，这些组合的形式在第二章的(3)式中已经呈现了，可以用来参考。

第五章　斜面上的落体与析取运算[1]

本实验采用的是一块可以随意调节倾斜角度的平板。球从平板上下滑，撞击到底部跳板而弹起。这项实验的关键在于找到球下落高度与抛射距离之间的关系。很显然，被试无法计算出球抛出的抛物线形式，但他能发现长度的变化仅与释放点的高度有函数关系（排除球的质量或重量的影响）。部分地说，问题的解决依赖于因素呈现的方式。

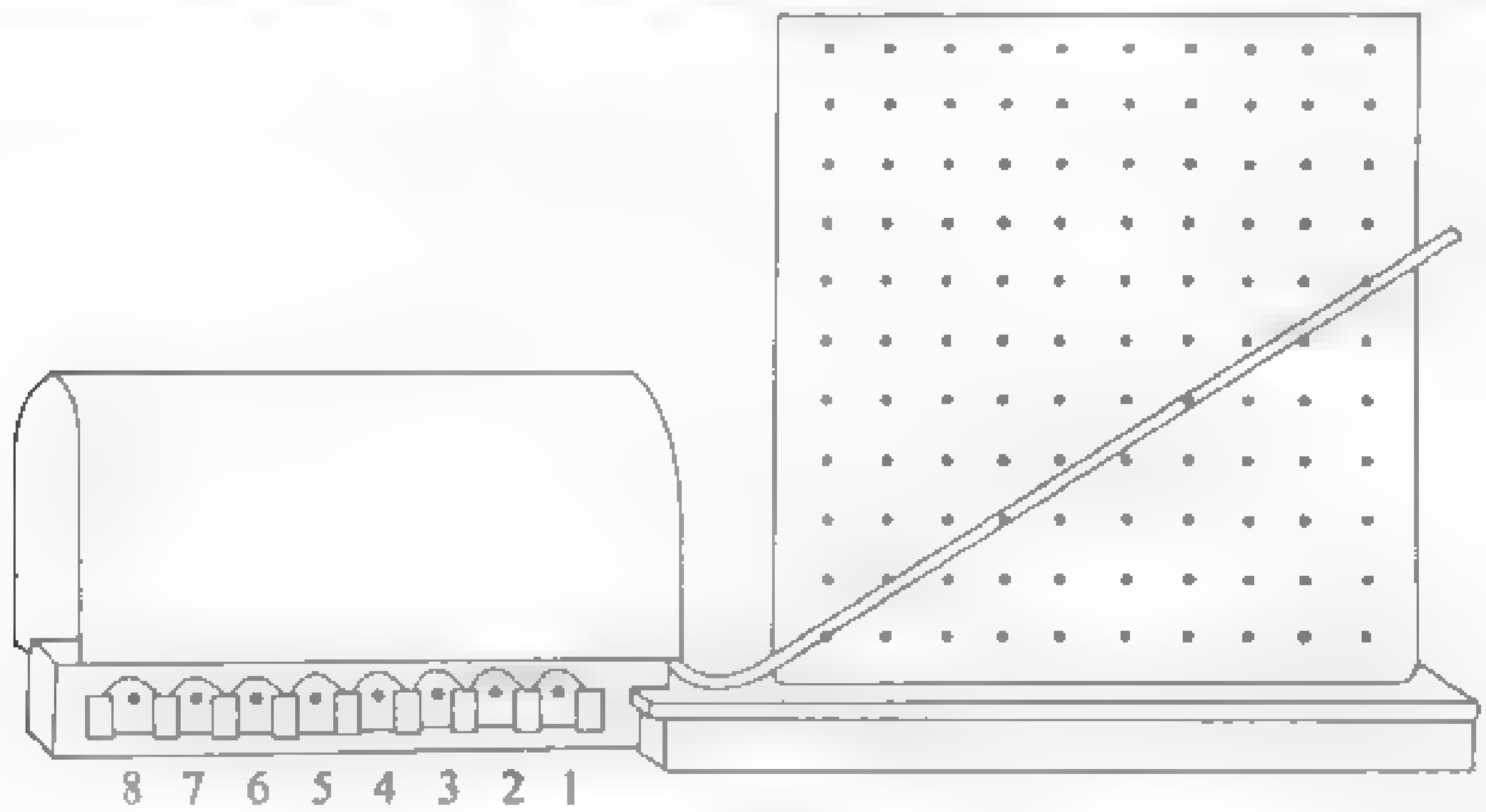


图1　通过移动木板上不同洞孔的钉子来抬高或者降低倾斜木板的高度。这还可以当作是刺激高度的指标。不同大小的球从倾斜板的不同高度下落，撞击到低端凹槽处的跳板，呈抛物线的形式弹起，最后落入不同洞内（1—8号洞内）。洞号是抛物线长度的指标。

（一）阶段Ⅰ：对实验数据尚无运算的笼统直觉

不满7岁的孩子，只能凭直觉感知平板的倾斜角和抛射距离之间的关系，但是没有将球落点高度与倾斜角度分离开来，一直认为重量在起作用。然而，后者的作用并没有被一致地形式化。

Ver（ 岁）　“这个球落进2号洞（平板低端的2号凹槽）是因为它太小了。假如它有那么大（用手势打了个比方），那就可能掉进8号洞了。”

Stu（6岁5个月）　他发现球在一定倾斜角度下先滚到1号洞，然后是2号洞。“因为这个装置更低一些。”——“要让它滚到6号洞我们要做什么呢？”——“把它

---

① 与艾伯利（H. Aebli）和缪勒（L. Muller）的合作完成。

放得更低(失败)。 不是的,你要把它抬高。我想让它滚到8号洞,就要把它抬高点(几乎成功)。是的。要使球离你更近,因为把平板放低,反之,就要抬高。”而对于球的质量,他认为小的球抛不远。

Pu(6岁6个月) “球会滚到哪里呢?” “滚到平板底部,它更重。” “你看着(我们取出一个小的球,让它落到了同一个位置)。” “因为它被抬高了。”

Mig(6岁10个月) 他说:“要让球滚得更远,应该把球抬高。” “如果不抬高会怎么样?” “那就要用力抛出去(它滚进3号洞)。这是因为不抬高的话,球滚不远。”

Val(7岁1个月) “因为球滚得很快,它仍然存在动力。” “是这个吗?” “它完全可以到达1号洞(失败了)。球肯定有动力向前的,只要再抬高一些。”

Wag(6岁7个月) “我要试试那个大的球。我要把它放得更低一些,否则它会因为太重滚得太远的。球越重,滚得越快也越远。因为重,所以有更多的动力。” “那这个呢?” “这个又小又轻,不会滚很远的。因为它没什么动力,也不重。” 但是实验表明,它滚的很远。 “因为它小,所以要下降的更快些,才能滚得远。我要试试大的球:可能会一路到达底端(实验)。是的,因为这个球大,所以它滚得远。我要试试中等大小的球(和前两个球在同一点下落)。是的,因为它重,所以滚得更快(新实验,同上)。因为球太小又轻,所以滚不远的。”(现在Wag开始质疑这一点了。)另一个球:“由于它很重,所以动力多,滚得远。我要试试这个大球;它也滚得远,因为平板很倾斜。”

以上每个实验中我们都可以很明显地发现孩子的直觉来源于他们的经历(比如滑板、雪橇和小型车子):斜坡越陡,物体下落的越快越远。但是没有将球落点高度与倾斜角度分离开来,球的下落高度也与此都是有关的,球的重量(根据大小比例判断)被认为是有核心的作用。但是赋予重量的具体作用是变化的。通常情况下,越重的球被认为滚得越远,即使也有越小的球滚得更远的情况。在这种情况下,不一致的观察结果并不能纠正被试,反而会令他处于反驳自己或者否认事实的矛盾中(就像Wag交替采取两种手段)。由于尚未掌握能够连贯整合这些结论的序列排序和对应运算,就会出现以上的情况。着重关注Stu这位不善言谈的孩子,我们可以发现他已经在倾斜角度和抛射距离之间形成了准确的对应关系。但是,当我们考察一位会说出他所有想法(甚至更多一些)的被试时,我们会发现这样的直觉仍然是非常笼统的,因为这种直觉是以一般形式出现的,尚无区别性的运算加工。

(二)阶段Ⅱ:对应运算和排除重量的尝试

从子阶段ⅡA开始,可以观察到对应关系的正确形式化,但还不够系统化,当然

也缺少分离变量所必需的形式化程序。然而，即便在这个位置，根据球呈现方式的不同，被试经常可以排除球重量这个因素，在一定程度上因为重量难以融入任何排序对应。

Gu(7岁2个月) 要让球滚得更远，"应该把球放得更高。" "是放在(向下)这里吗?"(末端) "再高点(实验) 对，就是这里。它会滚到最后一个洞那里。" "那这个球呢?"(滚到一号洞) "你要把它放低点(下一级)，因为它滑的少。" "是这里吗?"(指着中间位子) "再高点，因为它能滑行得远。"

Lau(8岁2个月) 他认为倾斜角的角度之间有着相同的对应关系。而对于球的大小，他不假思索地说："球将按照大小滚向各个洞内(越大的就滚进越大的洞内)。"(考虑到排序组合) "你说的按大小排列是什么意思呢?" "越小的球滚得越近，越大的滚得越远，中等大小的就滚到了中间。"(他做起了实验) "那所以呢?" "球都会滚走的。这和球大小一点关系也没有，结果都是一样的。"最后，他说："球滚进洞内，这要看你怎么放置倾斜板。放得越高，球滚得越远。这是由倾斜板的高度决定的。" "那球的大小呢?" "和球大小无关。"

Sch(8岁8个月) 他说："你必须抬高或者降低它的位置。"最后，"和大小有关吗?" "不，和大小无关。它们都会滚进洞的，你抬得越高滚得越远。"

在这里，倾斜角度和抛射距离的序列排序非常清晰，两者之间有近似的对应关系("愈是……愈是……")。近似是由于孩子没有评估能力，甚至不考虑区分倾斜面上向下路径距离的可能性。但好在这之间的误差不大，对应关系以粗略的方式可以运作。

但令人惊讶的是他们排除了球重量的影响。虽然不普通，但可以轻而易举地得出，Lau和Sch的实验给予了清晰的呈现。但你可以回想到，在单摆问题上只有到了阶段ⅢB才能排除球重量的影响；阶段ⅢA中12—14岁的孩子还不能区分相关的各个变量。而另一方面，我们提出球重量会影响球下落的假说是非常自然的，甚至是那些忘记了物理知识的成年人也会如此。因此，在了阶段ⅡA中排除重量这一因素，孩子们尚不会运用任何一种命题运算，这一现象给我们提出了问题。

这样看来，如果没有被试们的各种操作活动，不能得出重量和倾斜度两者之间毫无联系。实际上，当Lau想证明球大小和抛射距离之间的对应关系时，他并没有想到要同时改变斜坡的角度，因为除非刻意这么做平板不能移动。但在单摆问题中，实验的关键在于计算摇摆频率，调整单摆悬挂砝码的重量，为了得到更清晰的结果，被试总是倾向于同时改变重量和摆针(就像Lau说的，"更加不一样")。他必须使用系统的方法才能分离变量。然而，倾斜角度和球重量，很自动地被分离开了。因此，在这个任务中，孩子很容易发现不同大小的球也能落到相同的位置，而这和他之间的设想不一样。

重量容易被排除的第二原因是，重量和抛射长度之间缺乏明显的对应关系。另一方面，在单摆问题中，即使观察到否定的结果，被试仍然会反复问自己重量是否还是会起到作用。经过系统化的实验操作，儿童能够在所有可能的组合中挑选关键组合，要到

子阶段ⅢB才会出现，这些是排除重量因素的前提条件。

除了系列排序和更系统化的对应关系，子阶段ⅡB中倾斜板球下落点高度的变化十分显著。而且有趣的是，这一特性在其他实验中也出现在相同的水平(例如第十二章中的倾斜试验)，相较其他影响因素，下落高度明显地首先被区别和被形式化。但这种不成熟的区分并不能让被试只考虑高度因素而排除斜坡角度，如果要这样，就必须预先假定一个系统化的证明程序，从而判断这两个因素事实上是否是独立的。

Jea(8岁1个月) 系统化排列了倾斜角度，他说："现在是3号洞，因为我刚刚试的是2号洞。"接着，"球放得越低，就滚得越远。"之后，他用一个幅度更小的倾斜角度确认(在4而不是7的位置)："如果把它放得越远(或越高)，就好像你移动了它一个台阶。"因而，系统化系列排序的尝试让他发现了高度因素明显区别于倾斜角度。

Mid(9岁9个月) 他说："它们两个之间是有联系的。如果你放得越高(他逐个儿的将倾斜板放在5,4,…的位置)，球跳跃得就越大。我要观察这些球的跳跃(他拿出一个更小的球，开始在3,4,5,6,7,8的位置实验)结果是大球和小球一样，是高度做到的(决定抛射距离)。重量和这个毫不相关。"但他并没有深入区分高度和倾斜角度的关系。

Bli(10岁2个月) 他实验了不同角度的倾斜板："如果倾斜幅度越大，球滚得越远。" "那和球大小有关吗？" "所有的球都会跑到一个洞里的。不会一下子改变。"他拿出一个小的球做实验，又回到倾斜板观察，经过预测上的错误后，他说："我把这个球放的太后面了(=太高了)，应该往下放点(继续实验)。现在又太低了(新尝试仍旧没有调整倾斜角度)。应该把球放高些，因为如果倾斜角度小，球没有冲击力向前滚。"(=他为了补偿倾斜度小，把球从很远的地方释放，这样就有更高的高度。)经过多次新的尝试后，他说："现在我知道了。同样的高度下球会到达同样的洞内。"他试着计算出倾斜角度和球下滑长度之间的对应关系，以便每次(3次)都能到达相同的洞：倾斜10位，跳跃距离27cm；倾斜8位，跳跃距离3[illegible]cm；倾斜6位，跳跃距离3[illegible]cm；倾斜4位，跳跃距离40cm。这项实验证实了他的猜想，由此得出结论："球放得越高，越过的洞越多。"(=抛射长度越长)

由上可知，"愈是……愈是……"的普遍对应关系不再能充分满足这个阶段。更准确地说，被试更侧重的是组织系统化的对应关系，比如以下这种倾斜角度的递增关系1,2,3,…与抛射长度之间的对应关系(更重要的是，这些序列都不是在装置上直接计数的；倾斜角度是由连续钉在平板上的嵌入的钉子决定的，其间隔由各种设计区分开，比如房子，松树等)。

虽然这一阶段的对应关系已准确形式化，但并不能完全证实，原因有三。首先，面板上决定倾斜角度的孔，不像我们所设想的，并不是准确对应于各个间隔的。其次，存在很多偶然的不稳定因素(由于振动等)。最后，如果被试不够仔细，实验产生的距离也

会不同。倾斜板的内部是一个厘米刻度尺，已知一个倾斜角度，被试可以将球摆放在25，30，35cm处，因而改变球的落点高度而不需要提高或者降低倾斜板。所以，另一个偏离来源于最初的对应关系。

针对倾斜角度和抛射距离的对应关系存在变异，被试试图找到影响结果的因素和方式。首先，几乎所有被试，除了极少数例外(就像Bh)，注意到重量因素。但这一因素在阶段ⅡA中被弃用了，原因都是缺乏可见的对应关系(见Mid)。

高度的影响一直存在。在这一阶段，被试经过对对应关系的反复探索，得到更精细的结论，因而普遍发现了高度的作用。比如说，当Jea认识到他自己对应关系中的不规律性，他指出："如果你把球放得越后面(越高)，就像是你把它提高了一级"——例如，在倾斜角度4位给球一个更高的起点，你会得到和在倾斜角度7位较低的起点一样的结果。Bh根据逻辑公式(距离高×斜度低＝距离低×斜坡陡)推算一系列测量等价物，因而每次都能得到相同的结果。

但是，这些被试远远没有认识到，高度而不是距离和倾斜角度才是唯一相关的因素，虽然从倾斜角度和距离之间可以计算出高度(根据Bh的公式)。在子阶段ⅡB，子阶段ⅢA和子阶段ⅢB主张高度而排除倾斜角度与在单摆问题中主张长度而排除重量和振幅完全不同。这个问题不是说支持某一独立的因素而排除另一个，而是本身是相关的因素，排除其中的一个部分。实际上，如果当高度相同时，倾斜角度和距离都不起作用；并不存在一边是倾斜角度另一边是距离或者高度，这之间存在着逻辑的乘法关系，"倾斜角度×距离＝高度"，这里只有高度最重要。这两个被乘数，从来不是分离的两个因素。但被试还没有理解到这一事实，只能在阶段Ⅲ中大概弄懂。换句话说，在子阶段ⅡB被试认为倾斜角度和距离似乎是相互影响的两个独立因素，其中一个因素的作用从一开始就很明显了，而另外一个因素他则是刚刚才发现的。此外，他认为这是可以相互补偿的两个因素(比如Ba)。然而他必须要看到高度是唯一起作用的，要确认球弹跳距离和决定性因素高度之间的对应关系，需要完全脱离倾斜角度和距离的因素而充分考虑高度。事实上，孩子有时候能够理解这点(就像Mid说的："是高度决定的")，但我们这里得到的只是不全面的差异化陈述。

(三) 阶段Ⅲ 子阶段ⅢA：倾斜角度和距离之间必要的互补子阶段，ⅢB：发现高度是唯一决定因素

除了所运用的方法，在这个问题上子阶段ⅢA中12—14岁的孩子几乎与ⅡB的孩子没有差异。在子阶段ⅡB中，孩子们一开始系统化地探究斜度与抛射长度之间的对应关系，第二步再研究距离问题。但在子阶段ⅢA中孩子们轻而易举地提出各种假说，并且一开始就试图将各种影响因素分门别类。这样他们就能更快速地分离斜度和距离这两个共存的因素。然而，他们并没有发现高度这个唯一充分因素的重要

作用(没有比前个阶段发现更多)，由于没有采用子阶段ⅢB中分离变量的习惯性方法——一次一个变量地分离因素，"所有其他因素保持相等"。从子阶段ⅢA中我们可以得到显而易见的结果，即斜坡和距离之间存在补偿关系，而这一点在子阶段ⅢB中也可以得到。

Rou(12岁1个月)　"高到最高，它会到达这里"(最远的洞)。但斜坡仍是个独立的因素："我觉得由于球从很陡的斜坡下落，动力不大。"接着他补充道："当斜坡越高(倾斜角度)，球要放的低一些(距离)；反之，就要高一些。如果要让球滚得远(距离)，就该把倾斜的木板放在7或10的位置。当你抬高了倾斜的木板，就要压低球下落的下落点(距离)。"然后，他把倾斜的木板放在4位，(降低了)球的下落点5cm。为了能逐步的到达最近的洞口，他说："当斜坡固定不动时，就要降低球的下落点，每次5cm。"得出的结论就是："每次斜坡角度减少1°，球下落点也要降低5cm。"

Stro(12岁6个月)　"斜坡越平缓(斜坡角度越小)，就要把球放得越边上(高度越高)。"接着他得出了一些复杂的计算结果，认为："我们可以以斜坡和距离为依据，相乘得到每一个洞。"——"怎么做?"——"就是一个多些，另一个少些。"(实际上，他并没有跳出互补的定性概念。)

Her(13岁6个月)　最初探究"球重量"这一因素时认为："球重量并没什么作用，不管如何，结果都是一样的。"——"真的是这样吗?"——"我十分肯定。"就像先前其他孩子一样，他也认为增加距离和抬高斜坡得到的效果是一样的。

尤其是Rou，当他保持相同倾斜角度分析距离这个因素时，向我们呈现了只要被试们能够系统化地分析这些变量，它们是用补偿的概念整合起来的，他们就会认为高度才是唯一与此相关的因素。而这个假说也确实在子阶段ⅢB中提出并得以验证。

Sal(13岁3个月)　以"球质量才是决定性因素"的观念进行了实验。他说："越小的球滚得越快。"但事实的结果却是意料之外的。——"难道球大小也有影响?"——"不，我可不这么认为。大一点的球很显然能滚得越远，但球滚得更快，所以他们其实是互补的。"他又尝试了不同的斜坡高度，指出："要在同一斜坡上让球在高处下落。"接着他同时改变了斜坡高度和球下落点，又指出："我现在要试着变化斜坡的高度以及距离，他们之间是互补的。"——"既然做了调整，你发现了什么?"——"是的，我知道了(新实验中)。球一直是从同样高度的下落点滑下，从一样的斜坡。"(所以说高度与斜坡和距离无关)——"你确定吗?或者这是个猜测?"——"如果从同样的高度下落，无论什么斜坡，大球和小球都会滚到那(同一个洞内)。"他设计的这个实验将斜度分别在3和9位但高度控制在相等位置："你也会碰到极端的情况。"

How(16岁1个月)　以排除球重量因素的假设开始实验，他说道："我本来是觉得重量不同就会改变球下落的距离的(=抛射距离)。"接着他研究了一下倾斜角

度和距离，说道："应该把球下落点抬高一点点。"紧接着，为了证实自己的这想法，他又指出："如果把斜坡抬高，球下落点就要降低。"最后他得出了结论："这应该是取决于球的下落点。水平线是固定不变的，但是倾斜角度是可以变化的。" "什么水平线?" (他指出球下落点决定了不同倾斜角度下的高度)"球下落点是固定不变的。"——"这话什么意思?"——"高度。"

通常情况下，子阶段ⅢB的实验和子阶段ⅢA是有区别的，因为前者试图分离变量。子阶段ⅢA中被试无法从常规变量中分离出变量，原因有两点。首先是在同等倾斜角度下，距离和高度在同时变化，所以造成了他们不能分离这两个因素而只能笼统地称倾斜板上可测量的距离"高一点"或者"低一点"(如Rou和Stro)。他们认为自己已经解释了"高度"这一因素，但其实并没有形成清晰的关系概念。其次，由于非常肯定距离和斜度之间存在互补关系，事实上他们将自己局限于共变的状态，而不去寻找稳定的决定因素，因为它们把稳定因素高度与距离因素部分地混淆了。相反的，子阶段ⅢB中的被试通过轮流改变每个因素的方法分离每个变量，并且保持其余所有因素不变。在这种情况下，斜度和距离之间存在着互补，但在他们先分别改变每一个变量与结果的关系，而后才会同时改变他们。(例如Sal的实验中："以相同的倾斜角度，从高度下落球。接着，我要尝试不同的高度和距离。")最后，他们可以很清楚地区分倾斜角度，距离和高度这三个因素，而不是其中两个因素。另外，由于前两个因素之间存在互补关系，被试立即探究互补机制所预测的不变量的影响，不再仅仅满意于简单的共变关系。

但是他们是如何得出不变量是高度而不是其他两个因素的呢?无可厚非，通过他们的实验尝试得出这个认识，但从Sal的实验中可以认识到必须有初步的推理，而推理的第一步便是互补这一概念。被试发现如果已知倾斜角度是恒定的，那么距离和高度便会同时减少或增加。而另一方面，高度恒定的话，倾斜角度增加，距离则下降；反之，距离上升。也就是说高度作为互补的结果，同时是稳定的因素，即使是在其他两个因素都改变时，也能证明结果是相同的。"不管倾斜角度多大"，Sal说，你必须去寻找"同样的高度"。更具说服力的，就像How的陈述："即使角度变化，高度也是恒定的。"以上这些表达似乎呈现了发现高度因素的原因，也解释了它如此晚出现的原因。

通过分析这些青少年的推理过程，按照惯常，我们首先需要在所有的可能中挑选真实的组合项。而进一步地说，由于他们局限于根据经验来研究这些共变异因素，并没有运用三角测量计算的方法(包括他们自己以及实验结果)，发现真实的组合，不仅来自于实验产生的结果，还要满足共变的关系。(实际上，我们可以发现相较之前第三章和第四章的实验，这次的实验中的这一点是一个突破。)

令 p 表示斜度固定不变，$\bar{p}$ 表示斜度发生变化；q 和 $\bar{q}$ 表示球下落距离的不变与变化；r 和 $\bar{r}$ 表示小球下落高度的不变与变化；x 和 $\bar{x}$ 表示抛射距离结果不变和抛射距离结果改变。

这样就得到了被试陈述的(从变量间共变或不变的角度)真实的组合如下：

$$(p_0 \cdot q_0 \cdot r_0) \vee (p_0 \cdot \bar{q}_0 \cdot r_0) \vee (\bar{p}_0 \cdot q_0 \cdot \bar{r}_0) \vee (p_0 \cdot \bar{q}_0 \cdot r_0) \vee (\bar{p}_0 \cdot \bar{q}_0 \cdot r_0) \quad (1)$$

由此排除的式子为：$p \cdot q \cdot x$（当距离恒定，倾斜角度变化时，高度也必须随之变化）、$p \cdot q \cdot r$（相反的，如果距离变化而倾斜角度恒定，高度也会改变）以及 $p \cdot q \cdot r$（如果倾斜角度和距离恒定，高度也保持不变）。

如果被试能够使用析取运算，式子(1)可以等值地被试拆分为以下这两部分的结果：

$$[\bar{r}_0 \supset (\bar{p}_0 \vee \bar{q}_0)] \vee [r_0 \supset (p_0 \cdot q_0) \vee (\bar{p}_0 \cdot \bar{q}_0)] \quad (2)$$

例如，改变高度（或者球下落点）是以改变斜度、距离或两者同时为前提的，而保持高度值则是以同时改变斜度和距离或是同时保持两者为前提的

但是，很清楚我们还有以下结果：

$$[\bar{p}_0 \supset (\bar{q}_0 \vee \bar{r}_0)] \vee [p_0 \supset (q_0 \cdot r_0) \vee (\bar{q}_0 \cdot \bar{r}_0)] \quad (3)$$

以及

$$[\bar{q}_0 \supset (p_0 \vee \bar{r}_0)] \vee [q_0 \supset (p_0 \cdot r_0) \vee (\bar{p}_0 \cdot \bar{q}_0)] \quad (3a)$$

但是，被试假定高度（$r \cdot r$），而非其他两个因素，实际上起到决定作用。原因是如果将相关变化的方向考虑在内，命题(2)和(3a)中包含的三个蕴涵 $r \supset (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$；$p \supset (q \cdot r) \vee (q \cdot r)$；$q \supset (p \cdot r) \vee (p \cdot r)$ 不再是同构的。因而命题 p、q、r 可以被拆分为两对命题，我们可以用 p、q、r 分别代表斜度、距离和高度的增加，用 p、q、r 分别代表斜度、距离和高度的减少　式子如下：

$$
\begin{aligned}
&p_0 \supset [(q \cdot r) \vee (\bar{q} \cdot \bar{r}) \vee (q_0 \cdot r_0)] \\
&q_0 \supset [(p \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{r}) \vee (p_0 \cdot r_0)] \qquad (4) \\
&r_0 \supset [(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (p_0 \cdot q_0)]
\end{aligned}
$$

例如恒定高度 r 可由($p \cdot q$)或($p \cdot q$)的补偿关系得到，也可由($p \cdot q$)或者 p、q 的同时不成立得到。

从这点上，有如下假定（见 Sal）：

$$r \supseteq x \quad 或者 \quad (\bar{r}_0 \supseteq \bar{x}_0) \quad (5)$$

也就是说$r \cdot x$ 或者 $r \cdot x$ 一定是正确的（高度和结果要么同时变化，要么同时保持恒定）。

实验就给出如下正确的组合项：

$$(p_0 \cdot q_0 \cdot x_0) \vee (p_0 \cdot \bar{q}_0 \cdot \bar{x}_0) \vee (\dot{p}_0 \cdot q_0 \cdot x_0) \vee (p_0 \cdot q_0 \cdot x_0) \vee (\dot{p}_0 \cdot \dot{q}_0 \cdot x_0) \quad (6)$$

下列式子被排除了：$p \cdot q \cdot x$（因为改变斜度而不调整距离会引起高度的变化，并不能得出相同的结果）、$p \cdot q \cdot x$（相反的，$p \cdot q$ 隐含了高度的变化）和 $p \cdot q \cdot x$（斜度和距离的恒定并不会引起抛射距离的变化）。

我们由此可知式子(6)和式子(1)不谋而合，所以球起落时的高度是决定抛射距离的唯一因素这一观点得以证实　值得注意的是，上述被试并不满足于仅用高度控制变

异的结果，比如($p \cdot q \cdot x$)，($p \cdot q \cdot x$)，($p \cdot q \cdot r$)，也表明($p \cdot q \cdot r$)作为反证的合理性。Sal 甚至曾经将斜度从 3 到 9 位的变化，得出结论说："实验中也是有极值的。"

第六章 不可见磁化作用与十六种二元命题运算[1]

第一章到第五章中我们所设计的实验任务，是为了呈现被试如何通过组合的方法，在克服任务困难的过程中逐步发生变化，组合方法是形式思维以及青少年的命题逻辑法的重要方面。为了总结第一部分，我们有必要简要检测一下另一个很简单的问题，这个问题在前面的一项研究中曾经使用过。[2]它可以用来呈现阶段Ⅲ的被试们是怎样结合全套二元运算法运用析取和排除的。这一问题可以决定为什么非金属圆盘上连接的金属指针停在其中一对盒子上，而不是周围其他的盒子上。事实是，那一对盒子在蜡里藏了一些磁铁(所有的东西都在圆盘上，圆盘被分成不同的部分，每个部分颜色不同，表面相同)。

(一) 阶段Ⅰ：前运算析取命题和排除法

我们不需要再参考最小年龄段的被试们(子阶段ⅠA)的反应，因为我们在前面的研究中已经描述过了。

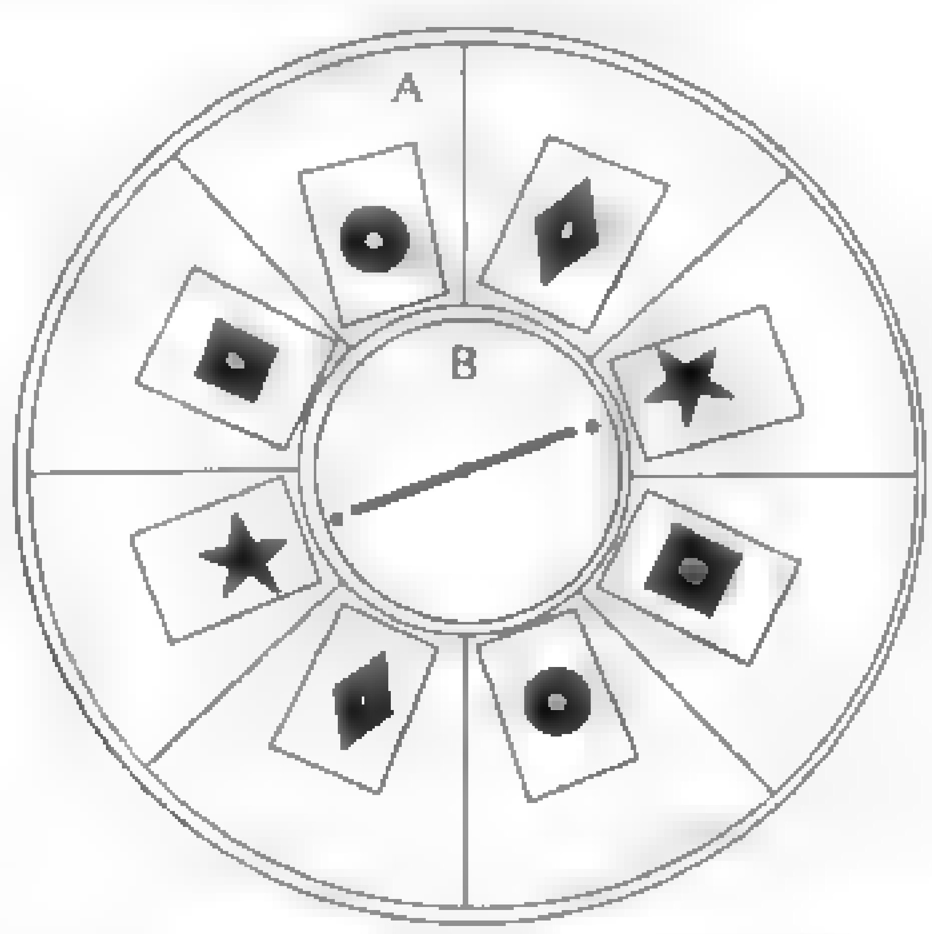


图3 其中只有一对盒子(星星符号的那一组)里藏有磁铁，其他的盒子都只有蜡。大圆盘A分成几块，颜色不同，表面相同，相对的区域着色相同。一根金属针固定在可旋转的非金属圆盘B上，每当圆盘停下来的时候，中间的金属指针总是指着其中一对盒子。这些盒子(指颜色和图案匹配的组合)可以放在不同的区域，但是总是对面相对的。假设还有一个另外的变量，即盒子重量不等。

① 与心理研究所培训研究助理丹尼斯·普伦佐(M. Denis Prinzhorn)合作。
② 皮亚杰，英海尔德：《儿童概率概念的起源》，Chap. Ⅲ。

但是在子阶段ⅠB中，我们将在阶段Ⅱ称为具体的析取命题和排除法的大概意思(比如：金属圆盘停在"这儿或那儿"、"不是那一个"等)已经以直觉描述的形式出现了：

Voi(6岁7个月) 他认为圆盘停在蓝色区域是"因为刀片(在圆盘上，用来制动的)是蓝色"，然后，因为指针停在绿色上面(装有磁铁的盒子有一段时间是放在圆盘的绿色区域的)，他解释说"绿色和黄色相配"(盒子都是黄色的)。接着他预言"会在绿色区域，因为指针总停在绿色区域" 他打开藏有磁铁的盒子，说："里面有蜡。"但是他并没有发现什么有用的事实来解释这一现象，接着，他补充道："应该也不是图案的原因。"(图案在盒子上) 藏有磁铁的盒子在红色区域。"指针会停在哪儿呢？" "我不知道，这儿或者那儿。"(红色区域或绿色区域)最后，他只能解释说"盒子里应该有什么东西"，但也没说为什么停在一些区域，而没有停在其他区域。

Web(6岁9个月) "可能停那儿，因为上面的星星"(在藏有磁铁的盒子表面)接着说："它会总是停在红色区域。" "为什么？" "我不知道，这边太重了吧。"(用来制动的刀片) "我们怎样验证是否真是这样呢？" "把它们拿走。"(拿走刀片) "它会停哪儿呢？" "蓝色区域上。" (实验：停在红色上。)"上一次真的是那个原因吗？"(因为刀片的缘故) "不是。" "那么它怎么会停在这呢？" "你推得太用力了(推圆盘的力)，我来轻轻推(指针又一次停在红色区域)。啊哈！我懂了！这个太重了(他打开盒子对比)。那个是最重的盒子。"(指的是藏有磁铁的星星盒子；事实上它并不是最重的。) "是那样吗？"(实验工作人员将磁铁放在蓝色区域，转盘停在了蓝色区域。) "啊哈！我知道了，我好开心我找到原因了。也许星星起了作用，所以盒子才会比较重(等同于强壮)，因为晚上它可以照亮街道，甚至在两座房子之间你也总能看到星星。" "但这是真实的星星吗？" "不是，它是纸做的，但是也许它起到作用了。"(！)

发展为命题间析取运算的初始形式建立在被试对两类情况部分或完全析取的观察上。在他凭直觉就意识到指针可能停在任何区域，就如Voi说的"这儿或那儿"之前，被试不需要运用具体的分类运算。他的话体现了一个发展过程的起点，它不仅引出部分包含总体，还引出可能的概念。他想说，指针会停在某一颜色区域(B)，可能是绿色(A)或者红色(A')——也就是说，凭直觉就用析取命题做了加法 $A+A'=B$，虽然此时系统运算还没有显现。

排除法以其最基本的形式：缺乏对应关系而呈现。在这个实验中也是这样，直观的对应和不对应(基于可感知的外形)可能先于形式化的对应(外形变化时，等值性仍守恒)出现。① 但是当Voi推翻盒子里面东西不同(因为并不仅仅指针停下的盒子里有

① 参见：《儿童的数概念》，第7页。

蜡，其他都有）和用来区分盒子的图案不同这两个解释（"也不是这个原因"）时，他只能注意到没有对应；他不能用更详细的语言描述他所观察到的。

当 Web 建议拿走圆盘的制动刀片来验证是否刀片对圆盘停的位置有影响时，他的这一举动是一个进展，这个建议是一个验证的初步类型。他用同样的方法否定了其他因素（力等），因为去掉这些因素后并没有消除形成的结果。从这里我们可以看到开始认识到对应关系，或者从相反行为结果认识到非对应关系，这也预示着这种行为转化成可逆运算。但是被试质问到最后的结果表明这一新生的结构并没有进一步深入。停在第一个地方时，当 Web 试图用重量不同解释结果时，他并没有比较所有盒子的重量，只是比较了两三个盒子的重量就感到足够找到原因，其实他的结果是错的。后来，更重要的一点是，他进一步深入，将指针停止的位置归因于星星图案，他认为星星不仅是"有用的"（有效的）还是"重的"（强壮的）；他这样认为是因为指针已经停在星星图案的位置了，即使星星是纸做的象征性星星罢了。

（二）子阶段ⅡA：具体析取运算和排除法的起点

当可逆的行为协调组成具体运算时，初始形式的析取运算和排除法开始被系统地建构为类和关系新群集的功能。

Kel（7 岁 5 个月）　他首先指出指针可能停"这儿或那儿或那儿；你没法预测"。接着他很快发现指针总是停在同一颜色区域（紫色）。接着，实验者将带有星星图案的盒子放在红色区域；指针就停那儿了。"那是因为你改变刀片。"（刀片是用来使圆盘停止转动的。）实验者又重新做了一次。"不对，是盒子，星星盒子刚才在紫色区域，现在在红色区域"，等等。但是他不让自己再说更多了。

Mamb（8 岁 3 个月）　一开始很长一段时间他一直认为"这取决于你转圆盘的快慢"，"可能是你转得太用力了"，诸如此类。最后由于指针一直停在星星盒子上："因为星星盒子更重。"　"那这些呢？"（更重一些的盒子）　"可能这些太重了，所以没起作用。"

Ber（9 岁 9 个月）　"他们一个轻一个重，轻的那个只稍微轻一点。"他意识到带星星的盒子和带圆圈的盒子重量相等，都比带正方形的盒子重，比带钻石的盒子轻。"是的，可能就是重量。"①

Vog（9 岁 1 个月）　他称了所有盒子的重量后说："带正方形的盒子最轻，然后是带星星的盒子和带圆圈的盒子。"　"那么为什么指针总停在带星星的盒子前呢？"　"因为带正方形的盒子与带星星的盒子相邻，它更轻。"

① 参考《儿童概率概念的起源》，第 96 页 Dan，Desp，Tos），第 97 页（Ful），第 1[illegible]1 页。

Ken(10岁) 他也假设是"与盒子和圆盘的重量有关",试图用平均重量这一概念来说清情况,根据单个盒子的总体分布来定义。——"你想不想知道你对不对?"——他比较了相等重量的盒子即带星星的盒子和带圆圈的盒子。"这个非常重;它和带星星的盒子一样重"——"但是指针停哪儿了?"——"带星星那个。"——"那么还是重量吗?"——"肯定是重量因为他们有顺序(他指出盒子的重量以一定的方式分布)。那个(带钻石的)更重。那两个带圆圈的重量相等;那两个带正方形的重量相等(但更轻一点)。所以我确定一定是重量。"——"哪几个最重?"——他觉得是带钻石的盒子。——"那么它停在那儿?"——"不。"——"那么重量还是对这个有影响?"——"嗯,当然。"(他正在考虑所有重量的一个平衡点,这个平衡点就导致指针停在平均重量处。)

在儿童概率观念的研究中,我们已经发现许多类似的案例,在这些案例中被试们假设只有平均重量才能使圆盘停下来——例如,"指针只停在重量居中的盒子前"(Ful 8岁4个月);"是这些盒子的重量,因为他们既不是很重也不是很轻"(Duf 9岁4个月)。

在这些案例中,我们发现具体的析取运算和排除法(或无排除)之间有趣的混合;它用来展示前运算水平所取得的进展以及较于真正的命题逻辑排除法而言的非形式运算的不足之处。

我们在研究概率和彩票时已经观察到这个孩子运用析取的行为。① 在这一阶段,当他从集合 B 中拎出一个元素,他发现有时它是子集 A 的代表,其他时候是子集 A' 的代表,但是在前一阶段,他通常认为它仅属于其中一个子集而不会是另一个。从目前面临的问题中,我们能发现这种析取运算的基本形式,它基于类与关系的建构过程,使用重量概念的过程中部分地揭示这一点。被试认为指针停止的位置只由重量决定;另一方面,他发现在实验中,盒子重量不等。因此,他认为重量以三种方式中的一种来起作用:最终结果取自最大值、最小值或中间值(正如 Mamb 说的不是"非常重",或 Duf 说的"既不重也不轻")。我们发现这种析取命题建立在简单的大致序列排序的基础上。正如 Ker 说的:"依次排序"形成三个类别,从最重的到最轻的。

这个问题的答案基于关系析取命题,很难描述;然而它提出了一个可用排除法的细致分析点。圆盘停止的位置仅与部分重量有对应关系,而重量的序列排序和指针停靠的频繁或准确性之间的对应关系更弱,但是这一事实并不能使这个阶段的被试摒弃重量这一因素。然而,在最后的子阶段ⅡB中,因为这个原因,重量因素被排除了。另一方面,在子阶段ⅡA中,因为不能完全对应,将被试局限在用假想最优重量的方式理解重量的作用,假想为重量的中间值。但是为什么这一假设在子阶段ⅡA中被保留,而在ⅡB中被抛弃了呢?

---

① 参考《儿童概率概念的起源》,第96页(Dan、Desp、Tos),第97页(Ful),第100—101页。

对此有一个非常简单的解释。从排除法的心理角度来讲，这个现象有特别的研究价值，而且，它跟我们已经在其他项目中深入研究过的现象也有关联[①]。在子阶段ⅡA中，尚未建立重量守恒，而且，其他许多领域已经掌握的具体运算序列排序、传递的守恒性、对应关系，在这里都没应用到。[②] 相反，9—10岁的孩子（子阶段ⅡB的起始阶段）能够同时将所有相关的运算系统化，并且能够确认守恒性。尽管在子阶段ⅡA中，孩子们并没有一直从具体运算的角度构建重量这一因素，但是孩子们仍然认为它是出现不同结果的诱因（我们在第二章物体漂浮问题中已经观察到相同的现象以及不一致的情况）。换句话说，这个孩子还不能做出系统化的排除，因为重量还没有进入运算系统这一阶段，而这一运算系统恰恰对于形式化准确对应关系是至关重要的。

在分析Ber和Ker的问答时，我们发现一个令人惊讶的情况，即他们已经知道带星星盒子（指针停在这儿）的重量和带圆圈盒子（指针没有停在这儿）的重量相等，虽然这还是没有撼动他们将重量视为关键的观点。然而，如果考虑到他们并没有将各个重量精确排序，以及这种相等并不具传递性，那么这个情况就不是那么出人意料了。一个特殊的重量就如同拥有能吸引指针的能力一样，这个特殊的重量也不能被其他任何相等的重量替代。

Vog的争论也非常有意思。他称了所有盒子的重量后，还是坚持说因为带星星的盒子重量居中，所以使得指针停在那儿了，并补充说还因为它放在更轻的带方形盒子的旁边。他把两个重量相结合的思考方式尚不具备运算式组合的典型特征，然而他描述了力量的相互作用，这种相互作用不能用守恒来描述。他也同Ker说的一样，坚持所有重量依次排列的总体效果这一想法，并且，Ker还不能清晰阐述他的想法。

但是即使重量的解释不能推动准确地排除，子阶段ⅡA还是能对各种其他因素进行具体排除，这些因素包括他们一开始认为能起决定作用的圆盘刀片、推力等。对于这些情况中的错误假设，只要被试发现缺少对应，会在不同程度上被迅速否定。

（三）子阶段ⅡB：重量的具体排除过程

在子阶段ⅡB中，处理重量的具体运算已被建构（两三年成长后能对长度和简单的数量进行运算），结果被试对出现的问题持有截然不同的态度：

Dup（10岁9个月） 开始时假设重量是一个决定因素："它取决于重量的分布。这个盒子（带磁铁的）最重（他称了所有盒子的重量）。喔，是处于中间的那个！

① 皮亚杰、英海尔德：《儿童量化观念发展》，Chaps. Ⅱ，Ⅵ，Ⅹ and Ⅺ。

② 例如，我们知道在比奈-西蒙的实验中指出，相同体积的五个不同重量的序列排序在心理年龄达到10岁的阶段才能得以实现。

最重的盒子是带钻石的那个；那个（带正方形的）是空的，这两个（藏有磁铁的星星图案的盒子和圆圈图案的盒子）重量相等（他又称了一遍）。对的，差不多相等。”接着他把圆圈图案的盒子放在星星图案盒子的位置，想来验证他的假设，但是圆盘还是停在星星图案盒子前：“你无能为力，结果总是一样，太复杂了。”他虽找不出其他解释，但还是否定了重量解释。

San（10 岁 8 个月） “重量起了作用？” “噢，不对。那个比星星图案的盒子（藏磁铁的盒子）还重，而它停在星星图案盒子前！”

Pau（11 岁 11 个月） “因为圆圈图案的盒子和星星图案的盒子重量相等，所以指针可能指向其中一个（他又做了一次实验）。对的，但肯定有什么东西对它起作用，因为总停这儿（星星图案的盒子）。”他称了其他盒子的重量，然后通过推理（近似假设推理）总结说：“如果是重量，那也应该停在最重的盒子那儿，而不是重量居中的盒子那儿。”

与传递守恒性一样，被试首次将序列排序或序列对应应用于重量解释，在上例中呈现。通过实际过程中重量与指针停止位置不能一一对应的分析，Sau 和 Pau 最后认为重量没有起作用。同样地，通过分析两个重量相等的盒子没有产生相同的效果这一现象，Dup 和 Pau 也都最终认为重量没有起作用。他们都利用了两个证据中的一个。他们要么用相等重量的盒子（当然，是没有磁铁的盒子）和藏有磁铁的盒子调换位置，要么重做实验来验证指针是否仅停在其中一个盒子前。总之，一旦构建特定维度（比如重量）的系统运算得以运用，当既不存在类与关系的对应也不存在递推性时，具体运算就很适合用来确认排除各种因素的可能性。

（四）阶段Ⅲ：析取命题和排除法

虽然早在子阶段ⅡB 就可能运用具体运算将重量排除在外，但是析取（$p \vee q \quad p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$）、简单排斥（$p \cdot q \vee p \cdot q$）或互反排斥（$p \cdot q \vee p \cdot q$）的形式运算呈现出更多的优势。首先，在析取运算或排除法的选择中，允许一些变异的存在；但更为重要的一点是，他们把这些不同的可能放在一个完整的组合里。接着，系统化整体自身的组合性决定了蕴涵、不蕴涵或不相容。为了观察这些进展，我们将参照一个案例，该案例在后文另一个研究中还会从归纳策略的角度再次被提到。

Gou（14 岁 11 个月） “可能它朝下，这边更重（因为重量使得圆盘偏低，从而指针停在最低点）或者可能有磁铁。”（他把笔记本放在圆盘下面，使之水平，然后观察到结果还是如此。） “你证明了什么？” “这有磁铁（他掂量了下盒子）。一些盒子比另一些重（或多或少重一点）。我认为更可能是里面的内容。”（物质）“你需要做什么来证明不是重量的原因呢？” 他拿开最重带有钻石图案的盒子。“接着，我改变摆放位置。如果指针仍停在相同的地方，那么重量就没起作用。但

我想拿开星星图案的盒子，我们将看到指针是否停在其他更重的盒子前（实验）。不是重量，这不是一个严谨的解释，因为指针并没有停在立起的盒子（钻石图案的盒子）前。如果重量有影响，那它只能有一个结果。所以我把一个盒子放在另一个盒子的上面，如果指针没停在这儿，那就意味着重量就没起作用；（否定实验）。你看。”“那颜色呢？”“不是，你看盒子的位置变了。但是尤其当盒子放得很近时，盒子里的东西起了作用；当它们靠得很近时，盒子起了关键作用（他将一半的盒子离得很远）。这既不是距离也不是内容。为了验证是否是内容，我将这样做（他将星星图案的盒子移开，其他的靠得很近）。指针停在近处的圆圈图案盒子和远处的星星图案盒子之间。这两者都起了作用，结果是两者的综合（在实验中星星图案的盒子是一步一步移到远处的）。更可能是距离（又做了一次实验）。似乎已经验证了，但是我不是十分确定。除非它是最重要的因素（他拿走星星图案的盒子）。不对，不是那样。星星图案的盒子确实有影响。肯定是内容。如果不是磁铁，我就不知道可能是什么了。你需要把铁放在其他盒子上。如果磁铁在那儿（圆盘），那么磁铁会朝这些盒子移动。如果磁铁在这些盒子（星星图案的盒子）里，铁在圆盘下面（他移开星星图案的盒子）。我确定是这些盒子起了作用。”

这里，我们可以看出子阶段ⅡB中的被试和阶段Ⅲ中的被试有很大不同，子阶段ⅡB中的被试仅限于运用序列对应或等值传递，而阶段Ⅲ中的被试运用形式化的组合系统，直到他对原先的假设进行推理预想出一个结果后，他才会做实验验证结果。正如子阶段ⅡB中的被试一样，Gou假设重量有相关性，但是他从一系列的可能性开始推理，一直到能够证明是否实际中有重量的作用（使装置倾斜）。这种假设推理不仅使他想到检查圆盘是否水平，还让他想到将两个盒子叠加来增加重量。

另外，Gou运用了命题运算而不是具体运算。更重要的是，它们基于一整套16种二元组合法，16种之间是可以一个接一个连续转换的；极其清楚地呈现了其内在一致的整体性。从他的操作中可以识别出以下运算：

(1) 析取运算 $p \vee q = (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$：“要么因为距离不同，要么由于内容不同（或者两个原因都有）。”

(2) 析取的反演，合取否定运算 $(p \cdot q)$：改变盒子的位置以证明重量和颜色都不是原因的假设。

(3) 合取运算 $(p \cdot q)$：内容和距离都是有效的决定因子。

(4) 合取的反演，不相容运算 $(p \cdot q)$[1] $= (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$：拿走盒子是与磁铁效应不相容的，盒子不拿走，指针才会指着它；相反，盒子拿走指针不指它，或者这两种情况都不发生。

(5) 蕴涵运算 $(p \supset q) = (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$：如果一块磁铁固定在圆盘上，

---

① 英译本此处为 $(p \cdot q)$，有误，更正为 $(p \cdot q)$。——译者注

则它将停在装有铁的盒子前面。

(6) 非蕴涵($p \cdot q$)：如果放了磁铁却吸不住，就表明其间没有蕴涵关系。

(7) 反蕴涵($q \supset p$) = ($p \cdot q$) $\vee$ ($p \cdot q$) $\vee$ ($p \cdot q$)：如果盒子中有磁铁，那么它将会使指针停下来。

(8) (1)、(4)和(10)等中包含的非反蕴涵($p \cdot q$)运算。

(9) 等价运算($p = q$) = ($p \cdot q$) $\vee$ ($p \cdot q$)：重量起作用，等于说指针停在某处是由于圆盘倾斜。

(10) 等价的反演，与反排斥运算($p \vee\!\vee q$) = ($p \cdot q$) $\vee$ ($p \cdot q$)，圆盘仍是水平的，这个事实排除了重量因子，因为圆盘是水平的表明重量不起作用；或者重量有作用，而圆盘不再是水平的。

(11) p 独立于 q 的肯定运算，即 $p[q]$ = ($p \cdot q$) $\vee$ ($p \cdot q$)；指针停止地点可能与某种颜色相符，也可能不相符，因此排除颜色作为一个相关变量。

(12) $p[q]$ 的反演(也是 $p[q]$ 的互反)，p 独立于 q 的否定运算 $p[q]$ = ($p \cdot q$) $\vee$ ($p \cdot q$)：指针不停的地点也可能与某种颜色相符或不相符

(13)—(14) q 独立于 p 的肯定运算 $q[p]$，q 独立于 p 的否定运算 $q[p]$①：这些运算在(15)中发现。

(15) 完全肯定或赘余重复($p * q$) = ($p \cdot q$) $\vee$ ($p \cdot q$) $\vee$ ($p \cdot q$) $\vee$ ($p \cdot q$)：所有可能的组合都出现了，因此不存在任何特殊的联系。例如，藏有磁铁的盒子与它所放的盒子的颜色之间不存在任何特殊关系。

(16) ($p * q$)的反演，完全否定或矛盾运算(0)：否定重量起作用同时又坚持说重量起作用，这就是矛盾。

以上这些例子均来自子阶段ⅢB 的一个被试的行为，因此我们可以不夸张地说这一阶段的青少年有可能轮流用到逻辑命题的 16 种命题组合运算。当然，子阶段ⅢA 被试的系统运算还不完善(这个处于中间过渡阶段的例子，参见我们之前对磁铁问题的研究)。② 但是当达到形式化的平衡时，那么具备"结构化的整体"典型特征的组合系统就能完全起作用，而且被试将不再满足于仅依靠简单的具体对应来进行推理。例如，当 Gou 发现指针停止的位置与重量没有对应关系时，他并不认为自己的证明是充分的("严谨的")，因为他意识到如果重量的作用造成圆盘倾斜，那么它应该和其他因素一起起作用。

总之，即使在解决像现在这样如此简单的任务中(因为简单易懂所以被用来作为第一部分的总结)，当完整的组合系统一产生，就很容易发现具体运算到形式运算的转换。这种组合系统的各种析取命题和排除法一直和蕴涵命题联系在一起。即使在子阶段

① 英译本此处为 $q[p]$，有误，更正为 $q[p]$。——译者注

② 《儿童概率概念的起源》，第 101—106 页。

ⅡA和ⅡB中发展最好的孩子也不具备这种能力，这一点让我们重新用假设演绎法审视阶段Ⅲ中被试们的反应，即使在实验中细小的细节上也能呈现出来这种差异。

第二部分　形式逻辑的运算格式

阶段Ⅲ(尤其子阶段ⅢB)青春期第一阶段思维转换的最典型特性,决不能被简化为基于16种二进制运算的命题运算形式化(后面还分析了更复杂的例子,包括三元运算等等)。相反,经验推理发展的可分析因素非常有趣,因为它们告诉我们许多新运算和概念的出现与命题逻辑的建立有着紧密联系;它们比具体阶段需要更多的智慧,起源于运算转换的整体结构("群"和"格")所蕴涵的内在命题逻辑而不是命题运算本身。

迄今为止,我们已经发现命题逻辑总是与基于"结构化整体"的组合系统联系在一起,与之相反的是,简单的类包含是由具体逻辑的类和关系的"群集"组成。但是,这个"结构化整体"和组合系统是以构成更复杂的结构为先决条件的,与这些基本群集形成对比,将可逆性的两大模式融合到单一的整体中,例如,有"群"的反向(或否定)特性和"格"的相互作用(或对称)特性。因此,我们刚才提及的以及我们将在第二部分学习的运算或新的概念已经具有了这共同的特性,这是来自于总体结构本身的特有性质,例如,它们的一般转换,并且不再仅特定于它们所产生的运算。

因此,我们用术语"运算格式"来命名与系统的整体转换有关的运算和新的概念,以区分于第一部分所分析的特定运算。在第一个实例中,它们自身就是组合的运算,不再考量它们纯粹的命题方面,而是考虑它们的一般形式。接下来,它们会包含涉及反演和互反的概念,这些概念在所有涉及平衡或作用与反作用的物理概念的问题中出现。另外,它们会包括一些守恒的概念,这些概念的发现需要运用形式思维。它们也包括比例的概念,其数学形式源于一个更一般的定性的逻辑形式。最后,我们还有相关性的概念,在某些方面与比例的概念相近。

总而言之,我们正在处理一系列格式,它的双重属性源于这样一个事实:鉴于它们的结构是以形式推理为先决条件的,它们也源于最一般特性的结构,在这种结构中产生出同样的形式思维。

第七章　有色和无色化学液体的组合[1]

我们经常能看到命题逻辑的形成，其自身标志着形式思维的出现，这需要基于一个组合系统的建立。"结构化的整体"则基于这个组合系统，表现为被试们用所有可能的方式形成一套基本关联或相互对应关系的潜在能力，以便于从它们中抽取出蕴涵、析取、排除等关系。具体阶段Ⅱ中被试们面对一个归纳问题时，局限于分类、序列排序、均衡和对应，而子阶段ⅢB的青少年们会按照所有可能的联系将所有已知的因素组合。但是到目前为止被试们遇到的问题是所涉及的因素可以任意分离和组合，或者在没有超越观察或"原始"实验的水平而进行的简单反应。有人可能会奇怪如果我们提出一个直接涉及组合的问题会发生什么，如果一个任务要得出不同的结果，其涉及的元素或因素就必须进行组合。子阶段ⅡB或甚至ⅡA中的被试能否发现一个符合实验要求的组合系统，并且可以用命题逻辑证明该组合系统的独立性？儿童必须要等到形式思维的阶段才能建立该实验的组合系统吗？就像我们在别处看到的（研究被试组合、置换和排列这些数学运算的形式化过程），阶段Ⅱ的孩子们仅能进行分散的经验的组合，不能形成一个完整的系统吗？[2]

解决这个问题最好的方法就是要求被试们自己去组合化学物质。在实验Ⅰ中，先给孩子四个盛有无色无味液体的烧瓶，这些液体在感知上完全相同的。将它们编号为：

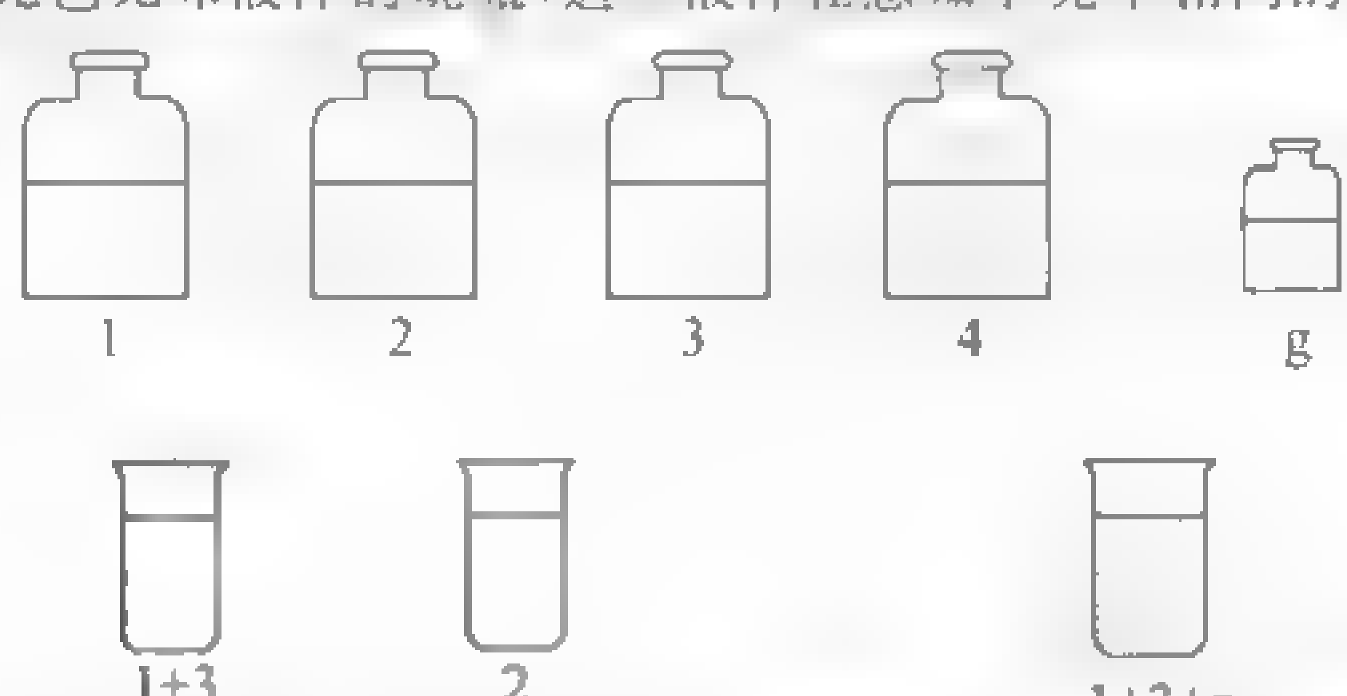


图6　本图呈现了实验Ⅰ有色和无色化学品的问题　四个相似的烧瓶盛有无色无味液体(1)稀硫酸；(2)水；(3)双氧水；(4)硫代硫酸盐。标为g的小烧瓶盛有碘化钾。给被试两个玻璃杯，一个盛有1+3，另一个盛有2。在被试面前，把几滴g分别滴入两个玻璃杯中，盛有1+3的杯中液体变成了黄色。要求被试复制出这个颜色，可以按他自己的意愿任意使用上述五种液体。

---

① 与心理学实验室的助理研究员、化学博士诺尔丁(M. Noelting)合作。

② 《儿童概率概念的起源》，Chaps. Ⅶ to Ⅸ。

(1)稀硫酸;(2)水;(3)双氧水;(4)硫代硫酸盐;加入一个瓶子(带一个滴管),称之为 g;它包含碘化钾。众所周知,在酸性介质中双氧水会氧化碘化钾。因此混合溶液(1+3+g)会变成黄色。水(2)是中性的,所以加入它不会改变颜色,但是硫代硫酸盐(4)会漂白混合溶液(1+3+g)。给被试两个玻璃杯,一个盛有1+3,另一个盛有2。在被试面前,把几滴 g 分别滴入两个玻璃杯中并且记录不同的反应。然后要求被试,按照他自己的想法用烧瓶 1,2,3,4 和 g 重现黄色。

第二个实验Ⅱ不只利用物质之间的组合,而是利用一些物质和一个指示剂的组合。取 Ac—装有 N/4 硫酸的一个滴定管;B—装有 N/4 氢氧化钠的一个滴定管;E—三个玻璃杯装的纯水,以及 Ind—另外一杯水中的一些酚酞。在这个例子中的组合如下:

(Ind×B)=粉色
(Ind×Ac)=无色
(E×B)=无色
(E×Ac)=无色
(Ind×B×Ac)=无色
(Ind×B×E)=粉色
(E×Ind)=无色
(B×Ac)=无色

实际上,Ⅱ的组合是很少的并且仅仅只是为年龄较大的儿童作为一个反证使用;被试们不需要产生颜色。至于 B×Ac,这个组合在实际操作中是用不到的,因为两个都是滴定管。

通过这两个实验,我们发现一个系统的组合系统仅仅出现在子阶段ⅢA。在子阶段ⅡA,被试局限于用 g 重复增加到 1 到 4 的所有因素。在子阶段ⅡB,可以观察到通过试误法进行组合初步尝试,但是它是不系统的。

(一)阶段Ⅰ:实证关联和前因果解释

在前运算阶段,被试们局限于每次随意地关联两个元素并且通过简单的现象论或者其他形式的前逻辑因果关系解释记录下来的结果。

Nod(岁5个月) (Ind×B)"糖浆!" (Ind×Ac)"水。" "你可以做出更多一些的糖浆吗?" "可以。你必须这么做(他摇了摇水,然后再生成 Ind×B)。它又是糖浆了。" "你可以(把它改变回)水吗?" "可以(Ind×Ac)。它又是水了。" "为什么?" "糖浆已经离开了。"(他指着一瓶一米远的甲基橙)

Mam(5岁9个月) "(Ind×B)它像葡萄酒。(Ind×Ac)它像水。" "有颜色吗?" "它走向了底部,它离开时有点像这样(手势,然后 Ind×B)。一些红色的(Ind×Ac)。然后红色的离开了玻璃杯,颜色就在底部消失了。你再也看不到

它。它融化了。"

Eg(6 岁 6 个月) "(Ind×B)它变成了粉色。可能玻璃杯里有颜料。(Ind×Ac)可能那一块融化了。可能是玻璃杯里的颜料完全地变平了。(Ind×B)玫瑰。可能这是因为水改变了 可能它改变了水的表面(Ac×Ind×E)。可能这是因为当你从试管里取出一些白色的水时,会有一个障碍阻止它并且粉色的水用完了。"

Ar(6 岁 9 个月) "(Ind×B)这次你放了一些红色的水进去。(Ind×Ac)它不能变成红色是因为红色的已经消失在水的那边了(第一次)。(Ind×B)它被形成了,它正变得有颜色。比起在这水里它可以在那水里变回得更好。(E)它不能变回来(E)因为它是一样的颜色,但它不是一样的水。"

这个类型的前运算思维既不包含证明也不包含假设。Eg 表现出来的假设——"可能这是因为……"——只能说是编造,因为它们没有指向验证,只是简单地用想象来替换或填充现实世界。因为它们不处在精确的行为情境,这些表现还停留在前因果状态;颜色是一种源自于水的活性元素(是水"改变"了)但是可能会"离开"、"走向了底部"、"变平了",以此指出它变成无形的,或者飞向了一个一米多远的烧杯。颜色也可以"回来",但仅仅是在"水"的特定烧杯中而非其他。被试甚至可能拒绝不合作的烧杯(比如,被试 Nod)。

(二) 子阶段ⅡA:通过"g"的因素乘法

在具体运算出现的时候,我们感兴趣的是,被试们自发和系统地将 g 与所有其他元素(在实验Ⅰ中)进行组合的程度,但没有进行任何其他的组合。如果被试被直接地鼓励同时地用几个因素进行组合,可以引出一些知觉层次的经验程序,但他们没有继续进行:

Ren(7 岁 1 个月) 他尝试了 4×g,然后是 2×g,1×g 和 3×g:"我觉得我已经做了所有我能做的……我把它们都尝试过了。" "你还能做什么呢?" "我不知道。"我们又给了他玻璃杯;他重复了 1×g 等等。 "你只是单独地取过每一个瓶子。你还能做什么呢?" "同时取两个瓶子。"[他尝试了 1×4×g,然后是 2×3×g,不能在两组(瓶子)之间交叉组合,例如 1×2,1×3,2×4 和 3×4。] 当我们建议他加入其他元素时,他把 1×g 放入了已经含有 2×3 的玻璃杯并使得颜色出现。"试着再一次制造出颜色。" "我要放进去两种还是三种?(他尝试了 2×4×g,然后加入 3,然后尝试了 1×4×2×g。)不,我不记得了。"等等。

Gay(7 岁 6 个月) 他也把自己局限于 4×g,1×g,3×g 和 2×g,并且没有发现。"你可以尝试用两个瓶子一起吗?" (沉默。) "尝试一下。" (4×1×g)"它不行。" "尝试一下其他的。" (3×1×g)"它可以!" "还有那个

(2),你觉得它会变成黄色吗?” (没有试验。) “你觉得是什么制造出了颜色呢?这三个一起还是只要两个?” “这个。”(3) “那么那个呢?”(1) “里面没有任何颜色。”——“那么那个呢?”(g) “是的,颜色在这里面。” “那么1和3呢?” “里面没有任何颜色。”

Im(7岁6个月) 他也从4×g,2×g,3×g和1×g开始,但是因为没有发生什么,他往3×g中加了更多滴剂,然后加到整个系列中。这之后(新的)他把四个混合到一起,但是按3×2×1×4的顺序,每一次加入滴剂:“它总是不出现。它又一次离开了。”(在3×2×1、g后颜色出现了,但此时他没有停下来,又加入4后颜色消失了。) “是什么让它离开的?” “因为我放了太多水进去。”(四个瓶子里的液体。) “我要拿走那个瓶子(4)。再试一次。”他再一次制成了整个混合物,不理解排除的建议。“它不回来是因为我放了太多进去”。

Cur(8岁11个月) 他也用g逐一地进行:“什么都没有发生。你不能成功除非你把每一样都放进同一个玻璃杯中。”他混合了四种但没有成功,他认为不是因为放进去太多而是应该选择另一种顺序,“什么都没有发生。我应该从那一个开始”(2)。他这么做了,但是因为他对置换运算的控制也没好于组合运算,他遵循了顺序2,3,4,1,g,然后他随意采取了任意顺序:“颜色没有出现是因为我反向进行了。”最后(带着总是要混合四种的意图)他遵循了顺序1×2×3×g:“它变成黄色了!”但是立刻他加入了4,然后只能再一次重新开始。“尽可能少放进去一点。”——“最可能少的,是那两个。”

这一阶段的反应很有趣,尽管这些被试具备一一对应的逻辑乘法运算,建构两两或者三三组合的想法并没有在他们身上出现。

从组合运算的角度来看,被试仅有的自发反应要么是将瓶子1到4中的每一个依次与滴管g关联,要么是同时取四个全部。在两种情况下都涉及组合,但是只有基本而有限的组合,是用类和关系“群”的乘法运算(即,在一个项目与所有其他项之间关联或对应)。

即使当他看出他已经失败了,没有实验者的提醒被试就不会用两两组合。另一方面,他的两个假设要么是纯粹定量的(“太多水”或者不够,结果是滴剂的一个新分配),要么是必须进行序列排序(Cur)。但是这种对顺序的要求也是一种群结构所引起的,因为从7岁左右习得的排序是基于序列的。然而,此处被试的反应是按顺序引入一个单一的变化或者是颠倒顺序:他无法尝试所有置换运算组合允许的可能次序。总而言之,至今仍没有组合运算出现,仅存在对应和序列排序——基于固定的类包含的一级组合。

另一个有趣的是,随着颜色已经形成,被试很清楚液体4是“一种带走颜色的水”。但是在他把四种元素1×2×3×4×g放在一起的过程中,前三种元素和g混合后颜色出现,在4的影响下颜色消失,他却没有再形成4和颜色之间可能互相排斥的想法;他简单地断言颜色消失是因为各种原因。

因为它有助于阐明非组合和组合结构之间的差异，我们应当关注，在这个阶段儿童不会想到将颜色归因于几个元素的组合。他认为这样一个元素的作用在于它自身，而不是它是否与其他元素的组合作用。例如，Gay 认为颜色是在 3 里；然后他为了把它分派给 g 把它从 3 中抽离，好像它一次只能跟一种液体关联。

使用指示剂的实验不同于这些解决方案，该实验中对于产生颜色的情况（以 Ind B 为基础）和三项的非产生颜色的情况，二对二的组合对这两种情况的完整分类而言已经足够了。那么，我们可以说逻辑乘法的具体运算能够单独提供问题的解决方法吗？非常有趣的是，对于理论上的提出它是足够的（有利的和不利的例子）但是对于它的解释是不够的。这就是因为我们刚刚看到的将颜色归因于一个单一液体的缘故。

在子阶段ⅡA，第二个装置的元素引起了下列关联。在某些例子中，玻璃杯（E 和 Ind 被认知为相同的）相继地与基础 B 和酸性的 Ac 关联。但是从 7 岁开始，儿童可以习得完整表格的四个单元格（Ind × B）+（E × B）+（Ind × Ac）+（E × Ac），因此可能发现规律：

Sehnc（7 岁 5 个月） 他联合（Ind × B）粉色的，（Ind × Ac）无色的，（E × B）无色的。"没有更多的粉色了"；再一次（E × B）："粉色不再出现了。"（Ind × B）"粉色又出现了。"——"你可以使红色消失吗？"——"你放进去一点点白色。"（他联合 Ind × Ac 和 E × Ac）——"他们都是一样的吗，这四个玻璃杯？"（E 和 Ind）——"不……一样（他尝试了 Ind × B 和 E × B）不一样。"（正确）——"那么滴定管呢？"——"不一样，这是粉色（B），这是白色（Ac）。"——"你可以使粉色从这个玻璃杯里消失吗？"（Ind×B）——"可以。"（他倒进去一些酸）

然而，这些乘法运算在两个方面不同于完整的组合反应。首先，对被试来说即使发现了两个玻璃杯的差异，也不会将两个玻璃杯组合（E × Ind），也不会组合两个滴定管，因此，他仅限于四个基本的组合（玻璃杯 E × 滴定管 B）+（玻璃杯 Ind × 滴定管 B）+（玻璃杯 E × 滴定管 Ac）+（玻璃杯 Ind × 滴定管 Ac）。其次，即使发现了定律（Ind × B——粉色的），被试也不能总结出颜色是因为组合而出现的；相反的，他认为是基液和指示剂包含了颜色，因而使用了一种"产生粉色的装置"意味的潜在概念，而没有建立可能组合的观念，组合的每个单元对应一个不同的结果。

（三）子阶段ⅡB：实证性引入 *n*-*n* 组合的乘法运算

子阶段ⅡB 的反应与前述阶段的反应是类似的，但是出现了一个可见的进步，也就是 *n*-*n* 组合的出现。然而，被试至今还没有发现任何体系，仅仅涉及试验性的实证努力：

Kis（○岁 6 个月） 从（3 × g）+（1 × g）+（2 × g）+（4 × g）开始，之后他自发地把四个玻璃杯中的液体混合后放入另一个玻璃杯，但是没有进一步的结果。"好

的，我们再重新开始。"这一次他先混合4×g，然后是1×g："没有结果。"然后他加入2×g，观察并最后加入3×g。"尝试另一种(1×g，然后2×g，然后3×g)。啊！(黄色出现了，但是他加入了4×g)天啊！所以是这个(4)使颜色消失，3能得到最好的颜色。""你可以用更少的瓶子使颜色出现吗?""不能。""试做。"(他尝试了一些两两组合，不过是随机的。)

Alb(11岁4个月) 从1×2×3×4×g，然后换顺序：3×1×4×2×g。"这是不同的，因为第一次我是按顺序的而这一次我没有。(他放入2×4×1×3×g)没有得到什么。"(他尝试了一些随机的数列，然后放弃了努力。)"你必须要取所有的元素吗?""不用，你可以取2或3种如果你想的话(他无系统地进行了尝试并且偶然地成功了)。颜色改变了！"

Tur(11岁6个月) 从1×g等开始。"这不行。你必须混合所有的四种(他这么做了)。这也不行(他多次改变了顺序但没有成功，然后他试着两两组合：1×4×g，2×3×g，3×4×g，然后2×1×g)。我好奇是否这些里面都没有水！"然后他自发地移到三三组合(×g)，但是没有按照顺序：3×4×1×g，然后2×3×4×g，然后1×4×2×g，然后3×1×2×g。"是这个。""为了得到颜色你必须做什么?""放入2。""这三个都是必要的吗?""每次一个(总是和g一起)不能成功。似乎两个元素是不可以的，一种液体丢失了。""你确定你已经把两两组合都尝试过了?""不确定(他另外尝试了2×1×g，已经尝试过了，然后是3×1×g)。成功了！是1和3！""告诉我瓶子里的液体有什么作用。""1是着色剂，2阻止颜色；不，它可能没有阻止，因为颜色可以出现。3带走2的影响，并且4没有任何影响。"

我们看到，就像子阶段ⅡA，这些被试是从g乘以每一个元素或者同时取所有四种开始的，但是最后他们自发地使用两两组合或者三三组合(每一次都和g一起)。这是这个子阶段真正的创新，因为在子阶段ⅡA这种类型的组合必须靠实验人员唤起。但是这些组合不是系统的，这一事实定义了这个子阶段的上限：Tur作为引例中表现最好的一个，也不能全部获得6个可能的两两(×g)组合。

关于颜色的原因，仍旧在寻求特定的元素而不是它们的组合：Tur仅在1中查找颜色并且曲解了2、3和4的作用。其他人发现了4的消极影响，却是直接的(且偶然的)形式化没有一个特定的证明方法。

关于指示剂(实验Ⅱ)，值得注意的仅有创新是出现了两个玻璃杯(E×Ind)之间的组合，这说明不再仅仅是一个二维的乘法表格而是对所有可能组合的搜索。但是解释仍旧一样：

Mer(9岁3个月) 他尝试了E×B；Ind×Ac；Ind×B；E×Ac："那是(B)，它使得颜色变红，并且在那个玻璃杯中(Ac)它保持白色。""那么在这些玻璃杯中，它是一样的吗?""水是不一样的。""哪一个使颜色出现?""两个都有，

在这个玻璃杯(Ind)和那里(B)。"　"它们一样吗?"(B 和 Ind)　"一样。"　"可以给我看吗?"　[他混合了 Ind×B(红色的);然后 Ind×E(无色的)]"噢!不,他们不一样而且那个(B)和那个不一样。"(Ac)　"这四个是不是都不一样?"　"不一样。"　"告诉我那个里面是什么?"(B)　"它使颜色变红。"　"那么那个呢?"(Ac)　"它把水漂白。"　"那么那个呢?"(E)　"那里面没有任何球。"(红色色素)　"那里呢?"(Ind)　"这里面有球。"

注意到这里有新的组合 E×Ind,这一设计为了观察 B 和 Ind 是否是相似的(是一种证明,但不完整)。但是被试的解释和子阶段ⅡA 时一样:颜色被认为实质上包含在 B 和 Ind(潜在的)中或者是有一个隐藏起来的"颜色球"(不可见的内容)。

(四) 子阶段ⅢA:系统 *n-n* 组合的形成

形式阶段出现了两个创新,其一是运用 *n-n* 组合的系统方法,其二是理解了颜色的出现是因为组合。如下文所示:

Sar(12 岁 3 个月)　"让我制造出更多的黄色。"　"你是从混合了四种液体的黄色玻璃杯中取的液体吗?"　"我不会告诉你。"　(他首先用 1×2×g 尝试,然后 2×g×4×g)"还不行。(他试着去闻液体的气味,然后尝试了 1×4×g)还是没有黄色。相当大的一个谜题!(他尝试了四种,然后每一个独立地和 g 一起;然后他自发地用各种各样的两两组合继续下去,但是他感觉他忘记了其中一些。)我最好把它写下来提醒自己:1×4 已经试过了;1×3 已经试过了;还有 2×3。还有一些我没有试过。(他发现了所有的六种组合,然后加入滴剂并且在 1×3×g 找到了黄色。)啊!它变成黄色了　你需要 1、3 和滴剂。"　"黄色在哪里?"……　"在那里。"(g)　"不,他们在一起。"　"那么 2 呢?"　"我不认为它有任何影响,它是水。"　"那么 4 呢?"——"它也没有任何作用,它也是水。但是我想再试一次;你永远不要太确信(他尝试了 2×4×g)。给我一玻璃杯的水(他从水龙头取了一玻璃杯的水然后混合 3×1×水×g　也就是,这个组合还显示出颜色,即便加上了从水龙头取的水,知道 1×2×3×4×g 不会出现什么)。不,它不是水。它可能是一种物质会阻止着色(他把 1×3×2×g 放一起,然后是 1×3×4×g)。啊!就是这样!那一个(4)阻止着色。"　"那么那一个呢?"(2)　"它是水。"

Cha(13 岁)　"你必须用所有的瓶子尝试。我会从这个开始到结束(用 g 从 1 到 4)。它不起任何作用。可能你需要混合它们(他尝试了 1×2×g,然后 1×3×g)。它变成黄色了。但是有其他变成黄色的方法吗?我要尝试(1×4×g,2×3×g,2×4×g,3×4×g,加上之前的两个组合,这里系统地给出了六个两两组合)。这行不通。它只在(1×3×g)行得通。"　"是的,那么关于 2 和 4 呢?"　"2 和 4

不会让颜色混合在一起。它们是消极的。也许你可以把4加进 $1\times3\times g$ 来看看是否它会抵消颜色(他这么做了)。液体4完全抵消了颜色。你不得不看看是否2也有同样的影响(他尝试了)。不,所以2和4是不一样的,因为4作用于 1×3 而2没有。”——“2和4里面是什么?”——“4里面当然是水。不,相反,2里面当然是水因为它不会作用于液体;它使形势变得更清楚。”——“那么如果我告诉你4是水呢?”——“如果4是水的话,当你把它放进 1×3 时,它不会完全阻止黄色的形成。它不是水;它是有害的东西。”

我们看到这些被试和子阶段ⅡB的被试在态度上完全不同,尽管后者也曾经尝试了一些 $n n$ 的组合。子阶段ⅢA中出现的新态度可以从所采用的组合方法和推理本身发现。

从方法的角度来看,两种成就值得关注。第一个成就,建立了一个系统的实验所涉及的所有数字的 $n n$ 组合系统。例如,Sar,他害怕忘记一些组合,写出了一张书面的表,Cha毫不犹豫地算出了六种两两组合。我们再一次遇到这种现象(尽管当它是自发时在形式上更有意义),在另一项研究跟随指示的组合运算任务中被试自己提出了运算。①在这些组合的运用上,第二个成就同样重要(因为这种应用显然是有需要的,或者换句话说,功能的考量决定了对应结构的完成):一旦发现组合 $1\times3\times g$ 引起颜色,被试并不满足于单一的解决问题方法,他没有停下来而是继续寻找其他的方法。因此,他主要的兴趣不是借助一个特定的组合获得任务成功,而是理解这个组合在所有可能的组合里所发挥的作用。

这使我们的推理能力得以发展。被试使用组合运算的方式说明他们此时此刻不关心特定的数学运算(此外,所需要的这些运算,被试们在课堂上尚未学习);但是当然我们涉及的是一个普遍的逻辑结构,类同于子阶段ⅡA使用的乘法群,并且在子阶段ⅡB后倾向于完成这个结构。

同时因为阶段Ⅲ的被试们把实验中涉及的因素相互间进行组合(装于四个烧瓶中的液体),他们就能借助有着相同形式的组合系统,即16个二进制的命题,形成他们自己的判断(一一组合、二二组合、三三组合、四个一起、零,形成四种基本的可能组合 $p\cdot q \vee p\cdot q \vee p\cdot q \vee p\cdot q$)。也就是说,通过被试在实验中组合因素的过程,他们生成了一个与观察到的现象对应的组合系统。这就是他们确定合取、蕴涵、排斥等关系的方式,依赖于他们如何解释在实验中已经建立的组合。更进一步地,这一事实也解释了他们所取得的进展——他们自发地建立组合运算——对其演绎推理和语言陈述的形成都有意义。

这个推理过程在元素2和4上尤其明显。元素2被判断为中立的因为它有时候出现,有时候不出现,在有颜色的组合里和其他的组合里一样。如果 p 表示颜色的出现,q

① 《儿童概率概念的起源》,Chap. Ⅶ.

表示元素 2 的出现，然后被试看到存在如下情况：

$$(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(p\cdot q)=(p\,{}^{\circ}q) \tag{1}$$

因此排除了 2 带来任何积极或消极影响的可能性："这是水。"Sar 和 Cha 总结说。另一方面，在液体 1 和颜色之间有着相互的排斥关系或者不相容，如同 Cha 清楚地说的：

$$(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)=(p\ \mathrm{W}\ q) \tag{2}$$

或者

$$(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})=p|q \tag{3}$$

（这里 q 表示液体 4）。

但是，根据 Sar 已建立 $p\cdot q$ 形式化的组合这一事实（组合 1 × 4，3 × 4，等），一开始他相信 4 是中立的，就和 2 一样，所以他在一个组合里（1 × 3 × 2 × g）用 4 替代了 2 并且察觉到 1 × 3 × 4 × g 褪色了，由此 $(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$ 的组合具有相反排斥的特性。

其次，推理过程的形式化模式（基于因素的组合以及后续陈述自身的组合）自然地引导被试探寻到产生颜色的原因。这个原因不再是在一个或另一个元素上寻找而是在它们的组合中寻找，或者，更准确地说，在它们相互组合这一确切的事实中。例如，Sar 拒绝在 g 里查找颜色因为"它们混合在一起"——它是整体（混合物）1 × 3 × g 同样即是原因；Cha 寻找那些产生颜色"或者不混合产生颜色"的元素们；然后另一个被试 Sie（12 岁 6 个月）声称："这一个（s），加入到 1 和 g，产生了颜色；3 单独的时候不起作用而 1 单独的时候也不起作用。"由此，如果令 p，q 和 r 分别代表"1，3 和 g 显示出效果"，x 代表"颜色出现"：

$$x\supset(p\cdot q\cdot r)\text{并且 }x\supset r\text{ 不再成立} \tag{4}$$

这个阶段的被试对实验 Ⅱ 的反应（使用指示器），与先前阶段相比没有新的进展。然而值得注意的是，甚至在完成二维乘法表格对应的四格组合之后，子阶段 ⅢB 的被试根据我们上文描述过的格式，就已经得到结论，即颜色是组合的结果。

Vir（13 岁 4 个月）：关联 Ind × B，E × Ac，Ind × Ac 和 E × B："你怎么认为它？"——"很简单那两个玻璃杯里有化学的水而另两个里面是普通的水……随着一支（滴定管）变成了红色而另一支什么都没有发生。"——"所以颜色是从哪里来的？"——"它仅仅是两种水的接触……当它们相互接触时颜色出现了。"然后他传递到组合 Ind × E 乃至 Ac × B 以及三重的组合来研究后续的反应。

显然，甚至在他对最初二维表格格式的组合进行扩展之前，他已经对颜色有了一个来自于组合的解释。

（五）子阶段 ⅢB：系统的平衡化

在实验 Ⅰ 中子阶段 ⅢA 和 ⅢB 之间的区别仅仅在程度上，实际上在这种情况下完全没有必要应用"所有其他因素保持相等"的方法，因为因素已经处于一个分离的状态

因此，子阶段ⅢB仅有的创新是组合，尤其是验证过程以更系统化的方式呈现，即这个水平以一个平衡点出现，而前一个水平还是组织过程的一个阶段：

> Eng(14岁6个月) 从2×g，1×g，3×g和4×g开始："不行，它没有变成黄色。所以你必须混合它们。"他继续六种两两组合并且在最后碰上1×3×g："我想这次它能够成功。"——"为什么？"——"还是1和3和一些水。"——"你认为它是水？"——"是的，在气味上没有区别。我认为它是水。"——"你可以给我看吗？"——他用一些水代替了g：1×3×水。"不，它不是水。它是一种化学产品：它和1、3组合起来然后它变成了黄色的液体(他继续三三组合并从用2和4分别代替g开始，即，1×3×2和1×3×4)。不，这两种产品和滴剂不一样：它们不能和1、3一起产生颜色(然后他尝试了1×3×g×2)。放入2它还保持一样。我可以立刻用4尝试(1×3×g×4)。它又变成白色了：4是g的反面因为4让颜色消失了而g让颜色出现。"——"你认为(任何一个)瓶子里有水吗？"——"我会尝试(他系统地用水代替1和3，尝试了1×g×水和3×g×水，已经尝试过1×3×水)。不，那说明3不是水而且1不是水。"他注意到玻璃杯1×3×g×2比1×3×g保持得更清晰。"我想2应该是水，可能1也是？(他再一次尝试了1×3×g×4)所以它不是水：我忘记它变成白色了：4是一种让白色回来的产品。"

因此结果和在ⅢA中的一样(除了2的中立特性在较早的阶段没有被系统地建立)。但是，发现结果的方法更加直接，因为从一开始，被试就用验证的视角去组织实验。这个方法可以被描述为替代和添加的概括。例如，已经建立颜色起因于1×3×g的认识，被试用2然后4代替g来观察他们是否起着同等的作用；然后他立刻回到1×3×g并分别在混合物中加入2和4以确定这些添加物的影响。但需要我们清楚理解的是，替代和添加一样，已经在阶段ⅢA的组合系统中被运用。当被试构建组合1×2，1×3和1×4，这些整齐的结构意味着3置换2，接下来4置换2；然后他从两两组合转变成三三组合，在给出的一对(例如1×2)中轮流加入元素3和4，即，1×2×3和1×2×4。此外，正如我们所看到的，子阶段ⅢA的被试们已经用这些替代和添加来证明一定的效果。因此，子阶段ⅢB仅有的创新是被试在实际建构这些组合时，能够更快地理解如何通过替代和添加来确定各个元素的效用。因此，首要的是，这个阶段的进展体现在：验证的组织过程，探索方法和验证方法的整合过程。从一开始，组合系统就变成一个确证推论的工具。

在更普遍的水平，这个实验给我们的经验是，它指出了组织模式或组合运算的整体结构与那些形式化的或命题间的运算之间，有着紧密相关性。被试在实验情境中组合元素或因素的同时，他也进行了命题陈述的组合，借此表达现实的组合结果，并用这种方式在意识上组织了包括合取、析取、排斥等关系的二元运算系统。但是，这一巧合并不是那么让人惊讶，因为我们意识到这两个现象在本质上是完全相同的。换句话说，命题运算的系统实际上是一个组合系统，正如从被试的观点来说，对实验数据运用组合运

算的唯一目的是使被试建立这样的逻辑连接变成可能。然而，我们必须实证地呈现组合运算和命题运算之间紧密的关系确实存在，并且为了做到这一点，我们需要检验儿童和青少年对实验情境的反应，在这种实验情境中，不用任何指导不强加被试任何一种运算，而是通过完全自然和自发的方式去让其得以发现和组织。

第八章 水平面上的运动守恒[1]

我们描述过的第一种形式运算格式是组合运算格式，因为命题运算系统典型的格结构隐含了一个组合系统。另一方面，第二种我们正要学习的运算格式，来源于群结构和以反演为显著特征的可逆性。接下来，我们将在讨论部分详细阐述，这种形式运算系统由格和群构成，从而将互相作用转换和反演转换整合成为一个单一的集合。

本次实验主要是使用一个弹簧装置发射出一个球[2]，让球在水平面上滚动。如果没有外部障碍干扰，则球将保持匀速直线运动（牛顿第一定律即惯性定律）。然而实际上，有许多因素干扰阻碍了球惯性的自由运动，这些因素包括摩擦力即球重量的函数，空气阻力即球体积的函数，还有桌面的不光滑，等等。结果出现了两个十分有趣的问题，而这两个必须依靠形式思维来解决：(1)什么是理想或者理论上可能的而在现实中是无法实现的情况。换句话来说，如何理解在这种永远无法观察的惯性运动的守恒呢？从物理学与数学的观点来看，运动守恒是一组不变量，而我们特别想知道，理解守恒的概念是否也可以以反演可逆性为前提，从纯逻辑与定性观点来看，反演是表征转换群的特征的。我们将尝试证明这一点。(2)相对可能性的问题，即实际上有多少可能性被实现的问题，由于减速因素和一些干扰引起运动的改变，通过这些因素解释一些特别球不规则、波动性的运动过程。

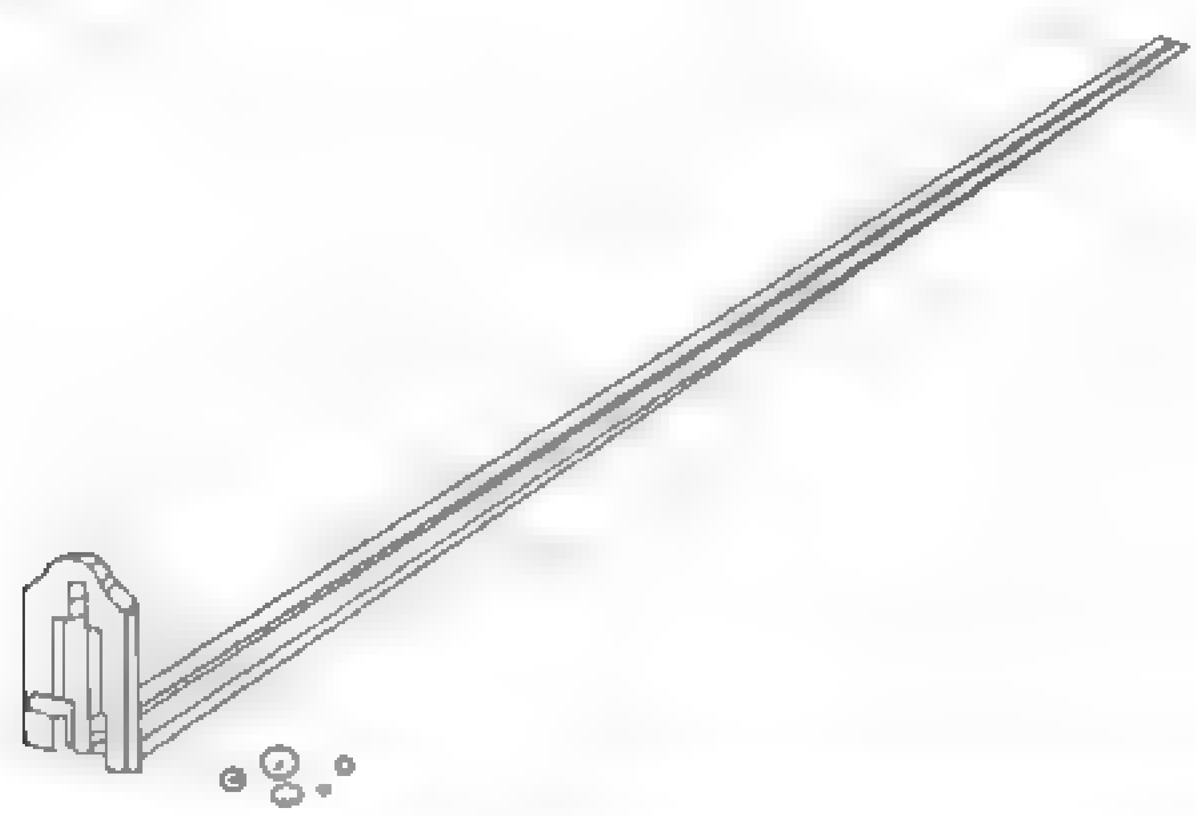


图7 水平面上的运动守恒通过一个弹簧装置来实现，它可以发射不同大小的球。这些球在水平面上滚动，要求被试预测它们的停止位置。

被试的任务是预测当使用不同大小及重量的球时运动的停止点，并解释所观察到的运动。我们感兴趣的地方在于，如果序列排序和对应关系的具体运算能够建立起球

① 与韦伊(A. M. Weil)及教育科学研究所以前的学生巴尔(J. Bal)合作。

② 实验材料包括一系列各种重量和体积的球。

停止点与球性质间的若干关系，理想惯性守恒运动已经超出了"具体运算"的界限，因为这种守恒在通常的实验条件下是无法实现的。

（一）阶段Ⅰ：缺乏客观性以及使用矛盾解释

年龄很小的被试对于这个实验反应与他们对于浮体问题的反应一样（第 章），即有一些前因果水平的预测和解释，具有一定的规律性，但又是相互矛盾的：轻的球会滚得更远因为它们更容易滚动起来，大的球则因为比较强壮；又或者在没有力时运动就停止了（施加在移动体上的力或者是移动体本身的力），或因最初推动物体的力衰减，或因本身的疲惫，或因要休息的趋势，运动会自行停止。

Ra(5岁 个月) 他尝试着通过用双手将球平行放置，在不接触的情况下延长或者停止球的运动。有时候小球会滚更远，有时候大球会滚更远，前者还是因为它们很轻，后者还是因为他们很重，但是当重的那个球滚得相对较近时，是因为"它们太重了"。

Bru(6岁1个月) "它们几个球滚得距离会一样远吗？" "不，它们中有一些会滚得更远。" "哪一个呢？" "这个。"（小的木质球） "为什么呢？" "因为它们更小。" "那其他球哪个会滚得更远呢？" "那个（也是一个较小的木质球），因为它也比较小，还有那个球（大的铜质球）。" "为什么是那个呢？" "因为那个更大，还有那里的那个球（大的铅质球），因为它很大。"我们要求孩子向大家指出四个球停止滚动的地方，他回答道："小木球在那里停（距离出发点7—8个单位），因为它比较小；那个大的铅球在那里（1 11个单位处）。"小的铅球也被放置在13—14单位处，就像小铜球一样；大木球在 个单位处，"因为它比较大，那个大铅球在那里（19—2 个单位处），因为它大；这个小木球在这里（21个单位处），因为它比较小。"显而易见的，小球预期滚动的距离从7—8至21个单位，因为它们小；大球预期的滚动距离从 7至19—20个单位，因为它们比较大。接着我们追问孩子原因，发现他的回答都很相似，除了最后一个值得注意："球不能滚得远是因为它们没有旗子。"

Mey(6岁8个月) "小木球不会滚得非常远，因为它们小。" "那这个呢？"（大的木质球） "它不能滚得非常远，因为它大。"接着又说："这两个大的不会滚得很远，因为它们大……这二个球不会像大的滚得一样远。"

预测中的矛盾证明孩子思想中缺乏任何规则。他的解释并没有实现更高的一致性，却把所有的运动与活动的力联系了起来。

（二）阶段ⅡA：努力消除矛盾和实验后修正

尽管物体运动守恒不是经常能观察到的（在亚里士多德的观点中，运动是由力所引

起的，而停止运动是自发的）。并且，尽管预测是基于多种因素之上的（错误或者正确的），然而，被试的各种观点和对实验结果的运用呈现出了一定的内在统一性。

Pir（7岁6个月） “在这些球中，有些会滚得比其他球远。” “为什么呢？” “这个球滚得远是因为它比较大，而那个滚得不太远是因为它比较小（第一个球开始运动）。它没有我想象中的那么远。” “为什么？” “因为它重。”

Nic（8岁） “大的球会滚得远一点，因为小球有更多的重量。”并且“那个球不会滚得远因为它大、重并且是铁做的。”

Hal（8岁3个月） “这个大球不会滚得远是因为小球比较轻。”当一个球在接近起点的地方停下时：“这是因为这个球比我想象中的重。”当将一个小的铜球与一个大的铝球相比较时：“它们在同一个地方停下是因为它们有同样的重量”。

但是这个阶段使用力量作解释的困难仍在于调和力本身与力所作用的物体，调和推动物体的力和运动物体本身的力，尤其后者时而重，时而轻。

Hor（8岁6个月） “这个球（大，铝）会滚得更远因为它比较重。”（力量本身与重量是联系在一起的）。她将铜球滚动起来：“它不会滚得远因为它很小。” “其他的呢？” “我没有用足够的力去推它。”接下来大的木球：“它会不停地滚下去，因为它轻。”

尽管努力地去消除这些矛盾，一些残留的矛盾还是存在，因为重球处于运动时有更大的力，但是不容易从静止状态被推动，反之轻球在运动时没有更大的力，但是更加容易被推动。

（三）阶段ⅡB：开始转换问题来分析球速减缓的原因

这个水平所使用的解释与前面的阶段没有什么不同，尽管在统一这些因素方面做了更多的努力但仍无效果。然而，由于孩子对结果中的机会变异更加敏感，他展现出了转换问题的趋势，尝试解释球速度减慢的原因而不是引起运动的原因。他并没有意识到这一趋势。更特别的是，渐渐的重量不再被认为是运动起因，而开始被认为是（间接）球缓慢停下的原因。此外，在一定程度上，被试认识到停止点的不同归咎于体积、重量以及发射球的作用力大小等因素，在很大可能上，他们认为重量与体积对球有制动作用，然而不大可能再认为轻的重量与小的尺寸是延长运动的原因。这两种判断看上去是等价相同的；在下面，我们会看到这两点至少是不真实的。

Jad（1）岁） 他指着一块离开20cm左右的区域，针对一个球说：“这个球太大以至于不能滚得更远”（与终点做比较）。但在同时“它太轻了”以至于不能在这块区域之前停下。

这种判断显而易见地展示了被试转换问题的趋势。但是他不大可能怀疑他的解释仍然与子阶段ⅡA部分中的解释相同。特别是，他认为空气通过反作用促进球运动，而

不是阻碍运动。

（四）子阶段ⅢA:实验过程中运动问题的明显逆转

这一水平与前面显著的区别在于,被试解释的目的发生了逆转:不再探究球为什么向前移动,而转为探究在特定的时间里什么阻碍了球的运动。

正如我们所见,这种逆转现象在子阶段ⅡB就不知不觉地出现。相比之下,尽管在一开始ⅢA被试只想到要去预测球运动的情况,但是实验过程立刻将他们的注意力转移到了探究球减速、停止的原因上。因此,对于这些被试而言,运动停止不再是一个积极的状态,也不是静止或者运动的终止;相反,它成了一个消极的状态,必须通过介入一些新因素去解释它,而这些新因素是与运动的积极状态相对立的。

Mal(12岁3个月) "为了让球滚得更远么?" "你得用力拉动扳机(弹簧)。"(实验) "那么,为什么它没有滚得更远呢?" "是的,但是它的拉伸不好(平板不够光滑);球不会滚得那么远。"

Chap(12岁3个月) 他预测大的球滚得会更远一点,因为它们很重。在实验过后,他改变了他的解释。 "为什么轻的球滚得更远?" "这取决于是否有风。" "什么?" "是风(空气)让球停止继续运动。当没有太大风时,轻的球滚得更远是因为没有什么再阻挡他们。" "那重的球呢?" "我不知道。"

Met(13岁3个月) "空气阻碍了球的运动,让球没有滚得更远。"

因此,从子阶段ⅢA开始,被试提出了两个让运动停止的主要因素:摩擦(地形)和空气阻力。

毫无疑问,解释方向逆转中的进展要归符于早期形式思维得以统一的需求。因为不论是重量还是体积都不是运动的成因(与基于此概念的解释相比),并且球滚得远的在一定比例是因为球既小且轻,由此可见没有任何简单的原因能够让球延续运动。但是与造成运动停止的种种因素相比,引起运动本身的复杂原因更难以被认识(可以被视为任何简单现象的原型)。然而,在这个阶段,被试还是以寻找统一解释开始的,尽管观察到了发散和偶然变化的结果,但这本身也是促使他转变问题方向的原因之一。这就是为什么他在起初新的进攻趋向中没有成功的原因。一次又一次尝试之后,他仍不能同时确定所有的相关变量。因此,Chap发现了空气阻力的因素,但没有想到重球所受的摩擦力,而Mal想到了相对的一面。

（五）子阶段ⅢB:运动的守恒

最后,基于子阶段ⅢA中视角反转的结果对子阶段ⅢB进行根本解释:惯性的运动守恒。应该说,所有的被试都不能解决这个问题。自然地,在这里文化有一定的影响作

用(社会不得不等候伽利略和笛卡尔的"知识的突变",柯瓦雷这么称呼缘于他们的发现)。但是,对于某些被试来说,重新发现惯性原理似乎是完全自发的,然而对其他人来说,至少是,对他们曾经学过的知识的再次个体化的重构过程

Dev(11岁6个月) 从第一个实验(大的木制的球):"它停止是因为空气在对抗。" "那么这个呢?"(一个小的木制的球,预测) "它大概是一样的,但是球更小;有更少的来自于空气中的阻力然后它会走得更远。" "对所有的球都是一样的吗?" "不,它们越大,空气的阻力就越强。" "那么对于小而重的球呢?" "一个更重的离开更不容易,但是会走得更远因为它自己有力量。"(质量=力量!) (实验)"所以?" "那来自于表面和摩擦力。阻力随着制成球的物质而变化;木制的更粗糙;金属的球是光滑而且刮得少。" (实验:小的铝球和大的木球) "空气阻力是与大小和质量成比例的。" "那么如果你比较这个大的铝球和小的铜球呢?" "噢! 不,它们用同样的力离开,仅仅空气阻力和摩擦开始起作用……这个球(铜的)更重并且会有更多的摩擦。"总结:"那么如果没有空气阻力,球会继续滚动。"

Ras(14岁4个月) "理论上它应该会走到底,但是它是彻底地不合逻辑的"(他所谓的不合逻辑是指与直接实验的事实相反)。比较一个小的和大的球,他再一次说:"对小的球摩擦是较少的。空气阻力也在起作用。理论上,你将要在真空中移动它。"

Desb(14岁5个月) "如果你用一个相同的推力把他们送出去,它(停止点)取决于质量、摩擦和体积。"接下来,他怀疑体积是否起作用,但是在比较一个小球和一个大球时,他说:"这个球会走得更好因为它有更少的摩擦,更少的空气阻力。"——"那是全部?"——"如果它是真正水平的。"①

物理原理说明运动守恒的原因是极其简单的而且被Dev以最外显的方式在实验中呈现出来。第一阶段包括建立球慢下来或者停止的原因。如果我们用p代表球慢下来或者停止,然后用q、r、s、t等代表摩擦力、空气阻力、轨道的不规则、不够水平(完美的)等,然后:

$$p \supset (q \vee r \vee s \vee t \vee \cdots) \tag{1}$$

相反地,在阶段Ⅱ被试问自己,当所有这些因素取反,应该是什么样的结果。这个否定意味着对应的p(慢下来)的否定,这等同于运动是一直延续的:

$$\bar{q} \cdot \bar{r} \cdot \bar{s} \cdot \bar{t} \cdots \supset \bar{p} \tag{2}$$

这种形式的守恒,是形式思维所特有的,将它与很多具体的守恒相对比(整体、长度、质量、等等;体积的守恒和表面积的守恒仅因为比例隐含形式思维的意味),是非常有趣的。在两个情况下,达到守恒是因为可逆运算所起的作用(由反演或者否定而形成

① 参见第一部分第十五章中这一阶段其他的例子,或相同被试的其他任务表现。

可逆)。当一个调整可以在实验的行为结果上呈现时，它们允许通过反方向的转换而做出修正(再返回即是零转换)。但是在具体思维的情况下，这个反演转换即使它仅仅在意识上出现，也需要与影响系统的实验调整保持相同顺序并且在实际上被试要能够执行。例如，把可塑性黏土伸展出来的部分变形成更紧凑的块状，它长度上增加的同时厚度上会减少。所以，通过相反的修改还可能将它恢复原来的形状。

与此相反，在运动守恒的情况下，运算的可逆仅仅出现在意识层面并且不能与被试可完全实现的转换相对应，甚至在实验室环境下也是如此。即使他可以消除所有慢下来的成因(尽管实际上是不可能的)，他仍然不能不利用一个无限量的空间和时间去完全核实惯性原理。然而，子阶段ⅢB的被试能够通过思考什么事在理论上是可能的(但是实际上不能出现)从而能够在意识上清除造成停止的因素，或者换句话说，纯粹地依据假说-演绎的蕴涵。

完成这一步，再进行一次取反运算　(1)和(2)　即完成；其中，(1)(2)是对置(等价于 $p \supset q$ 和 q p)，但是在这个情况下，它停留在对($p \vee q \vee r \vee \cdots$)的否定之否定，结果为($p \cdot q \cdot r \cdot \cdots$)(因此 p、q 或 $r\cdots$ 结果并不是 p、q 或 $r\cdots$)而对 p 取反的结果是 p。

如果希望，可以说这个可逆过程回到了著名的原理：没有原因，就没有结果。但是，一方面为了在特定情况下清除阻碍因素，被试必须思考什么是理论上可行的；在另一方面，因为这些因素实际上不能被消除，运算相当于将蕴涵取反，通过变更符号来产生它的逆向。因此，被试是基于纯粹的蕴涵行事而不再基于实际上被影响的转换行事。

现在我们可以认识到多种守恒形式之间的相同与不同之处：所有的都基于群原理(这些原理在变成定量的、可测量的之前是定性的、合逻辑的)，但是守恒既可能通过类和关系的具体运算达到[1](或者在一个甚至早期的阶段通过部分到一个整体的整合)，也可能在形式阶段仅运用命题间的运算而达到。

---

[1] 在这种情况下群的方面对应于"群集"的可逆性，即非冗余性的转换(与那些布尔代数相同)。

第九章　连　通　器[1]

在运动守恒的问题中，我们探讨了与群结构相关的运算格式的最简单的形式，因为青少年对这一概念的构建直接运用了反演的形式可逆性。在平衡问题中，连通器的问题可以给我们第一个例子，一个包括各种更复杂的群结构的格式。在每个平衡中可逆运算的两个可能形式同时起着作用：反演对应于作用于局部的效用的增加或减小，其系统趋于平衡，而互反对应于这些部分之间的对称或补偿（因此，作用的方向相反并且各自方向上的作用量相等）。但是，反演和互反两者自身也构成了一个群。

为了阐释我们的观点，尤其是为了更清楚地理解平衡化观念的运算格式如何处于形式思维机制的核心位置，我们必须先提到管辖运算本身的严格意义上的术语（或者"运算符"）——即命题逻辑的运算，比如析取（$p\vee q$）、蕴涵（$p\supset q$），等等——还有更多普遍的转换方式，能够将某种运算符转换成其他的。因此，一个运算符，比如（$p\vee q$）可以被反演或取反转换成 $\bar{p}\cdot\bar{q}$，我们可以把这个转换定义为 N，那么 $N(p\vee q)=\bar{p}\cdot\bar{q}$。但是（$p\vee q$）也可以通过互反 R 被转换，那么 $R(p\vee q)=\bar{p}\vee\bar{q}=p|q$。再一次（$p\vee q$）可以被对射 C 转换（即，通过交换 $\vee$ 和 $\cdot$），那么 $C(p\vee q)=p\cdot q$。最后，运算符（$p\vee q$）可以被同一性转换 I 转换成自己，那么 $I(p\vee q)=(p\vee q)$。因此，可以看到 I、N、R 和 C 形成四种转换的交换群，因为对射 C 是互反 R 的反演 N，那么 $C=NR$（同样地 $C=RN$）。同样地，我们有 $R=CN$（或者 NC）和 $N=CR$（或者 RC）。最后，我们有 $I=RCN$（或者 CRN，等等）。

这个群具有心理学上的重要性，因为它实际上相当于在形式层次上思维的基本结构，反演 N 表示取反，互反 R 表示对称（相反方向的等价转换），而对射是否定的对称。这一点解释了为什么平衡的概念，虽然儿童在很早的年龄就曾产生粗略的直觉，却不能在形式阶段之前真正被理解，直到这个阶段儿童既可以区别又可以整合反演、互反和对射（反演：如在某一部分增加减少的一个力；互反：用一个等价的力补偿一个力，因此确保部分系统之间的对称；对射：互反的否定）。

尽管在某些具体情况中它们可能相对地简单，但是在多数包括行动和反应的问题中这些转换实际上要求一个非常抽象的思考和表述，因为这里的困难是要理解，X 同时等于 Y 且作用于与它相反的方向。在这些情况下，思考所必备之工具已经超越命题逻辑，而要包括它的基本群集 INRC。这就是我们在之后章节中会看到的关于活塞压力和液体阻力之间的平衡问题；但是，此时要关注同样的问题，因为它与连通器平衡这一初步问题有关。

1　与教育科学研究所培训助理研究员皮德森（F. Pitson）和韦伊（A. M. Weil）合作。

在连通器的任务中，互反用来表示单一连通管之间的补偿作用；通过反演的转换表示水位的上升和下降（水位的改变不是通过增加或减少水而是通过升高或降低容器）。在装置 A 中，被试通过增加或取走管子依靠的架子来手动升高或降低管子。在装置 B 中，他用杠杆来升高或降低两根管子，而在装置 C 中，他仅仅只能移动一根管子，另一根是固定的。

因为容器既没有相同的形状也没有相同的体积，被试不得不排除这两个因素来寻找规律。但是大气压可以被忽略，因为对两列柱形液体来说它是等价的。[1] 在最后一点上，已习得的知识可能存有影响，但是我们仍想知道青少年可以在多大程度上理解和运用这一知识。所以，形式运算的问题在这里仍然是决定性的，而且学校的影响不是我们分析的障碍。

（一）阶段Ⅰ：不能区分主体的动作与客体的转换，并缺乏互反

从运算的发展过程来看，4—5 岁到 7—8 岁的阶段是令人高度关注的。这个阶段可能没有任何运算，因为孩子不能从客体的转换中分离出他的主体动作，并且连续的行为之间没有可逆性。结果是，被试既不能成功预测也不能成功理解两个容器客观影响的对称性：

> （Guy（5 岁 6 个月）　装置 B：他交替地拉动两边的杠杆："如果我拉动那里（Ⅰ）水就下降了，然后它在那里（Ⅱ）上升……如果你拉动那里（Ⅱ）水就走到这里（Ⅰ）。"装置 A：他降低左边的管子并在一个倾斜位置握住右边的管子："这里有更多的水（右边）。看，那里有更多的水（左边）；我在这里把它降低然后水就去那边了。""它为什么下降？"——"我不知道；因为它不想回上来。"装置 C："我懂了；水不得不去那边。"（当他在另一边拉动时）

我们看到孩子对事实有一个完美的理解，这一事实是，当他拉动一边时，提高了容器，水流向另一边；但是他不理解也有牵涉到高度的不同。装置 A 是为了更明显地呈现水位不同而设计的，他认为倾斜一个烧杯就足以使水流进另一个……然后当我们坚持水位下降时，他仅限于说它是不想回上去。很重要的是，我们应该关注这一反应不是连通器问题所特有的。例如，同样这个阶段的孩子不知道河流的水向下流动。[2] 但是在此情况下，这种缺乏理解被儿童无法从客观过程中分离他自己的行动（拉、倾斜等等）而进一步加剧。这使得儿童只能在他自己的行为和结果之间理解互反，却不能在液体的

1　使用的液体只是水而且两根管子内液体的密度相同。在连通器系统中，压强与液体的重量是成比例的（压强是力除以表面积的商）。涉及的基本原理如下：施加在密度 d 的液体的两个压强之间的差异 $p_1 - p_2$ 等于一圆筒液体的重量 zd，圆筒底部是一个单位的表面积，高度是两点之间的垂直距离：$p_1 - p_2 = zd$（这里 zd 代表以克测量的压力）。

② 参见皮亚杰：《儿童的物理因果性概念》，第 104—114 页。

上升和下降趋向水位平衡之间理解互反。

（二）子阶段ⅡA：动作转换为客观运算以及发现高度的关系

高度的作用被发现。一个烧杯相对于另一个更高，后者的水位上升更多而前者的下降更多。这一观察当然是以被试用杠杆或直接地上升或下降烧杯的动作为基础的，但是这些动作被转化为对结果有影响的运算，并且按照被试从动作中分离出的客观关系来描述那些结果：

> Nel（7岁11个月） “当我上升这一个的时候，那一个总是上升的更多，而当我下降的时候它也下降。”
>
> Tac（8岁10个月） 装置B：我们隐藏右边的烧杯然后要求被试把水位升到第三个标识处。被试成功了，通过一种近似的方式，她说，“我通过这里看”（她从另一个烧杯的高度看）。装置A：“之前你不得不拉动；现在必须放上架子而且上升烧杯。”然后她得出了和Nel同样的结论。

但是就解释本身而言，它一点也不涉及与质量和压强之间的平衡；然而，被试假设水仅从较高的烧杯中下降进入较低的烧杯，仅仅简单地因为那一个烧杯比较低。至于解释后一个烧杯的水位是如何上升的（因为它在容器较低的底部进入），这一阶段的被试提及了动力、速度、空气等。

> Mic（7岁10个月） “你理解了水为什么会移动吗？”——“你不得不降低（水要上升的烧杯），然后水来了……它流动了。”
>
> Tea（8岁1个月） “水穿过管子进入到另一个管子。”——“你看到了什么？”——“去看速度。水（在小管子里）没有和大管子减少得一样快，因为管子更细而且比大的有更少的空气。我很惊讶那个有更多空气的大管子运转了，而且那个有更少空气的也运转了：可能是因为它更长。如果有一大块空气，水可能移动得没有那么快。”

因此，空气的作用是帮助还是阻碍，取决于它是否挤压或已经占据了空间。

这个阶段比阶段Ⅰ取得的进程非常清晰。被试现在不再仅仅用他自己拉杠杆或者移动烧杯的行动来描述水位的上升和下降。另外，很难看到这些被试的反应和那些子阶段ⅡB被试的反应之间的差别，除非我们参考提供给被试的空间结构。就像我们在其他研究中证明过的，[①] 子阶段ⅡA的孩子还不能够表征一个倾斜容器里水位的水平状态，因为他没有试着去把他的观察建立在容器范围之外的参考点上，把自己局限于内部关系。实现这一点需要到9—10岁，当被试能够建立坐标系统时，水平和垂直将获得一个精确的代表意义。在当前的实验中子阶段ⅡA的被试确实不能通过两个容器的水

---

① 皮亚杰，英海尔德：《儿童的空间概念》，Chap. XIII。

位而察觉到平衡，他们仅仅是发现水在一个里面下降在另一个里上升直到它在两个中都停止移动。此外，他们知道水位在较高位置的烧杯里下降并且在较低位置的烧杯里上升，但是这些高度关系仅仅被应用于容器本身而且并不总是意味着这两个水位会最终相同——连接这两个水位的线会是水平的。这就是为什么当把一个烧杯隐藏起来要求儿童把水位达到一个特定位置时（看 Tae：装置 B 的第二阶段），他仅仅能够通过一种近似的方式成功，集中于另一个烧杯的高度而不是它的水位。

总而言之，被试已经差不多开始瞥见系统平衡的概念。他们的观念可以在本质上归结为通过观察水位的上升或下降来上升或下降烧杯。无疑地，初步的反演（上升和下降烧杯）和互反（水在一根管子中下降并在另一根管子中上升）出现。但是缺少的是允许孩子单独调整这些转换的等价条件——两个水位最终相等。

（三）子阶段ⅡB：水位最终相等但是没有解释

我们已经知道，在子阶段ⅡB 被试变得能够处理具体运算。这个子阶段也标志了平衡格式结构化的一种上限，在被试不能引入任何形式运算的范围内。由于构建了空间参照系（自然的坐标轴），孩子能根据系统平衡的情况（两个烧杯中的水面线落到相同的水平线上）发现两个容器中水位相等的规律。但是，此时的被试仅能阐明表面的规律，不能解释到原因，因为规律的陈述单独取决于关和相关的运算；并且这些足以决定相关的对应关系，但是规律的解释需要本章开始引用的四组命题间转换的介入：

Xi（8 岁 9 个月） "当我拉动这里时，另一边（烧杯）就装满了；当我拉动那边时，另一个也装满了。"——"水在第二个，把它放到第二个。"——他成功了——"你怎么做到的？"——"我看到当这里的水上升时那里的水在下降，所以我做了相反的……（等等）。"在某处，他犯了一个错误（要到达的那一点每一次都被隐藏），然后他拿出尺并且测量（距离）从桌子到显示的数字。然后为了确定水位，他参考高度相同的在另一边的看得见的烧杯。下次，他把尺水平地放置来保证水位相等。

Mie（9 岁 11 个月） 当一个烧杯被隐藏时，他成功正确地确定水位："你怎么知道？"——"因为我计算了这里的高度并且我也为了同样的事情看了那边。"

Soc（10 岁 9 个月） "水处于一样的水位，然后我把这里上升，那里的水上升了，但是容量总是一样的，即使它上升了。"——"通过容量是什么意思？"——"水的总量总是一样的（他清楚地知道体积不一样）；在两边水都处于同一高度。"

Dom（11 岁 4 个月） "水位恰好地一样。在这个管子里水很快地上升并且在瓶子里水下降得没有那么快。那来自烧杯的体积，但是与此相反水总是会处于同一水位。"——装置 A："那么水位呢？"——"它会改变。不，当然它总是会一样（在两边），但是（绝对的）高度会改变。"

Gas（10 岁 6 个月） 他测量了高度并且验证了水位，提出了用一根长的管子

和一个非常大的结晶器连通；他预测水位仍旧是相同的。

因此，从这些例子中可以看到，一旦建立了基于即时实际空间（垂直的和水平的）的坐标参考系，这些被试既发现了水位相等也发现了验证相等的方法：验证过程或者检查两个表面的连接线是否是水平的（Xi 和 Gas），或者测量两个表面各自高度的影响（Xi、Mic 和 Gas）。从定性的到定量的过渡很好地告诉我们，被试是如何全神贯注于坐标轴，并以基于水位相等的平衡而替代子阶段ⅡA 中发现的平衡。烧杯中水位上升或下降的转换是反演，而连通器中一个容器的液面和另一个容器的液面之间转换是互反转换。

这些转换机制的本质是什么？对这个阶段有效的具体运算尚不能回答这个问题。通过他们的空间和时间的系列排列和一一对应，它们允许他确定平衡的条件，但是决不允许他抓住所涉及的力的作用。在从规律陈述到解释的过程中，像 Soc 等一些被试调用了“容量”或者“数量”的相等，但是因为体积很明显不一样，归根到底这个量无非是相当于高度本身的相等——水位的相等。一个 10 岁的被试详细说明水会走得“尽可能低”，这证明了自此以后水下落的趋势是按照它的重量所占的比例（正如我们所知道的其他的实验结果）；但是重量本身不再被视为平衡的一个解释，因为涉及的体积明显地不同。总而言之，在这一点上，由于具体运算使得构建空间和时间的反演和互反成为可能，平衡可以被很好地描述。但是它绝没有被解释，因为孩子还不能利用行为和反应之间的反演和互反。

（四）子阶段ⅢA：初步解释和形式结构化

在接下来的第一个形式阶段，我们可以观察到，对于运算和解释进行一个重要的再次加工。体积的守恒最终被获得并且体积最终区别于物质的数量和重量。[1] 这导致了一个矛盾的事实，子阶段ⅢA 的被试发现接受如下的情况是不可能的——即，当体积（也包括容器形状）不同时水位相等，而子阶段ⅡA 被试们对此毫无感觉。就像子阶段ⅡB 一样，远远不能归纳出适用所有情况的规律（顺便提一下，这个概括是有限的，因为它仅与水位有关），子阶段ⅢA 的被试开始时局限在那些形状和体积相等的情况下寻找规律。他们期望水位的相等可以不再需要处理不等的形状和体积。当实验与他们的期望矛盾，他们将他们的结论限制在可以实际观察到的范围内，拒绝做他们怀疑有例外的任何概括。我们这里有一个清晰的例子，来反映建构规律的运算和探索性或因果关系运算之间的相互干扰。更准确地说，即将到来的解释性的阶段Ⅲ的运算使得被试局限在基于具体的或合乎逻辑的运算的概括（合乎逻辑在此处是因为它们仅基于水位，而非

[1] 参见皮亚杰、英海尔德：儿童量化观念发展，Chaps. Ⅲ and Ⅷ—Ⅸ。

作用与反作用的平衡)。

什么加入了这些新的运算呢？在这个阶段连通器的平衡不再被设想为，水从一个高的水位简单地流向低的水位直至水位相等，而是作为一个系统的作用和反作用，它们的反演和互反被力学规定而不只是时间与空间的关系。这就是为什么被试在乐意谈论水位相等之前需要体积相等带来的质量相等，并且这也是为什么他们否认两根容量不相等的管子可以证实这个规律的原因。他们还未能理解由立柱的水的质量和柱基底表面积之间的关系所带来的补偿。

And(12 岁 9 个月) 在所有位置建立了水位的相等。 "如果我们用一个圆锥形状的瓶子代替这个?" "它不会起作用因为形状是圆锥形的。" "但是你告诉我水位总是一样的?" "它们一样是以所有高度的烧杯的直径是一样的为条件的。这里(圆锥的和圆柱的形状)高度……你不能达成补偿(一个与另一个)。是烧杯的形状在起作用。"他进行了实验并且吃惊地发现了一样的水位 "你怎么解释这个?" "可能管子的形状没有关系。" "为什么'可能'?" "因为事实在那里!"(比较事实和理论之间的对立所以是形式思维的特征) "为什么它是一样的水位?" "因为它(圆锥的烧杯)往上变宽了。"(开口在底部) "但是如果它?"(颠倒过来) "它不可能是一样的水位。" "当水在管子里的时候发生了什么?" "它不是一样的水位是因为管子比烧杯更细。"

Bon(12 岁 8 个月) 肯定水位是一样的。用装置 B，当烧杯中的一个被隐藏时他进行了准确的垂直测量："无论何时你举起一个容器，水在另一个中上升，所以水应该在两个里上升或下降。" "它总是像那样发生吗?" "是的，总是……不，并不是在所有的情况下，当烧杯宽度不一样时就不是。" "但是在这个装置(C)里烧杯是一样的宽度?" "不，但是管子的长度和烧杯的宽度可以容纳一样数量的水。" "那么这里[左边是长的管状烧杯而右边是大的结晶器(比较在子阶段ⅡA 中 Gas 的情况)]?" "这里的水(结晶器)将仅仅上升到这里。"(比其他的更低的水位)——"为什么?"——"因为这个烧杯更大。"

Ean(13 岁) 装置 A：他举起两个烧杯"我要看一看把这两个一起举起，是否像在下面时一样两个水位是相同的。"然后："在一个里加一些水，你可以在另一个里取出相同数量的水。当我把烧杯放在不同位置时(彼此的关系)，我总可以看到两个(水位)都是一样的。" "那么如果你把一个窄的瓶子放在那个位置上呢?" "不，如果我有一个大的一个小的，因为体积更大……水位总是更高。"

Pie(11 岁 3 个月) 完全相同的烧杯："如果一个瓶子(被放得)比另一个更高，水流进另一个里。"因为"对数量来说，它是一样的东西。"但是对于不相同的烧杯，"当两个玻璃杯中的数量相同时，管子里的水位会更高，因为它更细。"当烧杯中的一个被隐藏时，他回答："我不能让它达到位置，因为玻璃杯的直径不是一样的。"

我们看到这些被试和子阶段ⅡB 之间的区别，即使他们经常运用相同的单词。自

此以后"补偿"(And)是数量的问题,从相等的力的来源的意义上理解(因为质量和体积的相等)好像它是一个平衡刻度。因此,不相等的水位应该相当于不相等的数量。当他们察觉到相反的事实时,被试自己放弃,例如 And("因为事实就在那里"),但是拒绝推广到其他情况中。总而言之,他们不知道解释的细节。但是如果我们仅仅考虑他们所知道的,发现他们按照一致性的方式推论并且提供一个很具说服力的例子,呈现了普遍规律对具体情况的逻辑从属,还呈现了那种情况与投射现实世界的反演和互反的形式转换之间的同化作用。实际上,有人可能会说这些被试对确切解释的不了解恰恰对我们是非常有意义,尽管他们还没有接受过连通器的学术指导,他们仍旧概略地叙述了一个以补偿为基础的解释(就像 And 说的)——事实上两个数量的液体每个都给另一个施加了压力,这两个压力作用于相反的方向。

当然,我们了解反演(降低或升高水位)和互反(一个水的数量在另一个上的作用与反作用)转换的区别和相关。这一解释唯一的局限是被试还不知道怎么把它推广到不相等数量的情况;但是,原理是准确的。在尝试给这个推理一个精确的表述之前,让我们先观察子阶段ⅢB的反应,我们还没有考察过。不像之前的反应,它们被学业知识所影响(且已经被同化到适应该格式的程度)。

(五)子阶段ⅢB:习得知识的形式化概括

最后,在子阶段ⅢB,子阶段ⅢA中所概述的自发的解释格式已经被教育习得的信息填满,因此,水位相等和液体数量不相等之间的矛盾得到了消除。但是我们可以很容易地看到,这一贡献并不修改推理的结构:

> Pic(13岁6个月):"这些水位总是相等的因为力相互补偿";Pic所指的力是空气压力和水的质量。
>
> Min(11岁):"如果你有两个一样大小或者不同大小的烧杯,其中的水会上升到相同的水位——因为烧杯越大,更多的空气施压在大表面上;反之亦然,烧杯越小,更多的水作用在一个小表面上,所以达到了平衡。"——"总是?"——"不。当你有两个隔间时,如果你放左边瓶子的隔间里有更多的气压而你放右边瓶子的隔间压力更少,左边的水位会更低。"

换句话说,或多或少清晰地理解了液体的压力与其垂直立柱底部的表面积有关,被试解释连通器现象的方式与子阶段ⅢA的方式类似,只是推广到数量不相等的情况中。因此,甚至在不相等体积的情况下,解释的关键点是压力以高度函数的形式相互补偿。"所以达到了平衡",如 Min 所说,这一次是指不同容量的烧杯。

(六)平衡观念和四个命题间转换的 INRC 群

为了更好地理解以平衡格式为终点的形式化建构的本质,我们需要对在阶段Ⅱ所

谓的具体互反和阶段Ⅲ所谓的形式互反进行比较。

互反的初始形式第一次出现在子阶段ⅡA，发现(阶段Ⅰ的被试们难以达到)烧杯(Ⅰ)比烧杯(Ⅱ)越高，水在第二个烧杯里上升得越多。这个关系的发现包含了以下运算：

高度的序列排序：

$$A_1<B_1<C_1<\cdots \tag{1}$$

把另一个烧杯作为参考点。

当水位在较低的烧杯中上升(内部参考这个烧杯)，水位高度的序列排序：

$$A_2<B_2<C_2<\cdots \tag{2}$$

两组序列排序之间(有序的)对应：

$$\begin{array}{c} A_1<B_1<C_1<\cdots \\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ A_2<B_2<C_2<\cdots \end{array} \tag{3}$$

在可逆的情况下，烧杯Ⅰ的高度可能系列地按递减次序排列：

$$\cdots>C_1>B_1>A_1 \tag{4}$$

同样Ⅱ的水位：

$$\cdots>C_2>B_2>A_2 \tag{4a}$$

这个情况下的对应关系被倒序地建立。

因此具体的互反包含两个对应组成的一个整体对称：

$$(A_1\leftrightarrow A_2)\rightleftarrows(A_2\leftrightarrow A_1) \tag{5}$$

在子阶段ⅡB，一个系统的外部参考加入到这些关系中，允许引入水平面的概念和对照直接的水位相等。我们已经在其他研究中处理过需要构建空间系统的运算。这里我们先将注意力集中到序列排序和对应(1)—(3)已经被两个烧杯实际水位间的对应所取代。如果我们用 $+A$、$+B$、$+C$ 等表示最终达到相等的水平线和较高烧杯水位线之间增加的高度，而 $-A$、$-B$、$-C$ 表示最终达到相等的水平线和较低烧杯水位线之间增加的高度，子阶段ⅡB的孩子建立了对应：

$$\begin{array}{c} \cdots>(+C)>(+B)>(+A) \\ \cdots>(-C)>(-B)>(-A) \end{array} \tag{6}$$

因此互反取决于差异 $+X$、$-X$ 的相等和它们连续的补偿，直到差异为零时会出现(当最终连接两个水位的线是水平的)。所以互反归结为一个空间的对称(但是没有一个充分的因果关系解释)。关于互反运算，它们由增加或减少的差异 $+A$、$+B$、$+C$ 等组成。这个运算可能受到一根管子中液体数量增加或消除的影响，这是简单地通过上升或降低这个烧杯完成的。因此(如果 A' 代表增加高度 A、B 之间的差异)：

$$A+A'=B\text{，等等和 }B-A'=A \tag{7}$$

但是至今，仍没有总的运算系统允许被试通过对应和差异的增减将互反整合为统

一的整体。那就是为什么被试局限于描述平衡而且不能够形成统一的因果系统理解它。当阶段Ⅲ出现补偿的作用与反作用的观念，两个创新开始起作用：水位空间的相互作用变成压力的相互作用；这样，就用反演运算构成了统一的运算系统。

反演和互反的协调可以用下列方式进行形式化：让我们用 p 和 q 代表作用于烧杯 B 中液体内任意两点的压力的效果，用 $\bar{p}$ 和 $\bar{q}$ 代表效果被取消，或者通过它们成因的反演（烧杯 A 内液体减少直到最初的高度差消除）或者通过相反方向压力影响的补偿。

因此有四种可能性：

$$\mathrm{I}(p \vee q) \tag{8}$$

直接转换或者液体 A 施加在液体 B 上的压力效果；

$$\mathrm{N}(p \vee q)=\overline{p \vee q}=\bar{p} \cdot \bar{q} \tag{8a}$$

反演转换或者效果 p 和 q 的消除；

$$\mathrm{R}(\overline{p \vee q})=\bar{p} \vee \bar{q} \tag{8b}$$

互反转换或者液体 B 施加在液体 A 上的压力效果；

$$\mathrm{C}(p \vee q)=\overline{\bar{p} \vee \bar{q}}=p \cdot q \tag{8c}$$

对射转换——互反的反演（＝否定），因此取消了相反的（否定的）效果 $\bar{p} \vee \bar{q}$，等于同时确认 p，q——$p \cdot q$。

这就是阶段Ⅲ被试所使用的推理格式。他理解了，当值 x 和 y 分别对应 $p \vee q$ 和 $\bar{p} \vee \bar{q}$ 表示的压力相等的时候，就达到了平衡点。只要 $x<y$ 或 $x>y$ 存在，液体实际上仍旧在管子 A 和 B 中流动。另一方面，当液体达到相同水位（用 r 表示）时任何运动停止，因为：

$$r \supset[x(p \vee q)=y(\bar{p} \vee \bar{q})] \tag{9}$$

尽管了阶段ⅡB 的被试们察觉到最终的水平线为管子 A 和 B 所共用，他们不能够解释它。阶段Ⅲ的被试们通过压力的相等解释了这个现象，通过 INRC 转换的双重可逆性得以呈现。

第十章　水压机中的平衡[1]

被试对连通器的现象给出了日益进步的解释，向我们展示了为建立形式化的平衡格式，反演运算和互反运算的重要性，以及根据可能的组合在它们之间形成的INRC群的重要性。但是，连通器实验的缺点在于我们的被试完全忽视了液体内部的压强。他们不能给出详细解释，直到借助后期习得的知识。本章涉及的实验仪器也用到了两个连通器，但是其中一个管的顶端加了一个活塞，活塞上面可加各种重量的砝码；由此，对液体施加的外力与砝码的重量成正比（值得注意的是，活塞不是由外力推动而是由其自身重量推动）。

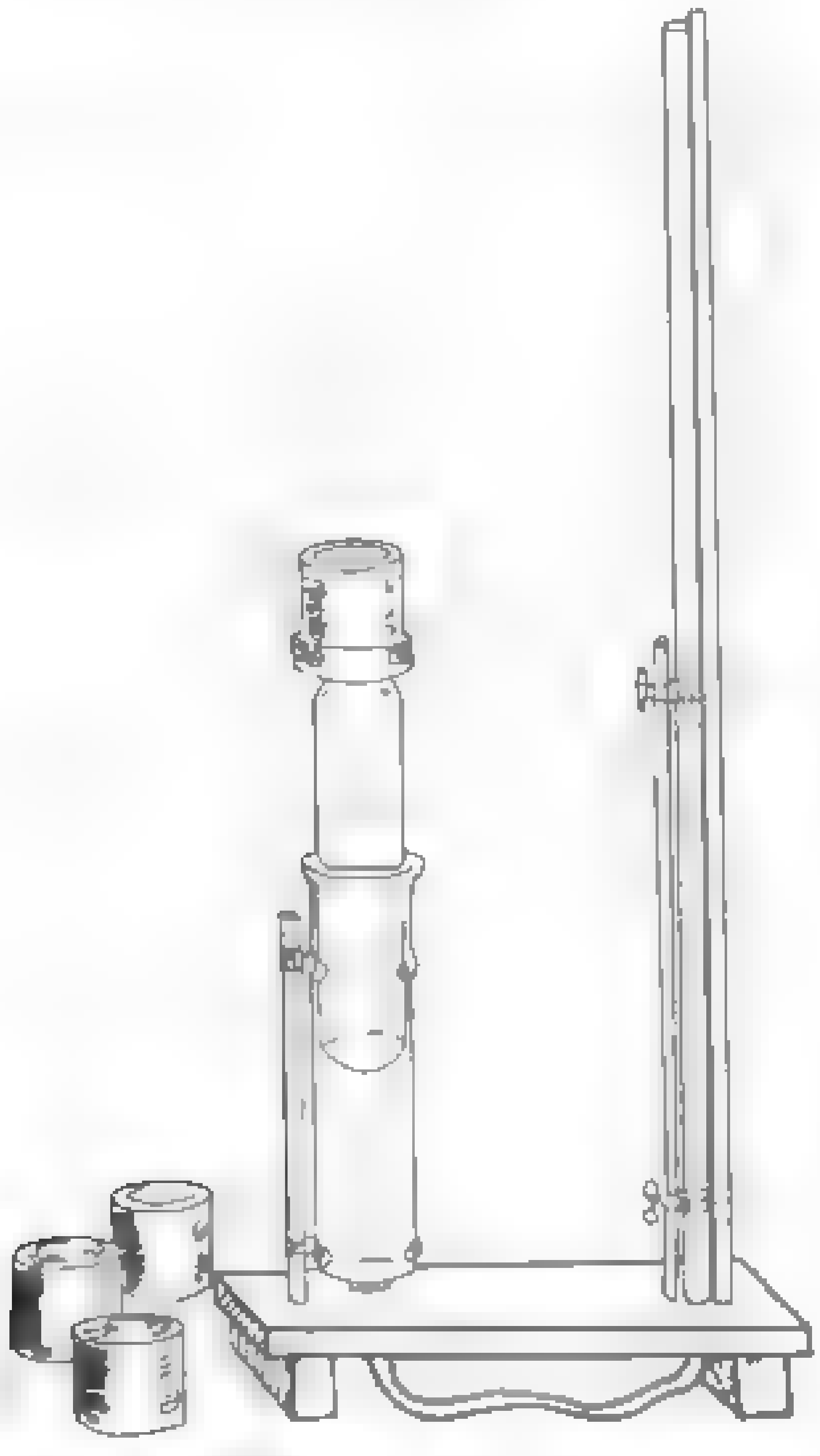


图8　这个装置用于连通器的平衡问题，连通器包括两个不同大小和形状的连通容器，容器A上面放置了一个活塞，可以装载各种重量的砝码，活塞（由被试放入容器）产生的压力通过增加砝码来改变。

现在，液体对活塞重量的作用力产生了相应的反作用力（液体在压力作用下产生的

1　与韦伊(A. M. Weil，教育科学研究所培训研究助理)、萧索(A. Tissot)、教育科学研究所毕业生威克斯特罗姆(M. Wikstrom)的合作。

位移与其阻力成反比)。但是,此处反作用力(阻力)可随液体密度改变而改变,也就是,依次使用水、酒精或甘油。平衡问题也需要考虑作用力的实际传递;问题是要理解活塞施加的外力以统一的方式传递给整个液体,还要理解作用力与反作用力之间的平衡不仅与液面(或仪器内液面的最低点)有关而且与整个系统有关。

因此,在这个任务中,具体运算与形式运算之间的关系这一问题在于弄明白被试如何做出以下转变——从单纯地观察到砝码重量与液体位移之间的对应关系,转变到能够说明重量的作用和密度的反作用构成的完整的作用力传递过程。因此,这里再次出现的不仅是平衡的普遍操作格式,更确切地说,而是作用力与反作用力的平衡。这个被试问题对研究 INRC 群在思维中所起的作用有特定的价值。

(一)阶段Ⅰ:不能理解重量的作用(子阶段ⅠA),以及无序列排序或对应运算的笼统理解

在子阶段ⅠA,被试甚至不能给出明确的预测——活塞的重量导致细管(B)中的水面会升高,因为如果"重的那个"有力(被趋同于其自身作用力的"倚靠"或"推"),"轻的那个"更可能"上升"(趋同于抬升其自身)。此外,数量守恒的观念在这个阶段还没出现。因此,管内的水将无须保留,并且无须充分理由管子即可被灌满或倒空。

Kot(5岁6个月) "水会上升(他指出B管);它必须装满上升。"——"如果我用了这个活塞呢?"——"它将会上升。"——"如果我放上这个盒子呢?"(500g)——"它会上升更多(盒子被放在活塞上),因为盒子压着活塞。"——"如果我拿掉这个盒子呢?"——"水会下降。"——"下降到哪里?"——"和之前一样。"他放上了2000g的盒子。"水比之前高了一点。"他用1500g的盒子换下了2000g的盒子。"水低了一点。重的盒子可以压到最低点(B管)。小的盒子不能使任何东西升高①。大的和胖的盒子可以把水位升高到差不多的位置(小的位移)。重的盒子不行,但是小的可以升到很高(矛盾)。"——"掂掂看这些小的盒子。"——(他掂量它们的重量。)"这个的重量一定是最小的(1500g;他把它放到活塞上)。不管怎样,水面还是升高了点,我认为最轻的是这个(500g),并且我认为这个是最重的(2000g;最轻的和最重的两个他判断正确,但是中间的排序是错的:1000g>1500g,等)。啊!这个(2000g)才是最小的(他依次把所有的盒子放上去)。这一个的水面最低(500g)。"——"为什么?"——"这个是最大的(他放上了2000g的)。啊!但是那个使水面升到最高:你知道吗,它是最小的。"——"为什么是最小的?"——"它是最轻的,也是最小的。"——"它是最轻的?"——"与我掂量它的时候,我感觉它是最轻的(他依次拿起各个盒子,但没有两两比较)。是的。"——"为什么它使水面升

① 所有的盒子(从500g到2000g)的体积相同。

高得最多?”　“因为它压水了，它使水升高。”　“如果你放上一个小的呢?”　“那它会使水升得非常高。”　“如果放上一个轻的呢?”　“这就像在水里的鱼一样：它们会自己浮起来(他把两个1500g放在一起)。这样会升得更高。”　“为什么?”　“因为它(他指着两个1500g盒子中的其中一个)是最重的。”

Joe(6岁)　“是水再次上升了。”　“为什么?”　“因为管子(活塞)被加在顶上，这使水上升。”　“如果你把这个盒子放上去，水面会改变吗?”　“会上升更多。”(他指出了一个位置，但是该位置太低了。)　我们做了该实验，并指出了预测的水位。“为什么不是那里?”　“因为盒子太重了。”(因此重量被认为是水面上升的原因。)　“下一个呢?”　他用了1700g和1000g的，发现前者使水面上升得更高。　“为什么?”　“因为它比黄色的那个要轻。”(这不是真的；此外，他还认为重量的缺失而不是重量的存在造成水面上升。)

这两个案例值得引用，因为它们展现了推理过程的内在不连贯性，而且后达到了形式逻辑的水平。首先，我们可以看到这两位被试既不能把砝码的重量正确排序，也不能考虑到装砝码的盒子尺寸都是一样的(尽管它们都非常相像)。其次，结合前运算水平的角度，重的砝码多多少少会使水面上升，轻的砝码可能并不能对水造成压力，或者在另一方面，造成水面上升。甚至可能发生这样的情况：两个叠加的砝码使水上升得很高，因为其中的一个被错误地认为比另一个要轻；因此，非叠加性是矛盾的另一来源。总的来说，这个孩子可能还不能形成任何法则，因为缺乏运算的连贯性。

在子阶段ⅠB，参与实验的孩子大体明白砝码越重管B中的水面上升得越高，但是他还不能运用序列排序、对应，或进行正确的猜测，因为他仍然缺乏完整的运算：

Jac(6岁)　他经过几次试验，预测1700g的盒子会产生与2000g的盒子一样的效果，“因为它们两个一样重”。但是水面上升达到的高度并不一样。接下来，他重新用2000g的盒子做了实验。他又一次预测水面会一样高，“因为它们一样重”。水面上升得高一些。　“为什么?”　“因为它更重。”　“那么那个(500g)会使水面升到哪里?”　“我不知道。”　“到同一个地方吗?”　“不是，因为这个轻一些。”　“那么那个(1500g)，你猜它会使水上升到哪里?”　“不能。”(但是他掂量了一下它)　“为什么水会升到这儿?”(管B)　“因为有东西碰到了水，管子(活塞)压在水上面。它或多或少地挤压，使水上升。”

Mon(6岁)　“因为重量更大，这使水上升得更高。活塞浸入得更多(管A)，那里会有更多的水(管B)。”

Del(7岁)　给出了相同的解释，但他同样尝试通过尺寸来分辨砝码。但他认为500g的盒子比1500g的盒子要大，由此引出了几个矛盾：“重”和“大”联系在一起；“重的”使水升得更高，但是“轻一些的”也一样。

因此，与子阶段ⅠA相比，此阶段有了进步，因为重量被普遍认为是造成水面升高

的原因。但是,由于被试不能正确排列不同重量的砝码,不能建立平衡性,一定程度的不确定性导致他们做出错误的预测。

(二)子阶段ⅡA:准确排列砝码重量,并与水位正确对应

随着具体运算的出现,砝码和水位高度被一一对应;不管是相同的还是仅差500g的砝码,给它们排序都不再成问题(在子阶段ⅡB之前并不是这样,那时候重量的差别还不能被很好地感知)。但是,进步只停留于此。因为,关于液体的密度,9岁(平均值)以前的孩子会认为液体越重上升得越高,因为它的重量被加到使液体上升的活塞的重量上。因此,在这个第一个运算阶段,根本没有被认识到液体的阻力——即与压力方向相反的反作用——导致没有认识到力的相互作用:

Sol(7岁11个月) "如果活塞进一步沉下去,水会进一步上升。"这个2000g的盒子与1500g的盒子相比,会使水面上升得更多,"因为它是装满的"。——"这由什么决定?"——"由盒子里面的砝码决定。"——"如果砝码更重呢?"——"水面上升得更高。"——"如果更轻呢?"——"更低。如果你有一个非常大的砝码,水面会上升(打手势),水会从顶端满出来。"

Cor(7岁11个月) 他对水的实验给出相同反应,随后我们用酒精替代了水:"为什么现在这个盒子上升得没那么高?"——"因为这个盒子轻一些。"——"为什么?"——"这个液体与之前的不一样。"——"这造成了什么区别呢?"——"也许这个液体上升得更高。因为这个液体的密度更高,它的重量更大。"——"这种液体(酒精)密度更大?"——"是的,它密度更大(因为)它上升得更高;它产生了重量,重量使它上升。"

Pal(8岁) 他用甘油做了实验:"水更重,所以每次都会上升得更高因为它重。"——"为什么用甘油的话就不会上升到相同高度?"——"因为甘油更轻一些。"——"但是,你自己比较一下。"(拿相同体积的水和甘油给他比较重量)"我刚说错了,正好相反。"——"那么,为什么更重的时候上升?"——"因为它没有足够的力来升到更高的位置。"因此这儿有个矛盾:重量产生力,但是甘油并没有上升到这个水平。

从两个方面来看,这些现象非常有趣:孩子的物理知识和他们的逻辑运算。从第一点来看,孩子并不能感知作用与反作用,但是他们认为活塞和盒子施加的压力在液体中形成一个力,该力是由它们自身的重量造成的,并且两个力的方向相同。我们有个新的例子来阐述这种影响:双马达格式[①]在这个年龄非常普遍。外部马达带动内部马达,两个马达一起执行同一个运动(该亚里士多德格式被普遍运用于孩子的解释,甚至被用于

① 参见皮亚杰:《儿童的物理因果性概念》,Chaps. Ⅰ－Ⅴ。

炮弹的运动上)。这些被试在天平的任务中的确具备作用力与反作用力的观念,但是它是出于直觉(因为仅仅与可见的位移相关),且缺乏运算的普遍性。在现在这种情况下,他们不具备,尽管他们会比较相同体积的酒精、水和甘油渐增的重量,也会发现重量和管 B 液体升高量之间的逆对应(管 A 活塞上放着相同盒子的情况下)。

造成上述现象的原因是,仅仅依据具体运算儿童无法明白作用力与反作用力法则。分类群集以反演为前提,关系群集以互反为前提,但是没有一个可以像 INRC 群这样的运算系统那样提供一个使二者一体化的机制。但是作用力与反作用力法则建立在这个群之上;它能够介入被试关于逻辑转换的推理,该推理包括互反运算和反演运算以及二者之间的协调。单是反演运算可以确保运算向同一方向的协调(例如,理解取下砝码就减少了压力),但是要等同处理反方向的运算就要用到互反转换(例如,去理解液体密度越大就会抵消而不是增加活塞上砝码的作用力,所以液体密度越大,管 B 水面上升得越少)。这个由定义整合的群就意味着形式运算,是与类和关系这些初级群集截然相反的"结构化的整体"。

因此,由于缺少形式运算,这个水平的被试不能明白作用力与反作用力之间的关系,就像在连通器实验中,被试只能观察到升高和下降的空间互易,却不能发现作用力本身的互反关系。很明了,在这个子阶段(ⅡA),液体和挤压液体的多种重量活塞之间的平衡并没有被理解为一个平衡过程,而是一个单向的过程:在水离开的管子(管 A),活塞对液体施加压力,液体的作用并不是返回,而是(甚至在管 B)与活塞同一方向,液体将其自身作用力(源自其重量)加到活塞的重量上。但是,力的传递并没有引起任何问题,严格地讲,它并不是传递。它仍旧由液体作用力的释放和产生组成,而液体作用力的释放和产生是由活塞和活塞上砝码产生的作用力引起的。因此,砝码的排序以及砝码与水位的对应关系,还远不是法则的一种表述,更不用说是对该法则的一种理解。

(三)子阶段ⅡB:直觉地形成阻力观念

9—11 岁是一个过渡阶段,在这个阶段,被试开始认识到一个事实,那就是液体的密度使液体产生阻力。甚至此时此刻,有些孩子还说管 B 中水上升得比酒精上升得少,因为酒精密度比较小。但这并不意味着他们已经从作用力与反作用力这一观点掌握了这一问题。特别是,他们等着活塞落到粗管 A 的底部,好像它掉到任何诸如此类容器的底部一样,好像反压力是毫不相关的。因此,被试没有认为细管 B 中的水柱施加了一个与活塞压力方向相反的反作用力并与之平衡,而认为细管 B 中的水柱只是利用其自身重量反抗水面升高。

Hid(10 岁 3 个月) 他预测说:"这里(管 B)会升高,这里(管 A)会下降。" 做实验。 "啊!我以为会上升到更高的地方。" "为什么?"

"因为活塞没有一直下降，水没有一直上升。" "加上那个盒子呢?"(1000g) "上升到那儿(高一些)。" "如果我们把它拿掉呢?" "水又会下降。" "加上那个盒子呢?"(2000g) "水会上升到更高的地方，因为它更重一些。"用酒精替换掉水；他预计中的水位与之前一样："这个液面高一些。" "为什么?" "因为这个(酒精)轻一些。" "加上那个盒子呢?" "到那里。"(相比较用水做实验得出的液面要低一些)

Fra(10 岁 10 个月) "这个管子(活塞)会下降，水会溢出来，因为当你把重的东西放到装满水的容器中，便占用了一定体积，这使水溢出容器。"

Haf(11 岁) 与 Hid 相反，他把水最终位置比酒精的低归功于水的密度低："现在不是同一种液体了。" "为什么?" "可能它的重量更轻"(指水；我们先是以酒精做实验的) "为什么?" "但是它上升得没那么高……是液体变得更轻了。肯定是液体的缘故，因为所有盒子都是一样的。第一次的液体(酒精)更重，因为它上升得更高。与液体更重，重量更大，就会产生更大的压力；它会更快地下降到这儿(管 A)" "这儿(管 B)的液体不会产生压力?" "不会，因为是这里(管 A)的水到了那里(管 B)。"

这个推理很清晰，也没看起来那么矛盾，因为被试有时想到管 A 中下降的液体，有时想到管 B 中上升的液体。考虑管 A 时，他认为在活塞的帮助下，密度最大的液体最容易下降，导致管 B 的液面最高(Haf)。另一方面，考虑管 B 时，他认为密度最大的液体最难上升，导致管 B 的液面最低(Hid)。这两个案例中，问题并不是与活塞压力大小相等方向相反的液体反作用力，而是阻碍上升的可变的阻力和利于下降的可变的助力。由此形成活塞未受任何阻力下沉到管 A 底部这一想法，就像 Hid 和 Fra 所认为的那样。

因此，在形式运算前的最后一个阶段，被试能正确预测活塞上不同砝码的效果，有时甚至能正确预测所用液体的密度，但是他还不能依照平衡法则(从他的预测中)明确表达任何完整的解释。原因在于，他缺乏可以协调反演运算和互反运算的运算工具(INRC 群)。但是毋庸置疑，砝码仍被认知为绝对的项目(就像 Haf 所说，作为一个"压力")，并且没有充分地与其体积进行关联，尽管它的守恒性和粗略的可量化性已经呈现。甚至直到现在，密度引起"填满的"或满的这一直觉，但没有建立形式化的关系，该关系将会构成阶段Ⅲ中所发现的压缩密度这一概念。

(四) 阶段Ⅲ：作用力与反作用力的互反

反作用力或者与砝码压力方向相反的阻力这一概念出现的最好指标是被试对管 A 水位下降的态度。在此之前，活塞沉入到液体中被认为没有受到阻力，甚至被认为活塞自身重量造成它与液体一起下降，从此刻起，下降的活塞被认为受到了与液体密度成比

倒的阻力。密度转而被认为是重量与体积之间的关系：即把物质压缩到相同体积的或多或少的力的结果。但是，若要设想一个阻力，根据一系列不同的校正来平衡掉压力，并最终使活塞停止下降，被试必须在密度（被理解为能够产生阻力的压缩）和砝码的压力之间引入互反这一概念。换句话说，被试把反演运算（增加或减少砝码）加入到统INRC群的互反运算中。这一结合是子阶段ⅢA最初完成的：

Tri（11岁2个月） “是盒子的重量，是那个（活塞）在推水。” “如果你换了一种液体，这会造成影响吗？” “会，有些液体比其他的液体重。” “如果你用酒精呢？” “我认为酒精更重（简单的事实错误），所以它上升的位移小，因为它更难移动。”（阻力！）他做了实验，没有评论我们的部分。“不，酒精更轻。” “为什么你现在会这么认为？” “因为盒子的重量使它上升得多一些。” “是怎么做到的？” “因为盒子的重量使它上升得更高。（盒子的）重量推力更强。”

Dum（11岁2个月） 用水做完实验后，我们又用酒精做了实验：“液面上升得会少些因为液体更重。” “酒精比水轻，那么？” “液面上升得高一点。” “为什么？” “液体越轻，活塞就较少地……”（较少地受到抵抗） “较少地怎样？” “因为酒精比水轻，酒精中的活塞下降得更多。” “你刚刚说了‘较少’。” “不，活塞下降得更多。液体轻些，所以活塞下降得多一些。” “为什么？” “因为这个液体比水轻。” “所以紧接着活塞沉下去得更多？” “因为活塞并没有很多地受到酒精重量的阻止。”

Ya（11岁6个月） 做出同样的反应。 “为什么活塞不会一路沉到底部？” “因为活塞没有足够的力往下沉了。它受到了抑制，因为液体比活塞重。”

Riv（13岁） 水上升到那里，“因为两管的重量要重新变成一样。” “但是水不会再升得更高一点？” “因为活塞不能再下降一点了。” “为什么？” “因为它受到水的阻碍。”他用手把活塞往下压，之后发现活塞又回到了初始位置，“如果你按压活塞，水会有更多的力。”

这些回复清楚地表明，从现在起被试意识到作用力与反作用力的存在。液体的重量，或更确切地说液体的密度（因为自此以后被试说的只是相对于体积的重量）不再是促进活塞压力的因素，相反是这个压力的阻碍因素，因此它的作用方向与压力的方向相反；它形成的是反作用力。当液体的密度比水小时，B管液面的确升得更高，因为在砝码作用下活塞能对液体“施加更大的压力”（Tri），或者“受到更少的阻碍”（Dum）。另一方面，至于A管，活塞“不能下降”超过某一个位置“因为它受到水的阻碍”（Riv和Ya）。

因此，子阶段ⅢA发现过程的特征是：所涉及的系统是方向相反的两个力之间的平衡，该系统不再是一个单向的过程。但是，在我们尝试明确表述所涉及的推理过程之前，让我们进一步审视被试还需解决的问题：活塞的力是如何传递的，以及作用力与反作用力在哪里达到大小相等并实现平衡。

第一个问题从子阶段ⅢA起就被解决了，因为活塞的压力不再被视为触发装置或

液体内部力的激发(因其重量而产生)。相反地,它被视为施加于整个液体的作用力,从一开始(A管液体下降)到液体的移动(液体上升并停留在B管)并引起一个方向相反的反作用力实现最终的平衡状态。

但是,在哪个点实现了平衡?这个点可以被定位在具体某个点,还是逐渐涉及的液体的总量?该问题在子阶段ⅢB前不能被阐述明白。该子阶段的反应,与之前子阶段的反应大致类似。至于这个问题,子阶段ⅢB的几个被试仍然想象作用力与反作用力在某个特定的点相遇。这个点可能在连通两个玻璃管的橡胶管的底部,也就是该系统曲面的最低点。相反地,其他被试开始明白从活塞与液体接触的点一直到B管液面达到的水平,都存在作用力与反作用力。一方面,活塞的压力作用于整个液体。另一方面,由于反作用力是液体密度(它被构想为一种压缩)的一个功能,它涌动在液体的每一个地方,而且作用力与阻力存在于整个液体之中,后者趋向于抵消施加在液体上的作用力;因此,每个点的作用力与反作用力都是大小相等的。

下述为每个反应类型的例子:

> Bor(14岁6个月) "如果你放上那个盒子会怎样?" "由于压力液面会升高。"(做实验) "为什么不再高一点?" "管子(橡胶管的)底部的两个压力达到平等。" "你怎么知道?" "因为这个装置(活塞)不降也不升,而且,相反地,水不升也不降。" "那与我放上一个盒子呢?" "它变得更重、结果就是(B管内)水柱更高,(A管内)重量更大,并且平衡的实现点在管子底部。" "为什么?" "因为管子底部是一样的压力。" "但是这并没解释砝码的叠加?" "不,解释了,因为(A管内)水被砝码排出了;在某个特定时刻达到了平衡因为(B管内水柱的)水的重量随液面升高而增加。" "什么使水上升?" "盒子的重量;它在管子底部形成一个更大的压力,把水排出来。"
>
> Le(14岁6个月) "管子(参见Bor的概念)底部(两边的)压力是一样的。不,如果水被管子连通并且全部压力被传递,那么水会达到平衡。" "高度起作用吗?" "不起作用,如果两个水柱都是高的或低的,水还会用同样的方式传递压力。"阻力也被认为全程不变。

因此,我们知道了阶段ⅢB的反应(偶尔可以察觉后期习得的知识带来的影响)并未比子阶段ⅢA增加,子阶段ⅢA有更多自发的反应。

(五)结论阶段Ⅲ:推理和平衡的形式运算格式

要理解作用力与反作用力间的平衡或平等概念,需要用到形式运算。为了分析该形式运算,必须首先记住因果关系是被用于现实世界中的转换的操作系统,实现方式是每个转换都被被试的操作同化吸收,同时又被认为是被试自己完成的。因此,我们首先要建立被试所使用的系统转换,然后寻找同化吸收这些真实变化的运算或逻辑转换。

但是，该系统涉及的基本转换有如下四点：

Ⅰ．活塞的重量以及上面砝码的重量共同施加的压力带来的作用力。

Ⅱ．通过减少砝码或者减少活塞本身的重量来抑制或减少该作用力。

Ⅲ．液体阻力产生的反作用力，其自身形成压力且方向相反，决定于液体高度和密度。

Ⅳ．通过减少部分液体或者替换密度小一些的液体来抑制或减少该反作用力。

但是我们注意到，转换（Ⅰ）和（Ⅱ）可被同化为直接运算和反演运算，而转换（Ⅲ）和（Ⅳ）与前两个转换对称：它们相互之间也是直接运算和反演运算，但是与前两种运算的作用方向相反。因此转换（Ⅲ）构成与转换（Ⅰ）的相互作用，转换（Ⅳ）构成与转换（Ⅱ）的相互作用。同时，转换（Ⅳ）是（Ⅲ）的反演，相比之下，（Ⅲ）不是（Ⅰ）的反演，因为（Ⅲ）没有取消（Ⅰ）的作用，只是补偿中和了（Ⅰ）的作用。换句话说，（Ⅰ）和（Ⅲ）这一组合没有导致压力互相抵消，而导致压力的等值，从而实现平衡。

从而，此处我们再次发现与四种转换 INRC 群同构的机制。我们应该不会对在儿童的推理中发现与 INRC 结构类似的形式再感到震惊，我们已经在连通器的实验中发现了 INRC 结构，尽管此处我们发现它的形式与以往稍稍不同，这次推理过程与压力和阻力直接相关：

Ⅰ．第一种运算表达在一个或另一个砝码的影响下，A 管压力的介入，表示为$(p \vee q)$；

Ⅱ．反演运算表达此作用力的抵消，表示为$(\bar{p} \cdot \bar{q})$；

Ⅲ．对于阶段Ⅲ的被试，压力 p 或 q 各自有一个相应的阻力，可用 p' 或 q' 表示，即$(p' \vee q')$，也可表示为 B 管液柱比 A 管液柱高出部分的液体的重量。

Ⅳ．Ⅲ的反演在于表达 p' 和 q' 的相互抵消，也就是$(\bar{p}' \cdot \bar{q}')$。

在阶段Ⅲ有独特的发现，转换（Ⅱ）和（Ⅲ）是相互的，也就是说，二者之间存在补偿。但维持这种补偿的发生相当于把 B 管阻力（表示为 p'）的介入看成 A 管压力消除的等价物。青少年意识到，假如没有 B 管的阻力，A 管施加的压力会使液体上升得高得多。他们还意识到，每个压力 p 都对应一个大小相等的阻力 p'。因此$(p' \vee q')$也可写成$(\bar{p} \vee \bar{q})$。由此：

$$
\begin{gathered}
\mathrm{I}(p \vee q) \\
\mathrm{N}(\bar{p} \cdot \bar{q}) \qquad (1) \\
\mathrm{R}(\bar{p} \vee \bar{q}) \\
\mathrm{C}(p \vee q)(= p \cdot q)
\end{gathered}
$$

因此，我们可以清楚看到，转换（Ⅲ）是转换（Ⅰ）的互反 R，并且（Ⅳ）是(1)的对射 C，也就是(1)的 NR 或 RN。因此，压力和阻力间的平衡可以用两种方式表示（正 R 和负 C）。因为运算$(p \vee q)$的互反$(\bar{p} \vee \bar{q})$是对称运算，在此之中发现了同样的组合$(p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q})$和$(\bar{p} \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee p \cdot q)$，尽管符号有变化，它表达了涉及的作用力大小

相等方向相反，该运算和反演 N 也可因此区分开来。换句话说，反演运算抵消了直接运算，而互反运算没有抵消直接运算；相反，通过大小相等但符号不同的对称运算，互反运算对直接运算进行了补充。

在作用力与反作用力这一问题中，互反和反演的区别是所有困难的根源，并且在形式阶段之前，被试不能区分二者。在那之前，尽管孩子清楚地明白反演运算（也就是能通过减少 A 管上的砝码重量使 B 管的液体下降），他们仍然不了解互反运算。他仅仅把它看成直接运算的延长，而不是一种方向相反的对称运算，并且弥补直接运算（液体没有反抗压力，而是与压力的作用方向相同）。这种情况是因为，如果被试需要去理解四种转换（Ⅰ—Ⅳ），而他还不能从直觉上区分各自的作用力（天平实验中也是如此），他就必须拥有只由形式运算组成的运算机制。因此，接下来出现了这个发现。

至于装置在一个特定的点达到平衡（用命题 r 表示，被试 Riv 描述了其条件，他说 B 管的水停在一个固定水平"因为两管的重量必须再次达到一致"）。换句话说：

$$N \supset [x(p \vee q) = y(\bar{p} \vee \bar{q})] \tag{2}$$

公式中 x 和 y 分别是赋予 $(p \vee q)$ 和 $(p \vee \bar{q})$ 的值。

不像连通器的平衡点，本实验的平衡点不是使两个管内液面水平等高，而是随着重量 $p \vee q$ 和阻力大小变化而变化，重量 $p \vee q$ 和阻力大小又由液体密度所决定。有了这个例外，对该现象的解释说明以相同的形式化格式为先决条件。因此，作用力与反作用力机制在相同阶段ⅢA 和ⅢB 被发现并不是偶然。就作用于液体的活塞和连通器而言，这已经被证实了。并且，不久我们也将发现，这也适用于天平实验。这三个实验中，了解物理过程是运算格式的先决条件；该运算格式同时运用反演转换和互反转换，它们在具体群集的水平是分散的，只有通过 INRC 群才能把它们联系为一个整体。但是在本实验中，到目前为止检验过的其他实验也一样，具体思维和形式思维的区别与建构"结构化的整体"有关。正是该整体双重可逆的特征组成了 INRC 群，但是可逆性的两种形式在初级具体群集中仍然是分离的——反演只出现在分类群集，互反只出现在关系群集。

第十一章 天平中的平衡[1]

在使用简单的平衡型称重设备跷跷板式天平任务中，我们会再一次发现作用和反作用间的平衡运算格式。但是这一实验的设置要求必须处理比例问题。当两个不等的重量 W 和 W' 在离轴不等的距离 L 和 L' 处达到平衡时，把它们移到与该距离对应的高度 H 和 H' 所需的 WH 和 $W'H'$ 的功相等。于是我们得到双(反)比例：

$$W/W'=L'/L=H'/H$$

结果显示，发现这一定律要以建立比例 $W/W'=L'/L$ 为前提，其详细解释隐含了对于比例 $W/W'=H'/H$ 的理解。这一比例格式与平衡格式存在联系，对我们来说，研究学习这一比例格式的形成过程将会非常有意义。基于之前的研究成果，我们得出这样一个结论，在所有领域(空间，速度，概率，等等)，比例这一概念直到形式化的子阶段ⅢA才开始出现。现在我们将探究其形成原因。

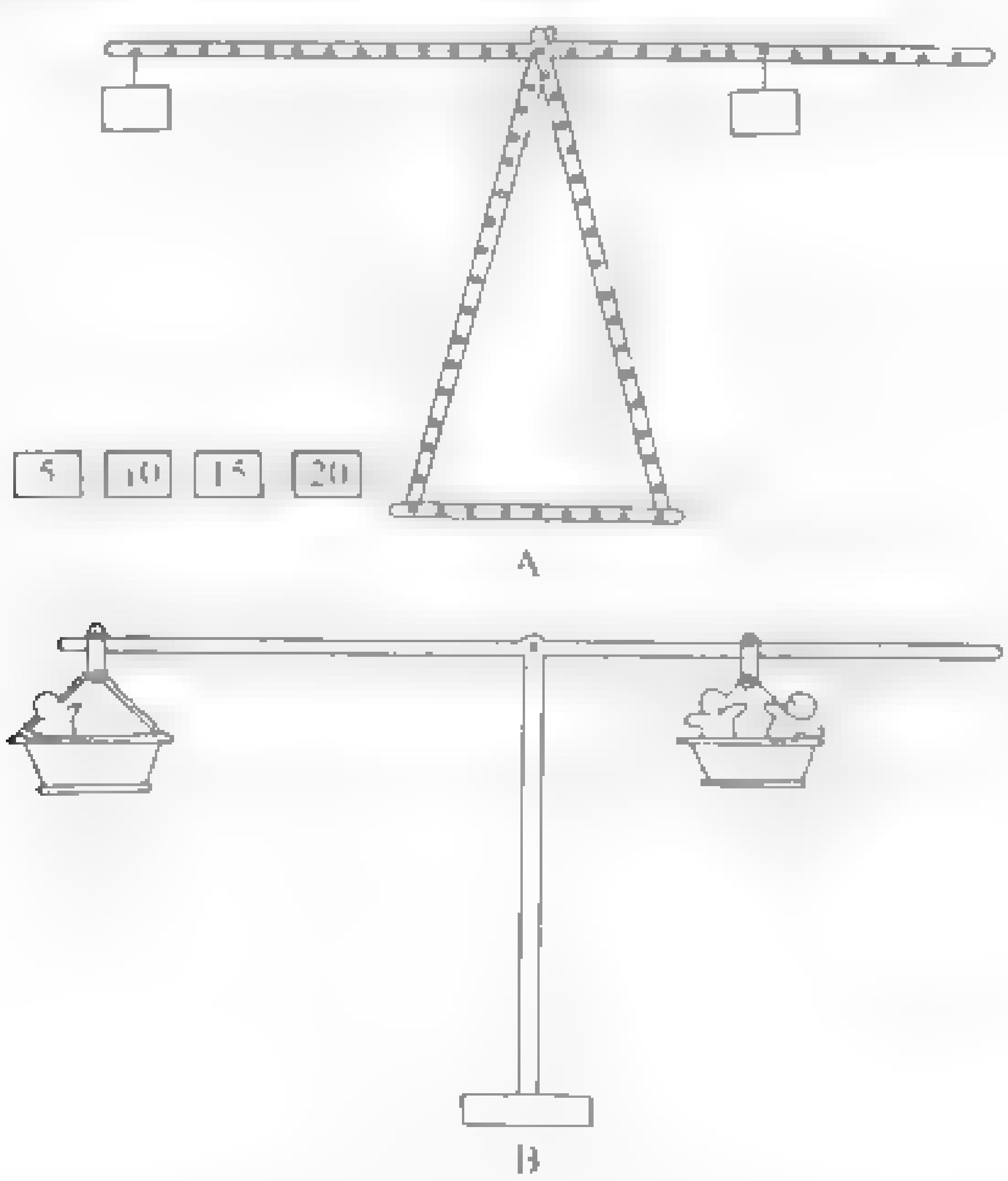


图9 此处展示了两种不同的天平衰尺。(A)图为传统天平，天平横杆的另一头悬挂不同克数的砝码；(B)图的天平配备篮子，篮子中娃娃则为秤砣。篮子可沿着横杆上不同点进行移动。

1 与教育科学研究所的前研究助理马蒂厄(F. Mathieu)和尼古拉斯(J. Nicolas)的合作。如若参考同样的主题，请参见：Mme. Reha Ugurel Semin, *Istanbul University Yayinlari* 194[illegible]，(11)，第77—211页。

(一) 阶段Ⅰ:未能区分主体动作与外部过程(ⅠA),重量补偿的直觉整合(ⅠB)

从大约3—5岁,主体的反应中引起我们关注的是启发性。正如我们之前所说,一般而言,因果关系是外部进程与被试行为或其运算的同化效应。比如平衡秤的情况,一个人的体重与其他砝码重量等同,这一平衡观念很早就得以建构,但这一观念是无差别的,延伸到体重之外的领域,包括肌肉的向上力量以及向下推力(此外,重量被儿童认为与向上推动和向下按压的动作有联系)。首先,这一平衡与这种未区分的动作进行同化,而不是和重量以及重量×长度之间的补偿运算系统进行同化。事实上,只是一些代表性的规则,例如,缺乏系统可逆性的笼统补偿仪器,所以在这个阶段并未形成具体运算。这一任务的结果是,子阶段ⅠA的被试不能仅靠分散重量来确保平衡,而将自己的动作参与到仪器的运作中,由此他们不能将自身动作从努力控制的客体行为中区分开来。

Mic(4岁6个月) 他在距离14和9处放置两个相同重量的物体:"为什么一个在上,一个在下呢?" 他继续抬高或者降低力臂,他相信他们会维持在他想要的位置。 "你可以摆直(水平方向)并让它自己维持在这个状态?" "没有"肯定"或者"否定"。 "它之前什么状态?" "就像这样"(水平状态)。 "你没办法做到?" 他摇了摇头,尝试着把两个不同重量的物体维持在水平状态,多次抬高或者降低力臂。 "你可以不用手做到吗?" (我们让他用手称下重量,然后再进行实验。我们建议他在一边或者另一边增加重量。)结论是:"你做不到"(达到水平位置)

Mar(4岁8个月) 为了保持水平平衡将两个物体放置在天平一侧,而另一侧不放置物体。

我们可以看到,通过不断摆直仪器,更正平衡臂的位置,被试期望仪器会保持他的操作结果。然而,仪器和他自己的动作没有得到区分。但是,尽管摈弃了天平自成独立平衡系统的想法,缺乏区分并不妨碍他能够对恒常效应进行或多或少的预测;预测最精彩的地方就是他们的消极方面,这也是我们的目的所在。比如,这一阶段的儿童不认为平衡就是重量相等(即使同等距离);所以Mar将两个物体放在同一边,而另一边并未放置任何物体,从而获得平衡状态。重的那边上扬,而轻的一边则下降,相反也一样。重量之间的关系尚未形式化:"太重"这一判称可用于这样一个情景,即力臂一侧放置物体,而另一侧则空置,即他们所说的"太轻",重量不守恒。被试不断用新的砝码尝试刚刚用其他砝码偶尔间获得结果,而没有注意到重量的差别。而且,通过不断改进规则,他们意识到重量有一定的影响。通常,为了对称,他们会在力臂两边各挂一个物体。他们常常在一边加新的物体以达到平衡,但他们并没有在轻的那边增加重物(这样可以平

衡重量),而是加到重量已经是最大的那边,他们认为多些重物可以改善情况。

但在这一水平,被试进行的加法尚未运算化。尽管它构成了加法运算的开始,但因为在局部($A+A'$)和整体 B(在另一边补偿 $A+A'$)间缺乏等价性,所以无法形成运算。更重要的是,构不成运算的原因是缺乏可逆性;为此,为了实现使重量相等这一目标,被试不能移除砝码。实验中被试去除一些重量,仅仅是因为前面的实验失败后,全部重新尝试一系列不同的动作。

一般而言,被试没有关注轴距离的问题,也不在距离和重量间寻求平衡或者协调。然而,被试可以建立一个初步对称形式,在这一点上运算可能开始形成。尽管,这仍不是严格意义上的运算。首先,缺乏对重量进行的调整。其次,对称通常只与天平力臂两端有关,并未包含中间距离的相等。

相比而言,从5到7—8岁(子阶段ⅠB),我们可以看到这些直观表达开始越来越整合,并向可逆运算发展。

Mal(5岁8个月) 注意到力臂不水平:"你必须在另一边放上其他砝码。我知道哪些是必须要做的;那里再放一个砝码,因为那里几乎没有重量(她补充道)。这里比那里轻一些。你必须让两边是一样的重量。"而后:"你得拿掉一个"(因为这一边太重了)。Mal并未自发地发现距离的影响,但当砝码在她面前移动,她会说:"你把这个移近些,这样会增加些重量。若它放置在尾端,它根本不起作用,若放在这里,重量就增加了。"

Gas(5岁9个月) "你可以在另一端放置一个砝码:相同的砝码(他拿了一个颜色相同但重量不同的砝码)。这完全不起作用;或许那里太多重量了。"

因此,我们可以看出,孩子理解为了达到平衡天平两边都需要砝码,并且两边重量需相等。但他不知道如何以系统的操作方式获得平衡。同样,之后他可能成功地增减,但达不到确切对等。他不断修正(并调整),但达不到严格意义上的可逆性。

我们可以看到,这两种规则均等或者增减,怎样为后续重量互反(对称)和反演的转换带来了开端。至于距离,在倾向于对称的方面取得了进步(砝码不仅只在天平两端保持相同距离,在靠近轴的区域,砝码也会保持相同距离了)。有时被试发现距离变动产生的作用(参照Mal)。但对于更远—更重尚未形成系统的对应。

(二)子阶段ⅡA:对重量和距离施加具体运算,但两者间没有系统协调

从这个阶段开始,砝码被以相同重量准确地增加,同时距离也被对称地增加。但重量和距离之间的协调水平没有比自觉的规则有什么进展。被试通过反复试验,发现在远距离放上一个重量较轻的砝码与在近距离放置一个重量较重的砝码,两者可以达到

平衡，但他没有得出普遍的对应关系①。

Mas(7岁7个月) 他开始放置 E 和 D 在位置3，然后在相同位置3用 G 和 F 替代（距离相同，尽量寻找相同重量），增加两个其他砝码，拿掉一些，最后在手上称下两个相同重量的砝码(E)，数了相同的洞数(14)，然后在两边放置 E14。之后他需找其他的平衡；他增加砝码，移动，拿掉其中一些，最后一边放置 Ged，而另一边放置 P3：“就是这样（重量和距离在实验上得到补偿）。这就好比天平上没有任何物体（没有任何重量，平衡臂维持在水平状态）；现在两边重量相等。”他再次放置大砝码（没有与其匹配的砝码）。“两边我应该各放一个砝码。但因为没有其他相等重量的砝码，要在一边放置三个砝码，而另一边放置两个砝码。它保持平衡了，意味着两边重量相等。”他预测保持相同的距离对于两个重量不相等的砝码来说是必需的，但他没有发现这样的定律：更重和更近可以互换。——“若放置 C 和 E，你会放在什么位置？”——“我可能放在这里及那里（不同距离），他们不能放在同样的位置（相同的距离），这样重量就不相等了。”

Nem(7岁4个月) 凭经验发现，左边放置在位置10的 C 与右边放置在距离5的 E 保持平衡。我们让他在右边放置 C，在左边放置 E，但他没能成功调换距离关系。实验后，他说道：“哎呀！必须像之前那样做，只是以相反的方式！”

由此，从这一点起，被试可以决定砝码的重量排序以及判断两者是否相等。他可以用可逆的方式增加他们，并正确地将一组砝码与另一组砝码进行对比。更重要的是，他可以知道怎样利用相等砝码与不等砝码间的转变关系。尤其是所有这些运算可以再次运用到距离上，不过采用了另一种对应关系，而向相反方向的相对轴对称关系的距离。

这些运算适用于平衡问题，它使被试获得以下结论（通过关系的逻辑乘法）：

两个重量相等的砝码 B_1 和 B_2，放置在相同位置 L_x，通过对称达到平衡：

$$(B_1 \times L_x) = (B_2 \times L_x) \tag{1}$$

由此，其中一个砝码是另一个互反的补偿。两个重量相等的砝码 B_1 和 B_2 放置在不同位置 L_x 和 L_y，彼此不平衡：

$$(B_1 \times L_x) \gtrless (B_2 \times L_y) \text{ 如果 } x \gtrless y \tag{2}$$

两个不同重量的砝码 B 和 B 放置在相同位置 L_x②，也不会达到平衡。

$$(A_1 \times L_x) < (B_2 \times L_x) \tag{3}$$

此外，对于每个关系，被试可以通过加法运算用一套等量的其他重量替代其中一个重量。这同样适用于距离。

$$C_1 = (A_2 + A_2' + B_2') \tag{4}$$

① 从现在开始，我们用字母 A、B、C 等表示物体的重量增加。距离增大、给孩子们画了一个等距点，上面有挂砝码的挂钩)用数字1、2、3等表示。

② 英译本此处表述有误，与公式(2)的表述重复，这里已按照公式(3)进行更正。——译者注

另一方面，在这个例子中，不同重量 A_1 和 B_1，以及不同位置 L_1 和 L_2，两者的协调在子阶段ⅡA 是不可能获得的。即使被试通过实验发现，右边近距离放置大砝码而左边远距离放置小砝码天平平衡，但他不知道如何从一边调换到另一边或发现时已晚，所以他（Nem）会说："必须像之前那样做，只是以相反的方式。"

（三）子阶段ⅡB：重量和距离的反对应关系

刚才描述的这个例子（不等的重量和距离）将在子阶段ⅡB 得到解决，但尚未通过度量比例（1 和 2 之间关系是个别的例外），而是通过平衡定律进行定性的对应："砝码越重，越靠近中间。"

Fis（10 岁 7 个月） 他发现 P 和 F 不平衡"因为 P 更重，而 F 太轻"。"那要怎么做？" "把它移前些（他把砝码向轴方向靠近，以此获得平衡）。我必须把它从位置 16 处移开，看是否还是这边重些。" "你这样做是为了什么呢？" "这样重量就增加了。" "那你把这个移到哪呢？"（把 P 移开） "这样另一边就上扬了。" "那你把它放在尾端呢？"（P） "它会继续上扬的。"（F）结论是：当两个砝码重量不等时，"移动重的那个"（向中间方向移动）。但 Fis 一直没有测量距离，即使对于 1 到 2 的关系。

Rol（10 岁 10 个月） "你必须改变砝码的位置，因为放在尾端这样会更重的。"他把最轻的一个从力臂上移开："不，现在更重了。"他在位置 2 处放置 G，在位置 14 处放置 A，它们平衡了"因为 A 在位置 14，比另一个稍微轻些。"

这些反应和子阶段ⅡA 之间的差距已经明确。早期阶段被试遇到两个没有平衡的砝码时，他主要采用替换即增加或减少的方式来处理。按这个方式，他经过置换来获得平衡，仅是例外通过探索（调节）。另一方面，现阶段被试遇到两个不相等的砝码，会通过移位的方式努力去平衡它们，他们依靠这样的一个假说，即相同物体放置的距离离轴越远，重量越重；离轴越近，重量越轻。他根据这一定律不断试验，但缺乏比例测量，只是依靠简单的定性对应。

由此，调整决定平衡条件的新运算是两套序列排序，对于砝码是 $A<B<C$，而距离 $L_1>L_2>L_3\cdots$ 并存在一对一相反的对应关系：

$$\begin{array}{ccccccc} A & < & B & < & C & < & \cdots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ L_1 & > & L_2 & > & L_3 & > & \cdots \end{array} \tag{5}$$

可以翻译成互反关系（用关系乘法的语言表达）：

$$(A\times L_1)=(B\times L_2)=(C\times L_3)=\cdots\text{，等等。} \tag{6}$$

但显然，这样的定性运算不足以建立定律。（6）的逻辑乘法可以得出一些推论，但某些因素仍不确认：

更重×相等距离＝更大力量

较轻×相等距离＝更小力量

相等重量×远距离(离轴)＝更大力量

相等重量×近距离＝更小力量,但是 (7)

更重×更远＝尚未确认

更轻×更近＝尚未确认;并且

更重×更近＝更轻×更远

(但这只是在某些可测量的情况下)。

然而,这个水平的被试可以称出砝码的重量(他知道 $B=2A$,等),也可测量出距离(通过小洞的数量可以得出)。有了这些事实,我们为什么必须要等到阶段Ⅲ才能完成比例格式的组织过程呢?我们必须说这是一个书本学习的问题,但相反,我们可以呈现一些例子(与我们在其他地方发表的有些研究类似[1]),其中儿童完成比例格式前没有接触过任何学术知识。由此,作为一个必要的和充分的条件,这个格式可能要求一个定性的运算系统,这个系统既可分化又可统一,与 INRC 群类似。这个例子所涉及的一套平衡的作用力与反作用力,和我们在第九、十章分析过的类似,从这一角度来说,这些假说更具说服力了。

(四) 阶段Ⅲ:定律的发现和解释

当被试将自己限定在之前的过程中,即允许被试同时在天平两端挂上砝码,则被试开始在子阶段ⅢA 发现这一定律。它采用比例 $W∶W'=L'∶L$ 的形式(W 和 W' 表示两个不同的重量,L' 和 L 表示是它们两个放置的距离)。这一定律立即变得清晰,但即使在子阶段ⅢB 也未形成一个合理的解释。("这是一个补偿系统",正如 Chal 告诉我们那样。)但通过连续地以及交替砝码进行试验,被试的注意力转向倾斜度以及高度上的距离;这可能使他根据工作量的相等得出解释(力的位移)。尽管这样的解释在子阶段ⅢA 已经可以成立,但事实是在子阶段ⅢB 前甚少出现。尽管如此,我们在许多例子中看到这一情况,认为它值得分析。

首先,我们展现一个在子阶段ⅢA 发现这一定律的例子:

Rog(12 岁 11 个月) 在一边位置 28 处放置砝码 P,另一边中间处放置砝码 C 和 E,测试距离,他说道:"这有 11 个小洞,一半的长度。可以将($C+E$)的重量分成两半,然后复制。"(P)——"你怎么知道必须将砝码放在中间位置?"(增加重

1 参见皮亚杰、英海尔德:《儿童的空间概念》,Chap. Ⅶ, No. 9;皮亚杰:《儿童的运动和速度概念》,Chap. Ⅸ, nos. 2 and 3;皮亚杰、英海尔德:《儿童概率概念的起源》,Chap. Ⅵ, nos. 5 and 6。

量）　“我突然想到这个想法，我就是想试试　如果把它们放在中间，那么重量值就减半　我知道，但是我没法解释。我也没学过。”　“你知道其他类似情况吗?”　“在弹珠游戏中，如果五对四，那么四个中最后一个有权获得额外一个弹珠。”他也发现，当两者距离为1和1 4时，砝码必须选用1和4；当两者距离为1和1 3时，砝码必须选用1和3，等等。“你将最重的砝码放在标尺上代表最轻的地方(相应最轻重量)，相比中心位置。”

被试能够快速地从定性对应发展到比例测量，首先意味着一个预期格式的出现然而，被试在天平和弹珠游戏中建立的相似性说明，这一格式从互反或者补偿概念中发展而来。所以从子阶段ⅢB起，我们要验证被试怎样从同样的概念出发，去探寻一个用严格术语表示的解释(使用可替换悬挂物的仪器)：

Chal(13岁6个月)　他很快发现“距离越远，重量越轻，力臂上扬”。　“为什么呢?”　“那里产生了补偿”　“什么补偿了?”　“距离和重量；这是一个补偿系统。每一端轮流上扬。距离相等，那重量也要相等　若产生倾斜，那一端上扬，另一端下降。”　(我们做了一个实验，把两个砝码分别放置在位置5和位置10。)“那力臂会倾斜什么样的角度?”　“一边重(他指的是放两个砝码的一端)，而另一边轻(实验)　噢！不，一样的角度!”他指出：“距离补偿了重量”　“他们距离多少?”(指出了距离 H 和 H')　“小砝码放置的距离长，大砝码距离短。”　“需要多少力?”(他指了指用来升高降低砝码的线)　“对于最小的砝码，需要用力拉更长的距离，大的砝码，距离短些。”　“哪里需要更大力呢?”　“这里(两个砝码处)　噢！不，是一样的；重量补偿了距离(他指高度)”

Sam(13岁8个月)　他立刻发现水平距离与重量成反比。　“你如何解释它呢?”　“砝码在末端比在中间位置，抬高它需要更多力量……因为它需要经过更长的距离”　“你怎么知道?”　“如果天平上一个砝码的重量是另一个的三倍，那它的距离必须是另一个的三分之一”　“你有一次提到距离(水平方向)，又有一次提到经过的路径?”　“噢，这要看你是去计算它，还是要真正的理解它。若你想要计算，那从水平方向去思考较好，但若你想要理解，从垂直角度更合适。对于轻的砝码(处于末端)，它改变的更快些，但对于重的砝码来说，速度稍慢些。”

Tis(13岁8个月)　他发现1和2的比例，并说明了高度：“如果我把这个砝码(一个)用那个(两个砝码)替代，它只会上扬一半高度……(高度上的距离)，在末端比在中间更长。”　“发生补偿作用吗?”　“是的，发生在力和高度之间。”　“你如何测量?”　“高度测量更容易，事实上是一样的(水平距离)。”

在阶段Ⅲ两个子阶段中发现的这些反应，让我们回到INRC群的熟悉格式，我们在第九、十章发现过相同的形式。但更重要的是，他们向我们展示了普遍的平衡格式在现在的例子中怎样通过构建比例 $W/W'=L'/L$ 和 $W/W'=H'/H$ 而得以细化。因此，我们有两个问题需要讨论，首先，比例格式怎么构建；其次，比例格式与INRC群有什么联

系？

在这些反应中，INRC 群在我们先前处理连通器内液体流动问题时（第九章）首次出现。当一个砝码挂在离轴特定距离的位置上，天平的这一力臂会下沉；当一个相同重量的砝码挂在另一端力臂的对称位置时（离轴距离与第一个砝码相同），第二个力臂也会向下沉。"一端上扬，然后另一端再上扬，"Chal 说道，"若它倾斜（低于水平面），它回到中间，而另一边再向下。"

换句话说，在这个例子中，互反关系表示为 $(p \supset q) = R(q \supset p)$，其中 p 和 q 代表力臂向上运动。但在天平这个例子中有新发现：两个因素是可运算的，他们互为补偿：独自运算时，重物 W 在距离 L 处产生的倾斜度，与重物 $W' = nW$ 在距离 $L' = L/n$ 处产生的倾斜度相同。Chal 对于这一事实感到吃惊（"同样角度"），但发现这也非常自然，因为"重量补偿了距离"。

与液体平衡的压力和阻力问题一样，INRC 组以同样的形式再次出现（第九章公式(8)和第十章公式(1)）。重建平衡的两种运算对应如下运算：在一个力臂的某距离处放置一个砝码，反演 N 包括除去这个重量，互换 R 包括在天平力臂另一端相等距离上放置相同重量的砝码。进而，反演 N 取消之前的运算，而互反 R 则补偿之前的运算，而非取消；但 N 和 R 的最终结果相同，例如，它们使力臂恢复到水平状态。这些关系的转变（第九章公式(8)和第十章公式(1)）在当前的背景中再次出现并不令人惊奇，因为它是以极其简单的直觉为基础，这一直觉是在阶段 Ⅱ 通过定性对应关系获得的。但是，所增加的是，天平有其特有的特征，即距离补偿重量。

因此，在两个形式中——比如它与压力和阻力，或振动和倾斜度有关——INRC 群作为比例格式变成了双倍：在压力和阻力的例子中，水平距离与重量成反比 $W : W' = L' : L$，在倾斜度例子中，高度和重量成反比 $W : W' = H' : H$。这里产生了第三个比例——这是正比不是反比（$L : L' = H : H'$），它具有纯几何性，明显呈现给我们的被试（参考 Tis：无论你测量水平距离还是高度"实际上是一致的"）。所以我们的问题是我们的被试如何构建前两个比例。构建是独立完成的还是对经验数据的直接构造；它与以 INRC 群为基础的平衡运算格式有联系吗？

（五）比例格式和 INRC 群

首先，我们应该记得被试直到了阶段 ⅢA 开始理解比例：在所有领域中，这都是事实，不只在天平实验中成立。在子阶段 ⅡB，我们经常注意到被试在寻找他们所比较的两者关系间的共同点，但共同关系被认为是加法。由此，我们得出这样一个差别等式：$W - W' = L' - L$，而不是比例 $W : W' = L' : L$。显然，比率概念形成的前提是，简单的差异关系被替换为 $WL = W'L'$ 的乘积概念。但是，我们也要注意到，从差异到乘积的转变很少以可测量的形式作为开端发生。比例的数值量化通常在基于逻辑乘积的定性格式

后出现。例如，两个因素的共同反应与其他两个因素效果等同，"距离越长，重量越小。"Cnal 说，他应用了单一的定性对应关系，参考公式(5)。但他补充道，"他们是一起的"。

换句话说，小重量长距离与大重量短距离等效。子阶段ⅡB 中指出了这一逻辑乘法[参考公式(6)和公式(7)]，但被试未能归纳运用到所有可能的情况中。那么，子阶段ⅢA 和ⅢB 发现的归纳性来自于哪里呢？毫无疑问，这来自于补偿和互反概念，这些概念与 INRC 群有联系。

显然，当阶段Ⅲ的被试能够理解反演(N)和互反(R)的变换，并将它们组成一个单独的系统(I，N，R 和 NR=C)时，通过相同的方式他就能够运用乘积等式，以比(6)和(7)更普遍的形式。此外，这一形式已经隐含了补偿和取消的概念。以 INRC 群结构论证的可能性表明了理解以下等式：NR=IC，RC=IN，NC=IR，以及双转换乘积间的对等。结论是 INRC 群自身与逻辑比率系统是等效的：

$$\frac{I_x}{C_x}=\frac{R_x}{N_x}\quad \text{或者}\quad \frac{R_x}{I_x}=\frac{C_x}{N_x}$$

因为 IN=RC(此处 x=I，N，R，C 转变的运算)。

比如，我们来验证被试对于重量和水平距离变动的推理过程(为了简化标记，我们忽略假定重量和距离)。令 p 代表增加的特定重量，q 代表增加的特定距离，$\bar{p}$ 和 $\bar{q}$ 代表对同一力臂减少的重量和距离，p' 和 q' 与 p 和 q 相对应，表示另一边力臂的重量和距离，被试通过与第十章公式(1)同构的过程，理解反演和互反的以下关系(INRC 群，用 $p \cdot q$ 作为操作 I)：

I$(p \cdot q)$=在同一个力臂上同时增加重量和距离；

N$(p \vee q)$=$(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$=减少距离的同时增加重量或者减少重量的同时增加距离或者同时减少重量和距离；　(8)

R$(p' \cdot q')$=通过在另一端力臂上增加重量和距离来补偿 I；

C$(\bar{p}' \vee \bar{q}')$=$(p' \cdot \bar{q}') \vee (\bar{p}' \cdot q') \vee (\bar{p}' \cdot \bar{q}')$=像 N 取消 I 那样，取消 R。

但是，既然 R$(p' \cdot q')$ 等同于补偿运算 I$(p \cdot q)$，他们在力臂另一端发生反应(对称)，我们发现它可以写成 $\bar{p} \cdot \bar{q}$。$(\bar{p}' \vee \bar{q}')$ 等同于通过对称补偿 N 运算，我们可以写成 $(p \vee q)$。所以公式(8)可以形式化为：

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}(p \cdot q) \\ \mathrm{N}(\bar{p} \vee \bar{q}) \\ \mathrm{R}(\bar{p} \cdot \bar{q}) \\ \mathrm{C}(p \vee q) \end{array} \tag{8a}$$

这些仅表示重量和距离间平衡的转换系统，其自身与如下比例关系等效①：

$$\frac{p\cdot q}{p\cdot q}=\frac{p\vee q}{p\vee q}\quad 由此\quad \frac{\mathrm{I}x}{\mathrm{R}x}=\frac{\mathrm{C}x}{\mathrm{N}x}(x=p\cdot q) \tag{9}$$

换句话说，儿童一旦理解了这个比例关系，就直接理解了反演和互反关系(8)和(8a)；力臂一端重量和距离的增加，也要在另一端对称地增加重量和距离，因为一端重量或者距离的增加是另一边的对等运算。

毫无疑问，这一逻辑比例的定性格式与被试最开始对于比例的笼统直觉相对应。从定性格式到更细节的逻辑比例(包括单一比例)，再到数值比例，这一发展过程很容易实现。

在这个方面，要记住，对于单一比例 p，C 与 I 一致，R 与 N 一致。从公式(9)，我们可以得出：

$$\frac{p}{q}=\frac{\bar{q}}{p}\quad 由此\quad p\vee\bar{p}=q\vee\bar{q} \tag{10}$$

换句话说，增加重量就是增加距离，减少距离就是减少重量。

其次，除了公式(9)和(10)中的直接比例，INRC 群还包括所谓的互反比例，即其中一个交叉乘积是另一个交叉乘积的互反 R：

$$\frac{p\cdot q}{p\cdot q}=\mathrm{R}\,\frac{\bar{p}\vee\bar{q}}{p\vee q}$$

$$由此\qquad [(p\cdot q)\cdot(p\vee q)=p\cdot q]=\mathrm{R}[(\bar{p}\cdot\bar{q})\cdot(\bar{p}\vee\bar{q})=\bar{p}\cdot\bar{q}] \tag{11}$$

因此，通过(10)和(11)，互反比例：

$$\frac{p}{q}=\mathrm{R}\,\frac{p}{q}\quad 由此\quad (p\cdot\bar{q})=\mathrm{R}(\bar{p}\cdot q) \tag{12}$$

这个公式论证了两个逻辑比例(11)和(12)与数值比例是同构的，数值比例可以通过给重量增加(p)或者距离增加(q)同一个系数 n 来获得。换句话说，如果 $p=nW$ 以及 $q=nL$，那么：

$$\frac{p}{q}=\frac{\bar{q}}{p}对应\frac{nW}{nL}=\frac{n:L}{n:W}，例如$$

$$\frac{2\times 4}{2\times 8}=\frac{2:8}{2:4} \tag{13}$$

和

① 这一逻辑比例代表如下意义：

$(p\cdot q)\cdot(\bar{p}\vee q)=(\bar{p}\cdot\bar{q})\cdot(p\vee q)=o$	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{N}=\mathrm{R}\cdot\mathrm{C}$	(a)
$(p\cdot q)\vee(p\vee q)=(p\cdot q)\vee(p\vee q)=(p^{*}q)$	$\mathrm{I}\vee\mathrm{N}=\mathrm{R}\vee\mathrm{C}$	(b)
$(p\cdot q)\cdot(p\cdot q)=(p\vee q)\cdot(p\vee q)=(p\cdot q)$	$\mathrm{I}\cdot(\mathrm{NR})=\mathrm{C}\cdot(\mathrm{NN})$	(c)
$(p\cdot q)\cdot(\overline{p\vee q})=\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot(\overline{\bar{p}\vee q})=o$	$\mathrm{I}\cdot(\mathrm{NC})=\mathrm{R}\cdot(\mathrm{NN})$	(d)

$$\frac{p}{q} \quad R\,\frac{p}{q} \text{对应} \frac{nW}{nL} \quad \frac{W:n}{L:n}\text{，例如} \tag{14}$$

$$2\times 4 \quad 4:2$$
$$2\cdot 8 \quad 8:2$$

公式(9)—(14)在说明被试真实的推理过程时可能显得过于抽象。事实上，这是我们所引入的符号系统的部分独立结果；然而，这就是比例被发现的方式。在引入重量和距离的测量数值之前，被试常常这样开始设想：

$$p\cdot\bar{q}=R(\bar{p}\cdot q) \tag{15}$$

(在力臂一端增加重量减少距离与力臂另一端减少重量增加距离是一样的)。

然而，公式(15)与公式(12)没有什么不同，而后隐含了公式(11)和(9)，并带来测量比例(14)。由此，我们先前用公式化的符号来表达被试实际的推理过程，通过这一点可以证实我们的做法是合理的。

至于重量和高度之间的比例，当被试面对交替悬挂在仪器上的砝码时，就有被试明白距离的加大(q)意味着高度(r)的绝对增加，由此，

$$q \supseteq r \tag{16}$$

所以，比例(10)和(12)意味着：

$$\frac{p}{r} \quad \frac{r}{p} \tag{17}$$

和

$$\frac{p}{r}=R\,\frac{\bar{p}}{\bar{r}} \tag{17a}$$

最后，将重量转移到高处构成了功。我们的被试用他们自己的话来表达，因为他们没有物理的技术词汇："需要更远距离来拉"(Chal)或"需要更多力来提高重量"(Sam)。事实上，若在离轴较近的距离悬挂一个较重的砝码，与重量轻n倍距离远n倍的砝码平衡，这是因为在一定高度提起第一个砝码所做的功，与在比第一个高度高n倍的地方提起第二个砝码所做的功相等。正如Fis说，这是"高度与力之间"的补偿。Ⅲ阶段能够部分地理解等功的概念，这给平衡现象做出了解释。然而，被试的回答在这一点上没有完全体现出来，我们必须转向下一个实验。我们将这个过于简单的平衡称仪器替换成在斜面上牵引一个砝码；我们从这个实验可以看出功的概念如何在具体子阶段ⅡB开始有详细说明，以及它如何在形式阶段Ⅲ被用于解释。

第十二章 沿斜面升高重物[1]

本章我们的被试再次遇到平衡问题，尽管与上一章没有明显区别，但特别之处在于此设计引出功的关系问题。一个玩具翻斗车在斜度可变的坡上被拉着前进。任务是要预测出翻斗车的运动或平衡位置是以下三个变量的函数：车的载重、车后绳索牵引的砝码重量以及轨道的斜度。最后一个变量不是根据测量的角度计算，而是根据它的正弦，也就是高度变量 h，所以这里需要探究的平衡规律是：$W = M \cdot h/H$，这里 W 指的是牵引砝码的重量(可变的)，M 指的是玩具翻斗车的重量(车本身重1单位，但可以装载不同重量的重物)，H 指的是总高度，即假设将轨道垂直放置，轨道的总长度。

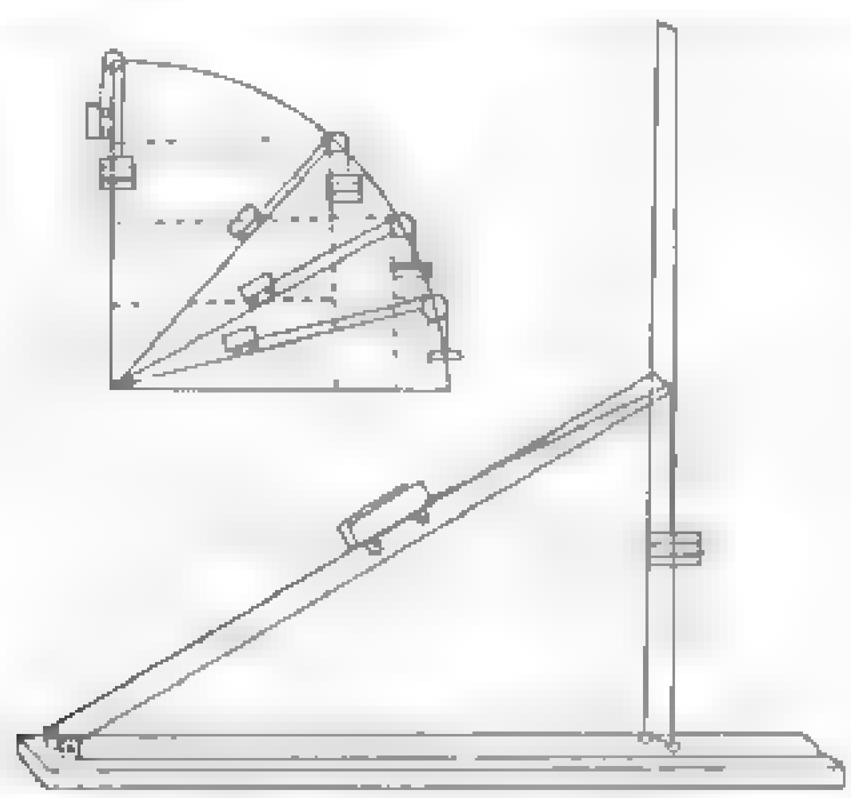


图1 一种玩具翻斗车装置，由一根缆绳牵引在斜面上滑动，缆绳另一端由砝码牵引。砝码重量可以改变，斜坡的角度也可以调节，车子载重的变化提供了第三变量。

(一) 阶段Ⅰ：无法区别个人动作与客观过程

在阶段Ⅰ，被试最可能用他在装置上可以操作的动作来解释这一情境。

Bar(6岁) 他推动小车使它向下滑动。"车子往下了吗？"——"没有，它向上走了。"——"你有其他的做法吗？"——"用手推。"——"用手推着它往上走吗？"——"你在车里面掌控呀。"——"用这些重物吗？"——他把牵引砝码装上。"我装了些东西。"——"为什么它会往上走？"——"我不知道，因为它很重。"——"怎么让它往下呢？"——"我不知道，推一下。"

Her(6岁) "你怎么办？"——"让这个小车走。"——"怎么让它走？"——"用

---

[1] 与莫夫(A. Morf)、教育科学研究所的培训研究助理奥利维里(H. Oliveri)、梅西尔(G. Mercier)和罗约(D. Royo)的合作。

链子”（他拉绳索）　“可以让车子自己走吗?”　“减少牵引砝码的重量(W)，把重量加在车子上。”(他减少 W 上两个单位的重量，把它加到 M 上)　“还能怎么做呢?”　“把轨道抬高些。”(他把轨道调整到 15°)　“车子会往上吗?”　“没有，它将会往下(车子往上走)，你要推一下它。”　“如果把斜度调到更高，你觉得它会往上吗?”　“不会，它会往下滑，因为斜度很斜。”　“那你要怎样车子还会往上走呢?”　“拉一下，车轨被放得稍微低点，你需要推着它。”(他用手推着)

Bel(6 岁 6 个月)　“那(W)是要拉的。”　“那怎么让它走呢?”　“你要把那个放低。”(他将斜度放低)　“接下来小车会怎么样?”　“它会向下(实验)。它往上了!”　“为什么?”　“因为它很高。”　“那怎么使它往下呢?”　“你需要升高链子(它被升高了，一单位的重量加在了小车上，两单位的重量加在 W 上)，车子更加往上走，它下不来……”

对于这些被试，这套装置不仅仅被视为一套独立的因果设置，并且也同化于他们的操作。这里补充两个含义：第一，被试并没有试图割裂自己的行为同外部的关系，而是将自己的角色定位在与客观事物相同的维度；第二，原因自身也被概念化，并且被纳入一种动机模式中。因此，重量被想象为一种可以推拉的力量。但是，同样正确的是，在所有的发展水平中，因果关系是通过主体对真实世界的影响，将现实的转变同化于主体的动作或运算。也就是说，当被试到达特定运算的阶段，现实的改变被理解为对转换运算的同形反应。但当被试的活动包含不可逆的、与运算系统不协调的行为时，现实就被表征为一套同样无法调节的力量，与个人的行为无法区分。

（二）子阶段ⅡA：斜度尚未运算协调时确定重量的作用

被试开始将玩具小车的重量与砝码联系起来，因为这两个是同类因素，他也意识到轨道的倾斜度起作用，但尚不能与重量形成协调：

God(7 岁)　“你如何才能让这个小车滑动?”　“拉着它。”　“如果不拉它呢?”　“可以推着它。”　“如果不推呢?”　“拿掉负载物。”(他拿掉车中的两单位重物，小车立即向上走)　“还有其他的吗?”　“你也可以增加砝码的重量。”(他在砝码上增加两单位重量)　“还有其他的吗?”(呈现被试车轨可移动)　“你应该让斜度再小点。”　“好的，那如果我放在这里会怎么样?”(两单位在 W 上)　“车会往上走。”　“如果我增加车里的重量呢?”　“车会不动。”　(实验)“那么你怎样让车子往上走呢?”　“你需要再增加重量。”(他又在砝码中增加一单位重物)　“如果我不增加重量呢?”　“那么你需要减少车里的重量。”(M)　在特定的斜度下达到了平衡：“如果车轨再低一点呢?”　“我觉得车将会不动。”(重量达到平衡，与斜角无关)　(实验)“车会向上

走。"——"为什么？"——"因为这里的重量大(W)。"

Fer(7 岁 10 个月) 同样的开始，要使车子向上，需要"减少 M 的重量，增加 W 的重量。" "如果我减少一个单位重量，而不增加另一边呢？" "它将不动(实验)。车子动了！" "如果要使它向下，应该怎么做呢？" "提高链条，增加链条的高度，减少重量(W)。"但在预测结果时，Fer 只考虑了重量的因素，假设平衡与斜度无关，在特定的重量下可以达到平衡。

这对于阶段Ⅰ来说有了明显的进步，出现了重量的可逆组成，砝码 M 增加一个单位的重量相当于车里的重量 W 减少一单位，但这些的前提都是假设 M 与 W 在平衡状态下(到轴心的距离都是相等的)。然而，斜度问题似乎被视为次要角色，被试预测斜度越陡，越容易往下。然而他不懂增加斜度会自动地减少砝码的重量，比起缓坡，车向上则需要更多的重量。因此，斜度是第二个因素，仅在特定情况下出现，没有与其他因素一起整合为普遍因素考虑。

（三）子阶段ⅡB：发现斜度的一般规律，开始功的概念

最初，被试发现三个因素：车的重量、砝码的重量以及斜度。他们逐渐发现，平衡与重量之间不仅仅是简单的相等，还会因斜度的变化而变化。因此，他们试图继续研究这种关系，并据此得出结论：坡面越陡，牵引特定的重量需要的力越大：

Bou(9 岁 6 个月) 他在最初就注意到 W 和 M 的重量，然后："为什么这个装置是倾斜的呢？可以变一下吗？" "你想调整斜度？" "对，我想看一下斜度的作用，我可以再增加重量吗？" "增加哪里的重量？" "这里(W)，或许小车走的速度会更快。如果小车足够重，那么便会向上走，如果它的重量不够，将会不动。"他试了几次。"如果它(W)增加的重量更多，小车的速度会加快(他将 W 重量增加到 7 单位)。小车不会下滑因为车里的重量很大(他从 W 拿出来一些，小车就会往下滑)。如果我装的少，小车就会往下滑。"接着，他又发现："我不增加(W)重量，我想看小车是往下还是缓慢往上。"小车向下走，被试改变 M 的重量 "如果你增加一些重量在这里(M)，有什么不同？小车依然走得很快(他减少 W 的重量，增加 M 的重量直到两者相等)。我在两边都放了 1 单位的砝码[(小车依然在移动)；然后他尝试在两边加 2 个单位，再加 0.5，然后两边都加上 3 个单位的砝码]。它是不是不动了？不，无论怎样，小车都在移动！"此刻他意识到重量的相等无法保证平衡。 "刚开始你问我这个斜度是用来干吗的，还记得吗？" "哦，是的，你可以将轨道调低，那样小车就会往上走了。" "你确定吗？" "它会向上走的(他把轨道降低到 1，小车开始向上走)，因为现在车轨没有那么陡，小车很容易向上。"接着，Bou 开始改变斜度，他意识到"当轨道垂直时，W 的重量会拖动小车前进"，因为砝码重量足够，但他没有改变砝码的重量。当倾斜角是 45°，W 重量为 1

单位时，他发现小车开始往下，笑道："我以为小车会向上走因为即使斜度是垂直的它还会向上走。"然后他发现当角度是 5°时，小车会向下走："你需要增加或减少重量，看见它向上或向下时，需要多次实验。"但是他没有系统地实验。

Jan(10 岁 8 个月) "要使小车往上，需要增加这里(W)的重量。" "还能怎么做呢?" "清空小车的重量。" "那么小车还会在原点吗?" 他在小车和 W 上分别增加 1 单位的重量。"重量是相等的，但是它还是不动。" "你可以调整车轨吗?" "或许可以将车轨调低点，这样小车就容易向上走，因为斜度不高。" "如果调高车轨，增加重量呢?" "它会保持不动因为很难上去"。接着他测量了小车重量发现相当于 1 单位的砝码。 "如果你清空小车，然后在这里(W)增加 1 单位的重量，就可以保持平衡吗?" "不，它会往上走。"(因而他意识到平衡取决于倾斜度) "如果你提高车轨的高度呢?" "那就很难上去了。"——"为什么?"——"因为小车变得更重。"

在这个阶段，考虑这个问题的思路有了两个主要的进步：(1)意识到重量相等不一定可以达到平衡；(2)意识到斜度的因素，也就是斜度越陡，小车越费力。

首先被试发现在 W 和 M 上各自施加 n 个单位的重量并不能保证平衡，接着发现小车本身重 1 个单位，但是 P＝1＝M 也达不到平衡(除非轨道是垂直的)，这个发现引导他注意到斜度的问题。

因此，由于他直接改变了斜度或者因为之前的原因，儿童在这个阶段注意到斜度的作用。Bou 说："现在斜度稍微小了，小车更容易上去了。"Jan 说："小车将更容易往上了，因为车轨没那么高了。"然后，他意识到如果斜度和砝码同时增加，将会达到平衡，"因为它更难上去"。最后，他推断如果 W 和 M 重量相同，小车会向上，如果斜度更大，小车会"变得更重"。

这些后续的实验方案很有指导价值，因为它们向我们呈现了儿童如何开始将斜度与重量一样考虑，并把它与重量一起结合到功的框架中：将较重物体举到较低的高度等同于将较轻物体举到较高高度，换句话说，功的总量是相同的。当斜度增加，Jan 表述说重量也将会增加，实际上就直接表达了这样的观点。尽管他对力的平行四边形法则①并不熟悉，被试对于斜度和重量的关系有直观的准确的理解。因此，即使在具体层面，有了高度和重量的关系基础，功的概念依然是可以理解的。

现在，值得注意的是，无论是在小车的平衡实验中发现了重量和高度之间的相反关系，还是重物上移中功的概念，都是在相同的子阶段ⅡB 得以构建的，就像在天平实验中发现的重量和距离之间的相反对应关系。这两个都与物理定律有关，但是孩子并不知道这些，在这个平衡问题中他不会想到功的作用也不会想到高度，除非这个问题以这

① 平行四边形法则认为，重量产生的拉力(同等的力使小车更轻)随着斜度减小而增加，而非拉力的部分则随着斜度增加而增加，与斜度成正比。

种交替悬挂的装置表现出来(见第十一章)。在本章中他们也不会想到平衡与重量和斜度间的关系密切相关。这里所有的进展,在某个发展水平上,仿佛是儿童在建构该特定领域的过程中同时使用了一整套的具体运算(例如高度和距离条件下的重量平衡)。

但是仍然有一个问题,被试不能将里面的规律完全表达出来,他考虑到三个因素(W,M,斜度)并且在第三者不变的情况下连续地进行两两比较。但他每次并未有意去保持其中一种因素不变,也没有试图去实践"其他的东西都是相等的"论证,而是在进行两两比较时,他仅仅忘记了第三种因素,因此不明就里地使得第三种因素不变。他没有用公式表达出这个规律,因为缺乏同时协调实验所有因素的方法。

他无法协调整个实验所有因素的原因很简单,有两个主要原因,而且都同具体运算的本身属性有关。首先,连续的数对或三个因素之间的相互关系过于复杂,儿童难以应对。可以说如果被试具有这些必要的运算,他可以列出完整的相关因素的清单。我们没有必要在这个时候去描述序列排序、相等以及重量增加这些运算,因为已经讨论过它们与平衡的关系(第十一章)。显然,被试也可以按顺序改变斜度。然后,如果被试愿意,他也可以对每个斜度去判断车的重量 M 和砝码的重量 W 之间的对应关系,这样他就会知道小车何时达到平衡,何时向上向下。但这将会变成一个非常复杂的三种因素交织的表格。除此之外,被试也不会想到这一点,他会满足于解决独立的问题,因此,他失败的第一个原因就是不能整体协调所有相关变量。

第二个原因是,如果被试不采用连续对应的方式,而是尝试运用逻辑运算,也就是利用关系乘积(事实上他已经使用这种方法决定功的关系),然而许多结果仍无法确定。换句话说,在天平实验重量与距离的逻辑乘法关系中[第十一章公式(7)],我们就发现这种相同的不确定性。从一个平衡点开始:

$$\text{斜度 } x \leftrightarrow [Wy \leftrightarrow Mz]$$

被试自然可以得出结论,如果斜度 x 增加,y 和 z 保持不变,那么小车会向下滑动;如果 x 减小,小车则会往上。如果斜度 x 增加,砝码重量 $W(>y)$ 也增加,或者当 x 增加,然而小车上的重量 $M(<z)$ 减少,那么结果就无法确定:

$$\overset{+}{x} \cdot \overset{+}{y} \quad \text{或者} \quad \overset{+}{x} \cdot \overset{-}{z}$$

可能出现 >、< 或 = 三种结果,除非给出充分量化的因素。

如果重量增加、不变或者减少用符号来表示,相应表示为 $+m$、$=m$、$-m$,高度增加、不变或者减小,依次表示为 $+h$、$=h$、$-h$,那么我们会看到一个双元列表,刻画了在了阶段 ⅡB 通过逻辑乘法的方式得出的功的概念,包含九项结果,其中两个无法确定(用 $>$、$<$、$=$ 或者 $\pm$ 分别表示"更多的功""更少的功""同样的功"或者"无法确定"):

	$-m$	$=m$	$+m$
$-h$	[illegible]	[illegible]	$\pm$ =
$=h$	[illegible]	[illegible]	+
$+h$	+	[illegible]	+

(1)

总之，只要被试仅限于使用具体的类与关系运算，他便无法得到这个规律(即使在子阶段ⅢA所发现的内隐的定量比例的方式)。这个解释是双重的，第一，这种必须依靠经验主义建构的对应关系太过复杂，第二，关系乘法的计算结果部分是不确定的。

(四) 子阶段ⅢA：三种因素的定量协调，但比例不是高度的函数

形式思维的本质是考虑全部的可能性，然后再从中推断选出真实的。被试运用了不同的方法来解决这个问题。被试没有迷失在这种穷尽所有可能性的各种情况的列表中，因为通过序列实验的方式穷尽所有情况来推断对应关系实在过于复杂，相反，被试很快致力于筛选关键情境，比如，极端情况和中间情况。他突然想到将车轨水平放置、垂直放置(没有对可能的转换进行基础的说明，这种想法是无法解释的)，然后他确定出中间位置的情况。

因此，从一开始，被试将三个因素在一个单一的规律下进行协调，这种规律本身就是一个定性的比例格式。但因为被试用角度而非其正弦(也就是高度)的方式表示斜度，他们所摸索的规律依旧多少有点牵强。

Lav(10岁6个月)："要使车往上，你需要增加更多的重量(W)，要往下，就减少重量(W)。""除了这，还有其他办法使它往上吗？""放低车轨。""那要使它向下呢？""拿走所有的砝码(W)，你可以在车上增加点重量，也可以将车轨调高，因为车会往下。"(用更大力气)"怎样让车不动？""那取决于你如何放置轨道，以及在车里放多少重量的砝码。"(他将轨道调整到15°，发现3个单位的重物可以让小车保持平衡。)"还有没有其他的地方小车可以保持不动？""将轨道水平放置，然后拿走这里的砝码(W)。"他测量了与轨道垂直时需要的重量，"1.5(单位)，因为小车有1。"然后他发现平衡点W＝1。"要让小车不移动，可以怎么做？""可以将轨道放平，(W)没有重量，或者竖起来1个重量，也可以将轨道半平状态，(W)放2个单位的重量。(他没有试着调整中间高度，也就是35°)。""还有其他的点吗？""有，在哪里都可以。"(他发现放成15°时需要1个单位的重量)"你是否全部理解了？""是的，走得越高(车轨斜度)，你需要增加越多的重量让它静止，高度越低，需要的重量越小。"

End(11岁6个月)："你可以拿掉一个砝码让它下降，也可以放上一个砝码或者抬高轨道让它上升。"他开始自己做试验，他首先将轨道放低到水平点，然后又放到垂直点，然后说："如果要使轨道直立，需要增加更多重量，你需要1单位砝码。""为什么是1单位？""因为1单位重量后，车子不再往上走，你也可以用一个天平标尺进行比较，两边都放100克。"接着，他说："我想看看在15°时，需要多少重量。"(他发现需要2.5)。然后总结出："轨道放的越低，需要减少的重量越多，轨道越高，需要增加的重量也越多。"

Scu(11 岁) "要使小车往上,你可以将轨道放低或者清空车里的重量,或者增加 W 上的重量。"他通过改变斜度寻找平衡点:"轨道放低时,车里的重量不足,所以车会向上,砝码这边所用的力也更大。"他称了车里的重量($W=4$),然后将轨道调到 33°,得出当 $W=2$ 时,到达平衡。"一分钟前我测到车里的重量是 4,而现在只有 2 单位($W=2$),这很有意思,而且车的重量就是 4 单位,你需要将轨道升得再高一点,使得两边平衡(4=4),然后再计算这个和平衡的关系。"他将轨道调得越来越高:"还是不够(他已经将轨道升到了 80°),几乎差不多了,要到 90°,有了斜度,平衡就会改变,与轨道垂直时,他们的关系是 1 比 1。"但是他尝试过调到中间度数 45°,尽管他已经确定 33°时需要 2 单位就可以达到平衡,但是依旧没有意识到高度也是平衡的一个因素。

Cla(11 岁 6 个月) "要使得小车向下,你可以调高斜度,减少砝码的重量(W),或者增加车里的重量(M)。"

和具体阶段较高水平子阶段(ⅡB)的被试相比,第一个形式运算子阶段ⅢA 的被试能够立即或者很快就将三个因素整合为一种关系。最初被试对这三种因素的结合是以二元分离的形式简单呈现的。如果将 W 增加的重量表示为 p($\bar{p}$ 表示 W 减少的重量),q 表示 M 增加的重量($\bar{q}$ 表示 M 减少的重量),r 表示斜度增加的度数($\bar{r}$ 表示斜度减少的度数),t 表示小车的上升($\bar{t}$ 表示小车的下降),那么我们可以看到 Scu 和 Cla 两位被试最初是以互反关系开始的:

$$t \supset (p \vee q \vee \bar{r}) \quad 和 \quad \bar{t} \supset (\bar{p} \vee q \vee r) \tag{2}$$

这种二元关系在实践中体现在,被试没有再忽略第三个因素,只考虑两个,而是在寻找相关性。然后,他很快就发现小车的平衡和砝码的重量变化是依据斜度的变化,他依此实验了好几次,通常他们会立刻测试极端情况——当轨道水平时,不增加任何砝码($W=0$)小车达到平衡,或者当轨道垂直时,砝码重量与车里的重量相等时($W=M=4$),车子达到平衡。因此,得出定性的规律:斜度增加越多,需要增加越多的砝码使得小车平衡,直至到达最顶点(斜度垂直),砝码重量与小车重量相等。

当被试完成公式(2)的分离运算后,也得出了以下 INRC 组公式:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}(p \vee \bar{q} \vee r) \\ \mathrm{N}(p \cdot q \cdot r) \\ \mathrm{R}(p \vee q \vee r) \\ \mathrm{C}(p \cdot q \cdot r) \end{array}\right. \tag{3}$$

因此,被试能够运用这个结构,就自然地提出了比例格式,在很多案例身上有呈现(尤其是 Lav 的案例)

$$\frac{p \vee q \vee r}{p \cdot q \cdot r} \ \mathrm{R} \ \frac{p \vee q \vee r}{p \cdot \bar{q} \cdot r} \tag{4}$$

换句话说,这个阶段所有的被试都意识到了 p 和 r、q 和 r 之间的互补关系。

如果说这个比例关系及等式能够导出 h H W M 的定律，那么对应绝对高度 H 的第四个变量毫无疑问必须要纳入考虑范围(轨道垂直时所测量的轨道的长度)。只有这样，命题的互反和可逆性才能在这个被分析的平衡系统中现实地呈现出来。但被试以度数来计算斜度，在90°时无论选择什么样的装置都是恒定值 H，也引导他寻找斜度中间的状态，即45°，发现砝码重量并不是中间值2单位，但是处于2到3之间。被试要么归纳错误，要么他尚未发现一个单一的规律。

尽管公式(3)和(4)的结果已经隐含了形式化析取和蕴涵关系的出现，但是这个阶段的被试无法排除角度的问题来强调高度。这种情况会有点让人奇怪，因为即使在了阶段ⅡB中，孩子们就已经将功的概念理解为重物上升的作用。这是由于在这个阶段被试被限于定性推理，不能够将角度和高度的概念分离。另一方面，当子阶段ⅢA的被试试图跳出斜度的定性关系而去寻找数量化的表达时，他想到的是角度而不是高度问题，显然是因为这个操控轨道斜度的装置是一个旋转的运动装置。

(五) 子阶段ⅢB：发现规律

一旦以角度计算的斜度被高度(正弦)所替代后，被试就发现了高度和重量之间的比率。但是令人不解的是，这种排除并不容易(我们指的是被试Diz)。

Gil(12岁7个月) 需要找出平衡点并推导出规律，他发现在垂直时 W 4，然后试图在45°时寻找中间点(W 2)，然后60°："为什么?" "我计算了一半的距离(水平方向)但是行不通，你需要找出一半的点。"他试验后得出 W 2，"大约30°，但仍然要计算高度，这里增加2单位时，角度是32°，加3单位时，需要把高度调到3，不管怎样，我觉得都应该是这样(实验后)。是的，1单位重量(W 1)，你需要将高度调到1，2单位重量时高度是2，3单位重量时高度是3，4单位重量时，需要调到顶端4。" "你能够给出一个规律吗?" "可以，2单位的重量，需要到一半，达到一半高度是小车重量的一半，达到四分之一是重量的四分之一。"

Diz(14岁3个月) "如果轨道垂直，W 上需要足够的重量使两边相等(M 和 W 都是4单位)，2重量也一样，每边为1。如果达到一半，则要加上一半的重量。" "达到一半什么?" "达到一半斜度：45°"(实验后需要2.5单位重量)。"不对，可能有摩擦的原因。" "有可能，但是摩擦并不是很重要的因素。" 他发现 W 2时，对应的斜度是33°。"33°大约是三分之二的角度，看这里，噢! 是高度! 不是角度的问题，而是高度(他试着把高度调到1 2，3 4，1 4)。W 的重量必须和高度相等；例如，如果高度是2，你需要2 1，如果高度是1，那就需要1 4"(1和2分别是高度的1/4和1/2)。

Vu.(15岁6个月) 他确定出与轨道垂直时 W 需要4个单位与 M 平衡，"与斜度为33°时，重量为2，15°时，重量为1，60°时应该是4个，但试验后却不是这样。

如果不是和角度成比例的话，那么……”“会不会还有其他你没有考虑到的因素呢?”“高度和角度对应，如果高度增加一倍：高度为2，对应的2单位重量，高度为3时，重量也为3。太棒了，那么重量和高度成比例，每次一增加高度，需要增加相应的重量。”总的来说，“高度和重量成比例”。

在这个阶段，有两种互为补充的反应类型。对于第一种类型(Diz)，高度的发现是由于猜想得出的，但是被试在做出猜想后很快得出比例关系。但是，在第二种类型，因为需要寻找单一比例关系，被试发现了高度是合适的因素，这种单一比例关系超越了子阶段ⅢA被试的能力范围。

这两个例子中都发现了$h/H=W/M$这个关系，假设s代表总高度的增加值(垂直时轨道的长度，在本实验中保持不变)，那么可以得出如下的公式：

$$\frac{r}{s}=\mathrm{R}\frac{p}{q} \tag{5}$$

$q \cdot r$代表需要增加的功，$p \cdot s$代表砝码在整个高度下需要增加的额外的功。

已知p和r或q和r之间的等价关系，q与s的等价关系(当小车重量增加或H值减少时得出的结果相同)，那么公式(5)可以从下面公式(6)中导出：

$$\frac{p}{q}=\mathrm{R}\frac{p}{q} \tag{6}$$

因此，在这个例子中，平衡格式的公式(INRC组)与比例格式相同，与天平标尺的任务(见第十一章)相似，进行了细节的修正。这种同形问题引发了对于形式思维的心理过程的思考。这两个规律的结构的确是相同的。如果令B表示天平平衡中较重的重物，A表示较轻，那么这里B就相当于小车的重量M，A相当于砝码的重量W。L表示水平距离(距轴心)对应A(较长距离对应较小重量)，l对应B(较小距离对应较大重量)，那么L对应H，l对应h。

$$l/L=A/B \text{ 就如 } h/H=W/M$$

然而，这两个规律的直觉内容非常不同(如此不同，以至于许多心理学的学生要花大量时间来理解它们的同一性)。在天平任务中，重量与长度的关系(l与L通过测量天平的两臂就可测得)很重要，而只有在系统达到平衡时，高度是潜在的有效因素，除非用到交替牵引的装置(第十一章)；因此，不会立刻得出功的概念。但是在小车实验中，水平的距离不影响整个系统，斜度也是随机设置的，在操作系统时立刻引出了功的概念。然后心理学问题就变成了：直觉内容的不同是运算发展的决定因素吗？还是说潜在操作结构是决定因素呢？为了解答此疑问，我们需要一个阶段一个阶段地比较这两个问题的结果。

在整个阶段Ⅰ中，这两个任务的系统运算都被解释为同化于儿童的主观动作，推、拉等等。但是因为平衡很明显是对称的，实验中的距离和重量之间很快实现了对等(这些都是直觉的规律，而没有运算)。

在子阶段ⅡA中，两个任务中被试都有对重量平衡的操作，被试能够理解距离在天

平任务中的作用以及斜度在小车任务中的作用，但被试没有将这些不同的因素同重量整合起来(除了一些特别的案例)。

在子阶段ⅡB中，被试在天平平衡实验中发现了重量与距离的反比关系(重量较轻，距中心较远，较重则距中心较近)，然后在任务二中也发现斜度越大，使小车平衡需要的砝码越重。在后面的任务中，重量与斜度的协调关系引发了被试构建功的概念：对于相同的重量，举得越高，做的功越多。但是这两个任务中，因素之间的关系仍然是定性的(较重—距离近，较重—高度低)，但是因为逻辑乘法的不确定性，这不可能解决更加普遍性的问题。

在子阶段ⅢA中，被试在天平实验中发现了数量化的比例，在小车实验中尝试寻找相同的比例，发现了三个因素(重量、砝码重量和斜度)之间关系的定性规律。第二个实验中出现的时间延迟是因为被试需要将高度变量从角度中分离出来，并且高度中值对应的角度不是45°而是33°。

在子阶段ⅢB中，被试终于在小车实验中发现了数量化的比例，并且以功的形式解释出来。另一方面，在天平问题中，这个阶段所发现的数量化的规律就像是一个补充的系统，因为只要同时悬挂两个重量，它就是自我满足的；被试并没有被唤起用高度或功来解释。但在牵引装置中不断变换重量导致高度变化，被试才发现重量与高度的反比关系。在小车问题中，他们用相等的功来解释平衡。

因此，很明显在这两条发展线路中存在一段直觉的差异，这是由于装置本身或者被试任务不同而产生的。但是很令人惊奇的一点是，我们在不同之下发现了相似的运作机制：在两个实验中，都经过了相同的阶段Ⅰ前运算表征、子阶段ⅡA的初始运算，以及子阶段ⅡB中发现的相反对应。在两个任务中，被试只有当INRC组在形式运算和命题运算水平起作用时，才能形成平衡的运算格式。而且两个实验中被试都形成了其普遍形式上的比例和补充的格式，因此直觉层次的不同只是对阶段Ⅱ和阶段Ⅲ的时间进程造成微小差异，整个结构的组织进程总体是相同的。

第十三章　阴影投射[1]

前面我们讨论了通过建立可能性列表的方式来引导发现和验证规律，除了这种常见问题之外，这一章我们将进行一项新的研究，它将对比例性相关的形式运算格式提出新的问题。但是我们要处理的是比例性的新类型。不管怎么样，天平实验和斜面实验中的比例，是从物理平衡模型中推导出来的，我们所要研究的比例将与阴影投射联系起来，它就完全是几何性质的。物理现象中的距离和直径的关系完全可以用简单的投射几何原理来解释。

我们要探讨的问题是目前实验中设定的比例能否在阶段Ⅲ得以发现，就像之前的实验一样，或者这项实验是否也反映了 INRC 群的功能。如果是，我们就应该较之前的问题更加普遍的考虑 INRC 群。

在这项实验中得出的规律十分简单。将直径不等的圆环放置在光源和屏幕之间。圆环在屏幕上的投影大小与他们的直径成正比而同他们至光源的距离成反比。特别是，我们要求被试用两个直径不同的圆环去得到两个完全重合的阴影。为此，他只需要按比例将较大的圆环放在离光源稍远的地方，这样就能在不同距离和直径之间有所补偿。

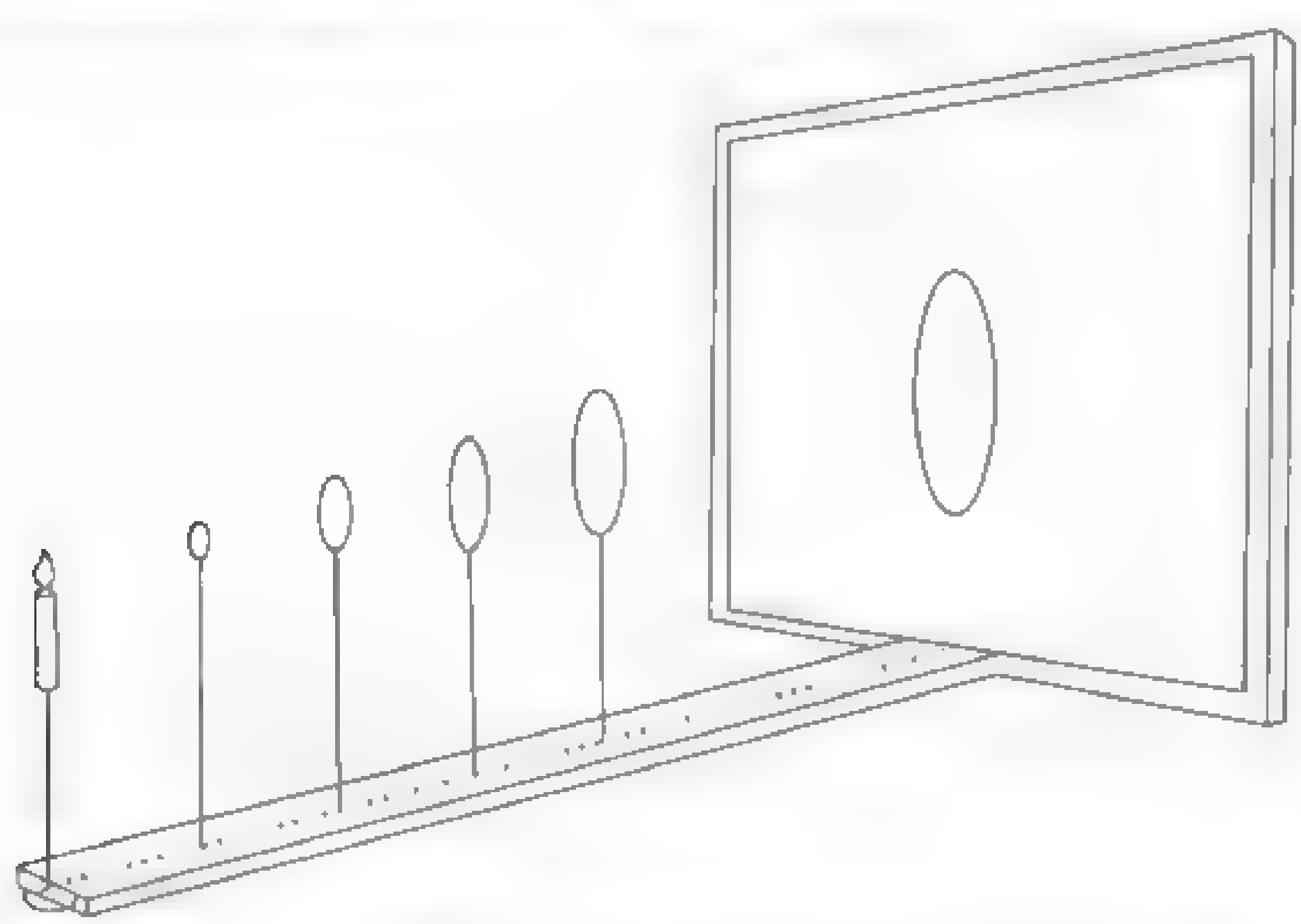


图 11　投影包括一块底板，放于底板尾部的屏幕、光源以及四个直径不同的圆环。要求被试利用不同的直径的圆环产生出同等大小的阴影。

1　与教育科学研究所的研究助理万·邦(Vinh Bang)、研究助理雷蒙·瑞维尔(B. Reymond Rivier)和马尔尚(F. Marchand)的合作。

阶段Ⅰ的儿童可以不考虑这个问题。前运算阶段的被试还不懂影子是怎么形成的，在其他实验中，我们已经充分详细地描述了2—7岁儿童对阴影的表征方式，在此毋庸赘述。①

(一) 阶段Ⅱ：发现直径(ⅡA)和距离(ⅡB)的作用

ⅡA的儿童知道阴影的大小取决于物体的大小，但仅仅停留在这点上。

Pel(7岁10个月) 他正确地预言了直径15cm的圆环产生的影子比直径5cm的圆环影子大。"如果我把它移动到这边，影子去哪里了?" "在这里。"(完全正确) "会保持原来大小还是会变大变小呢?" "和原来一样大。"

Bar(8岁8个月) 刚开始也是同样的反应。经过试验后，他发现同一个圆环产生的影子会随着距离而改变大小。但当要求他用四个不同直径的圆环产生一个同样大小的影子时，他将直径20cm的圆环放在了7[illegible]cm处，直径10cm的圆环放在41cm处，直径5cm的圆环放在23cm处，直径1cm的圆环放在11cm处。

序列排列各种直径的圆环、阴影从而得出相同距离下圆环和阴影大小的关系是可能实现的。实际上，我们已经发现了准确的排序距离，但是被试并没有把这个与影子大小联系起来。Pel认为距离不会改变影子大小，而Bar通过实验只是随机调整改变，并没有得出有规律的对应关系。

而另一方面，在距离的问题上，子阶段ⅡB的被试认为如果光线没有固定方向，光也不能无处不在，所以他们开始假设是分散光线的效果。至少，他们根据经验认为同一物体投射的影子逐渐变小和距离光源不断增加的距离有对应关系。换句话说，他们明白了物体和屏幕靠得越近，影子就越小。

Mand(9岁6个月) "将圆环往前移动靠近光源时，影子总是变大了，因为越靠近屏幕影子就越小，反之，则越大。"

Nar(10岁5个月) "必须把最小的圆环放在最前面(指光源)，因为这样影子就大了"(比如，圆锥体的光线)。但是，为了得到同样大小的影子，他却将直径5cm的圆环放在离光源14cm处，直径10cm的圆环放在了55cm处，直径15cm的圆环放在了56cm处，直径20cm的圆环放在了57cm处。

Oh(11岁2个月) 将直径5cm和10cm的圆环分别放在了离光源10cm和19cm处，又将直径15cm和20cm的圆环放在了38cm和[illegible]0cm处。"你为什么这样做呢?" "因为这样就能使直径5cm和10cm的圆环变大些，而直径15cm和20cm的圆环的影子会小些。"

---

① 参见皮亚杰：《儿童的物理因果性概念》，Chap. Ⅶ，nos. 1 and 2；《儿童的游戏、梦与模仿》，Norton，1951，Chap. Ⅸ。

Chr.(10岁) 他把直径5cm的圆环放在2cm光源处，直径10cm的圆环放在17cm处，直径15cm的圆环放在29cm处，直径20cm的圆环放在42cm处。“因为要有同样大小的影子，最小的圆环就要放在返回最远的点上，你要把圆环分别放在几乎等同的距离上。”

Del(11岁11个月) 他把直径5cm的圆环放在11cm处，直径10cm的圆环放在21cm处，直径15cm的圆环放在32cm处，直径20cm的圆环放在43cm处，又把直径5cm的圆环放在41cm处，直径10cm的圆环放在52cm处，直径15cm的圆环放在63cm处，直径20cm的圆环放在74cm处。

Mau(11岁10个月) 他把直径5cm的圆环放在55cm处，直径10cm的圆环放在63cm处，直径15cm的圆环放在71cm处，直径20cm的圆环放在80cm处。

这种影子大小和距离之间的定性对应关系可以清楚地用公式表达，但是这个过程中出现的两个特点对于我们对照分析以下两个过程非常有价值：通过逻辑乘法获得的具体水平的补偿，在形式水平发现的基于乘法补偿的真实比例。

第一个特点是，虽然了阶段ⅡB的被试知道如何建立反向的对应关系，但他们偏向于直接的对应关系，因而他们倾向于从屏幕处测量距离而不是从光源处（比如说，Mand的“往前移动”和Chri的“往后”这种类似的表达都是距离屏幕而言的）。然而，这些被试得到的是直观的圆锥概念（就像它不断地在变大）。但是，当他们按照此方式从屏幕处测量距离以便能有一个直接的相对应关系时，他们发现，离屏幕的距离越远，影子就变得越大（就像Oli说的，直径5cm和10cm的圆环影子比那些直径15cm和20cm的圆环影子大）。

无论如何，他们已经清楚地明白了距离和圆环尺寸之间的互补关系。可是，第二个也是最特殊的一点就是，这种补偿所产生的可量度的数量化尝试，在这个阶段尚不能被解释为源于一个真实有效的比例，比如乘法关系。更准确地说，他们源于序列排序和对应关系中稳定积累的差异。比如说，在最前面两个圆环相隔11cm之后，Nov以1cm为间隔放置后续的圆环（直径34、35、36、37cm）。同样的，Mau把直径8cm和9cm的圆环放在了距离屏幕75cm和80cm处，Chri计算出了13—14cm的稳定差异。Oli似乎对比例关系有所认识，但他仅仅是对大小圆环做了简单的二分法。接着他比较了9cm和12cm的加法差异，但在两者之间用了三分之一的比例。对于Del，其年龄已处于阶段Ⅱ，他最初的比例关系大致是正确的，但第二次尝试时，他从一开始就对放在41cm处直径11cm的圆环武断得出了累加差异的结论。

（二）阶段Ⅲ：对应关系的比例化（ⅢA），规则的概括化和形式化（ⅢB）

在了阶段ⅢA中，直径和距离之间的反比数量化比例关系首次出现，但并没有普遍适用于所有的例子。被试测量不同的直径和距离，寻找基于光线发射结构的数量化的

假设，并考虑光源和第一个圆环（最小或者是最大的那个）之间的距离关系。

Che（12 岁 8 个月） 测量了圆环直径，发现直径相差 5cm，他推论说："它们之间的距离也应该相差 5 的倍数。"因此他根据这个尺寸摆放它们。

Duc（12 岁 1 个月） 他把直径为 20cm 的圆环放在 83cm 处后，说道："现在你可以从这里数到那里了（指光源处），把它们分成 4 个部分。"然后他把直径 5cm 的圆环放在了 21cm 处，直径 15cm 的圆环放在了 61cm 处，直径 10cm 的圆环放在了 51cm 处。"如果我就给你三个圆环呢？"（5cm，10cm 和 15cm） "那你就从最大的开始数，分成三个部分。"

Wal（12 岁 1 个月） 他用距离去除大圆环的投影，得到了 50/40＝1.25 这一比例，然后就把这 1.25 当作是差异。他把直径 5cm 的圆环放在了 25cm 处，直径 10cm 的圆环放在了 50cm 处，"这就完成一半了！"接着，他又把直径 15cm 的圆环放在了 75cm 处，直径 20cm 的圆环放在了 100cm 处 "这就都完成了。直径总是相差 5cm，那距离总是相差 25cm，比例都是一样的。" "你能找到其他的位置，同样保证所有圆环影子都是一样的吗？" 他把距离拉伸至都相差 26cm，又把光源往后调了 4cm。 "我的意思是说不移动光源。" "我不认为你能做到，你无法增大这个比例。" 主试把直径 15cm 的圆环放在了 46cm 处；被试接着把直径 10cm 的圆环放在了 23cm 处，把直径 5cm 的圆环放在了 7cm 处，把直径 10cm 的圆环放在了 30cm 处，把直径 15cm 的圆环放在了 53cm 处，把直径 20cm 的圆环放在了 76cm 处。

显而易见，在这个阶段被试从一开始就假设出了比例关系，但这一关系仅仅适用了一、两个情况，并没有普遍适用。之前形成的具体的序列排序和对应关系是从一个整体的组织视角协调建设的，所有的关系都从属于发散光线下的几何表征（实验中被试的目标就是控制圆环的排列），而这些表现都准确呈现了比例关系的特征。

总之，在Ⅲ A 阶段，被试从光源而非屏幕处测量距离，在测量中他把光源和第一个圆环之间的距离考虑在内，而不仅仅是圆环之间的距离（这两种新的操作在阶段Ⅱ没有出现）。

可是当他的猜想在一个简单情况下证实之后，他就满足于此，不认为这个关系就有可变性，也不认为它能够使用一系列等价的形式。换句话说，他没有再去寻找得出普遍的规律，普遍规律是一个能够充分解释所有结果的必要关系的体系。

但是在Ⅲ B 子阶段，被试成功概括出这个规律，也能够明确表达。

Wah（14 岁 1 个月） 他说："只要比例相同，任何距离都可以。"

Mic（14 岁 6 个月） 他说："因为圆环之间的差异都是有规则的，距离之间的差异也必定要保持相同的规则。"接着他把直径 5cm，10cm，15cm，20cm 的圆环分别放在了 8cm，16cm，24cm，32cm 处，然后他用另一个随意的距离也得出了同样的比例关系："距离之间的关系必定和圆环之间的比例关系相同。"

Fau（15 岁 6 个月） 他说："影子要相同大小的话，两个圆环也要一样大小，距离之间的比例要和圆环大小的比例一致。"他又说："影子永远大于圆环。"

Hue（15 岁 6 个月） 他说："光线使得角度变得越来越大。要让光线使影子变大两倍的话，距离也应该增大两倍。"

Mart（16 岁 2 个月） 他试图让圆环具有一致性："你要把越大的圆环放得越远，而圆环直径和距离之间的比例保持一致。"他成功地发现了这个比例关系。

Guy（16 岁 6 个月） 他说："应该从小圆环处发射光线，就像这样（他给我们演示了圆锥的形状）。我认为第一个圆环影子的轮廓依赖于不断扩大的光线……"

这批孩子跟子阶段ⅢA 还是有所不同。一开始他们的公式化过程就是基于一个合理且普遍化的假设，这个假设不单单处理了发散光线还包含了圆锥的概念。所以说，比例化已在解释格式本身中包含，就像 Wah 说的那样"任何距离都可以"。

但是，我们不要忘记这一比例化在最终的整体观点形成之前就已出现。这个比例只有在儿童理解了光线的发散之后才能从光线的整体形状特征中推导而出，但在子阶段ⅢA 尚未形成光束特征时，这种比例性就得出了（另外，在子阶段ⅢB 中这种情况也常常出现）。这个比例出于几何表征（发散光束、圆锥形状），而非早前章节的机械格式，那么，这种比例性的本质是什么呢？在某种意义上来说，阶段Ⅲ的被试发现了这一比例性，因为他们已经掌握了命题逻辑，因此，能够理解和转换两个结果的对等关系。这种对等关系只有在圆环直径和距离同增同减的情况下才可能实现。换句话说，显而易见，这种物体之间的对等关系只是一种手段，这一手段可以使得直径和距离之间的变化产生乘法补偿。

让我们用 p 和 q 分别代表增加的直径和距离，而 $\bar{p}$ 和 $\bar{q}$ 则代表减小的直径和距离，r_0 代表恒定的影子大小，$\bar{r}_0$ 代表它的变化，r 代表增大的影子，$\bar{r}$ 代表减小的影子（所以 $\bar{r}_0 = r \vee \bar{r}$）。接着被试得出这样的结论。首先，在直径和距离的变化中，恒定量 r_0 既假定了同步增加也假定了同步减少的直径和距离：

$$r_0 \supset [(p \cdot q)] \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \tag{1}$$

第二，$p \cdot \bar{q}$ 和 $p \cdot q$ 总是与影子的变化相对应：

$$(p \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot q) \supset \bar{r}_0 \tag{2}$$

但是在相反情况下：

$$(p \cdot q) \supset r \tag{3}$$

并且

$$(\bar{p} \cdot q) \supset r \tag{3a}$$

最后，通过增加直径或者减少距离，都可以得到相同的结果，反之亦然：

$$r \supset (p \vee q) \quad 即：r \supset [(p \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})] \tag{4}$$

排除 $\bar{p} \cdot q$，并且

$$r \supset (p \vee q) \quad 即：r \supset [(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)] \tag{5}$$

排除 $p \cdot \bar{q}$。

事实上，如果 r 蕴涵 $(p \cdot q)$ 或者 $(p \cdot q)$，互反性就不存在。当直径和距离变化时，$(p \cdot q)$ 或者 $(p \cdot \bar{q})$ 既可以蕴涵 r，也可以蕴涵 $\bar{r}$。

这样，被试通过蕴涵推理得出的结论就是任意两个不同的原因可以产生相同的产物，因而，他从中得出了比例的定性格式。从(1)中得出：

$$(p \cdot q) = \mathrm{R}(\bar{p} \cdot \bar{q}) \tag{6}$$

从中，交叉乘积的互反作用即：

$$\frac{p}{p} = \mathrm{R}\ \frac{q}{q} \tag{7}$$

从(2)中，又得出：

$$(p \cdot \bar{q}) = \mathrm{R}(p \cdot q) \tag{8}$$

因而，交叉乘积的互反作用即：

$$\frac{p}{q} = \mathrm{R}\ \frac{p}{q} \tag{9}$$

比例(9)与数值比例相对应：$\frac{nx}{ny} = \frac{x:n}{y:n}$。

一般而言，在这个案例中被试是通过对乘法补偿原则的理解发现了这种比例关系。在ⅡB子阶段，儿童意识到圆环直径的变化可以通过改变圆环到光源的距离来做调整，但是他们却无以解释这种补偿，只能认为是一种加法的关系（等差）。如果他能运用乘法形式理解其中的补偿关系，那他一定可以同时识别和协调这两种转换形式：一种是通过反演转换，可以取消对问题的修正；另一种是通过互反进行转换，在不取消的情况下对其修补。而这恰巧是命题运算使得阶段Ⅲ的被试能够实现的。在区别两种独立的变量时，对其进行的任何调整都可以被取消（反演转换），但也可以在不取消的情况下进行相互补偿（互反），被试要最有效地利用这四种转换方式（当然了，他们还没有意识到这个），而比例关系的发现是直接的结果。

显而易见，命题(3)中的表达式 $(p \cdot q)$（增加直径，减少距离）与命题(4)中的表达式 $(p \vee q)$ 有关系，就像命题(3a)中的 $(p \cdot q)$ 也与命题(5)的 $(p \vee q)$ 相关。每组命题，比如(3)和(4)或者(3a)和(5)，都与另一个（r 或 $\bar{r}$）的反演结果有关。

由此，我们得到群：

$$\begin{matrix} \mathrm{I}(p \vee \bar{q}) \\ \mathrm{N}(p \cdot q) \\ \mathrm{R}(p \vee q) \\ \mathrm{C}(p \cdot q) \end{matrix} \tag{10}$$

因此，可能的比例关系如下：

$$\frac{p \vee \bar{q}}{p \cdot q} = \frac{\bar{p} \vee q}{p \cdot q} \quad \text{所以} \quad \frac{\mathrm{I}x}{\mathrm{C}x} = \frac{\mathrm{R}x}{\mathrm{N}x} \tag{11}$$

x 指的是 $(p \vee \bar{q})$。

虽然命题(10)和命题(11)不可能是被试实际推算过程中的一部分，它们并不像命题(3)、(3a)、(4)和(5)那样是阶段Ⅲ的直接结果。因而，我们正在处理的是一个潜在结构的例子，但是隐含在我们观察到的实际推理过程中。另一方面，可以说，INRC 群是被试思维过程中的一部分，这是一个简单的"一元"形式，这一点可以解释命题(7)和(9)。如果说把直径的增加解释为同一性的转换($I=p$)，那么，直径的减少则是反演转换($N=p$)。增加到光源的距离就为直径的增加做了补偿，而不是取消直径的增加。因此，这就是互反转换的部分($R=q$)。最终，互反的反演就达到了和直径增加一样的效果，从而起到了对射的作用($C=q$)。由此产生的命题结果如下：

$$\frac{p}{q}=\frac{\bar{q}}{\bar{p}} \quad 或者 \quad R\frac{\bar{p}}{q}[命题(9)]$$

以上分析表明，INRC 群比解释机械平衡更具一般性功能。当两个不同的参照系(就像相对运动中，详见第十七章)需要一起合作时，就如同我们当前任务的阶段Ⅲ那样，INRC 群的一般性功能就实现了。在本章中，INRC 群甚至可以协调两个独立变量之间的变化，只要它们效果的乘法补偿可能实现(这与最初在具体运算阶段形成的加法补偿恰恰相反)。

注解：值得注意的是逻辑比例不单只与 INRC 群有联系，也能从格中比例的普遍结构中衍生出来(以一种看起来似乎也存在 INRC 群的形式，详见皮亚杰的《论经济逻辑性的变革》，第166—168页)。格是一个部分排序的包含关系的集合(在逻辑中也指命题和蕴涵)，比如集合中的任意两个元素 x 和 y，也总有个最小上界 UB(＝包含 x 和 y 的最小因素)和一个最小下界 LB(＝它们的交集)。现在，任意一个格中都存在比例关系，比如 $\frac{LB}{x}=\frac{y}{UB}$。在逻辑中，比例关系为 $\frac{p\cdot q}{p}=\frac{q}{p\vee q}$。如果从命题逻辑的格转换到全部数字的格，可以看到 LB 指的是最大公约数(GCD)，而 UB 则是最小公倍数(LCM)。因而得出：

$$\frac{GCD}{x}=\frac{y}{LCM}$$

例如：

$$\frac{2}{4}=\frac{6}{12} \quad 或 \quad \frac{1}{20}=\frac{3}{60}$$

但在投影的问题上，被试可以直接发现逻辑比例如下：

$$\frac{p\cdot q}{p}=\frac{q}{p\vee q} \qquad (12)$$

这里的 $p=(p\cdot q\vee p\cdot q)$，$q=(p\cdot q\vee p\cdot q)$，其中 p、q 及其否定式与其在命题(1)到(10)中的意义相同。

然而，我们并没有证据表明，被试在阶段Ⅲ为了解决投影问题而利用格结构，毕竟这种结构在心理层面表现为通过外显应用组合运算而进行的定性推理，在这里并不适用。另外，从形式化的角度，比例(12)可以被简化为 INRC 群所形成的比例关系，而这

个论述的反面是不成立的①。

① 参见皮亚杰:《论逻辑运算的转换》,第225页。

第十四章　离心力与补偿①

比例格式已经在很多形式中得以检验，既包括与平衡格式的相关形式（第十一章和第十二章），也包括独立于平衡格式的形式（第十三章）。现在我们需要再进行一项实验，旨在明确比例格式和乘法补偿格式之间的关系。这里所说的补偿不是指它的通常意义，其通常意义常与可逆性类似。更确切地说，我们指的是不同因子 x 和 y 之间的补偿，例如其中一个因子增大时另一个因子将同时增大或者减小。我们已经在弹性形变问题（第三章）；天平问题，距离和重量相互补偿；斜面上的牵引问题，涉及斜度和重量；最终，投影问题，直径和距离相互补偿中研究过这类补偿问题。我们认为值得再去分析一种新的情境，其中两种可能性都是对被试公开的。他能够构造数量比例（在弹性形变问题上不能实现），也能够使用“保持其他变量不变”的方法来分离变量以决定平衡（在斜面上的牵引问题不能实现）。我们旨在从心理学上揭示，比例概念是自带补偿观念，还是其他的发展路径。

三个不同质量的金属球被放在距圆心不同距离的圆盘上。圆盘越转越快，直到金属球由于离心力的作用飞离圆盘。被试需要预判球会以什么顺序飞离初始位置以及为什么。显然，离心力的公式很复杂，也就是 $f=mv^2/r$，其中 m 为球质量，r 为半径（到圆心的距离），并且 $v=r\omega$（ω 为圆盘旋转的角速度）。用 $r\omega$ 替换 v，就可以得到 $f=m\omega^2 r$。但是，因为圆盘旋转的角速度一直保持初始速度不变，被试只需要分离 m 和 r 因素，也就是需要理解以下两种关系：离心力与球重成正比，与距圆心的距离成反比。因此，一个补偿的问题出现了。一个距圆心近的重球和一个距圆心远的轻球可能会同时飞出圆盘（按这个方法计算的三个球，其不同的重量正好补偿了三个不同的距离）。

（一）阶段Ⅰ：前运算解释

7 岁以下的被试参考所有可能的因素来解释连续运动的顺序，各种因素中包括尺寸和距离：

Coq（6 岁 11 个月）　“一个球从这边飞出，另一个球从另一边飞出，因为它们不想从同一边飞出。”

Pav（6 岁 2 个月）　“第三个圆盘上的球最先飞出是因为它距离圆盘边缘最近。（大球和中等球在同一个圆盘上）一起飞出。如果它们变大不会对结果产生任

① 与梅耶-甘坦贝恩（M. Meyer Gantenbein）和教育科学研究所的维戈波洛（L. Vergopoulo）的合作。

何影响(实验)。大的球先飞出是因为它更重。重的球总是先飞出。"

Cum(6 岁) "金属球转动是因为圆盘转动。我想增加小球因为大球旋转(实验)。大球先飞走。"

因此,即使是前运算阶段的被试也能解释出这两个因素,他们接受任何他们看到的情况,缺少谨慎的操作(例如,当 Pax 观察到了一个实例,他就把"从不"改成"总是")。更准确地说,这个阶段的儿童确实观察到了事实,但是他们不能充分理解其中的原因或者用来创立定律的"全部"和"一些"之间的关系。而且,他倾向于相信所有发生的事物必须是它现在的样子。这个假设一方面源于他的概括,一方面是由于他不能区分精神世界和现实世界。

(二)子阶段ⅡA:部分对应

当具体运算出现后,仅仅是在距离都相同的情况下(被试独立操作),儿童可以按球的尺寸(或者重量)进行序列排序并且形成与飞出顺序一致的对应关系。他也发现了在重量相同的情况下,球飞出顺序与距离之间的对应关系。但是,在通常情况下这两种关系不会同时出现。而且当补偿存在时它不可能出现,两个变量不可能朝同一个方向变化。

Cu(7 岁 1 个月) "它们都会移动……大球飞走了并且推动小球。"他还预测道:"它们不会移动是因为我放了一个大球在上面(他转动圆盘)。它们飞走了(新的实验)。留在圆盘上的那个是因为它太轻了。" "为什么?" "轻球会留在圆盘上,有时候它们飞走是因为圆盘转动得太快。" 被试把相同重量的大球放在 D 和 D 处[1]。 "(D)是第一个飞走,(D)是第二个。" "为什么?" "因为当球在(D)处时,它总是第一个飞走。" "为什么?" "它离开的距离并不远。" 被试把 W 放在 D,把 W 放在 D。 "W 将是第一个飞走(他转动圆盘)。两个球在相同的时间飞走,但小点的球(W)要早一点点。" "这让你吃惊吗?" "不,大球要快(另一个实验)。W 处的球是第一个飞走,W 处的大球在它后面,它们同时到达。大球是先飞走并且推动球(实际上相对面的两个球是同时飞出的)。大球最先飞出是因为它更大(另一个实验:差不多是同时飞出的)。球最先飞出是因为它离圆盘边缘距离最短。"

Mon(8 岁) 他预测道:"如果我转动圆盘,它们将全部飞出;所有的球都是一样的(实验)。最近的最先飞出……在这里的这些(接近圆盘边缘的 D 处)最先飞出。"给了被试两个不同重量的球:"中等的球会最先飞出因为它们更轻(实验)。

---

1 距离 D、D 和 D 是按照到圆心的距离顺序排列的,小球 P、P 和 P 是以重量的递增顺序排列的。

不，是相反的。”“你能再做一个实验吗？”“如果这个像先前的实验结果一样，那结果就总是这样！”我们把 W 放在 D，把 W 放在 D。“不，我真是太愚蠢了 W 处的球先飞走因为 W 处的球更接近圆心。”

Mon（8 岁）他在观察了这类实验后得出了以下合乎逻辑的递增规律：“如果你想球依次飞走，你将如何放置这些球（W_1、W 和 W）？”（他把 W 放在 D_3，把 W 放在 D，把 W 放在 D。）“因为大球更重且靠前，第二个更小且靠后，第三个比前两个小且靠后。”

这些事实都跟补偿问题有关。当主试分离变量以简化儿童的任务时，儿童只观察每一部分的作用：球飞出取决于重量，且离圆盘外围最近的比远的先飞出。但是被试不能独自发现这两条定律，因为阶段Ⅲ之前的儿童还没有习得“保持其他变量不变”这一方法。而且，在他独自发现了这两个因素后，被试被要求比较不同重量和不同距离的球，他陷入了巨大的困难中。

第一，被试无法估计放置在相对方向的球飞出的同时性（而且在这个方面，实验设备也造成了轻微的差异）。换句话说，被试还不能消除由不可控因素造成的偏差。

第二，逻辑乘法对于解决这个问题尚不充分。当两个因素相互加强时，这个阶段的被试可以有效地运用逻辑乘法（参见 Mon 的表现）。但是当这两个因素同时作用的方向相反时，儿童时而解释一个时而解释另外一个，但是他不能明白它们彼此间会相互补偿，也不会更长远地考虑到乘法结果。这个事实引出了一个问题——我们必须假定乘法关系是不完全的，只有当儿童面临直觉性较好的实例中才能起作用吗？或者我们不得不认为，当儿童面对“更重×更近”和“更轻×更远”这类结果不确定的乘法关系时，有出现倒退的可能性吗？有人可能反对第二种解释，因为结果就在他眼前，事实上那就是补偿。另一方面，儿童不能理解是因为他不明白，或者说他只是看到了眼前的情况，没有明白这其中包含的补偿。因此，在这个特殊情况下，很可能在结果确定时儿童控制乘法关系的操作原理已经完整，但是他的操作原理尚未形成一个包含三种可能性（更重×更近——重球比轻球后飞走，或者先飞走，或者同时飞走）的普遍形式。

（三）ⅡB 阶段：具体补偿的开始

除非实验者把问题简化，否则这个阶段的被试总是不能解释为什么两个放置在不同距离的重量不等的球可以同时飞出。在没有帮助的情况下他不能自己分离变量；因此，他不能根据可能的组合去理解两个对立因素之间的补偿作用。但当被试通过每次只改变一个因素来简化任务时，儿童就可以发现距离和重量所起的作用。然后，他开始理解补偿甚至在某些情况下可以预言补偿：

Jol（9 岁 3 个月）把 W_1 放在 D，把 W 放在 D，他说：“它们不会同时飞出因为一个离得远，另一个离得近。”“那这样放会如何呢？”（把 W 放在 D，把 W_2

放在 D）　"W 会先飞出因为它更大，另一个更小(实验的结果相反)。因为 W 更靠近圆盘边缘。"　"是什么使结果改变?"　"重量和尺寸。"　"在那种情况下也是吗?"(把 W_1 放在 D，把 W 放在 D)　"一起飞出，因为如果你把 W 和一个大球 W 放在一起时，大球会先飞出。但是和 W 放在一起时是两个球同时飞出，因为球距离近，大球距离更远。"　"那其他情况呢?"(把 W 放在 D，把 W 放在 D_2，把 W_1 放在 D)　"W 会最先飞出因为它离圆盘边缘更近且更大；W 离边缘更远且更小；W 比 W 离边缘更远且更小。"　"你如何做才能使它们同时飞出呢?"　他把 W_3 放在 D，W_2 放在 D，把 W_1 放在 D "因为最小的距离短"(去覆盖)。

Cno(10 岁 2 个月)　他做实验，把 W 放在 D，W 放在 D。"它们将会一起飞出因为它们尺寸相同。"　"那这种情况呢?"(把 W 放在 D，W 放在 D)"距离圆心最远的最先飞出，因为它距离边缘最近。"　(把 W 放在 D，W 放在 D。)"哪一个会先飞出?"　"W 先飞出因为它更重。"　"把 W 放在 D，W 放在 D 呢?"——"同时飞出，因为那个最小且离边缘最近，另一个更大离边缘更远，且最大的球距离边缘最远。"

因此，处于阶段ⅡA最主要的进展就是一旦被试知道两个因素各自的作用，他就会完成重量和距离相互作用的(或者逻辑乘法)推理。当然，当结果累积起来($W\times D$，$W\times D_2$，$W\times D$)，乘法就可以正确运行。但是针对因为因素相互补偿而实现一个球同时飞出的实例 $W D$、$W D$、$W D$，一些被试可以做出解释甚至预测(Cro)。在这样的例子中，运算如下：

$(+W)\times(+D)=$之前　　　$(=W)\times(+D)=$之前

$(-W)\times(-D)=$之后　　　$(=W)\times(-D)=$之后　　　(1)

$\left.\begin{array}{l}(+W)\times(-D)=\\(-W)\times(+D)=\end{array}\right\}$可能补偿　　　$(+W)\times(=D)=$之前

　　　　　　　　　　　　　　$(-W)\times(=D)=$之后

$(=W)\times(=D)=$相等

此处，$\pm W$ = ±重量，$\pm D$ = 离圆心距离的更多或者更少。

所以我们再次遇到了与之前(第十二章)相同的双维列表，并且同样是在ⅡB子阶段。

有人可能会认为乘法补偿的概念是在这一阶段习得的。但是两种情况否定了这个设想。第一，正如我们上面所申明的，被试独自一人还不能成功地分离变量。当数据都提前准备好时，他可以正确地操作。但这并不等同于他能够基于对先前相关元素的构建而自发进行演绎推理的证明过程(后者是实验方法的一般步骤且需要形式组合系统)。第二，逻辑乘法的运算——具体阶段的被试唯一能够使用的——仍停留在$(+W)\times(-D)$和$(-W)\times(+D)$中的不确定状态。在这些例子中有很多补偿，但是它们并不遵从这个结果。没有比例运算的参与，实验结果不可能完全确定下来，比例运算需要形

式思维。

（四）阶段Ⅲ：自发分离变量和比例性补偿

在ⅢA子阶段，被试能够在没有外界帮助的条件下组织实验，并且他可以使用命题操作系统来运用补偿。但他的演绎推理仍旧不完整：

Cham(11岁7个月)　他开始随意地把W放在D，W放在D，W放在D处："他们一个个依次飞出。"　"这个结果，你吃惊吗？"　"不，最大球应该比其他球后飞出，因为它转动的较慢……不是，是相反的，离圆盘边缘越近，转动得越快。"为了验证他的假设，他把W放在D，W放在D，W放在D处；然后，进行新的实验，把W放在D，W放在D处。他在重量相同的情况下改变距离，并且使用极端的重量来反面证明。"在D处的那些球最先飞出，中等球随后飞出"(D)。然后，在做了一些研究距离的新实验后，他发现与他把W放在D，W放在D处时，两个球同时飞出，但当他把W和W放在D处时，"大球先飞出"。接下来，他把这个问题和一种平衡相比较："这有点像一种平衡尺(需要保持平衡的运动)；这是个平衡问题。如果把W和W都放在D处，它们没有平衡；如果把它们都放在D处，就会有一些平衡；如果把它们都放在D处，在平衡方面会更好；如果把球放在圆心，就完全平衡了。球距离圆心越近，它转动得越慢……但是如果把W放在D，W放在圆心处，大球先飞走。"　"是什么决定了这个结果？"　"球的尺寸，洞孔也有一点作用；不，只有尺寸在起作用，因为洞孔一直都是一样的；还有球飞出时所用的外力。"　"是什么决定了平衡？"　"球的尺寸和它们被放置的位置。如果你把相同尺寸的W放在D处，它会比放在圆心处的W先飞出。如果你想它们同时飞出，你需要放一个大球在这里。"(放在D，当W放在D处)

Def(11岁2个月)　他也发现了重量和距离所起的作用。当W放在D，W放在D处时，他被要求预测结果："它们会同时飞出。大球飞出的距离更远，但是它更重且更重的东西总是更慢。"　"那这样呢？"(把W放在D，W放在D，W放在D处)　"它们将会同时飞出。大球更重，但是它飞出的距离更远，所以它在同一时间飞出。"

Vis(12岁 个月)　他在经过一系列相同的推理后，说："这是一种补偿。"

Dvn(13岁1个月)　他在独自发现了两个因素后，被问道："你能使球同时飞出吗？"　"你需要使重量和距离之间形成一定的比例(他把W放在D，W_2放在D)。它们不会同时飞出，因为重量上的差异和距离上的差异，它们彼此之间恰好会自动抵消。"

值得关注的是，被试可以在没有帮助的情况下分离变量且自发完成实验，他们采取一种新的态度来看待补偿。他们会把它同时看作平衡形式和比例形式来理解。例如，

我们发现 Cham 从运动学的角度来观察实验，考虑它们和圆心之间的联系而不是先前从圆盘中心到边缘距离的线性表示。球距离圆心越远，它的移动就越大，反之当它距离圆心越近，它就更趋向于平衡状态。从这种情况来看，重量和距离之间的反比就是 Dub 明确的方法，也是 Vis 称为的补偿。

这些实验方法和概念得以汇集并非偶然。其一，形式思维初期出现的组合系统中形成了分离变量的方法。第二，形式思维的结构一体化需要 INRC 群，INRC 群是平衡格式和比例格式的源泉；对于补偿概念的出现来说这些都是必要的。

因此，ⅢA 阶段出现的补偿格式和阶段Ⅱ的非常不同。即使ⅡB 子阶段的补偿是乘法运算的结果，它仍然是作为一个补充项。补偿解释为逻辑乘法中的"更重"或者"重量更多"（从累加差异的意义上来说）对应着"更近"（也是从差异累加的意义上来说）。但是在ⅢA 阶段，补偿起源于对比例确切的感觉。例如，在实例 W D W D 中，Dub 说，"重量上的差异"不能补偿"距离上的差异"，他们不能"抵消"，他所使用的"差异"和"补偿"意味着正好以确定值相互补偿的两种比例关系。

子阶段ⅢA 的被试没有特别提到数值比例，这是事实。但是，第一，他们没有被要求这么做，第二，他们开始具备比例格式的定性模式，在ⅢB 阶段会自动变为定量模式：

> Vir（13 岁）　自己制造组合 W　D 和 W　D，然后是 W　D 和 W　D，说道："这是一个定律。相比最重的，最轻的球最后飞出。"然后是 W　D 和 W　D，最后是 W　D 和 W　D："距离圆心最远的最先飞出。"接下来放置的是 W　D 和 W　D："他们将会同时飞出因为它们在重量和外力上是等值的。就好像我把 W_2 放在 D_2，W_1 放在 D_3 处一样。"
>
> Cai（14 岁）　"这取决于它们如何被放置。如果我们想让它们同时飞出，重量上的减少必须和长度成比例。"——"你如何证明它呢？"——"一个球的重量是 3，另一个是 2/3，第三个是 1（对应的距离是 D，D 和 D）。"——"如果距离更大呢？"——"你需要相同比例的补偿。"

子阶段ⅢA 所预示的比例现在成了可以被指派实际数字的比例（Cai）；定量"等值"（Vir）确保了补偿。记住这些协定，让我们回到本章最初提出的问题。从心理学上来讲，是补偿的概念导致了比例的发展吗？或者正好相反？或者有第三种可能，它们从一开始就是相互依赖的？

（五）比例和补偿

经过前面的分析（第十一到十[illegible]章），我们可以说比例是一种连接互反和反演（INRC 群）双重可逆性的一般格式；有时候它采取我们在力学平衡实验中所看到的形式；有时候采取其他的形式（几何学等）。但是不同的 INRC 群形式都有一个相同的性

质，即通过互反 R 所表达的补偿过程，与简单的反演 N 截然相反。在被试发现的所有形式的比例性中，对补偿判断的干涉很常见。给出两个独立变量，当被试理解了一个因素的增加使得另外一个因素等量减少时，他就构造了定量比例格式。在所有的案例中，比例的构成需要补偿这一要素。当 $x/y=x'/y'$ 时，乘积 $xy'=yx'$ 组成了一个补偿系统，只要保持等式，x 值的任何改变都会被至少一个其他变量的调整来补偿。

然而，如何直观地证明补偿这一概念，不同实验任务可能有很大的不同。首先，当补偿确保了可见效果(阴影的尺寸等等)的守恒时，比起仅仅只有相关特征守恒——例如，泰勒斯定理中的平行守恒——要更加的显而易见。在互反因素确保平衡的力学系统中，补偿是特别清楚的。

是什么决定了可以将比例性分离的简化性呢？这取决于实例中是否包含正比、反比和可用计量单位来进行比较的简化性。对于离心力问题来说，从补偿方面进行分析是清晰的。我们按照一个单位来减少重量 W、W 和 W，同样也按照一个单位来减少距离 D，结果是，不用任何计算，就能直观明显地发现比例 W W D D。

值得注意的是，即使在一个如此简单的案例中，补偿格式仍优先于比例格式。换句话说，被试首先想要分离潜在的守恒，以得到相同的结果(例如，同时飞出)。所以，他可以发现比例。然而，他可能先从操作关系和比例入手，以实现潜在相互补偿的概念。

换一种说法是，当被试发现重量增加与距离增加可以引起相同的效果，因此重量的增加也可通过距离的减少来补偿，他就能够发现重量和距离的反比关系。但是一旦发现这些球迅速按重量比例先飞走，而后按到圆心的距离比例，被试就能够建立反比关系，推断出可能的平衡和补偿。

如果令 p 表示球重量的增加(因此 p 表示球重量减少)，又令 q 表示離圆心距离的增加(因此 q 表示相应的减少，如果 p、p、q 和 q 仅适用于变化性)，令 r 和 r 分别表示认为球会比另一个先飞出或者后飞出的命题，r 表示球会同时飞出，我们可以看到被试通过假设开始：

$$p \supset r \quad 并且 \quad q \supset r \tag{1}$$

从这里我们可以得出：

$$r_0 \supset (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \tag{2}$$

这个公式表达了补偿：当重量和距离改变时如果要让球和其他球一同飞出，必须是重量更重且离圆心更近，或者球更轻且离圆心更远。

这个陈述可以推导出如下比例：

$$\frac{p}{\bar{q}}=\frac{q}{\bar{p}}，例如\frac{W_3}{D_1}=\frac{D_3}{W_1} \tag{3}$$

或者

$$\frac{p}{\bar{p}}=R\,\frac{\bar{q}}{q}，例如\frac{W_1}{W_3}=\frac{D_1}{D_3} \tag{4}$$

但是，可以从公式(1)中导出以下的定性命题：

$$\frac{r}{r}=\mathrm{R}\,\frac{p}{p} \tag{5}$$

并且

$$\frac{\bar{r}}{r}=\mathrm{R}\,\frac{q}{q} \tag{5a}$$

上述结果通过转换可以导出比例(4)。然后比例(4)可以导出如下结果:

$$p\bar{q}=\mathrm{R}pq \tag{6}$$

对于 r[公式(2)]补偿可能性的结果可以通过实验证实。但是实际上儿童没有用这种方式进行,因为从子阶段ⅡB起他就能通过具体运算发现补偿。更进一步,在离心力问题和之前我们所研究的案例(第十一至十二章)中,被试都是从补偿开始发展到比例的方式。当然,事实上我们经常要求被试找出补偿和等值,这一点对我们的结果可能有所影响,但是实验之后我们发现在每一个实验中,这就是最简单的让青少年遵循的方法,因为从子阶段ⅡB起被试就能具体地发现补偿。

鉴于这些发现的一致性,我们必须寻找解释。首先我们必须回到补偿格式的一般特性。让我们假定两个因素,其中增加用 p 或者 q 来表示,减少用 p 或者 q 表示,这些改变导致的结果增加用 r 表示,结果减少用 r 表示,守恒用 r 表示。然后可清晰出现两种不同的情况:

首先,

$$p\supset r \quad 并且 \quad q\supset\bar{r} \tag{7}$$

(例如,圆孔直径的增大意味着阴影尺寸的增大,然而距离上的增大减小了阴影尺寸;第十三章。)

在这种情况下,补偿是如下运算:

$$r_0\supset(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}) \tag{8}$$

这里 p、q 是直接的比例关系。如果我们用 p_1 和 q_1(或者 p_1 和 q_1)表示这些元素相继引起的改变,p_2 和 q_2(或者 p_2 和 q_2)表示第二对改变,那么就有:

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{\bar{q}_2}{p_2} \tag{9}$$

或者

$$\frac{p_1}{q}=\mathrm{R}\,\frac{p_2}{\bar{q}_2} \tag{9a}$$

(例如,两圆中越大的直径对应其到光源较大的距离,相类似地,较小直径对应其到光源较小的距离。)

但是,其二,也有以下运算(对于离心力和平衡问题):

$$p\supset r \quad 并且 \quad q\supset r \quad [参看公式(1)] \tag{10}$$

这个情况下,补偿如下:

$$r_0\supset(p\cdot q)\vee(p\cdot q) \quad [参看公式(2)] \tag{11}$$

结果,是反比关系,即

$$\frac{p_1}{q_2}=\frac{q_1}{p_2} \quad 或者 \quad \frac{p_1}{q_2}=\mathrm{R}\,\frac{p_2}{q_1} \tag{12}$$

（例如，大球的重量对应小球的较远距离，小球的重量对应大球的更近距离。）

鉴于以上公式，人们就可以明白为什么补偿格式比比例格式更容易直接理解。首先，补偿是直接基于定性的逻辑关系，如(7)—(8)或者(10)—(11)，然而只有当其量化，比例才能获得实验可证实的结构。因此，在数量化之前存在一种比例的逻辑预期（比如，两个乘积与加和分别平等）。这一点帮助我们理解预期格式的重要性，因为它总是源于补偿格式。第二，在逻辑比例的情况下，补偿可能会相加或相乘；对于数量化的比例来说这是不正确的。这解释了儿童在差异累加的相等性中寻找比例性的初衷。最后，补偿直接源于互反的概念，因为[公式(8)] $p\cdot q$ 是 $p\cdot q$ 的互反，[公式(11)] $\bar{p}\cdot q$ 是 $p\cdot \bar{q}$ 的互反。

而且，互反是可逆性的核心，没有 INRC 群的调节，互反和反演 N 不能结合，INRC 群是比例的基础。

第十五章　随机变异与相关①

从两个观点上看，机会(chance)问题与形式思维研究有关。大体上，形式思维能够处理可能发生的，不局限于当前的现实。而一件事发生的概率不过是可能情况与真实情况之间的关系。对于关系或者规律的概率估计，需要特定的操作方法，例如，"相关"或"关联"的计算方法。从最简单的形式看，相关概念是一种与比例格式有关的形式运算格式。这一章我们旨在分析12—15岁的被试会如何应对实验中出现的随机波动，以及他们如何构造相关格式。

随机变异

之前实验的所有现象几乎都包括随机波动。我们已在别处②强调过实验性推理或归纳的一项本质任务是从随机变量中分离出可扣除的。前面章节中已经展示了儿童或者青少年如何整理可扣除的变量；现在我们将研究对于可能性，他们如何反应，他们将如何把可能性同化成可扣除的变量，即使他们是间接通过概率完成的。为此，我们将不再设计新实验(关于儿童如何处理可能性，我们已经有了一整卷的研究)③。在目前的工作中，我们仅仅只要分析已经收集的某些结果，而且我们将把这一分析限定在明显涉及这个问题的两个实验上：在光滑水平面发射球实验(第八章)、活塞压力与液体阻力间的平衡实验(第十章)。

球的停止点、液体与活塞到达的平衡面都蕴涵着概率的概念，因为在任何情况下它都不是完全不变的。所以，被试首先要了解波动的概率规律，其次他必须在波动干扰的情况下分离出所研究的现象规律或者原因(运动或者平衡)。第一项任务恰恰是随机变异概率问题，第二个是相关问题。

(一) 阶段Ⅰ：既不是守恒也不是分配定律

在前运算阶段，被试对于可能性的态度是矛盾的。他们希望在相似情况下，一种现象应该是以同样的方式或者按照明确的进展重复地发生的。当他们意识到这其中存在小的波动，他们首先否定相关数量(物质等等)的守恒，然后推断出球的停止点是完全任

① 与教育科学研究所的研究助理万·邦(Vina Bang)和塔波尼亚(S. Taponier)的合作。
② 参见皮亚杰：《发生认识论导论》，Vol. Ⅱ，Chap. 6。
③ 皮亚杰，英海尔德：《儿童概率概念的起源》。

意的：

Mey(6 岁 8 个月) 他在停止点问题上，看到那个大铝球停在了给定的位置点上(20cm)："那如果我们再扔一次，它将会去哪呢？" "更远。"(实验：21cm) "那如果你再扔一次呢？" "更远一点点因为它已经跑远了一些。"(实验：19cm) "为什么它在那里停住呢？" "因为这个小标记(标志着停止点)仍在那里。" "那如果你再扔一次呢？" "再远一点点因为它每一次都会远一点点。"

Gros(5 岁 9 个月) 对于液体，他预测如果红色盒子(750g)放回原处，水将会返回到"相同的地方"，指着红色的标记 水流远了一些，Gros 解释这个"是因为盒子更重，……它运动得更快"，等等。然后呈现他一系列的位置并询问他红色盒子是否可能停在这些位置：它们都是可能的。对于其他盒子是一样的。

Tac(6 岁) "如果把这个盒子放回原处，水将会流向哪里？"(1500g) "那里 它将会流向它先前的地方。" "为什么？" "这是相同的。" (实验：水平面升高。)"为什么？"——"因为它更重了。"(水平面)

这些反应在年幼儿童的观念中都是常见的。他们否定可能性，但当面对波动时，他们相信任何事都是可能的，或者寻找隐藏的规则(对于 Mey 来说是标记的影响)，或者处于被不可见的原因所蒙蔽的临时的混乱中。在这两种情况下，由于缺少守恒概念，被试的态度得到了强化：移动更快时，盒子会变得更重，水的数量或者重量会增加，等等。

(二) 阶段 Ⅱ：发散随机反应(ⅡA)，界定一个分布区域(ⅡB)

超过 7—8 岁，被试的反应很不同。他不仅不再对变化性焦虑不已，而且他的预判经常会考虑到这个问题("它将会停在相同的地方")。像平常一样，可能性概念的出现首先有以下特点：基于谨慎的普遍消极态度，和很难做出预测的感觉：

Bout(7 岁 6 个月) "如果你扔它(相同的球在水平面上)10 到 20 次？" "(它能到达)那里(1.6m)，那里(1.79m)，或者那里(1.80)。" "你认为它将永远运动直到结束吗？" —"不。"

Dub(7 岁 7 个月) "(这个球将到达)相同的地方。" "它能永远运动直到结束吗？"——"不。"

对于液体问题：

Cut(8 岁) "为什么这次水平面上升了？" "因为有一点点水流出了。"(流到活塞管) "那么现在，为什么它又升高了一点？" ……(两次实验，没有解释)。

Des(8 岁) 为了解释向上的偏差，第一个假设是夹钳更紧，然后说"因为我放下它(这个盒子)时更用力。"

首先，这些发散反应展示了被试是如何被可能性所干扰的，例如，它阻止了被试最初的操作。年龄大约 9 岁的被试们不再满足于以消极观念为主来描述波动，他们设法找出系统的原因。当被试被要求预测 10 到 50 个连续试验的结果时，他们甚至可能去划定实际的变化区域。

在液体实验中(第十章)，寻找原因是特别强调的：

Buc(8 岁 5 个月) “有时候向下流动得更快，有时候更慢。”

Zbi(9 岁 4 个月) “也许是我让它更难流动……也许是我让水落到这里的(不同的开始点)并让盒子更难下落。”

在水平面问题中，我们要求预测：

Cor(9 岁) “它现在将去哪儿呢?”(大铝球，35cm) “跟前面的一样，在那周围。” “如果你连续试 10 次，它能到这吗?”(1m) “不能。” “那呢?”(65cm) “可以。” (实验：12、36、37 和 38cm)“你现在能说出球将去哪儿吗?” “是的，在那周围。”(指的 17cm 和 47cm 之间) “它能一路到这吗?”(60cm) “是的，有时可以。” “那呢?”(1m) “不能，在这儿和那儿之间(从 10 到 65cm)。”

Win(9 岁 8 个月) 小铝球到 1.80m，然后到 1.62m：“这个差异，你吃惊吗?” “不。” “那如果你再扔一次呢?” “不如第一次远。”(实验：1.35，1.51 和 1.15m) “那如果你扔 20 次呢?” “大概在那儿(1.27 和 1.95m 之间)。”

Jos(10 岁 2 个月) 小铜球到 27cm 和 32cm。“如果你扔 20 次?” “将有比这些标记更大的空间。” “它将会滚得到处都是吗?” “不会，在这周围(2 到 40cm)。”

Luc(11 岁) 相同的球：“不会比 37cm 远且不会比 20cm 近。” “如果你扔 10 次这个球，大多数时候它将会在哪里?” “这儿周围(28—29cm)。” “为什么?”——“因为它大约在中间。”

Fra(11 岁 8 个月) “如果你扔 20 次?” “在 21—30cm 之间。” “你是如何知道的?” “你看球大概去哪。” “在某些地方将会有更多的标记吗?” “是的，这里(35—40cm)。如果你有规律地扔，比起边缘中间这儿更多。”

尽管一开始看上去可能性与操作相反，在子阶段ⅡB 被试开始通过寻找波动的原因来判断幅度大小，进而逐步同化。结果是被试为变化范围确定边界，到该子阶段的尾声时，被试认识到偏差包含一个中部高频、末端低频的曲线。就这样，Fra 凭直觉认识到了高斯曲线。在另一项任务中，我们研究了这个曲线在不同发展阶段的表征。

而且，令我们震惊的是，在子阶段ⅡB 能够自发指出变化区域的被试，恰恰就是这

① 皮亚杰，英海尔德：《儿童概率概念的起源》，Chap. Ⅱ。

批被试:从一开始就察觉到球停止的原因至少有两个因素(例如,重量和体积,体积和物质,等等)(见第七章)。但是,因为在这一阶段还不能系统地分离变量,被试关于因果关系的断言和变化区域都不能指明潜在的相关结构。不如说,他们把变异简化为原因的多重性的结果,而对于分离各自的部分尚无认识。

(三)阶段Ⅲ:解释分布和发现随机波动的规律

在阶段Ⅲ,被试开始主动实验。他们开始接受存在随机变异(尝试找到这些变异的形式)并且开始抽离出其中蕴涵的内在规律。而且,要抽离出内在规律,迟早需要相关格式的形式化过程。

首先是液体问题的一个案例:

Bon(14岁6个月) "水将会流向哪里?" "跟以前相同的高度。" (更高)"对于那种情况你有什么想说的?" "这取决于装置的抖动。也许它抖动的更多。" "确定?" "不,它有可能上部堵塞了。不,有可能是下面;空气将会被压缩。" "如果我们再做一次呢?" "如果实验精确,当活塞最容易滑动时,水将会到达相同的水平面。" "当活塞最容易滑动时,水平面将到哪里?" "如果你多做几次实验,你将会找到这个点。" "如果你做5次实验呢?" "取5次实验的平均值。" "当它最容易滑动时,你取平均值?" "我们将得到最容易读取的。"

接下来是关于停止点实验的例子:

Chap(13岁3个月) "球将到那儿。"(0.9—1m) "球能一路到那吗?"(1.6 m) "不,因为它太重了。" "那一个呢?"(更宽更轻) "在这周围。"(1.7—1.79m) (实验:1.60m)"为什么?" "因为它跟其他的不一样重。"

Ray(11岁1个月) 从1.10到1.5 m的一系列:"也许是发射球的方式不同(他尽力用等力来扔球)。我知道了,是推动力在变化。理论上它将滚动到相同的地方。摩擦力减少了。" "你能展示一下摩擦力对结果的影响吗?" "理论上球应该滚动得更远。空气阻力随着体积变化(他现在把摩擦力和空气阻力混淆了)。如果你用两个相同重量不同体积的球,你可以确认摩擦力对结果有影响。"尽管存在波动,他完成了实验,并证明了自己的观点;对他来说,能够确认的数量已经足够了。

Lex(1 岁 个月) 想要证明体积对结果有无影响:"这两个球有着相同的重量不同的体积(实验)。它们滚动了(大约)相同的距离,所以体积对结果没有主要影响。" "是有较小的影响还是完全没有影响?" "有小的影响,因为小木球比大球滚得要远。"因此,他意识到了忽略小的偏差,都有确定的和不确定的情况(没有计算这些案例)。关于波动,他解释是因为推动力:"有时我发射球的力量比

其他的要大。”　“哪个区域?”　“这儿和那儿(9　?、m)。这是用正常推动力时球的路径。滚动边缘是例外。它刮掉了一点;你看　痕迹　;这证明它滚动的时候就像刹车。”

Nic(15 岁)　想要展示相同体积下轻的球比另两个重的球滚得要远，但是他意识到存在波动:“我的假设应该是正确的，但仅仅是推动力小的时候。”　“那这个假设是错误的吗?”　“如果我的假设是错的，我不知道该想什么了。我没有考虑到发射时推动力不同。”因此他接受轻度的变化，不去管结果中变异的干扰。

相比较阶段Ⅱ，从这些反应中很容易看出那些新获得的部分。阶段Ⅱ的被试局限于描述原实验的具体操作，而不是分离变量。用这种方法，他们能够发现波动，就像他们发现原实验中所设定的一切事物一样。他们甚至构建出了分配定律(中间是最高频率的钟形曲线)。但是，他们试图得出结论但并不能分离这些经验变量，他们就不能做什么了。与之相反，阶段Ⅲ的被试想要通过以所有可能的组合精确地分离变量来找到规律。但是，他们遇到了阻碍，需要系统分析结果的波动。因此，我们必须要问他们用了哪种方式来分析。

聚焦于自发的反应，暂时将被试自以为确认的事实列举和反驳搁置一边，我们发现阶段Ⅲ的被试使用了一种方法，把相关的问题提入议程。

第一，我们知道对于现象的简单统计列举(这决定了变化域，其高频率是“中值”)不足以解决问题。因此，Bor 建议在给定的重量下取水平面的平均值来估计常规值，但是他意识到，在这个例子中，活塞最容易滑动，平均值不同于“获得的最佳点”。特别是想要证明重球没有轻球滚得远的 Nic，他知道必须对分散的干扰做出解释，也发现自己的假设只有在“小推动力”的情况下才能得到证明——也就是轻球和重球所得到的最短的路径。

第二，形成一种新的智慧态度是阶段Ⅲ所特有的，这个阶段的被试把确认的和不确认的实例区分开来。被试知道，他必须决定哪些是更频繁的。我们看到 Ray 和 Nic 主动忽略分散，而坚持他们的假设(并且在 Nic 的例子中，不管“有力发射”的例外情况)。因为不确定实例的数量，Lev 恢复了体积的重要性，一开始他想证明体积只是很小的影响因素。

这就是为什么我们必须重构青少年的推理，因为它与确定和不确定的事实问题有关。我们已经多次看到了对于比例的定性操作格式(基于命题内的联系)，要先于这些比例的数量化处理方式。用这种相同的方式，我们现在应该看到一个简单的分散范围的定性估计是如何朝着相关的操作格式发展的。

例如，让我们假定被试想要证明最小的球滚得最远。用 p 表示实验球小于标准球这一命题，而 p 表示实验球大于标准球；q 表示实验球比其他球滚得远，而 q 表示该球比其他球滚得近。观察波动，然后引导被试假定四种可能的结合(*表示“完全肯定”)：

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) = (p * q) \quad (1)$$

显而易见，这四种可能性包含在被称作"相关系数"（Yule 或 Bravais Pearson 公式）的四联简化计算的组合列表中：

	小球（p）	大球（$\bar{p}$）
远（q）	a　$p\cdot q$	$p\cdot q$
近（$\bar{q}$）	b　$p\cdot q$	d　$p\cdot q$

在目前的实例中，被试没能打破现实情况而去对应这四种可能性，他们也没有计算表格中数值间的比率。被试试图用集中量化（使用 或者 ）而不是数值量化，而且他们满足于这个阶段。但是集中量化要估计表格中 a、d 实例的数目（也就是 $p\cdot q\vee p\cdot q$）和 b、c 实例的数目（也就是 $p\cdot q\vee p\cdot q$），并且比较这两者。a 和 d 实例证明了实验的假设，b 和 c 实例代表不确定的情况，但是我们的被试好像能够进行精确的比较。因此他们的推理过程可表述如下（E 表示对于确定和不确定的实例，核实命题的总数）：

$$E[(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})]\gtreqless E[(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)] \tag{2}$$

也就是

$$(a+d)\gtreqless(b+c)$$

因此，如果被试能够数量化地决定（$a+d$）（$b+c$）的差异，其与整体（$a+d$）+（$b+c$）的关系，可以说他们明确地使用了相关的概念而不是满足于基于 或者 的比较。这意味着相关是在阶段Ⅲ构建的吗？一个更直接的方法将会帮助回答这个问题。

相　　关

因此，我们需要对阶段Ⅲ可能已经潜在的相关格式进行更详细的分析。为此，我们要设计一个被试能够轻松数出确认和不确认两变量间假设关系的设置。我们将会看到确认实例和不确认实例之间有何种关系，这些关系是否对应相关计算组合列表中的某一项。

为被试设置的问题仅仅包括眼睛和头发颜色之间的相关。给被试看 1[illegible] 张卡片，每张卡片上都画有一张脸，眼睛和头发的颜色按照下面的四种组合方式绘制：

a＝蓝眼睛金黄色头发（$=p\cdot q$）

b＝蓝眼睛棕色头发（$=p\cdot q$）

c＝棕色眼睛金黄色头发（$=p\cdot q$）

d＝棕色眼睛棕色头发（$=\bar{p}\cdot q$）

给了被试一定数量的卡片，问他眼睛颜色和头发颜色之间是否存在关联（即不是说在现实生活中是否有联系，而是能否在给出的数据中发现关联）。最初，可以用下述两种方法之一进行，让被试组成他们自己的分类（构建双维四格列表），或者发给他根据四种可能性已经分好类的卡片。后面一种方法更加强调了可能的数值组合。例如，我们可以采用组合 $abcd$ 分别为 4，0，0 和 4 张脸；或者分为 4，4，4，4；6，6，2，2；或者 13，8，3，8；等等，要求被试估计每个任务中的相关关联。此外，会给被试展示两套不同的（也就

是 6,4,2,4 和 4,4,4,4),询问哪一套呈现了最清楚的相关。最后,要求被试移动卡片以求增强相关;然后要求他讨论自己使用了四种组合中的哪一个作为排除卡片的基本方法。

这一实验情境提供给我们很多有趣的反应以从命题逻辑的观点(现在我们唯一关心的观点)来进行检测,与计算问题或者狭义的归纳推理截然相反。如果我们令 p 表示有蓝眼睛,q 表示有金黄色头发,符合相关的情况将对应等式 $(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$,不能确认的情况将对应互反排斥 $(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)$。若想呈现相关关系,就必须先建立两个类,每个类都相当于我们所讨论的两种类型的关联 $(p=q)$ 和 $(p\vee\!\vee q)$ 中一种所陈述的情况;然后,就必须判断这两个种类之间的联系。

但是,开始时,这些分类或关联的组织就出现了一些困难。即使是在Ⅲ A 阶段,被试开始时经常独立地考虑组合 a(也就是 $p\cdot q$),没有明白 d(相当于 $\bar{p}\cdot\bar{q}$)是至关重要的。而且当他试图把 $a(p\cdot q)$ 和另一种情况联系起来时,他可能首先会想到 b 组合 $(p\cdot\bar{q})$ 而不是 d。他在列表中垂直地(眼睛)或者水平地(头发)进行比较,而后他明白必须使用对角线进行比较。

一旦克服了最初的困难,问题就是要发现相关不是简单的概率——也就是,确定情况 $(a+d)$ 和可能情况 $(a+b+c+d)$ 总数之间的基本比率。相关的基本困难无疑就是在这儿被发现的。这一点可以解释在了阶段ⅢB 之前,相关性是无法被习得的,然而乘法形式(比率)的简单可能性是在了阶段ⅢA 发现的。

在它最基本的形式中,相关系数 R 起源于下面的公式:

$$\mathrm{R}=\frac{(a+d)-(b+c)}{(a+d)+(b+c)}$$

如果我们用 E 表示确认一个特定命题内关联的所有项目,可表达如下:

$$\frac{\{\mathrm{E}[(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})]-\mathrm{E}[(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)]\}}{\mathrm{E}[(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})]+\mathrm{E}[(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)]}\tag{3}$$

因此,相关的发现过程如下:发现可能性 $(a+d)/(a+b+c+d)$ 和 $(b+c)/(a+b+c+d)$ 后,被试仍必须学习相关是差异 $(a+d)-(b+c)$ 除以总数的函数。

当然,我们不希望被试重新发明这些公式,或者计算相同的事情完成全部的计算过程。但是从数值组合中定性推理的观点来看,当被试构造了两类 $(a+d)$ 和 $(b+c)$,不同 $(a+d)-(b+c)$ 就存在了,这相当于 $(p\cdot q\vee\bar{p}\cdot\bar{q})=(p=q)$ 和 $(p\cdot\bar{q}\vee\bar{p}\cdot q)=(p\vee\!\vee q)$ 两种关联,并且意识到:如果它们的可能性相等,则为零相关。反之,当不等 $(a+d)>(b+c)$ 增加时,相关就增强。

但是如果用这种方式解释,不使用任何明确的公式,我们应该看到相关概念是在了阶段ⅢB 时作为运用命题逻辑的结果而被发现的。在这个状态下,不值得返回非概率

① 皮亚杰,英海尔德:《儿童概率概念的起源》,Chap. Ⅴ, No. 3 and Chap. Ⅵ, No. 3。

反应的阶段Ⅰ,或者阶段Ⅱ的第一个概率格式。不如说,我们应该从子阶段ⅢA的分析开始,因为只有在这个时候被试才能够推理那些卡片而不用求助于经验世界(假设演绎推理法)。

(一) 子阶段ⅢA:孤立地考虑频率的概率解释,未将$(a+d)$与$(b+c)$联系起来

正如我们期待的,子阶段ⅢA的被试可以估计肯定确认情况与有关的情况之间的概率。因此,通过比较a与b或者$a+b$,他知道如何去判断如果有金黄色头发的个体有蓝眼睛的可能性。尽管如此,他仍然不能把肯定和否定确认情况$(a+d)$中的组合加起来,并且把它们和不确认情况$(b+c)$联系或者跟所有可能的情况组合联系。下面是一些例子:

Lyn(12岁4个月) "你能在这些卡片中找出头发颜色和眼睛颜色之间的联系吗?"(6,0,0,6)① "是的。这些(d)有相同颜色的眼睛和头发。" "但是把这一组作为一个整体(展示所有的卡片),眼睛的颜色和头发的颜色之间有联系吗?" "没有。" "这呢?"(d) "这儿只有棕色的。" "那这呢?"(a) "是蓝色的,全都是蓝色的。" "这儿(6,2,4,4),有联系吗?" "没有。有的,四个(子集)分开来的时候,不是它们在一起的时候。" "为什么?" "因为有些是黄色的(金黄色的)和蓝色的,有些是黄色和棕色的。" "像那样吗?"(4,4,4,4) "这儿有更多的可能性;它们都是4 如果你弄错了,当这儿是4和4时,有2个(b)。"(表明a和b) "如果你只看到蓝眼睛,你找到金黄色头发的概率是多少?"——"4和4;概率是一样的。"(a和b)

给她所有卡片让其分类;她马上根据四种关联完成了任务。然后要求她构成两个组以便找出一组中两种颜色关联的概率比另一组高。她给出结果3,3,4,4和3,6,6,4:"(3,3,4,4)的概率更高因为这组是3和3,4和4,而另一组是6和4,6和3。"换句话说,即使Lyn正确地组织了这些类型,她通过推理a b和c d间的关系来组织且证明她的观点,而不是通过对角线关系$(a+d)$ $(b+c)$来证明。

Mor(13岁6个月) 给他的类型是(10,2,3,8),回答道:"有可能出错了。"试图从头发颜色预测眼睛颜色或者从眼睛颜色预测头发颜色,他指出不确认情况b和c,但是没有计算比率。"这边呢?"(12,0,0,12) "它们是相同的颜色;你不可能出错的。" "那这个类型呢?"(8,4,6,5) "你可能错了。" "为了确认你能做什么呢?"——(他拿走b和c情况) "如果你有这两组呢(8,4,4,8和11,1,7,5),你最确定哪儿?" "这儿(11,1,7,5),你会错的可能性很小因为那儿

① 一一对应与四种可能组合的卡片数量,按照a、b、c、d的顺序标识。

有很少例外。"(他指着 a 到 b 的比率——也就是，11 到 1 但是没有注意 7c 情况)

Bon(14 岁 3 个月) 他声明在类型(5，1，2，1)中眼睛颜色和头发颜色之间没有联系 "为什么?" "恰恰因为不同的卡片"(他展示 b 和 c) "那呢?"(3，0，0，5) "有的，因为棕色眼睛和棕色头发一起，金黄色头发和蓝色眼睛一起……这是最大限度的联系" "那这两种类型呢?"(4，2，2，4 和 3，3，1，5) "完全没有关联因为每组的人数不同" "但是两个组是相同的吧" "不是。(4，2，2，4)中你有 4，4，2 和 2(对角线关系的开始)，但是(3，3，1，5)中你有 3 和 3(a 和 b)；每一边的数量相同"(综上所述，他总结出呈现的变量之间没有关联)

这些情况足以显示出了阶段ⅢA 的被试面临的两个主要的困难。第一，Lyn 的情况清楚地呈现了当她遇上 $a(p\cdot q)$、$b(p\cdot \bar{q})$、$c(\bar{p}\cdot q)$ 和 $d(\bar{p}\cdot \bar{q})$ 四种组合时，她可以毫无困难地理解棕色头发和棕色眼睛之间或者金黄色头发和蓝色眼睛之间的联系，但是她不明白这是相同的或者相反关系($p\cdot q$ 和 $\bar{p}\cdot \bar{q}$)。她把情况 a 和 b 置于相反位置，d 和 c 也是如此，没有看到 a 和 d 相互加强并且形成了一个整体——也就是，情况间的组合有利于眼睛和头发之间的整体关系。

第二个困难和第一个有相同的起源，但是它的影响持续时间更长(Mor 和 Bon 都解决了第一个困难，但是被第二个困难难住了)。一旦被试看到 a 和 d 证实了他所寻找的关系，且 b 和 c 与之相反，他就不会通过$(a+d)$和$(b+c)$数量的对比来计算可确认情况相对于不确认情况或者可能情况的比率。除非他被限制于一对情况中的一个(ab 或者 cd 中的任何一个，忽视其他的)，他只是把 a 和 b、c 和 d 进行比较。例如，当 Mor 比较这两个相等的比率(8+8：1+1 和 11+5：1+7)时他发现第二个更令人满意，因为他把 1，11 和 1，8 作比较。当 Lyn 将自己限制在 ab 之间和 cd 之间的关系时，她做了相同的事情。

从 ab、cd 而不是从对角线 ad、bc 的推理过程中，有趣的是，被试对于情况总数和不确认情况数相等时，$ad=bc$ 的反应，被试很不明白在这样的情况中，相关恰好是零。相反，在这个阶段，他们倾向于分配它们各自的重要性，因为当他们只推理 a 和 b(或者只推理 d 和 c)时，肯定和否定的可能性是相等的。因此比起类型 6，2，4，4，Lyn 更倾向于类型 4，4，4，4，因为这有"4 和 4；可能性是一样的"。她也总结说 3，3，4，4 比 3，6，6，4 有更高的相关。尽管这是正确的，她解释道 $a=b$ 和 $c=d$ 之间是相等的"因为你有 3，3 和 4，4"。上述的被试，只有 Bon 理解在情况 3，3，1，5 中，$a=3$ 且 $b=3$ 什么都不能证明("因为每一边的数值相同")，但是他甚至习惯于只推理 a 和 b。

与之相反，在子阶段ⅢA 的尾声，我们发现一个在ⅢA 和ⅢB 之间的中间水平，在这个等级里，被试逐渐理解对角线关系并且开始考虑$(a+d)$和$(b+c)$结合的可能性。下面是一些例子：

Bab(14 岁 3 个月) 当给他类型(5，2，1，4)时，他说道："这有一些是金黄色头

发和蓝色眼睛。但是这儿也有其他的类型。"(他按顺序展示了卡片 b、d 和 c)　"这之间有关联吗?"　"不管怎样,这都有个关联;大多数有蓝色眼睛的人有金黄色头发,大多数有棕色眼睛的人有棕色头发。"　"你正确的机会是多少?"　"在组合(a)中,5 次正确,在组合(d 和 c)中,1 次正确,1 次错误。"　"整体中呢?"——"12 次中 3 次错误[因此 $(b+c)/(a+b+c+d)$]……12 次中 3 次。"

"这儿呢?"(6,0,0,6)　"你有相等数值的可能性……不,你将总是正确的。"　"那儿呢?"(5,1,3,3)　"12 次中 1 次错误;不,这也有(c);不,12 次中 4 次错误。"　"这两个组合(5,2,1,4 和 5,1,3,3)中,哪个你最有可能正确?"　"相同的:5 和 5(他数情况 a)。不会造成什么差别。"　"那你有几次错误呢?"——"12 次中 3 次错误和 12 次中 4 次错误。"

"在这两个组合中呢?"(4,2,2,4 和 3,3,1,5)　他把卡片分类,然后把情况 a 和每一个作比较,把情况 d 和每个比较,然后数整体:"这儿和那儿 12 次中错误 4 次!"最后他被要求形成一个类型以致不能做出预测。他选择 1,1,1,1,然后选 2,2,2,2,等等;他必须明白在这样的情况中是零相关。

Vec(11 岁 6 个月)　正确分类 5,1,2,4:"这之间有关联吗?"　"不完全是。这有那些。"(他把情况 a 和情况 d 放在旁边)——"所以存在需要被排除的关联?"　他展示了 b 和 c　"这有一半……不,2/6 和 1/6(他计算 $c/(c+d)$,$d/(c+d)$),在蓝色眼睛的情况中是 5/6 和 1/6。"(他计算 $a/(a+b)$ 和 $b/(a+b)$)　"但如果你考虑整个组合呢?"　"大约 9/10……不,9/12……这些都是包含在规律中的,3/12 不被包含。"

"那这些呢?"(6,0,0,6)　"定律是准确的;完全没有例外。"　"这呢?"(4,2,3,3)　"这个比例是相当脆弱;各占一半。"　"准确吗?"　"规则中是 7/12,5/12 是例外。"　"你能说这是定律吗?"　"较少。对于棕色头发,你不能说这是个定律;概率是各占一半的。对于金黄色头发,结果更好。"　"那一起呢?"——"你可以说存在定律,但它不是很有规律。"

他被要求形成一个没有关联的组;他马上组出 3,3,3,3:"它抵消了。你不能说这是一个定律:3/6 包含在规律中,且 3/6 不是对于棕色头发的,是对于金黄色头发的。"

最后他被要求比较类型 4,2,2,4 和 3,3,1,5:开始他把 a 与 $(a+b)$ 相比较,d 与 $(c+d)$ 相比较。　"但是对于整个类型呢?"　"定律之外是 4/12,定律包含 8/12。对于整个类型来说是一样的。"

可以看到自从了阶段ⅢA 开始,已经有了非常多的进展。尽管 Bab 开始推理蓝色眼睛(a)独立于棕色(d),他很快意识到 a 和 d 组成了一个相同确认规律的整体,与 b 和 c 相反(Vec 几乎是立马就明白了这个事实)。但是仍然存在一种趋势,时强时弱的,在分离的情况下推理 a 和 b 或者 c 和 d 中的任何一个(参见 Vec 对于第一种类型 5,1,2,4

的计算)。但是一旦被提醒可能情况的总数，这个中间水平阶段的被试就开始比较$(a+d)$和增加的$(b+c)$或者$(a+b+c+d)$。从严格意义上来讲，这个增加使得相关的概念出现了。子阶段ⅢB的特征就是被试在开始时自发地顺利使用了相关。

（二）子阶段ⅢB：自发地联系确认的情况和不确认的情况及可能情况的总数

在10岁4个月之后，我们发现了一些个别的被试，能够用子阶段ⅢB的最终格式做出反应，但是，通常在接近11－15岁时，这些情况的频率已经足够高，以至于可以定义一个阶段。下面是两个例子：

Dan(11岁)　分类出类型(5,1,2,4)："如果你看着头发，你能发现眼睛的颜色吗？"　"这是可靠的……存在例外，但是例外是很少的；9个中存在3个例外。像这样的情况，你可以说没有绝对的规律，但是有某些种类的规律。"　"这呢？"(3,0,0,3)　"在这你有绝对的规律。"　"那呢？"(4,2,5,3)　"跟数值相比，例外很少。"(确认的情况)　"它跟第一组相同吗？"　"不，例外不是如此少：之前是9个里面有3个例外，现在是7个里面有5个例外。"他被要求形成零相关：他给出1,1,1,1。然后他被要求比较1,2,2,1和3,3,1,5："在这(第二组)正确的机会更多。不，他们恰好是相同的。"最后他被要求形成两种类型，比起另一个，一个中包含了更多的无规律：他构建了负相关(1,2,2,1和1,1,1,3)："那有2个(确定的)和4个(不确定的)；这有4个(确定的)和2个(不确定的)。"

Cog(15岁2个月)　组建类型(5,1,2,4)："大多数有棕色头发的人有棕色眼睛，大多数有金黄色头发的人有蓝色眼睛。"　"关联是什么？"　"不是最大，但也不是很弱……12个人里面有9个人的头发颜色是相同的。"(和眼睛颜色)　"那这个呢？"(6,0,0,6)　"它是最大的。"　"那没有关联的那个组呢？"　"你必须把它们混合起来。"(他组成了1,1,1,1)　"比较这两个组。"(4,2,2,4和3,3,1,5)　"关联是相同的；卡片的数量相同。"　"你数了吗？"　"是的。两个组都是8/12(确认的)和4/12(不确认的)。"　"判断有无关联的最好方式是什么？"　"你必须要把(a)和(d)与(b)和(c)比较。"他通过对角线分组来描述四种组合。

我们在本章初提到的相关的定性概念很容易在子阶段ⅢB的反应中识别出来。第一，一旦根据格式$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$[命题(1)]把四种可能性进行分类，被试就意识到情况$a(-p \cdot q)$和情况$d(\ p \cdot q)$是连在一起的(头发颜色和眼睛颜色相同)，但是通过交互性的联合而不是同一性(此处的交互性，一如既往，是相同的关系但是是否定的：金黄色×蓝色，不是金黄色×不是蓝色)：

$$p \cdot q = \mathrm{R}(p \cdot q) \tag{4}$$

由此等值(不再代表同一性，而是必要的互反对应)：

$$(p=q)=(p\cdot q)\vee(p\cdot q) \tag{5}$$

命题(1)和命题(5)定义了确认情况的相关特征。命题(5)陈述了规律(有蓝色眼睛 p 和金黄色头发 q 之间的或者有棕色眼睛 $\bar{p}$ 和棕色头发 $\bar{q}$ 之间的一致性)，然而命题(1)呈现了将支配规律的两对特征汇总起来的关系。

用相同的方式，被试理解了情况 $b(p\cdot\bar{q})$ 和情况 $c(\bar{p}\cdot q)$ 之间的相互关系：

$$\bar{p}\cdot q=R(p\cdot\bar{q}) \tag{6}$$

由此，b 和 c 否定的相等①特征：

$$(p=\bar{q})=(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q) \tag{7}$$

其中，$(p=\bar{q})=(p\,W\,q)$(p 的互反排斥和 q 的互反排斥)。

但是被试马上看出 b 和 c 与 a 和 d 相反——也就是，不确定情况的总数：

$$(p\neq q)=(p\,W\,q)=(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$$

因此

$$(p\,W\,q)=N(p=q) \tag{8}$$

换句话说，一旦理解了确定情况 a 和 d(即 $p\cdot q\vee\bar{p}\cdot\bar{q}$)之间的相互作用，被试就明白了不确定情况 b 和 c 之间的相互作用和有这样特点的两个种类之间存在的反演关系(命题(8))。因此，从一开始，子阶段ⅢB的被试通过对角线推理，寻找总和 $(a+d)$ 之间的数值关系，证明命题(1)，总和 $(b+c)$，证明命题(6)和所有可能情况的总和。但是从这一观点来看，与中间阶段情况(B,b和V,c)相比，子阶段ⅢB的平衡中这些情况的新特点在于，为了估计相关性的程度，被试直接把 $(a+d)$ 和 $(b+c)$ 相联系而不是寻找 $(a+b)/(a+b+c+d)$ 和 $(b+c)/(a+b+c+d)$ 的比率。因此，Dan 把 $3(b+c)$ 和 $5(a+d)$ 做比较，把 $2(b+c)$ 和 $7(a+d)$ 做比较，且预估第二个的相关性更高；Cog 明确地说："你必须把 $(a+d)$ 和 $(b+c)$ 做比较。"这个公式化的结果就是可以发现以下三个情况(如果 E 是需证明的所有命题的总和)：

$$E[(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})]=E[(p\cdot\bar{q}\vee\bar{p}\cdot q)]=\text{零相关} \tag{9}$$

当 Dan 和 Cog 形成类型 1,1,1,1 等时，他们理解了这一点，显示了变量之间毫无关联。

$$E[(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})]>E[(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)]=\text{正相关} \tag{10}$$

(当不等程度增加时，正相关加强)。

当被试比较两个分类去估计它们各自的相等相关或者不相等相关，这是他们所表达的：

$$E[(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})]<E[(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)]=\text{负相关} \tag{11}$$

这是 Dan 在他的询问末尾不完美地看到的。

由于评估两种类型 $E[(p\cdot q)\vee(p\cdot q)]$ 和 $E[(p\cdot q)\vee(p\cdot q)]$ 之间的不同，与寻

① 我们知道反向相等或者相互排斥$(p\,W\,q)$也可以写成 $p=\bar{p}$。

能情况的总数有关,我们将不需要走太远去论述被试在命题(3)中使用的各种联合;也就是,他们之间存在隐含的相关概念。

第三部分　形式思维的结构整合

思维发展可以从两个不同且互补的观点来进行研究：第一个是平衡条件，第二个是结构形成。根据第一个观点，思维过程似乎是通过各种具体形式而趋向逐步稳定的平衡状态[1]。这里的问题是分离出某一平衡状态或多或少稳定的原因。有两类主要因素能够解释稳定形式与不稳定形式之间的区别：第一类与某一既定平衡内认知领域的相对延展程度有关；第二类是协调的手段，如在任何特定年龄可获得的认知结构的发展水平。根据第二个观点，问题是明确结构是如何产生，以及它们是如何彼此遵循发生顺序的。然而，这一结构的形成取决于三类主要因素：神经系统的成熟、与物理环境互动中习得的经验以及社会环境的影响。但是毫无疑问，这些因素分别的或共同的操作受限于平衡法则，这一法则决定了与所有这些运算的社会的和物理的条件相配的适应的最佳形式。因此，平衡和结构的确是思维的任何组织的两个互补方面。

接下来的第十六章将从平衡的视角、第十七章将从结构的观点来对形式思维进行分析。最后一章概述了我们对儿童思维（是前运算的或有限使用具体运算）与青少年思维（遵循儿童不知的方向，是形式逻辑发展的结果）的差异。

第十六章　平衡视角下的形式思维

毫无疑问，形式思维最显著的特征是关于可能性的命题相对于关于经验现实的命题所起的巨大作用。因而，与具体思维相比较，形式思维构成了一种新的平衡，这种平衡可以从上文提到过的两个角度来分析：一是思维所包含的认知领域的扩展程度；一是在思维功能中起到运转作用的协调手段。不过，我们将首先对形式思维之前各阶段的

1　当然，平衡不是稳定的，因为它是某一封闭系统的静止状态（诸如机械中力量的平衡）。从心理学观点来看，当修正该系统状态的扰动与抵消它的某一自发动作相对应，系统就是平衡的。因而，平衡是行动者行为的函数。平衡法则表现了在神经—生理条件、物理环境和社会环境的作用中各种可能的补偿发生的概率。

平衡特征进行简要分析。

(一) 前运算思维、具体运算思维及形式思维

1. 在感知运动阶段智慧行为局限于协调的动作，在该阶段末期，符号运算的出现使儿童能组织起初级的表象。于是，思维的一种特征形式(表象)在2岁至7—8岁就产生出来了，这种表象的证明可以在本书所提供的经验资料中随处找到(参阅阶段Ⅰ儿童的实验资料)。

这类思维是前运算思维，即前逻辑思维①，它与具体运算思维有三点区别：(1)当“前运算”儿童在考虑静态情境时，比较喜欢借助于某一时刻情境的图形特征来解释这种情境，而具体运算思维的儿童喜欢利用从一个情境到另一个情境的转换来进行解释。(2)当“前运算”儿童考虑转换时，总是把其同化为自身的动作，还不能将转换看作可逆的运算。我们可以将上述两点区别归结为一点，即在前运算思维水平，某一系统的静止状态及其变换形式尚未形成一个单一系统，而在具体运算水平，静止状态则被视为来自某种转换，就像各种运算的结果都是属于运算一样。(3)不过，即使在前运算水平，我们也发现了组织整合系统的趋势，可以从这种趋势中辨认出指向某种平衡形式的倾向。然而前运算儿童组织此系统所能采用的唯一手段是知觉调节或表象调节，还不具备实际运算的能力②。前运算与具体运算这两类机制的差别，在于前者的可逆性仍是不完整的，而在具体运算，儿童的思维已达到了可逆性。

在前运算水平，对静态情境的优先考虑超过了转换，这种优势在本书所描述的案例中不是非常明显，因为本书中绝大多数被试面临的问题都是与转换有关的。但是，在我们以前的研究中已经发现儿童在7—8岁之前缺乏守恒观念，正好表明了前运算思维的特点。当我们将一定数量的液体倒入比原来容器更为细长的杯子中，4—6岁儿童相信液体数量已经增加了，因为容器的样子已经不同了，儿童这时是基于静态的知觉图形来做出论断的。他总是个别地感受系统的每个状态，而不是利用可逆的转换来设想各种情境，而量的守恒性恰恰正是由可逆的转换形成的。在本书各实验中，类似的静态知觉在平衡问题中也可发现，在该问题中物体重量产生的压力与液体的反作用力互相平衡，

① 瓦隆(Walion)采纳了与我们相同的观点，只是将我们的词汇稍作修饰与改动。他谈到“前范畴”思维，意思是说思维在此时还没有考虑到主语与谓语(动作)之间的联系。但是，前运算思维的这一方面不足以概括它的全部特征。“前范畴”是这个术语仍然与表示这类逻辑特征的“联系”有关。虽然事实上前运算思维还没有掌握最基本的类逻辑“群集”，但是同样前运算思维也不能掌握关系逻辑的初等群集。因此，“前关系”所指的内容范围与“前范畴”所指的差不多大小。而“前运算”这个术语具有同时能包含这两个方面内容的优点，而且不仅如此，“前运算”强调了运算——就是强调了动作，而不单只是指思维的言语方面。在考虑智慧的结构时只注意到言语的表现及其产物肯定是不完整的。

② 调节是不完善的或近似的补偿，它与运算根本不同，运算需要完全的补偿。

在这情形中，液体数量与液体的重量都不是守恒的（参阅本书第十章）。同样在杠杆问题中（本书第十一章），当处于ⅠA阶段的儿童想要重新建立平衡时，却不知道怎样拿走一个重物（即进行反演运算），他们只会局限于继续在一端或另一端增加重物，以各种状态不可逆的顺序来进行操作，而不懂得返回到早先的情境。

另一方面，第二个区别可从研究处于第一阶段的被试时所收集的资料中明显看出。这些前运算阶段的儿童还没能把实验仪器看作为一种自动的因果关系的系统，他们无法将他们所看到的物理过程与他们自己的动作结果这二者之间加以区分；他们往往把客观关系同化为建立于他们自己的动作模型之上的一种因果概念（例如利用推动力"拉"等诸如此类的动作来作为解释，可参阅本书第十二章）。

这个意思是说，系统的转换被前运算儿童同化于自己的动作之中，而对静态情境，他们是借助于知觉图形的特征来解释的，结果在这两方面同一性就不存在了，在静态与转换这二者之间进行协调的唯一手段是调节。在静态情形下，只是简单地知觉调节问题，这种情形从"前运算"儿童的眼光看来，图形本身就是一种解释（例如，杠杆两端基本的平衡就是由于简单的知觉对称，请参阅本书第十一章）。在运动与转换的情形下调节采取了在儿童动作中所特有的修正或调节的形式，这类调节方可预言今后出现的运算过程使得儿童动作指向于可逆性。尽管前运算时这类调节尚未达于完全补偿，但这类调节已经开始将潜在可能的转换（也就是建立于与现实性根本不同的可能性基础之上的基本过程）加到了此时几乎仍然完全限于现实性的认知类型之中（无论在外界知觉现实的意义上或在想象动作的意义上而言都是如此）。

2. 随着具体思维的出现，调节系统达到一种稳定平衡的初级形式，虽然在此以前调节系统仍处于一种不稳定状态。当具体运算达到完全可逆性水平时，由以前的调节所引起的具体运算协调形成了确定的结构（分类、系列化、对应等），这些结构在今后一生中将一直保持下去。当然，这并不妨碍组织更高级的系统，但是即使当更高级的系统出现时，这些基本的系统在组织当前直接给定的资料的有限范围内仍将保持积极作用。那么，这种平衡形式的本质究竟是什么呢？

第一，静态情境与转换之间的相互分离，在由具体思维所组成的那些认知范围中已不再出现，从这时起，静态情境已从属于转换，即每一个静态状态都可视为转换的结果。例如被试儿童把杠杆的每种情况（参阅本书第十一章）都视为加减重物的结果，或者视为由于杠杆两端重量相等或不相等的结果，或者是由于杠杆两端重物离开中心（支点）的距离相等或不相等的结果。

第二，如果我们说转换系统处于平衡，那么意思就是指这些转换获得了一种可逆形式，并获得了根据一定的结合律进行协调的可能性。于是从这点出发，转换已被儿童同化为运算，因而运算来自于动作的内化以及上一阶段的前运算调节。

第三，具体运算思维同前运算思维或者直觉思维比起来，它的特征是真实性沿着潜

在可能性方向上进行扩张。例如儿童将一些物体的集合进行分类，这意味着他已经能够构造起一个类包含的集合，以致当他今后遇到新的客体时能将新客体包含到已施行过分类的客体系统关系中去，并且儿童用这种方法还能继续进行新的类包含运算。同样道理，将某些物体排成系列，这意味着儿童今后能对客体作进一步的细分。但是，当推理过程在具体运算阶段开始出现时，具体运算中所固有的那些“可能性”毕竟还不可能扩充为一个假设集合，如同后来形式运算可能性的情形。

然而具体思维所达到的平衡仅仅覆盖了一个相当狭窄的范围，这个范围的边界仍是不稳定的，由于存在着这两个情况，使得后来形式思维的出现就成为非常必要的了。

具体运算的平衡范围是有限制的，像任何平衡一样，限制的意思在于，这类具体运算的特征是由潜在可能的运算的补偿所决定的，运算是与系统的联系共存的，然而这些联系受到了两方面的限制：一是受所包含的运算的形式限制，另一是受这些运算所应用的那些概念的实际内容的限制。

从形式观点看来，具体运算不过是对当前现实给定的资料进行直接组织。而分类运算、系列运算、等价运算及对应运算等都是一些手段，这些手段皆是为了将类包含或关系的集合渗入到特定的内容中去（例如长度及重量等），这些手段都限于用呈现给主体的相同方式来组织这些特定的内容。可能性的作用只是将应用于给定内容的动作或运算单纯作可能的延长（例如当儿童把若干客体排成系列之后，他就懂得了也可以把其他的客体排成系列，正是利用相同的预期进行系列化运算的格式使儿童才能实施真正的系列运算）。

从内容观点看来，具体思维带有局限性的特征，具体思维还不能直接概括所有的物理性质，相反，具体思维是从一个因素扩展到另一个因素的，有时在从一种因素（例如长度）的组织进展到另一种因素（例如重量）的组织之间往往要经历几年的间隔。这是因为儿童对于那些客体性质不容易从自己的动作中分离出来的物体，更加难于排成序列或进行等量比较，譬如像重量就是如此，而对于比较容易进行客观度量的一些性质（例如长度）进行同样的运算就没那么困难了。因而，从内容观点来看，“与系统的联系共存的潜在转换”决定了现实运算与可能运算之间的边界线，而潜在转换受到的限制比由系统所包含的运算形式所指出的限制更加多得多。这就是为什么表征具体运算特征的可能性形式并未超出经验现实的有限扩展的第二个原因。

除去具体运算平衡范围的这两类限制，还必须指出，尽管在一个给定领域内部平衡是稳定的，但在这个领域的边界上平衡仍将是不稳定的。换句话说，尽管每一个具体组织的领域容易达到稳定的平衡形式，但当领域必须加以协调时则不稳定就重新出现了。普遍的具体结合是不存在的，即当儿童把一组性质进行分类之后或把一组性质依次排成序列之后，或当他在具有两种以上不同性质的几个系列之间发现对应关系之后；儿童的具体思维尚无法解决由于异质运算的干扰或不同性质的相互交叉所引起的全部问

题。因此，从具体运算观点看来，将重物与向上的位移进行比较对于决定某些情况下待求的作"功"大小可能是充分的(物体重些×向上移动得高些—做功更多些)，但是这些因素的排列在另外一些情况下也可能仍然是不确定的和可变动的(物体重些×向上移动得低些—做功更多或更少或相等)。在后面所讲的这种情形下，运用具体思维是无法解决该问题的。

总起来说，具体思维在本质上还仍然停留于同经验现实的直接接触。具体运算系统——前运算思维所达到的最终的平衡——所能处理的仅仅只是一个有限的潜在可能转换的集合。因此，具体思维达到的并不超过"什么是可能的"这一概念，而这个概念只是经验情境的一个简单的(并不是很大的)扩充。具体思维的这个特征在我们的研究中是特别清楚的。在我们的研究中，儿童的具体思维与青少年的形式思维可从每一点上进行比较。青少年是以表述一组假设开始的，然后才在实验中选择与事实相符的那一个假设。但是严格地讲，在具体运算水平时儿童完全不能表述任何假设，他只能从动作开始，虽然他在行动的过程中力图协调他所得到的结果记录的先后顺序，但他所结构化的也仅是他直接作用于其上的现实。可是倘若读者不赞成这些认知组织实际上就是假设的话，那么我们的回答是在任何情况下，这些认知组织要说成是假设也只不过是对于可能动作的提要的计划而已。儿童的这些认知组织并不是如同在青少年情形中那样是由想象所组成的。青少年他们会想象着如果这种或那种假设的条件满足之后，真实的情境将会是怎样的。

3. 最后，在形式思维中，主体(青少年)的研究方法中存在着一种在现实与可能性之间思维方向的可逆性。这时可能性已不再只是作为一种经验情境的扩充或者实际施行作用的扩充之显现，反之，现实现在已从属于可能性了(即现实性对可能性来说已居于第二位了)。因此，青少年把给定的事实看作是一组可能的转换中实际上出现的部分。因为直到青少年采取与给定的情境共存的全部可能假设相适合的证实手段之前，他们既不会解释甚至也不会承认这些事实的。

换句话说，形式思维实质上是假设演绎性质的思维。这个意思就是说，演绎不再直接对于眼前看到的现实进行，而是对于假设的命题进行的，即演绎是对于表达假设的命题进行的，或者是对于假设事实与事件的命题进行的，而不管这些事实或事件实际上是否会出现。因此，演绎过程是由两部分组成的，一是将这些假定联系起来，二是从中引出必要的结论，即使从实验验证的规定看来这些结论的可靠性只是暂时的也行。形式思维最显著的特性就是在现实与可能性之间的方向的可逆性。在具体推理时[1]，从经验资料中推导出来的只是一种不完全的理论，与此相反，形式思维是以理论综合开始的，这种理论综合蕴涵着某些关系是必要的，并且是沿着与具体推理相反的方向进行

① 具体推理的根据是类包含的传递性或关系的传递性。

的。因此，结论是从前提严密地演绎出来的，前提的真伪状况在一开始仅仅是作为假设的，只是到后来才得到了经验证实。这类形式思维进行的方向，从什么是可能的出发进展到什么是经验上真实的。

我们可能会问是否存在着一种比借助假设或可能性的概念更为简单的方法来表征形式思维呢？形式思维最突出的特征就是它不再直接与客体打交道，而是与言语元素发生关系。一开始我们就是试图利用这种人所共知的区别来区分形式思维与具体思维的。事实上，当我们把一种具体运算翻译成简单的命题，同时又不让儿童使用具体物体的操作来得出问题运算的结果，那么在形式运算出现之前，这个问题就会变得无法解答了，而这种情况是常常会发生的。譬如下面就是一个言语问题的例子："爱迪丝皮肤颜色比苏珊娜更白，而爱迪丝皮肤的颜色却比莉里黑，那么，她们三个人谁的皮肤最黑？"乍看起来，为了解决这个问题所需要的因素不外乎就是一种"大于 x"和"小于 x"关系的协调，这种协调也正是在不对称传递关系的任何系列顺序中所出现的。但是从7岁开始，儿童就懂得了怎样将小木棒按照长短成一个系列，他先取出最短的一根，然后他每次把剩下的木棒中最短的一根拿出来放到他已排成系列的木棒边上，因而，对于任何一根木棒 E，他同时协调了两种关系：$E>D$、C、B、A（已经排成系列的木棒）及 $E<F$、G、H 等（剩下的木棒）。于是他同时掌握了"大于 x"及"小于 x"这两种关系。显然将颜色深浅排成具体系列并不比排长短系列更困难些，但是，上述关于肤色的言语性问题儿童在11—12岁之前是无法解决的。

然而，这还不是问题的全部。因为早在7—8岁水平时，倘若儿童对一些简单的命题相应地有足够具体的表象，那么他就可能对简单的命题做出正确的推理，所有这类言语性思维就不是形式思维。尽管肤色问题的内容所要求的并不超出系列运算，然而事实上当儿童在7—8岁时借助具体的物质手段的帮助就能解决这个肤色问题之后，还要经过好几年儿童才能唯一地运用语言或术语来解释这个问题。这个事实向我们表明了其中必定还有某些其他的因素在起作用。如果我们考虑到在肤色问题中所包含的心理想象，那么我们就可看出对于儿童来说，要在他们自己的思想中建立起这些有关肤色深浅的材料情况，那是多么困难的事啊（因为在问题中只给出了有关肤色深浅之间的关系）。其结果是儿童无法将这些材料翻译转换成表象性想象。他必须将这些材料用唯一的假设性术语来表述，也就是假想他预先看出了必然的结果。因而，在什么是可能的结果以及什么是理论上必然的结果二者之间的合取，使系列化运算往往成为一组由系列关系所组成的蕴涵运算，这些蕴涵运算使原来本身内容为准命题性质的运算采取了一种命题之间的运算形式。

当语言的陈述代替了实际的物体时，一种新型的思维命题逻辑就添加到了与具体客体相符合的类逻辑和关系逻辑之上了。由此，我们可看出形式思维的第二个基本性质，不过，命题逻辑比类和关系的简单群集可提供数量更加多得多的运算可能性。所以

从功能观点看来，首先，形式思维与具体思维的区别就在于除了运算结构的问题以外，形式思维还能提供数量更多的运算（关于运算结构的问题我们以后还将专门讨论）。这个结论的证明就是当被试主体在操作我们的实验仪器时以及当他面对一个纯言语性任务时，命题逻辑将立即以它最具特征性的形式表现出来。在前一种情况（即操作实验仪器时）被试主体往往宁可不将他的推理应用于已经明白表述的材料中，而是提出了他自己的问题并寻求他自己解决这些问题的方法。于是我们可以看出形式思维的作用不是简单地将具体运算翻译成字句和命题，本来这些具体运算无须运用形式思维也是能够完成的。而是相反，正是在实验操作的过程中，一种新系列的运算可能性在形式思维的早期阶段出现了。这种新系列的运算包括析取、蕴涵、排斥等。当青少年一旦开始处理事实资料并组织实验时，这种形式运算就立即进行了。这些形式运算添加到了类和关系的简单群集之上。这是因为从青少年一开始接触实际问题的时刻起，形式思维就以假设（也就是可能性）作为出发点的，而不再将自己局限于去直接组织具体见到的材料。因此我们不要被外表现象及流行观点迷惑，命题逻辑的本质特点不在于命题逻辑是一种言语性逻辑。命题逻辑首先和最主要的本质特点在于它是一种所有可能组合的逻辑，而不管这些组合的出现是由于实验问题还是纯言语问题。当然组合远远超出了简单的资料堆砌，组合是以一种内部语言的支持作为先决条件的。然而，命题逻辑的真正力量并不在于具有这种语言支持，而恰恰在于组合运算的威力，正是组合运算使青少年有可能将现实资料提供给一组与这些资料相符的可能性假设以做出形式推理。

我们已经看到，用这种纯粹言语逻辑的标准来定义形式思维是不恰当的。我们可另行寻求并借助于第二个特征来定义形式思维。形式思维是一个二阶运算系统。具体运算可称为一阶运算（或一次幂运算），因为具体运算是直接对客体进行的，例如在已知的各元素（客体）之间结构起关系来，这就是具体运算的情况。但是在各种关系之间再结构起关系来也是可能的，例如在形式思维时关于比例的情况那样（我们的实验表明，比例在形式水平的思维出现之前是无法掌握的）。就这一意义而言，比例的先决条件是二阶运算（或二次幂运算）。对于命题逻辑本身来讲情况也是如此（命题逻辑是二阶运算）。因为命题之间的运算是施行于命题之上的，而这些命题的内容是属于非命题性质的，即这些命题的内容是由类运算及关系运算组成的。显然，二阶运算这个概念也表达着形式思维的普遍特征——形式思维超越了直接施行于经验现实之上的转换系统（即超越了一阶运算）而将一阶运算从属于假设演绎运算（也就是可能性的运算）的系统。

如上所述，情况好像就是如此，我们用以表示形式思维特征的最普遍性质在于形式思维构成一个组合系统，这是从组合系统这个术语的最严格意义上讲的。看起来这个性质比我们以前曾提出的其他特征更为严格，这个性质蕴涵了所有其他的性质，因而这个性质比其他性质更加普遍。所以命题逻辑的主要特性不在于命题逻辑是言语逻辑，而在于命题逻辑要求一个组合系统。其次，组合运算是二阶运算，排列是系列的系列运

算，组合是乘法的乘法运算，等等。组合运算事实上要直到形式思维水平时才会出现。在我们所进行的实验研究中，组合运算无论是以外显的数学运算的形式①，还是以隐蔽的形式都要到形式思维水平时才会出现。

但是，甚至在组合运算与非组合运算之间的这种对立，也可以从可能性与现实之间的差异推导出来。只有一种形式组合系统提供了全部可能性。在实验水平上寻求新的组合恰恰就是假设的特征。所以不管组合性质可能是一个如何普遍的性质，但形式思维的组合性质对于一个更加普遍的性质而言则是第二位的——也就是现实是从属于可能性的。

因此，除去形式思维所蕴涵的结构成果之外，形式思维最根本的性质在于现实与可能性之间方向的可逆性。故我们必须用具体思维同形式思维之间的这种本质差异，作为考虑在思维发展最后阶段（即形式运算阶段）所发现的平衡形式时的一个出发点。

（二）形式思维中的现实与可能性

我们刚才已经讲过具体思维是前运算思维所趋向的一种平衡形式。当具体思维出现后，静态情境和转换就整合成为一个统一的系统，以致静态情境就从属于转换，结果使得转换形成一个运算结构，该运算结构由于转换之间的相互补偿从而获得了可逆性。但是我们也已知道，具体运算的平衡范围仍然是有限的，其原因是它受具体运算的形式以及具体运算内容的限制。由于在具体运算群集之间尚缺乏普遍协调的手段，儿童仍然将什么是可能的视为只是经验现实的一种直接延伸扩展。随着在形式思维中出现了更加复杂的协调手段，一种新形式的平衡也随之出现了。这种新的形式运算平衡包括了具体思维所包含的全部范围，并且将那些局部的范围协调成为一个更加普遍的系统。这个系统的各个联系环节显然就是二阶运算以及组合系统，命题逻辑正是依靠了二阶运算与组合系统，才能在各种可能转换的一个结构集合中使得真实性获得一个位置。然而在我们能够理解这个新的形式运算平衡过程的本质之前，我们必须首先认真研究形式思维中可能性与现实的含义。

1. 形式思维中所含有的可能性绝不是任意的或者相当于不受任何控制与客观性限制的随意想象。完全相反，我们必须从逻辑与物理学的双重角度来分析可能性的出现。出现可能性这是为获得普遍的平衡化形式所必不可少的，同样这对于建立在形式思维中所运用的必要的联系环节来说也是必不可少的。

（1）从物理学观点我们知道，一个平衡状态的特征是由在全部可能的与系统的联系环节共存的状态变更之间的补偿来表征的。甚至在实验物理学中——也就是在一门

① 参见：《儿童概率概念的起源》，Part Ⅲ。

现实物质的科学中——可能性概念在确定平衡状态的条件时也起着一个特别积极的作用。推而广之，心理学感到同样需要考虑平衡状态，结果必然要求助于可能性的概念，这时可能性的概念内容已扩展到“潜在可能的”作用的概念或心理转换的概念（其意义相当于物理学家在谈到潜在加速度或势能时差不多）。但是正如格式塔完形心理学向我们表明的那样，由于平衡概念甚至在知觉理论中也起着相当重要的作用，因而平衡概念在分析智慧运算时必定会更有用。因为运算系统一旦建立，则在一个人的一生中该运算系统便能保持不变并一直发挥作用。

所以我们要明确指出，形式水平的主体（青少年）将眼前直接看到的现实从属于可能性，他这时的论断可直接与平衡状态的理论联系起来。首先，这意味着当青少年面临一个确定的情境时，他不再局限于指望那些直接作用于他的各种关系（存在于已知元素之间的关系），而是当新的事实出现时，他为了避免彼此不相符合而引起矛盾，他从一开始就在寻求将实际出现的关系包括到一组他认为是可能的关系集合中去。换句话说，为了使他前后的论断互相均衡、不发生矛盾（相当于在各种先后出现的事实中避免彼此矛盾），主体倾向于把他最初的假定为真实的联系环节纳入到他认为是可能的联系总体中去。他这样做的办法，可准许他后来依据实际上对可能的联系集合施行的转换进行考察，而从中选择出真实的一种联系。从处于形式水平的主体采取第一个自发态度的时刻起，可能性就已经以这种方式在起着它的作用了，而且从青少年主观的观点看来，可能性恰恰就是他们的思维平衡的真正条件。

但当我们一旦从青少年主观的观点转移到客观观察者的观点时，立即出现下面的情况：当青少年要去想象在一个给定情境中全部可能的联系环节或转换的集合时，他必定要运用适宜的逻辑运算，从而演绎推断出这个可能的集合，不过这个逻辑运算集合，仍然是一个关于物理平衡的潜在可能的转换系统（当然，在一个特定的情境或问题中，这个逻辑运算集合内只有其中一部分是用得到）。在给定情境中只有实际发生作用的那些运算在当时是“真正”的运算，而其余的运算仅仅只是潜在可能的，为什么那些潜在可能的运算或逻辑转换对于有效的平衡来说，如同实际发生的或真正的运算一样必要，这有两个原因：(a)潜在可能的运算保证着可逆性。(b)一旦为了得到可能的新联系环节而需要潜在可能的运算时，它是能够发挥作用的。

归纳起来讲，为了设想什么是可能的，对于任何特定的情境，除了那些在给定时刻已经在实际使用的运算之外，形式思维还必须具有一个范围广阔的运算。这些潜在可能的运算是平衡化的必要条件，原因有两点：(a)潜在可能的运算相当于在平衡理论中称作为“潜在可能的转换”。(b)当这些潜在可能的转换正好彼此互相补偿时，平衡实际上就存在了；或者用运算语言来讲，当这些可能的运算形成一个从逻辑观点认为是严格可逆的系统时，则平衡就出现了。

(2) 在形式思维中可能性在起着一种作用，这还有第二层意思即逻辑意义。在这

个新的逻辑观点上，我们可再一次看到可能性的作用对于假设演绎思维或形式思维是必不可少的，在逻辑上讲，形式可能性是与演绎必然性概念有关的。形式可能性真伪的状况是根据它与实际事实资料相符或不相符而定的，但是在逻辑上，一个演绎结论是从一个假设推导出来的（或者说是从一个假设性假定的实际事实资料中推导出来的），所以这个演绎结论从形式观点来看必定是正确的，而形式观点却与假定的假设的真伪价值无关。于是由连接词“如果……那么”（蕴涵推理）揭示的连接关系，遂把我们所需要的一个逻辑结论同一个其真伪价值尚只是某种可能性的论断联系起来了。这种演绎必然性与可能性的综合表征着在形式思维中运用可能性时的特征，这个特征（演绎必然性与形式可能性的结合）是与具体思维中的可能性只作为真实情境的一种扩展截然不同的，它与想象的杜撰虚构中毫无条理的可能性也是根本不同的。但是，形式可能性的本质是什么呢？任何不引起矛盾的事情都可被认为是可能的，可是严格地讲，不矛盾是指用下述方式施行的可逆转换的总体，即某一个运算及其反演运算的结合，产生一种称作“同一”或零的结果：$p \cdot \bar{p} = 0$。因此，从物理学观点看来，运算可逆性是指各种潜在可能的转换（或运算）是互相精确地补偿的，而从逻辑观点看来，运算可逆性是与演绎必然性有关的。

从物理学与逻辑观点引起的可能性概念的这两个方面的含义，在心理学上归根结底是彼此等价的。当形式思维将一个实际的条件提供到一组可能的转换中去时，形式思维由于保证它自身的结构在心理学意义上保持不变，从而保证着它自身的平衡。同时形式思维也确保着它自身作为一种必要的逻辑手段的价值，因为形式思维是将这些结构作为演绎手段来使用的。心理平衡化由普遍的运算结构所决定的，这样说来，可能性的概念具有两方面的作用——作为一种平衡因素和作为一种逻辑因素。究竟这两方面中哪一个发生作用，则取决于观察者是从解释的立场来提问题，还是从理解的立场提出问题。解释的立场是实验心理学家中大部分人所采取的观点，而理解的立场则首先是青少年自身的观点。这就是为什么作为形式思维出现的标志，即在现实与可能性之间的可逆性，已经成为智慧发展中的转折点了，起码，对于智慧可设想为是朝向既稳定又变动的平衡状态的一种组织能力，情况就是如此。

2. 但是我们必须再前进一步，因为心理平衡不能完全归结为物理平衡，在平衡状态的物理解释与心理解释之间进行比较，这对于了解它们的区别以及它们的共同点是很有教益的。

在物理学中，倘若一个系统（如一个杠杆）的全部势能（如在杠杆一端或另一端重物的升高，也就是表现为杠杆角度的位移）彼此完全补偿时，我们则说该系统（如杠杆）处于平衡。另一方面，从可能性立场看来，杠杆如果在特定方向上发生了变化，那么由此产生的结果是出现了一个相反的力来恢复原来的平衡状态。可是，倘若实际上并没有发生这些变化，那么在平衡理论中定义为对可能性起干扰作用的“势能”，严格讲来只是

存在于物理学家的头脑中。我们完全有可能指出势能将在现实中发生作用，不过这是一个本质上消极的作用。势能可用来说明这样的事实，就是假如系统没有受到外界影响系统毫无变化的话，则实际上一点变化也没有发生。因而，在一个物理平衡状态中，我们必须将"现实"与一组"可能性"的集合区别开来。真实性是具有因果关系的、在现实中暂时存在的事实，而可能性则是根据演绎推断的、在现实中将有可能存在。但目前只是存在于正在建构关于现实的理论的物理学家头脑中。

从心理学上讲，一个系统处于平衡有两个方面：一是关于现实的，一是关于可能性的。譬如说，一个青少年成功地解释了杠杆平衡机制时，他所理解的全部系统就是一个平衡系统。一方面他实际施行了若干心理运算并组织了一些关系，这些关系可实际应用于他在给定时刻眼前所见到的真实物体上。例如，由于他有效地领悟与想象，他断言说杠杆是水平的位置，并说一个离轴心 10cm 的 2kg 物体与另一端离轴心 20cm 的 1kg 物体相互平衡。不过，这些运算和关系都是真实的，真实的含义在于这些运算和关系都是用于某一特定时刻。这些运算和关系对于在理解的行动中所获得的平衡而言却是不充分的，因为在理解时将会出现全部可能的或潜在的运算及关系的集合。然而，可能性与现实之间的分界线，在心理学中比在物理学中更加难于划定。但正是物理与心理这两种平衡形式之间的差别对于研究形式思维是最有教益的。我们现在将更加仔细地来分析这种差别。

首先，我们必须仔细地区分在此处可能性这个词语的两种含义。一种含义是，当一个人在谈到可能的运算与可能的关系时，它是指他自己认为可能的运算及关系——也就是他知道他能实施或结构起来的那些运算及关系，即使实际上并不一定要求他把这些运算及关系实施或结构出来。我们将把这种含义叫作工具可能性。读者会立即看出这种工具可能性是与我们过去所描述的从主体观点出发的可能性是完全相同的。不过可能性还有另一个含义，即指主体并不意识到要去实施而实际上他能实施或结构起来的运算及关系——也就是主体并不意识到偶然性，甚至他尚未意识到他自己具有这种运算的能力。我们把这个含义称作结构可能性，因而，结构可能性是由客观观察者定义的，而不是从主体立场来定义的。

让我们现在回到刚才所讲的"工具可能性"的例子，被试(青少年)为了弄清杠杆一端离轴心 10cm 的 2kg 物体与另一端离轴心 20cm 的 1kg 物体之间的相互补偿(即实现平衡)，他虽然没有实际施行物理操作，他可以假定他把 2kg 重物再向外移动 5cm(即离轴心变为 15cm)，同样他可以假定把 1kg 重物再向外移动 10cm(即离轴心 30cm)。当他这样做时，他并没有超过潜在可能的动作这个范围(实际上他只是在思考而并没有去移动任何物体)。这时他得出演绎推论说，这两种假设的位移仍将保持原来的平衡状态，因为重量与距离之间的反比关系是保持不变的。当他返回到现实(即操作实验仪器时)，他证实了他的论断是正确的。当青少年用演绎推理得出某些结论时，他可以用实

验仪器证实这些论断。在这两种情况中(即演绎推理和实验论证),如果他打算理解这些经验材料的话(如杠杆处于水平位置,一端 2kg 重物离轴心 1 cm,另一端 1kg 重物离轴心 20cm),那么他可能进行的实验动作将会帮助他并且对于他来说是必不可少的。从而,他把这种真实的关系解释为是一组潜在可能的动作的一种函数功能,并且把这种真实情况解释为乃是各种可能的运算或动作的必然结果,而那些可能的运算和关系本身之间又是互相联结成为一个系统的。

但是我们马上就能看出,从心理学观点来讲,这些"工具可能的"运算或关系也是真正的运算或关系,如同那些本来就是"真正的"运算或关系一样——仅仅只是从主体自身的观点看来,这些运算或关系是作为"可能性"出现的,换句话说主体将实际表现出来的运算同那些可能进入感知系统的转换区别开来了。不过,即使主体的表现纯粹是根据潜在可能的动作,对于那些可能的转换他也曾一再反复思索,因而在心理学上认为,这些可能的转换是存在于表象之中,或是存在于真正的运算之中。故而"工具可能的"运算或关系只是主体真正的思维的一种特殊的程序,在形式思维水平上,这个"工具可能的"程序具有特殊的重要性,作为一种结果,这种关于"现实"的程序可以看作是从属于可能性的程序的。尽管这有助于扩充运算平衡的稳定性范围,以致有效实现的转换进一步发展的条件是由主体设想为可能的转换所决定的。在心理学水平上,"工具可能的"运算的范围与物理学平衡理论中潜在可能的转换不能完全相比,更精确地说,"工具可能的"运算并不对应于物理领域中的任何转换,因为"工具可能的"运算是介于纯现实(与主直接出现的关系)与纯可能(结构可能的)之间,而在物理学中在直接现实与潜在可能之间是没有任何中间物介入的。

在"结构可能性"情况中,情形就完全不同了——因为在心理平衡水平上,"结构可能性"是与一个物理平衡系统的"潜在转换"完全等价的,伴随着主体实际施行的运算一起(无论这些运算是作为动作或作为有效的知觉或只是作为简单的"工具可能的"假设),主体还能实施其他的运算,尽管这些运算他在动作中或思想中都还没有出现过。这时主体没有去想象杠杆上 2kg 物体移动 2cm 或 1kg 物体移动 1 cm,他已能变更物体本身的重量(在动作上或心理上),或者他可能在一端缩短距离并在另一端以相同比例减轻物体重量。甚至还可能发生这种情况,即主体在所有动作中呈现出他好像已经会应用比例的运算格式了,虽然他不是直截了当地对这种比例关系加以说明的。对于这位青少年来说,这个杠杆问题可能成为直接组织一种新的表达成形式化关系的出发点;而同样这个问题对于另一个青少年来说,由于他缺少一个基础的结构,因而不能引起他任何一种有意识的反应。因此,类似这样的许多观察研究的结果提供了一个论证——当然这只是在观察研究的事实发现之后才认识到的——某一种决定性的运算对于一个主体来说是"结构可能的"运算,但它对另一个主体而言就可能还没有成为"结构可能的"运算。简言之,在任何智慧动作中,我们总是必须同时考虑真正的运算以及"结构可能

的"运算两个方面。真正的运算是指在主体有意识的思维中实际用到的运算，而结构可能的运算是指主体能够实施但并未实施的那些运算。正如我们以上所了解的，结构可能性是与主体所具有的运算结构有关的，正是这种结构可能性构成了从观察者观点出发所讲的可能性，并且结构可能性是与物理学领域中并未真实施行的潜在可能的转换相对应的。

但是，如果我们准备构造一种在运算平衡中所包含的心理机制的理论，那么我们必须分别考虑可能性概念中这两种不同的含义。尽管在这种情况下，我们将面临三种分析水平（真实的、工具可能的以及结构可能的），而不是像在物理学情况中只有两种分析水平（真实的与潜在可能的）。确实，工具可能性是与结构可能性密切相关的，正是结构可能性构成第一个实施阶段——也就是只要主体掌握了数量足够多的结构可能的运算，他就能想象出工具可能的转换。如果没有一定的结构可能性的集合（作为缺乏这种结构可能性的结果，已在前运算水平甚至在具体运算水平中已经清楚证实了），他最多只能弄清楚他在现实中所领悟到的事实状态，这种状态可以是静态的或是转换过程，他无法把为了设计新实验的、假设的转换表象出来。因此，工具可能性依赖于结构可能性，而工具可能性比结构可能性更加贫乏。由于这个原因，即使在任何情况下，工具可能性是从结构可能性导出来的，但必须仔细地区分这两种可能性，因为结构可能性在理论上和实践上都是更加重要的。

我们可重新回头，用这些术语在平衡的物理概念与心理概念之间进行比较。从物理学观点看来，只有现实是具有因果性质的，因为潜在的可能性只是在物理学家的头脑中才起着积极的作用。换句话说，可能性只是一种计算工具或演绎手段，而唯有真实的外界现实是因果性的。但是，在运算平衡的情况中情形就完全不同了，因为在运算平衡领域中，现实与可能性二者都具有心理学的性质——也就是这二者在被试主体的心理中都有它们的地位，这二者只是在引起主体精神生活的机制中具有因果关系地互相交叉着。我们还可以指出下述情况是正确的，只有现实和工具可能性（在这种情况下，工具可能性仍然是心理现实的一部分）在主体的心理中起作用，而结构可能性是一个同主体本人无关的概念，而这个概念仅同企图分析阐明主体行为的心理学家才有关系。在这种情形中，在物理学观点与心理学观点之间可能存在着完全平行的关系，然而当范围扩大到"工具可能性"是以结构可能性为条件时——本书中所描述的全部研究都导致这个结论——我们必须拒绝考虑那种不把结构可能性归因于被试主体本人所有的看法。

但是接着，我们将又得出自相矛盾的结论，在一个心理平衡态中，可能性（结构可能性与工具可能性二者）起着与真实运算相同的重要的因果作用，甚至还可指出整个精神生活都被这一类可能性的因果性所支配了。

这个论断对于"工具可能性"来说并未包含任何特别使人惊讶的内容，而且这个论断是同普遍公认的"假设"在思维的功能中起着作用这一事实相对应的。工具可能性的

因果功能实际上是种假设行为，这种假设行为允许主体当他在承认眼前情境的有效性(效度)时，超越他所直接领悟或理解的事物，并且这种假设行为允许主体本人处于某种对其真实性未经直接验证的决策也能理解的情境之中。在从感知运动性质的尝试错误行为迁移到最复杂的实验假设的同时，对当前直接存在的现实的适应也随着对未来可能的现实的进一步递进的适应而变得更加完善起来。于是可能性进入了适应过程，可能性出现在对于行动必不可少的适应领域中，并且是以可能的未来的形式出现的。因为当内化的动作成为一个运算时，在每一个交叉点上各种可能性之间发生了干涉，也就是在每一个主体必须做出抉择的情形中，当他想象在两种或数种可能的动作进程中每种作用将导向什么结果时，各种可能性之间发生了干涉，主体本人必须做出选择。最后，在形式水平时，从主体接触现实的瞬间开始，各种假设之间就在互相干扰了，主体的这种干扰一直要发生到能把直接面临的事实设想为容许给予好几种解释时为止。

但是，"工具可能的"这种因果性并没有任何神秘之处，因为依靠思维本身去思考一种可能的事件，就是(让我们重复)去实施一种或数种真实的运算。

另一方面，与结构可能性有关的潜在因果性提出了一个完全不同的然而却是更加重要的问题——主体尚未掌握某些运算，或至少对这些运算尚未处于有意识的水平上，这些运算有时仍停留于潜在的可能的运算以致达到这样一种程度：它们从来没有以任何公开形式属于主体已经获得的知识的范围之中。那么，这些运算怎样才会在因果性上影响实际施行的运算呢？

让我们首先注意到，这样一个问题决不限于逻辑运算心理学，甚至并不限于普通心理学。例如，在胚胎学理论中，我们注意到了部分的或整个的"潜在力量"。这种潜在力量的表现是与确定的发展水平相联系的，并且这些潜在力量中只有其中一部分是在实际上实现的，因而我们对于那些认为这种有限的实现与全部潜在力量的系统无关的观念是难于接受的；事实上，只是从整个潜在力量的系统中取出了一段可能性使之变成为现实。在心理学中，如果我们接受了下列观点，即认为心理功能的发展是与神经系统的成熟有联系的——这个假设是刚才描述过的胚胎学观点的简单扩充，那么可以很自然地得出推论，即虽然从一开始心理协调功能仅仅只引起某种特殊的应用，但这种协调是以潜在可能的普遍形式出现的。虽然一开始只实现了一种应用，但这些应用全都依赖于各种可能协调的系统，这个系统是作为先天可能性出现的，并在成熟上不同程度地或多或少落后了。

我们没有把自己局限于这样的假设之中。我们可以指出，比较起大家用那些正在研究中的心理过程甚至普通生物学来思考的方式而言，可能性的因果性更加经常地凭借着一种隐晦的方式。可是，当考虑到我们现在的问题时，某些同步性现象的经常出现提供着可能性的因果作用的佐证。如果没有把一种或更多种整合结构作为可能运算的来源或源泉而在某一给定时刻组织起来的话，那么对于这些同步性现象似乎就变得莫

明其妙难以解释了。只有当其中一部分整合结构开始实现了，才能够说明这种同步性现象。但是这些整合结构的实现是整个运动系统的一种功能，因此也就是真实的运算的一种功能，同时也就是潜在可能的运算的一种功能。

从具体运算水平开始，我们就已经观察到下面这一令人惊讶的事实。尽管儿童在两个客观上相类似的问题中并没有看出任何关系，也没有意识到他们正在对这两个相似的问题应用相同的运算，但平均说来，对于在一个给定水平上的两个问题，主体是以相同的方式同步地做出反应的。例如，将处于ⅡB阶段的儿童对杠杆问题的反应（参阅本书第十一章），与他们对斜面上车辆升高的问题的反应（参阅本书第十二章）作一比较的话，那么很清楚，在杠杆问题中，9—10岁的儿童开始在重量同距离之间建立起了一种反比对应关系，在在斜面问题中开始理解到斜面愈倾斜则斜面上的车辆就愈重。不过在斜面问题中他们引进了功的概念，而在杠杆问题中他们还没有引入功的概念。而且在这两种情形中，把重量与距离联系起来的运算同把重量与高度联系起来的运算，其性质是相同的。在这两种情形中，儿童已理解到由物体重量所引起的作用力是作为空间关系的一个函数而变化着的。同样，在其他许多各式各样的问题中，重量跟体积的关系也具有相似的性质，但这时儿童还未必能公开表达出此种相似性。与此相类似的许多实例可以在具体水平中找到。

在形式运算水平上，对于类似问题做出相同反应的同步性表现得更加强烈地明显，因为形式运算与前面的具体运算水平截然不同，形式运算水平中的运算形式已经完全摆脱了具体的思维内容。在形式运算中，我们发现除了形式推理的几种可能性——即运用蕴涵、排斥、析取等——还发现了比例概念，尤其是在形式运算水平时，在范围极其广阔的问题中还出现了思考问题的组合方式[1]。由此看来，仿佛可能运算的系统是一种内部网络，一旦给定的思维内容进入了这个网络，这些思维内容就会沿着此种内部网络立即在各个方向上同时散布开来。因而可能性的因果作用表现为蕴涵格式对外显运算的一种作用，外显运算不仅由实际上仅比新运算先出现一步的认知动作决定的，而且是由可能运算构成的整个运算领域决定的。

肯定地说，再没有什么比求助于潜在可能性更危险的了。当我们做出这种假设时确实是冒着一定风险的，但是我们有一些办法可防止滥用概念（如从潜在可能性到行动的过渡）以及保证概念的合理应用。真实的潜在可能性与谬误的区别在于可能性是可以计算的，它只是对整个系统保持守恒性这个要求所做的反应（如同物理学中的势能那样）。但是，在工具可能的运算情况中，我们面临着一种合理的潜在可能性，因为存在着一些代数手段，这些代数手段能使我们揭露普遍结构的作用，并使我们能计算出这些结构的扩展范围以及这些结构的组成元素。

[1] 在学校里尚未教学此内容，比例格式也出现在学校教学之前的许多情况中。

与此同时，我们必须将自己的结论限于如下：在一个物理平衡状态中，唯有实际存在的现实才是具有因果性的，而可能性仅同正在对真实性进行演绎分析的物理学家的思想有关。与此相反，在一个心理平衡状态中，心理动作的递演顺序不仅受到实际施行的运算的影响，而且受到全部可能运算的集合的影响，这些可能运算使主体（儿童）的探索研究朝向演绎推理的封闭性。因为在这种情况下，正是主体本人在进行演绎推理，而且可能运算构成着演绎系统的一部分，正如可能运算构成主体所实施的真实运算的部分一样。①

（三）结构问题

尽管在物理过程与心理过程二者之间具有差异，然而在这两种过程中，当一个系统所有潜在可能的转换（这些转换是与该系统的联系和谐共存的）彼此互相补偿时，则该系统就处于平衡状态，这一点对于两种过程俱是正确的。将平衡这个物理定义用到心理领域可相应地作如下考虑：物理过程中事实或现实的状态相应于心理过程中主体可能实施的外显的运算，而物理过程中潜在可能的转换相应于心理过程中主体可能实施的运算。这些运算主体有能力实施或者他今后能够实施，但是他尚未实施或在此刻他还尚未施行。系统的运算则应用于所提问题的资料——也就是相应于问题的内容，主体的运算就是施加这些内容之上的——我们的问题是要找出达到平衡的位置，在该位置上对于这样一个心理系统而言可以说已达到平衡。

首先，只要问题还没有解决，就尚未达到平衡。也就是说，只要仍然有必要对这些问题的内容实施外显的运算，就还没有达到平衡。但是，在此我们必须区分两种情况：(1)主体已经把握解决该问题所需的一切方法以及一切运算；(2)主体还没有把握这些方法与运算。当然，第二种情况根本不可能谈及平衡，因为在所提的问题解决之前，主体还必须不同程度地做出巨大努力。在第一种情况下，如果仍然处于不平衡，那么这也仅仅只是暂时的和局部的，也就是对于若干个别的新问题来说，主体一时还没有直接看出它们的解答。对于第一种情况中其余绝大多数情形来说——即主体运用全部方法和运算的集合去解决这类问题——可以认为平衡已经达到了，甚至在稳定平衡的意义上说来也已经达到了平衡，因为这时主体已经有能力解决所有与此相类似的问题。

因而，正如物理平衡，这种类型平衡的特征是以全部潜在可能的转换的补偿来表示的。这等于说：一旦给出某些数据（资料），主体就能使这些数据（资料）服从相当数量的运算转换。从这些运算转换中他便选择一些运算转换以回答所提的问题。这些转换都是对应于同一结构的（即主体所适用的运算整合结构），而且这个结构是可逆的。于是

---

① 从应用心理学的观点来说，这等于说：被试的评估应该不仅仅基于他实际做到的，还应评估他在其他情景中可能做到的，即他的潜能或资质。

就达到了平衡,因为对于主体可能实施的每一个转换(作为所考虑的运算结构的一种功能)皆存在着一个也有可能实施的相对应的可能的反演转换。或者用更简单的方式来说,当主体所能实施的各种运算组成了一个结构使得这些运算能以两个方向中任一方向来实施的话(无论是用严格的反演或否定还是用互反运算),则该系统必处于平衡。因此,系统处于平衡是因为全部可能运算的集合构成了一个潜在可能转换彼此互相补偿的系统(这些转换互相补偿也是遵从可逆性法则的)。运算可逆性及系统平衡终究构成一种独特的统一的性能,正因为各种可能的运算都是可逆的且灵活多变的(也就是能以各种方式组合,而且为了回到初始出发点具有完全的自由),所以在选择将要实施的新运算时,可逆性是以连接方式在起作用的。

倘若运算平衡的性质果真是如此,那么解决形式思维的问题就是要去寻求对结构整合所做的一种分析,结构整合表示着与具体运算根本不同的形式运算的特征。一方面,正如我们刚才试图描绘的,平衡的功能蕴涵着整合结构的存在,因为只有这个整合结构才能解释潜在可能运算的存在和扩充,以及这些可能的运算对实际上已经实施的运算的影响。另一方面,如我们已经看到的,形式思维的特征是现实与可能性之间方向的可逆。现实是从属于可能性的,而可能性则获得了某种直到此时方知的重要性。但是在这里,如果我们准备确定在具体水平与形式水平时真实运算与可能运算之间的比例以及确定在形式水平时可能运算无法明确的扩充范围的话,那么我们必须将包含于具体运算与形式运算中的运算结构整合加以比较,我们将在下一章进行这种比较。

我们选择数理逻辑工具用来进行这种结构整合的分析,关于为何如此选择的问题在此先要作些进一步的说明。倘若问题只是要求确定包含在心理努力中的各种"因素",或者简单地只要确定在各种结果之间的相关性,那就似乎十分明显。对于心理学家说来,应当运用因素分析或概率计算的数学方法,因为这些数学方法不会使结果发生偏差。但是,我们必须问自己是否还有其他的方法,其精确性在计算技术上如同上述方法一般(并且如同各种分析手段一样具有客观性),而且这个方法又能解决运算的结构整合的问题。

答案是肯定的,这个方法是存在的。近几十年来数学家力求分离出整合结构,这些整合结构是在各种各样领域内发现的,然而这些整合结构的结构法则却与具体应用到任何特殊领域毫无关系。布尔巴基学派综合了在这个范围中已经取得的成果,并增加了他们在修订数学原理时所做的独特贡献,在他们的杰出研究中得出结论认为存在着三类基本结构(又称母结构),其多种不同组合能够解释所有其他的结构:(1)代数结构,它的原型是"群";(2)序列结构,它的主要形式之一是"格";(3)拓扑结构,这种结构与连接性有关。

暂且不管拓扑结构，因为拓扑结构与这里讨论的问题无关。[1] 我们发现群结构与格结构对于数学运算及逻辑运算二者都是共同的。换句话说，由数学家制造出来的这种普遍的分析手段对于定性研究在思维中存在的结构是很有价值的，这种价值如同在其他结构研究中一样。我们很容易就能在符号逻辑的命题计算中识别出格结构。我们在其他地方也曾经指出过四元转换群（四元群或克莱因群）[2]出现时的多重形式。

我们在此运用符号逻辑是作为一种算法或一种代数，而不是作为逻辑（因为逻辑在心理学中的地位并不比心理学在逻辑中的地位更好些）。从这种角度来考虑的话，符号逻辑作为一种分析工具是迫切需要的，这至少有两点理由。

首先，就确定可能运算的精确的扩充范围而言，这样一种符号逻辑的分析工具通常是唯一可能的工具。例如我们知道，对于一个命题可组织4种可能的运算，对于两个命题可组织16种可能的运算，对于三个命题可组织256种可能的运算，而对于四个命题可组织65 536种可能的运算。甚至我们不难一个一个地列举出，全部256种三元命题运算——这是一个颇为有趣的练习。其次，有可能证明在这些数目的运算中实际上不是彼此都独立的，因而我们有可能将256种三元运算归结为二元运算或一元、二元运算的结对形式或三联形式。

但对于当前问题最为重要的是，运用符号逻辑作为一种分析手段就可能表明，这些运算集合不是由并列元素简单的系列所组成的。相反，这些元素的集合具有整体的结构。这些整体结构就是形式命题运算的整合结构（相当于具体运算时类和关系的具体群集）。为了解答本书所提出的各种心理学问题，对这些形式命题运算的整合结构进行分析将会很有裨益。在这方面，符号逻辑能提供一种分析，这种分析比算术演算或统计演算更能深入到智慧的核心。算术演算或统计演算，或者是建立在运算结果之上，或者是建立在并不直接提供任何意义的各种因素之上的。而符号逻辑所特有的定性分析则能达到结构本身——即达于运算机制本身，而不只是简单地得到运算的结果，或者得出运算结构不同程度的一般条件。

当然，如此运用结构分析意味着将继续不断地对实验结果与理论分析互相进行对照比较。从实验观点看来，智慧首先是动作的协调，然后才是运算的协调。正是这种协调使儿童能一步一步地朝向一定形式的平衡。这些平衡形式在解释儿童智慧发展时具有极端重要的意义。我们可从两个角度来分析平衡的形式，即从发生发展或实验的角度和从理论角度来分析平衡的形式。在发生发展的逻辑中，经验性研究是运用适应于各个进化水平的测验来确定：在主体的认知动作中，包含着哪些运算，这些运算是怎样逐渐组织为结构的，并逐渐达到某种经验证实的平衡形式的层次。另一方面，理论分析则描述同样这些结构的普遍方面或抽象方面，从而表明最复杂的结构可以从最简单的

① 但是拓扑结构确实与我们所说的非逻辑运算有对应关系（参见第十七章，注释2）。
② 参见皮亚杰：《论逻辑运算的转换》。

结构推导出来，并且表明正是结构决定了可能运算的系统，而这个系统又允许使用这种或那种实际施行的运算。

我们从一开始就已经很清楚，这两类研究（发生发展或实验研究、理论研究）可以互相强化并推进我们对于认知平衡过程的理解。我们在将儿童与青少年思维的结果加以不断地比较对照时，力图理解在儿童与青少年的思维中从具体水平到形式水平是怎样过渡的，我们发现在寻求形式思维在语言优势中以及在二阶运算中的标准，那是徒劳无功的。

而且，对结构重新进行理论分析的这种过程绝不是构成逻辑研究，这一点是很清楚的。这个问题完全是一个心理学问题。符号逻辑的演算也是作为一种分析手段而列入的，只是符号逻辑是一种比基于数运算的初等代数更为普遍的代数。如果我们把正处于发展过程中的那些科学与已经达到方法上完全成熟的那些科学加以比较时，那么实验心理学可看作在心理水平上对应于研究物质的实验物理学，而纯符号逻辑（或公理逻辑）则对应于数学。对于利用符号演算建立起一门关于心理运算理论的学科来说，这门学科（逻辑心理学）与实验心理学的关系就可比喻为当前实验物理学与理论物理学之间的关系。逻辑心理学这门学科仍然是心理学的一个分支，正如理论物理学不是数学的分支而是物理学的分支一样。逻辑心理学应用符号逻辑、代数作为一种分析工具，正如现代理论物理学运用数学技术与数学概念一样

康清镳译　曹宁宁修订

第十七章　具体结构与形式结构

在上一章中，我们对具体平衡和形式平衡进行了区分，因为形式结构包含潜在或可能运算的总体渐变趋势。在本章中，我们将继续比较分别适应这两种平衡状态的整体结构。

（一）具体思维群集

正如我们刚刚所看到的（第十六章），任一种平衡状态都能被可逆性这种特征形式所识别。因此，在那些情景中，通过思维过程所达到的平衡具有一种运算的本质属性（像在阶段Ⅱ和阶段Ⅲ），这种可逆性充当着结构整合至关重要的原理，而结构整合则是由每种特定的形式的平衡所组成的。

可逆性被定义为返回到问题操作起点的稳定可能性。从结构角度来看，它能出现在独立和互补的两种形式中的任何一种。首先，可以通过取消已经执行的操作来回到起点——也就是通过反演或否定。在这个情况中，直接运算及其反演运算的结果是零运算或相同运算。其次，可以通过补偿差异来回到起点（在术语的逻辑含义中）——即通过互反性。在这个情况中，这两个相互运算的结果不是一个零运算，而是一个等价运算。

不论是对最简单的运算还是对高度组织的运算，反演和相互作用都是平衡的必要条件。因此，通过形式不断变化，它们贯穿整个发展阶段。即使是在知觉水平（虽然这个水平尚不具备完整的可逆性），当有元素被加入或者拿走时，我们可以发现反演在起作用，在对称性和相似性中我们发现互反性。但是由于在当前的任务中，我们没有直接关注反演和互反的前运算形式，我们应只研究具体运算和形式运算中出现的各种形式。

但是，当我们比较具体思维和形式思维的结构整合时，立即发现了它们中重要的不同点。形式结构把反演和互反整合在一个单一的转换系统（INRC 群）中，具体结构或者类和关系的“群”来自于反演（类）或者互反（关系）中的任意一种，但是没有综合可逆性的这两种形式的一般综合形式。[1]

---

[1] 当然，存在许多类和关系的系统确实能够合这两个，但是这些系统都是基于“结构化的整体”而不是基于简单的群。而且，由于它们与命题系统同形，它们不会在形式水平之前出现。

为了简化对各自结构的描述，我们要提醒读者，在一般意义上具体逻辑运算是执行在对象上的这些动作：指向于把它们按各种顺序进行集中分类或者在它们之间建立关系。也能从具体的类和关系运算中区分出亚逻辑运算：它们的功能是将物体的不同部分整合到一个时空整体——也就是，一个稳定的客体——并且将这些部分放置或移置在连续的配置中。① 然而，从当前工作的角度来看，亚逻辑运算可以被简化为类包含或者关系的逻辑运算。

然而，支配具体运算的类和关系的整合结构，仅限于通过类的包含关系或从一个元素到另一个的连续关系使类或关系能够集合。由于它们只包含连续的类包含而不能组织"结构化的整体"所必不可少的组合系统，这仅仅使得一个单一系统中的反演和互反的综合成为可能，它们发展不会超过不完全群或半格。

从这个意义上说，具体类结构仅分为简单（加法）或者多重（基于乘法的表格或矩阵）分类。由于具体水平的被试没有形成组合系统来提供所有分类的子集，这些子集在特定的系统里有得以形式化的潜质。对于他来说，每一个类都完全依赖于在特定时刻给予被试的元素（B 包括 A，C 包括 B，等等），且迅速反排出它的补集而得以形式化（$A'=B-A$，$B'=C-B$，等等）。这些结构仅仅是基于通过反演的可逆性。他们允许被试把两个连续的类加起来组成一个单一的（$A+A'=B$）或者从通过加法组成的整体中减去一个类（$A=B-A'$）；他也能把两个类相乘（$A_1\times A_2=A_1A_2$）或者从用这种方法组成的整体中除去一个（$A_1A_2\div A_2=A_1$）；但是互反的一般形式不能出现在这些系统里面。

在对称关系情境或是差异序列排序的不对称传递关系的情境中（有序系列或序列连接），关系的具体结构与完全等价（等式）或者部分等价（转换）是协调一致的。此外，它们使得被试能够处理乘法系统（对应，等等）。因此，关系具体系统的可逆性特征包括了互反性。例如，一个对称关系比如 $A=B$ 与其互反 $B=A$ 是相同的。对于不对称关系，如果 $A<B$ 是真的，它互反 $B<A$ 则是假的；但如果它们都是真的（$A\lessgtr B$），它们能简化成 $A=B$，即等价。一个不对称关系比如 $A<B$ 表达的是术语 A 和术语 B 之间一个不同的存在；如果这个不同被取消或者以对立方向的形式 $B>A$ 被表达，那么等价 $A=B$ 或 $A=A$ 再次出现，而不是术语自身被取消。因此可知，这样的系统不能通过反演（否定）来处理可逆性，因为反演与所包含的关系术语有关，即与类有关，而不是仅与关系自身有关。

总而言之，基本的"群集"构成唯一的可在具体运算水平达成的整合结构，它能从两点区别于形式结构：

1. 群集是简单或多样的类包含或连接形成的系统，但是它们不包括一个连接各种特定因素 n-n 的组合系统。结果是它们没有达到一个完全发展的格结构的水平，这样

① 而且，我们可以根据拓扑结构来描述这些运算（见第十六章）。

的格结构意味着所谓的组合系统("结构化的整体");反而,它们停留在半格阶段。

2. 可逆性的原理由反演(对于类)或互反(对于关系)两者中的一个组成,但是这两者未整合为一个单一系统。因此,它们与反演和互反的群结构不一致(下面将会更加充分地探讨 INRC 群),并且停留在不完全群的状态。

为了阐明这一点,让我们回到乘法群集或者多元列表(矩阵),最复杂的群集在具体思维阶段开始启用。在弹性形变问题(第三章)中,我们看到阶段Ⅱ的被试如何为分类相乘构建表格。为了简化,在这里必须把自己限制于黄铜棒(A_1)和非黄铜棒(A_1')的分类,且足够有弹性的棒(A_2)或没有足够弹性的棒(A_2')到达所需水平。我们看到阶段Ⅱ的被试能够很简单地构建以下四种乘法类:

$$A_1A_2+A_1A_2'+A_1'A_2+A_1'A_2'$$

现在让我们假设一下,事实上就是这样,所有四种实际上都有可能发生。被试不能独自从他的表格中推断出黄铜棒更倾向于有弹性的或者相反。当意识到此后,他将如何着手努力去解决这个问题呢?

在具体思维水平(阶段Ⅱ),被试仅仅会继续分类或者按顺序排列整理经验数据,因为他不知道如何建立除了乘法关系和对应之外的其他对应关系。例如,他可能确定类 $A_1A_2A_3$(A_3 代表圆形截面棒)和 $A_1A_2'A_3'$ 的出现,自此他将推断出有弹性的黄铜棒(A_1A_2')不会弯曲,因为它们没有一个圆形截面杆(A_3')等等。用这种方法,他可能通过连续的联合(类之间)和对应关系(关系之间)来分离一定数量的因素(第三章),但是他将永远不能全面计算或确凿地证明他发现的那些因素的作用,因为他缺少系统的方法,尤其是一次改变一个因素时保持其他因素不变的步骤。

然后,这个系统方式的结构基础是什么呢?如果我们转变示例考查相同实验环境下的阶段Ⅲ的被试行为,简单的乘法联合与 n-n 组合间的不同清晰可见。当形式水平的被试遇到这四种最初的类 $A_1A_2+A_1A_2'+A_1'A_2+A_1'A_2'$,并且当他发现必须寻找 A_1 和 A_1' 以外的因素来解释 A_2 或者 A_2' 的结果时,他将立即自问在这四种类的结构框架中可能有多少种组合。因此,他将形式化如下类型的假设:

1. 如果没有干扰因素,实际上只有情况 $A_1A_2+A_1'A_2+A_1'A_2'$ 发生(如果 A_1 不会和排除 A_2 的情况同时出现,A_1A_2' 就不会发生)。一旦建立起这三种关联,就会导致被试假设因素 A_1,一旦被抽离出来,通常会产生结果 A_2,但它并不是唯一能产生这个结果的因素(蕴涵)。

2. 但是,也可能出现这种唯一的情况 $A_1A_2'+A_1'A_2+A_1'A_2'$(A_1A_2 是 A_1 存在时产生 A_2 的因素介入的结果)。这三种关联的发生意味着 A_1 和 A_2 之间存在不相容性关系。

总之,阶段Ⅲ的方法主要是用 n-n 的方式使用一整套可能性的组合,把四个种类 $A_1A_2+A_1A_2'+A_1'A_2+A_1'A_2'$ 分类,而不仅仅是通过连续的联合来简单地累加分类。存在 16 种可能的组合,列举如下:

(1) 0	(9) $A_1A_2'+A_1'A_2$
(2) A_1A_2	(10) $A_1A_2'+A_1'A_2'$
(3) A_1A_2'	(11) $A_1'A_2+A_1'A_2'$
(4) $A_1'A_2$	(12) $A_1A_2+A_1A_2'+A_1'A_2$
(5) $A_1'A_2'$	(13) $A_1A_2+A_1A_2'+A_1'A_2'$
(6) $A_1A_2+A_1A_2'$	(14) $A_1A_2+A_1'A_2+A_1'A_2'$
(7) $A_1A_2+A_1'A_2$	(15) $A_1A_2'+A_1'A_2+A_1'A_2'$
(8) $A_1A_2+A_1'A_2'$	(16) $A_1A_2+A_1A_2'+A_1'A_2+A_1'A_2'$

显然，对被试而言，用如此完整的形式构建这样的表格是无用的。当他遇到四种情况 $A_1A_2+A_1A_2'+A_1'A_2+A_1'A_2'$，换言之，这种观点就是 A_1 和 A_2 之间的潜在联系被视为乘法(青少年的实验行为证明了他实际上是以这种方式在进行)。事实上，青少年的推理以预期为基础，从他第一次注意到变量之间的联系以及出现的结果时，这种预期即存在许多可能的联系；他假定一旦消除其他的因素，仅有特定的联合将会保持正确。也就是说，真实关系的最初选择一定暗示着一种组合系统。因此(正如我们重复强调的)，无论它表面看起来多么简单，运用这一建立在"其他因素均相同"格式上的证明方式对于组合结构的出现本身就是一个可依据的标志。因为除非被试设法从所有可能性中挑选发生的组合，否则他不会觉得有需要去超出经验已形成的关联来分离变量。不如说，他将被局限于积累新的关联上。另一方面，如果他去分离实际出现的联合，那么他不得不至少将一些可能的组合概念化，因此，他必须使用组合系统。

总之，在"结构化的整体"的组织中，具体群集结构缺少内在的组合系统。换一种说法，命题运算(蕴涵等)在具体水平不被使用，因为这些命题间的运算是基于相同的组合结构。所以，类和关系(分类、序列排序和乘法对应)的基本群集和组合结构之间的第一个不同之处是前者仅仅是个半格，而组合结构是一个完全格。而且，包含在完整结构中的每个运算都有一个反演和一个互反。因此，具体群集和形式运算系统间的第二点基本的不同之处在于，前者不具备任何单一的群连接反演和互反；这个群一开始起作用，就可以说结构化的整体就存在了。

然而，指出具体运算和形式运算之间的不同或者仅仅把它们整合在"结构化的整体"的发展中是不够的。我们必须继续调查从具体命题运算到形式命题运算的转变实际上是如何产生的。换言之，我们必须找出是什么使得 11—12 岁的儿童组织"结构化的整体"的。

(二) 从类与关系的具体运算到命题间运算的转变

鉴于这是一个基于方法论的实验，我们选取了阶段 Ⅱ 和阶段 Ⅲ 某些被试所做的一系列假设，并试图将之全部简化为逻辑公式：我们的目的在于找出哪些情况下被试会通

过类与关系的设置来思考，以及在哪些情况下他们运用到了命题运算，这一尝试很具有指导意义。我们引用任何一种特定单一的假设时，很难区别这两种运算。只有当我们将被试的整个思考过程或一系列完全系统化的推论置于一个语境中，这个问题才在心理学上具有重大意义。例如，假设命题是"杆弯曲了因为它是钢铁做的"。我们就能说它包含一个类运算，且在这种情况下，该类运算建立在蕴涵和属于关系的传递性上，即"这根杆是钢铁"以及"所有的金属杆都易弯曲"吗？亦或者，它是否真的暗含："如果一根杆是金属，那么它就易弯曲？"第一种假设先考虑到了$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$一种合取命题。同样的，若一个命题中包含"或者"，那么这一命题使得一个简单的部分析取转变为分类或命题的析取$(p \vee q)$？等等。

但是，寻找专门的口头或书面标准，往往是白费力气。比如，把所有包含"如果"的句子理解为蕴涵关系，而把不含"如果"的句子理解为包含关系或对应关系，诸如此类。然而，只有某些表达才是决定性的标志。当一个被试说，"如果是（某某因素）起了作用，那么你会发现（这样或那样的不易观察到的结果）"，其中的假设—演绎以及所包含的析取运算本质非常肯定。但是大多数情况下，表述还不是非常清楚，被试无法透彻解释他推论中的细节部分。另外，被试们的对细节的描述存在差异，有时甚至同一被试不同时刻表述也不一样。总之，被试只能粗略地表达他们的想法。

第二种更适合的办法是对比所有的描述，尤其是单个被试的表现。那么我们就能清楚地知道他是否受到简单记录的原实验结果的束缚，从而他认为类别、序列以及对应足以解决问题，或者他是否试图分离这些变量。后者既包含假设演绎推理也包含组合系统，当这两者出现时，我们不得不将他的表述理解为命题表述，因为不论这一系列表达之间的联系明显还是不明显，它们都存在于命题间运算中。

但是第三种且最可靠的区分方法（其实是第二种方法的简单具体化）就是分析被试所列举的证据。如果他们没有超出实验对应的现象，他们完全可以依据具体运算来做出解释，而我们假设的更复杂的思维机制毫无根据。从另一方面来看，如果被试将已给出的对应关系解释为任何一种可能组合的结果，并且因此通过观察结果来验证他自己的假设，那么可想而知，这里存在命题运算。

然而，运用这种方法的话，我们只是想当然吗？让我们再回顾一遍所用的方法。首先，我们设定具体运算独立于任何组合系统，而形式运算则恰恰相反，它依赖组合系统。现在，我们承认仅仅依靠语言描述，难以确定到底独立的是具体运算还是形式运算。为了达到这一目标，我们必须考察被试的一连串思维活动；经过考察，我们可以知道什么时候存在组合系统、什么时候不存在组合系统，但是这样一来形式运算和具体运算之间的区别就受到预先设想的解释的影响。读者可能会争辩说，这样我们就能自由理解被试，将被试的任何描述要么理解为命题语言（即使是早期阶段的描述）要么理解为类和关系语言（直至最后阶段的描述）。毫无疑问，在形式层面用类语言表述命题运算很容易。但是前提条件是引入一个"结构化的整体"，即一个组合系统，区别于仅在7—8岁

到11—12岁阶段所观察到的基本群集。相反，这些组（分类等）本身存在运算可以用命题语言描述。但是如果描述成命题语言，我们对于命题间运算的分析将不全面，我们是在用一种复杂的语言去描述现象，而这一现象不会超越被试大脑中更为简洁的结构。这将是一个心理学错误，类似于用一种适用于所有"真实"数字的普遍数学结构去解释最初的"自然"数（儿童会自我建构）。

如果我们要揽下描述被试大脑实际运转结构的任务，我们就不得不依据组合系统区别具体运算（类与关系的"基本群集"）和形式运算（命题运算的"格"和"群"）时提供的标准。但是，他们之间的转换并非完全间断的，肯定存在许多中间步骤，这一点显而易见。现在我们必须对这两种截然不同的运算之间的一连串步骤做一番描述。

另外，无论是转换阶段所呈现的发展连续性，还是上面提到的要明确具体思维和形式思维的界限所面临的挑战，都至关重要。他们在某种程度上可以证明一些复杂的思维形式并非从一开始就有了，而是由早期的思维形式演变而来。如果有人想说，推理的先验形式可以解释形式结构的演变，那么他就不得不做出证明，证明这种先验形式为什么出现得这么晚。当然，他可以总是引用晚熟神经结构的作用，这一结构可能是组合运算演变的必要条件。但是神经学的解释本身是站不住脚，因为转换阶段的发生表明，新的运算是由早期运算演变而来。鉴于这一事实，除了内部条件的成熟以外，必定是一个连续运算的平衡因素起了作用，且问题在于要研究清楚平衡趋势或其结果如何使被试构建了一个形式组合系统。

当然，将这种演变过程部分归因于实践和后天获得的经验，这一点也非常重要。但是，同样也没必要过分强调它们所起的作用，因为如果经验在学习过程中占决定因素，那么经验数据的准确记录以及将其转换成命题逻辑的过程应该出现在最初阶段（我们称之为"逻辑经验主义"）。倘若真是这样，那么我们将无法理解为什么这么长的阶段内数据如此匮乏，或者为什么命题逻辑出现得这么晚。然而，倘若运算被看作是一系列组合，一个接一个，越来越复杂，从最简单演变到不可逆，那么就可以清楚地解释为什么基于组合系统的最终平衡形成于后期。被试需要有能力将目标与方法分开考虑，而后他才可能逆向地运用自己的行为。第一种可逆调整是基本群集，仍与实体操作十分接近。接着，由于他并没有立即开始完整地将形式从内容中分离，那么他必须用各种各样接踵而来的经验因素对这些不同的组合进行重构。只有这些包含不同内容的经验被不同程度的重建后，一般化的形式机制才开始通过将不同因素协调为一个整体的过程而得以出现。

因此，从具体逻辑到形式逻辑的转换发生在以下情况：被试在不同阶段（或者同一阶段但未觉察内在联系）构建了大量不同类型的因素（线长、表面、重量、速率、时间等）后，发现在大多数情况下，变量互相关联。换句话说，就是独立构建的因素可能有交叉。例如，一种结果可能是多种因素同时作用形成的，或者某个因果因素可能被其他非因果因素掩盖，这些非因果因素伴随因果因素出现。然而，具体运算从一维到下一维，迟早

会出现多因素共同作用的情况，各种变量交错在一起。① 对于这样的复杂情况，必须构建新的运算方法。

当这种情况发生时，被试会二选一，这取决于他是否致力于协调这些具体运算的结果，即解决这一复杂环境下由于各种因素交错而出现的明显的矛盾，或者他是否打算调整其中具体的群运算。这两种方法都会使得被试最终发现形式命题逻辑。他们需要：①分离出原始实验数据，也就是只由具体运算构建的变量，以此来调整具体运算的结果，把它们视作各种可能的组合形式；②将各种类和关系群集调整到一个单独的系统里。不论表面上多么不相关，这些步骤仍然可以被简化到一个统一的机制中，因为它们都是建立在组合系统基础上的。因此真正的问题是研究清楚这个系统的起源。

1．我们的观察显示，在具体运算阶段，被试试图建构尽可能完整的实际情况，但是他止步于以其初始的形式去接近现实，即没有分离变量。当被试进行分类、排序，并建立形式化对应等时，他直接记录实际情况，并没有以一种批判的态度来审视经验世界，也没有采用系统方法论的角度。这是由于在 7—12 岁儿童具体运算的实际发展过程中，这些具体运算的作用是逐个因素地去建构现实；不同维度间可能存在长达几年的时间滞后（7—8 岁建构长度因素，9—10 岁建构重量因素，等等）。

当一个问题涉及多个独立建构的因素（不同质的变量），且它们彼此干扰时，被试总会碰到一些不一致甚至互相矛盾的结果。他可能确信事件 x 几乎总是和事件 y 相关联（因此大多数铜棒都极易弯曲），但是他发现有些情况下，$x \cdot y$ 甚至 $x \cdot y$ 会出现，也就是说，有例外情况出现。也可能会出现相反的情况：被试可能观察到一般情况下，两个变量（$x \cdot y$ 和 $x \cdot y$）没有对应关系，但是又发现在一些情况下，$x \cdot y$ 和 $x \cdot y$ 出现。简言之，在具体运算阶段他对具体事物的分析越精确（例如不同变量间单一的对应），那么他越有可能发现部分规律的交叉，也会发现他完全没把握解释的例外情况。当然，起初被试可能会忽视部分规律和例外情况，但是当他开始认真看待实验要求时，他发现当自己试图用具体术语描述原始数据时，完全进入到死胡同了。

因此，被试迟早会换一种态度对待实验结果。我们观察发现，一些被试在具体阶段以粗略的方式出现过新的态度，但是还没到一般化的程度，一直到形式阶段才形成。这种新态度表现在他们将变量分离出来，我们现在需要从儿童到青少年思维转变的形式化过程中去理解这个过程。下面就有一些问题了：①这种新态度源于何种形式？②它以何种形式概念化，为什么如此之晚？③最后，它是如何与组合系统结构联系在一起，又为什么一定要与之联系在一起？

A．即使在具体运算阶段，仍然存在某些变量处于分离状态，值得仔细研究一番。当被试想知道某个因素是否影响某个结果时，即便阶段 Ⅱ 的被试也能进行一些论证：

① 事实上，如果因果关系完全独立，那么这些变量的交错就变成一种随机分布，但是从某种程度上看，并不是随机分布的，而是呈现一定的相互依赖性。

些被试倾向于观察，一些被试倾向于实验。为了解释第一种类型，我们会举例一些操作，使被试排除了某个因素，将之归为偶然事件。例如，在磁铁实验（第六章）中，当其中一位被试看到指针停在某一特定颜色处时，起初他可能倾向于将颜色归为一种因素。但是，观察到指针所停的位置呈现随机分布后，他否定了自己的设想。

谈到这种情况时，我们必须清楚分离变量和排除变量的区别。分离变量可以通过简单观察实验现象实现，因为观察结果可以呈现出待考察的颜色因素何时存在，何时又不存在。在某些情况下，被试可能继续进行实验，通过实验结果中因素的存在与否将变量分离，从被动分离转为开始主动分离实验变量，以此控制所考察的因素是否存在。例如，在单摆实验（第四章）中，被试为了证明推力是一个影响因素这个假设，在一些情况下给单摆施加一些推力，在其他情况下不加推力。

然而，这两种情况（观察和实验）都不能完全分离变量；在具体阶段分离变量时，这种分离有待商榷，也就是说被试注意到某个因素在某些实验结果中存在，在某些结果（观察）中不存在；或者被试在某些实验中提到了这一因素，在其他实验中又排除了这一因素。这样一来，就出现了反向或否定转换，但是没有与反运算，比如第二点，但并非两种形式都是可逆的。在这些实验中，这种方法的局限性显而易见，单个因素不能完全消除（例如物体的重量，杆的长度等）。处于具体阶段的被试不能抵消它，但是阶段Ⅲ的被试能够做到这一点（思维上），因而能够估算它的影响。

第二点，阶段Ⅱ的早期分离不同于变量完全分离，在包含两个以上的变量时非常明显，例如 x，y 等。处于具体阶段的被试只能够提出或消除变量 x，以此来辨别 x 是否产生了影响，而不是将其作为研究变量 y 的方法。举个例子，在单摆实验中，只有当他想知道推力是否是因果变量时，他才会施加或不施加推力。他这样做并不是为了研究绳长的影响。另一方面，形式阶段的被试可能消除变量 x，不仅仅是为了控制它的干扰，还为了他们能在不受 x 影响的情况下分析变量 y。而且，这第二点不同可以解释第一点，因此它在这两点中更重要。

B. 在形式阶段初期发现如下两点：①因素可以通过抵消和排除进行分离；②消除某一因素，并不仅是为了分析该因素的影响，更重要的是为了分析其他相关因素的变量。一旦有了这些发现，分离可以适用于所有的情况，正如阶段Ⅲ一样（以及子阶段ⅢB）。可以想一下，譬如，一根长铜棒比一根短钢铁棒更易弯曲。如果金属材质变量没有与长度变量分离，那么被试就不清楚第一根比第二根更易弯曲是因为材质是铜还是长度更长。如果具体阶段的被试弄清楚了所有问题，他们则是通过增加对应关系实现的，并且坚持认为有时金属材质是决定因素，有时长度是决定因素。但是，鉴于任何实心杆都是金属制作且具有一定长度，这些被试并没有在分析一种因素时分离另一种因素，而且根本没想过这种思路。另一方面，处于形式阶段的被试清楚（子阶段ⅢA和ⅢB）为了确定金属材质的影响，长度必须分离（反之亦然），而与此同时另一种因素通过增加或移除的方式进行改变。而且，他们知道未做分析的变量在任务中用等量的方

式平衡抵消了，或者直接被移除了，当实际上不可能移除时就采用抵消的方法。因此，他们会保持长度不变从而来分析金属材质的影响，反之亦然。

鉴于这两点发现，发生学层面的关键问题就是：他们具体阶段有限的能力是如何提升的？

具体方法层次的解决路径会越来越复杂，那么毫无疑问，这些新态度的起源必须在它相反的方向去探寻。阶段II中的被试遇到困难时并没有停滞不前，而是继续探索。但是他们仅仅增加了对应关系，重新尝试找关联，希望在现有大量数据的基础上产生有价值的结果。迟早他们都必须重新回顾每一步，因为如果构建的关系太复杂，一些没被分析的变量后面可能会以干扰作用再现。在这个节点上，阶段III所独有的行为创新就会出现。这种创新性包括将变量x搁置一边，从而在不受x干扰的情况下来研究y，反之亦然。因此，排除一个因素以改变其他因素，就是来自于构建对应关系时的反向思考方向，它包含一种抽象或分离变量的角度而不是增加或连接经验对应关系。当被试面临无法处理的复杂情况时，粗略经验情境中出现许多矛盾之处时，它就出现了。

鉴于这种复杂性，某种变量可以通过反演或否定给予消除，但是并非所有都是这样。因此阶段III的第二个创新是，在不能否定这些因素的情况下，归纳排除干扰因素的方法。在这种情况下，就不再是其中一种（属性或事件）被忽略了，而是属性中的不同点被忽略了。换句话说就是，通过将变量简单平衡，这一变量就被抵消了。那么这就不是取反了，而是互换了。以此阶段的一个任务为例，如果被试想要确定金属材质（变量a）对两根杆子韧性的影响，那么他就会保持长度（变量b）不变。两根杆子的长度差异排除，就出现了等价，就如同动力任务中直接消除一个因素的否定。

结果是形式阶段发现的变量分离通过互反达到可逆，同时又通过反演达到互反。因此，它同时运用了可逆性的两种形式，使得两种形式功能等价。这一发现对于阶段III结构整合的重要性显而易见。

C. 我们仍然不清楚为什么这两种新态度一定要建构一个组合系统。但是当被试能够分离变量的那一刻起，他就会发现自己面临了很多新的可能性。例如，在探讨易弯曲性时，他将长度从金属材质中分离出来，之后他必须抵消厚度、横截面等变量，并且一旦采取这种方法，马上就会面临这样的结果，他必须不停地问自己是否遗漏了某个变量。在这种情况下他如何确定自己确实安全地做到了呢？自然想到的第一种办法就是找出变量之间所有可能的联系，运用2乘2、3乘3等方法进行对比。但是，这种思维形式并没有超出具体阶段中的简单乘法运算模式（双元列表或三元列表等）。尽管在进一步推理之前必须建构这些联系或乘法对应关系，可是我们已经证明他们不足以解决我们提出的问题。只有在构建了这些基础关系后，被试才能从所有可能的组合中找出那些关键组合。此时，可以肯定是组合系统使它得以出现。我们可以想到，在实验中同时出现的每一种变量都发挥着各自的作用，而关键组合就是指在某一时期研究的变量，而其他因素（例如第二章中的易弯曲性）为恒量。但是有时也可能需要两种或三种变量同

的作用,以产生后面观察到的结果(比如第六章中有色液体)。又或者两种变量所产生的结果互相排斥,或者一种变量产生的结果与另一种变量恰好相反(如第七章中的漂白剂)等。我们发现分离变量可能指向这些不同可能性中的任何一种,而这些可能性可以通过蕴涵、等价、析取、合取、排斥、不相容等运算实现形式化,视具体情况而定。当这些可能性按照我们的预期出现在被试的脑中,当他通过先前的学习掌握了足够多的可能组合,显然这些组合能够通过反馈效果引导被试进行变量分离。然而,假如被试并不知道这些可能组合,而是在具体运算的后期仍试图寻找分离变量的方法,那么实验中分离变量本身就把被试引向组合系统,因为关键组合会根据不同的情况发生变化,而且在每一种情况下,要找出关键组合(这种发现本身是变量分离的结果)首要先在可能的组合中进行选择。例如,现有因素 x 和 y,只改变 x 而保持 y 不变(那么就是 $x \cdot y + \bar{x} \cdot y$)就是从四种可能的关系($x \cdot y + x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$)中选择了一种关键组合($x \cdot y + \bar{x} \cdot y$)的过程。

总之,变量分离必然导致被试从他们自己的 $n \cdot n$ 关系中结合出基本的组合,替代了简单的乘法和对应运算,在此基础上形成以"结构化的整体"为特征的组合系统。

II. 尽管我们已经知道了为什么分离变量(它是协调整合愈发复杂的具体操作的必然结果,这些具体操作是关系和对应的形式化过程)必须要在组合系统中完成,我们仍需要进一步阐述这一组合系统是如何构建的、如何形成了形式思维。我们可以通过分析具体的运算是怎样(方式而非结果)被整合的来回答上述问题。正是这种整合使得组合系统与形式逻辑紧密相连,最终产生了形式思维。

当对实验相关因素进行分类、排序、等价代换、建立对应关系后,要解决问题仍有必要将这一阶段的运算整合到一个单一系统中。因此,当具体运算内部没有足够的一致性时,整合就从协调具体运算结果的需要中应运而生。

然而,被试并没有掌握哪一种运算,可以帮助他将类和关系的各种群集直接整合到单一系统中,除非他跳出简单的加法乘法类包含关系。换句话说,他必须将它们整合到一个"结构化的整体"里,即一个组合系统中,这种组合系统的架构存在于被试的思维中,这也正是我们试图阐释清楚的地方。对比之下,我们发现不论对类还是关系(但不是同时对于两者),存在一个意义比其他群集更一般化的群,它包含了其他群,或者说其他群可以通过一连串具体运算从这个群中衍生。最具一般意义的具体群是由双元列表(或三元列表等)组成的乘法群(类和关系)。对于两个事件或特性 x、y,这种整合数据的方法包括构建基本关系 $x \cdot y + x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$。然而,就像刚才变量分离和组合系统的讨论中所呈现的,只要他需要去确定哪些组合是正确的,如何选择子集。他是如何面对这种情况的呢?我们发现利用简单的类运算就能从所有的可能组合 $x \cdot y + x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$ 中选择或确定出真正有联系的子集,这一点意义重大。然而,在这一阶段它们用于组合自身($x \cdot y$ 等),并推及到所有可能的情况。被试将 $x \cdot y$ 和 $\bar{x} \cdot y$ 组合在一起,或将 $x \cdot \bar{y}$ 和 $\bar{x} \cdot \bar{y}$ 组合在一起等等,就好像他将共同特征的事物集合在

一起，但是事实上问题在于对组合进行分群，即组合两种属性同时出现（或一种出现，另一种不出现诸如此类）的情况或者组合两种事件同时发生（一个发生，另一个不发生等）。① 换句话说，被试通过一种新的分类步骤建构了“结构化的整体”，其中乘法系统 $x \cdot y+x \cdot y+x \cdot y+x \cdot y$ 是基础；用这种方式，他把最简单的群集（类）运用到最普遍的情况（逻辑乘法表）中，最后形成了一种二级群集，二级群集将所有群集整合到更高级的有序系统中，因为他不能直接整合这些群集。此外，二级群集的形式化过程采用从普遍化分类②到乘法组合的方式，无异于 n-n 式的组合系统。这个事实对于形式思维的发展有如下意义：

（1）首先，一般化分类的组合 $x \cdot y$ 等最终演变成一种新型组合——直到这一阶段，被试运用的类基本上都建立在简单的类包含运算上（例如，麻雀<鸟<动物<生物），等同于最基础的群集：$A+A'=B$，$B+B'=C$ 等，或者等同于根据两种可能的标准（日内瓦人+另一个瑞士人=韦尔多派）制定的分类，即 $A_1+A_1'=A_2+A_2'$ 等（替换）。然而，当充分考虑所有不同的可能组合，处于乘法群集中组合关系的子集还是必须通过类包含进行整合时，组合形式将截然不同；并且在替换的一般化作用下，朝着 n-n 的组合形式发展。为了更好地理解这一发展趋势，我们把从 x 和 y 衍生的四种基本关系用 1 至 4 表示：

$$1=x \cdot y, \quad 2=x \cdot \bar{y}, \quad 3=\bar{x} \cdot y, \quad 4=\bar{x} \cdot \bar{y}$$

不同可能的包含形成了十六种分类（试比较 1045 页的表）：

(0)；

(1)，(2)，(3)，(4)；

(1+2)，(1+3)，(1+4)，(2+3)，(2+4)，(3+4)；

(1+2+3)，(1+2+4)，(1+3+4)，(2+3+4)；

(1+2+3+4)。

因此，被试或者通过建构经验条件，或者通过从可能的组合中推理，在脑海中逐步建立起这些分类的结构——从本质上来说，完全不同于具体群集结构。在具体运算群集中，已知的基本类（A）包含在更高级的类中，尽管它可能被暂时排除，但它始终是这些高级类的一部分（B、C 等）（例如，鸟类属于脊椎动物类，脊椎动物除了鸟类还有鱼类、两栖类等）。另一方面，就组合 1 至 4 而言，每种一元的基本组合 1（$x \cdot y$）或者 2（$x \cdot y$）等，在七个更高级的类中重复出现（例如，1 出现在 1+2，1+3，1+4，1+2+3，

① 例如，在弹性问题中（已在本章小节1里提到），被试需要把有圆截面的黄铜条分类，这些黄铜条达到了一个给定的弹性程度（xyz），同样形状的钢条没有达到相同的弹性程度（$\bar{x}y\bar{z}$）；由此，形成类 $xyz+\bar{x}y\bar{z}$，等等。

② 这种一般化分类正是我们所说的替换——它本身构建了一个截然不同的类“群”。译者注：由于专业术语“替换”专用于皮亚杰的著作，那么我们就继续采用这个词。它的定义和示例见《逻辑特征》，第 113—117 页。

1+2+4、1+3+4和1+2+3+4中)；每个二元组合(1+2等)出现在二种更高级的类中；每个三元组合出现在同一个四元组合1+2+3+4中。换句话说，从这种组合运算中衍生的新系统再也不是一种简单的类(甚至谈不上是同一阶段的类换算)；它是一种一般化分类或者一整套与已知基本组合兼容的所有可能的组合。但是，这其实与格结构一样建立在n-n组合的"结构化的整体"之上，与基础群集结构完全不同。

(2) 其结果是，否定已知组合(例如合取运算$x \cdot y$，组合1)再也不需要在一系列补集中从一个元素到另一个元素一一构建，况且这些补集都从属于上一级最大的类，正如具体群集中的情况。在具体群集中A代表麻雀集合，B代表鸟类集合，被试选择的A的补集并不是它的完全否定$\bar{A}$，即除了麻雀的所有事物，而是A'代表除了麻雀以外的所有鸟类；在具体群集中C代表动物集合，B'代表除了鸟类以外的所有动物，等等)。在某些时候，一个组合的否定集合是其他元素的合取结果，即它在整体中的补集；因此有了合取$x \cdot y$(组合1就是$x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y}$即2+3+4的否定)，即不相容($x \mid y$)。

(3) 其结果是，建立在这种方式上的系统既包含反演运算(上文所讲的否定)也包含互反运算($x \supset y$和$y \supset x$等)；那么反演和互反运算就整合到四种变换的群中了。自然，被试不是通过抽象形式来意识到群，但是就像我们目前看到的，他的思维里产生了很多反响。

(4) 一般来讲，组合结构不是直接处理事物(即事物的类或它们之间的关系)而是处理愈加复杂的集合及其变形。例如，被试最后想弄清楚x和y两个事件是否互斥($x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y$)，或尽管它们同时出现，但是它们只是简单的析取关系($x \cdot y \vee x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y$)。当被试提出这个问题时，他的推理不仅在直接处理真实的情况，而且还将真实的情况作为可能组合。此时，加法(+)不再是将真实的情况相加，而是将可能的组合相加，因为真实的情况不可能一直同时发生。这就是为什么命题逻辑的基本运算用$\vee$表示"或者"；因此$x \vee y$表示"$x \cdot y$是真命题，或者$x \cdot \bar{y}$是真命题，或者$\bar{x} \cdot y$是真命题，或者这三者中两个是真命题，或者三个都是真命题"。这个公式表明，$x \vee y$这个表达式是七种可能性的总和。当然，这也正是可能组合的整合对于被试的意义。

(5) 最后，同理，组合结构也是这样处理命题运算的。即使处于具体阶段(而且是前运算思维)，推理显然也建立在命题运算的基础上，不管所描述的物体是否直观存在。但是，具体运算包括解构和重构命题内容的过程，即将类和关系作为命题的组成部分。因此，在具体阶段，一个命题还是与另一个命题联系在一起，并非由于它本身是一个命题，而仅是考虑到它的逻辑内容，与真实事件对应的类和关系结构组成了它的逻辑内容。另一方面，只要该命题表达了简单的可能性，且其组合是由合并或分离这些可能性构成的，那么该结构处理的不再是事件，而是组合的真实值。其结果是类和关系逻辑转变成命题逻辑。后面我们还会回到这一点上。

总之，只要思维将具体群集整合到一个单一系统(属于第二级)中，它就转变为形式思维了，因为它处理的是可能的组合，而不再直接处理事物。不论多么犹豫，不论阶段

Ⅲ初期第一次尝试形式运算时是多么不完整，但是我们仍能发现一种朝着新平衡形式发展的趋势，这种新平衡形式的显著特征是有一个新型结构整体，既来自于格，也来自于反演和互反的群。尽管没有立即实现平衡，但是在子阶段ⅢB会达到平衡，因为必要的补偿系统迟早会出现这些过程。否则，运算就不能被整合，就像具体阶段早期运算思维的发展历程一样，甚至像前运算阶段的直观规律所展示的一样。

（三）十六种二元运算系统

既然对从具体到形式或命题运算的转变进行了一般描述，那么我们就必须弄清楚处于子阶段ⅢA和ⅢB中的被试是否真的能够运用命题逻辑的十六种二元运算，对它们进行区分并将一起讨论其推理过程。

1和2．全称肯定($p^{\circ}q$)和全称否定(o)①

很容易解释运算 $p\ q$ 及其否定。首先，四种基础运算($p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$)中任何一个表达了是否发生的判断，它仅仅是对被试已通过命题 p 和 q 的具体二元列表所理解的四种组合的表达。在弹性实验中(第二章)，当被试将杆分为铜杆、非铜杆以及圆形截面、非圆形截面时，他发现所有四种可能的组合都发生了。其结果是，即使在具体运算阶段他也能做出如下总结：在已知的组合中，这两个事件部分合取，部分析取。但是，直到该运算与其他可能的组合矛盾时，它才有了命题意义。当被试努力去发现事件 x 是否伴随着事件 y，或其是否是事件 x 的结果时，他将会从四种组合的发生中得出这两个事件相互独立且相容的结论(如果变量尚未被分离，那么要得出这两点论断，被试的能力还需要其他的证明)。例如，在单摆问题(第四章)中，如果 p 代表重量增加，q 代表加速度增加，那么就有可能得出 $p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$(如果是 $p \cdot q$ 和 $p \cdot q$，代表这两种情况中单摆长度同时增加了；如果是 $p \cdot q$，那么只有重量改变了)。观察到这些实验组合(未分离其他变量)将充分证明重量是非决定因素。但是，为了做出更准确地排除结论，被试必须借助其他运算。

3和4．合取运算($p \cdot q$)和不相容运算($p|q$)②

合取运算 $p \cdot q$ 拥有以下两种意义中的任一种：当组合 $p \cdot q$ 和其他组合联系时的广义意义，以及当组合 $p \cdot q$ 是唯一真命题(通过排除 $p \cdot q$ 等)时的特殊意义。

首先，合取命题 $p \cdot q$ 是具体阶段唯一知晓的乘法运算中的命题表达式，是为了使在该情况下 A 和 A 这两个集合互相关联：$A \cdot A = AA$；或者如果 $A + A' = B$，那么组合 $A \times B$ 得到 AB，与 A 等同(例：有脊椎的鸟类构成和鸟类相同的集合)。但是，在具体阶段，乘法类 AB 只包含于 B 中(如果 C 包含 B，那么 AB 也包含于 C)，$A\ B$ 只包

---

① 这两种运算对应第1045页表格中的组合(16)和(1)。

② 这两种运算对应第1045页表格中的组合(2)和(15)。

含于$B\ B$中；诸如此类。另一方面，合取命题$p \cdot q$可以和七种组合中的其他形式（$p \overline{\supset} q$，$p \vee q$，$p \ q$，$q \subset p$，$p \ q$，等等）整合在一起，而它们互不包含。因此，当形式阶段的被试面对合取组合$p \cdot q$时，他们在确定了整体中的其他组合（$p \cdot q$等）后才会对它下结论。他们的这种反应在子阶段ⅢA表现得不明显，在子阶段ⅢB中才系统化。特别是阶段Ⅲ的被试们，他们极力克制过快下结论的冲动：从发生的$p \cdot q$或简单的蕴涵运算$p \supset q$中得出等价运算$p \overline{\supset} q$的结论。比较子阶段ⅢA和子阶段ⅢB中的被试就会发现差别很大：在子阶段ⅢA，被试不会想到去论证$p \cdot q$是否伴随着$p \cdot q$和$p \cdot q$，他们会立即下结论。

另一方面，从更狭义的层面上来说，合取命题$p \cdot q$表示单一的$p \cdot q$关系是真命题，其他一个是假命题。从实验方法的角度来看，如果被试假设$p \cdot q$拥有特殊意义，那么他就不得不验证其他一种可能的组合。但是一旦建构，合取命题$p \cdot q$在定义（静态）上要求两个事件必须同时发生，或者两种因素必须同时作用以达到某种已知的结果。在颜色实验中（第七章），子阶段ⅢA和ⅢB中的被试试图通过该命题找到一种三元合取命题（硫酸、双氧水和碘化钾必须同时作用，才能产生黄色）。然而，有趣的是，这一发现是以运用组合系统为前提的：每一种变量都需要与其他所有变量一起实验，两个两个做实验、一个一个做实验，以及四个一起做实验。只有当被试通过计算从错误的组合中剔除某些变量，他才可能发现合取命题$p \cdot q \cdot r$（p，q，r代表三种因素相互干扰）以及$(p \cdot q \cdot r) \supset x$的规律（$x$代表颜色）。毫无疑问，在这种情况下组合系统先处理实物，再处理命题，但是我们发现这两个系统是同构的，被试将其物理的组合系统转换为命题组合系统。

合取命题$p \cdot q$的反演是不相容运算（$p \mid q = p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$），这意味着$p$和$q$包含的特征不再是合取关系，也就是说，一个发生，另一个或两者都不发生。因此，在颜色实验中被试有如下发现：一种液体漂白了上文提到的混合液体（表示为$p \cdot q \cdot r$）。如果x代表有颜色，x代表没颜色，t代表添加第四种液体，t代表不添加第四种液体，被试发现：只有组合$x \cdot t \vee x \cdot t \vee x \cdot t$通过了验证。但是他需要形式运算来发现这一点吗？另一方面，在子阶段ⅢB（9—11岁）的初始阶段，被试发现：当液体有色时，硫代硫酸钠能够漂白液体；当液体无色时，它对液体没有影响。另外，如果给年龄较小的被试一套几何图形，有黑色方块、白色圆圈和三角形以及其他颜色形状各异的图形，他们立即就知道这个群集可以分成（不是白色的方块图形）+（不是方块的白色图形）+（既不是白色也不是方块的图形）；这里包含同构分类的乘法组合的分布，同构的分类包含了不相容性。但是正如我们在本章开头所说，在被试的个套实验过程及口头表述被验证之前，我们无法判断他的推理是否能衍生出命题逻辑。子阶段ⅡB中的被试只是偶然发现硫代硫酸钠对混合液体的漂白作用，而没有经过系统组合。较小的被试根据形状和颜色分类，且只有当他在乘法表（该表由2乘2组合构成，不是$n \times n$组合）里发现遗漏，他才会注意到没有白色方块。因此，我们不会想提出不相容命题$p \mid q$，除非他们能

够把这一组合与系统中的其他十五种组合对立起来，或者与这些组合的基本组合($p \cdot q$，$p \vee q$，$p \supset q$ 等)对立，因为这样做可能会导致"绝对谬论"。然而，阶段Ⅲ中的被试在着色剂问题的实验尝试上运用了整套组合系统，也运用恰当的语言陈述了实验结果，他们能够将他们的组合与其他十五种组合对立起来。

5 和 6. 析取运算($p \vee q$)与合取否定运算($\bar{p} \cdot \bar{q}$)①

析取运算($p \vee q$)表示 p 是真命题，或者 q 是真命题，或者两个都是真命题。因此，它表示结果可能归咎于两种因素的情况，这两种因素要么相互独立，要么相互合作：$p \vee q = p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$。所以，它的否定 $\bar{p} \cdot \bar{q}$ 表示这两种因素都不存在。我们见过这种运算的例子，甚至在三元形式 $p \vee q \vee r$ 中也有过，正如在倾斜装备实验(第十章)中，"为了使它朝下，你要么向上拉绳要么减少部分重量(砝码上)要么在货车上增加重量"(Clau，11 岁)。他很快就理解了反演：$(\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \supset s$($s$ 表示无变化)。

我们发现，具体运算初期被试对 B 和 B 进行乘法运算后才能确定 $A'_1A'_2$ 不存在，这一点在此处也很明显；因此，剩下的组合 $A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A_2$ 将构成一个析取命题的等价运算。但是此处，命题的析取也必须根据它是否与其他十五种可能的组合对立这一实际情况加以区分。

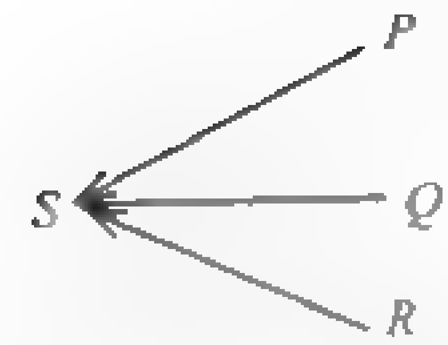
7 和 8. 蕴涵运算($p \supset q$)和非蕴涵运算($p \cdot \bar{q}$)②

蕴涵运算 $p \supset q$ 表示($p \cdot q$)$\vee$($\bar{p} \cdot q$)$\vee$($\bar{p} \cdot \bar{q}$)组合，命题 p 表示的因素每次出现都会产生命题 q 所表示的结果。但是，并不是只有这种因素才能产生这一结果。在前面的例子中，货车的下滑要么和轨道倾斜程度(p)的增加有关，要么和砝码(q)的减少有关，还有可能和货车载重(r)的增加有关，被试知道 $p \supset s$，$q \supset s$ 以及 $r \supset s$；在 $p \supset s$ 中，被试得到 $p \cdot s$(在实际运算中为第一种因素时)，而且还可以得到 $\bar{p} \cdot s$(当是其他两种因素时)，自然还有 $\bar{p} \cdot \bar{s}$(没有运算任何因素时)。

在蕴涵运算中，我们会比其他命题运算更容易产生它甚至可以在具体水平发现的误会。从类的角度来看，它对应的是包含 $A \subset B$($B = A + A'$)。如果我们用 S 表示一个命题 s 描述的集合(货车的下滑)，包含一系列事件，并用 P 表示下滑的集合，与轨道更大的倾斜有关(试比较命题 p)，那么包含 $P \subset S$ 将表示 $P + P' = S$。也就是说，P 包含的所有情况都属于 S，但是 S 中有些情况不在 P 中(这些情况对应由于重量变化引起的下滑，试比较命题 q 和 r)。因此，蕴涵运算 $p \supset s$ 可以用包含 $P \subset S$ 来表达。从关系的角度来看，同一个包含运算含有多因素对应关系：结果 S 对应因素 P，Q，R，对应关系是：

① 这两种运算对应第 1045 页表格中的组合(12)和(5)。

② 这两种运算对应第 1045 页表格中的组合(14)和(3)。



P 完全对应 S，但是这种完全对应并不是相互的（一种因素只与一种结果对应，但是这种结果却可能对应几种因素）。

然而，被试在此处可以通过其推理的整个过程，在心理层面分辨出真正的包含关系和多对一对应关系的不同之处。只要被试继续用包含关系和对应关系推理（阶段Ⅱ），那么他就仅局限于将原始实验数据分类和排序，然而要发现蕴涵运算就需要能够从其他可能的组合（$p \vee q$、$p = q$，等等）中鉴别出蕴涵。进而，这个发现通过被试能分离出潜在因素而得以进一步鉴别：他的目标是在与已知情境相容的可能组合中准确证实哪些组合存在。

尽管通过这一标准，在心理层面可以将命题蕴涵运算与类包含运算进行清晰地区分，但是尝试找出这两者如何实现转换也很有意义。而且，在阶段Ⅲ中被试是从对数据进行分类、关联等开始着手的，这一点很重要；换句话说，我们应该谨记一点，即数据的具体构建是命题结构不可缺少的前提条件。因此，我们必须提出：什么是蕴涵运算最原始的形式以及他们与对应的具体关联有什么关系？

但是，蕴涵运算至少可以用三种等价运算表达：$p \supset q$、$p \vee q$、$p = p \cdot q$，这三个等价运算变换后可以得到相同的结果 $p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$。例如，如果 p 表示一根细棒，q 表示它易弯曲，那么不管有没有命题"若棒为细棒，那么它就易弯曲"（$p \supset q$），都没有关系；"棒要么很粗，要不然就易弯曲"（$p \vee q$）；或者"说棒细等同于说它不仅细而且还易弯曲"（$p = p \cdot q$）。要注意的是，根据一条著名的格定律，已知 $p = p \cdot q$，那么就有 $q = p \vee q$，①这个等式本身又等于 $p \supset q$（因为它也可以变换为：$p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$）。这就是说，蕴涵运算最简单的心理形式一定是 $p = p \cdot q$。因为在被试坚持认为"如果棒很细，那么它就容易弯曲"之前，他会使自己相信细一般总是包含细和易弯曲的意思。而且 $p = p \cdot q$ 和 $q = p \vee q$ 是对 $A \times B = A$ 的结果和 $A + B = B$ 的求和最直接的表达，也是包含运算 $A < B$ 的依据。

蕴涵运算的否定是非蕴涵运算 $p \supset q = p \cdot q$。像其他从单一组合中建构的运算（在参考 $p \cdot q$ 时我们已经知道这一点）一样，这一运算可单独出现，也可与以下七种不同的形式一起出现：$p\,q$、$p \vee q$、$q \supset p$、$p \mathbin{W} q$、$p \mid q$、$q[p]$，当然还有 $p * q$。

当单独出现时，被试频繁地运用蕴涵运算的否定运算，以验证一个可能因素的不相干性。例如，在单摆实验（第一章）中，阶段Ⅲ中的被试增加重量（用 p 表示），保持其他因素相同，确定加速度并没有因此增加（q），因此他确信重量不产生什么影响，即：$p \cdot q$

① 英文译文中此处表述（$q = p \cdot q$）有误，已更正为 $q = p \vee q$。

$(p \supset q)$。但是，与常见的情况一样，这种运算的形式特征(与具体阶段无对应特征的表述做对比)出现在它与组合系统整体整合的情况下。在因出现 $p \cdot q$ 而下结论之前，阶段Ⅲ中的被试确信他已经排除了所有既包含 $p \cdot q$ 又包含 $p \cdot q$ 的其他组合。由于这个原因，研究变量的影响时，他以这种方式保持其他变量不变，使了在发生的组合与其他可能的组合分离。

9 和 10. 反蕴涵运算$(q \supset p)$以及它的否定$(p \cdot q)$①

我们也可能用 q 来指代命题 p，或者反之，所以如果仅仅是单独出现的形式上的 $q \supset p$，与 $p \supset q$ 没有实质的差异。因此，只有当 $q \supset p$ 运算与已经确定或等待确定的 $p \supset q$ 运算相比较时，它才具备不同的意义。在这种情况下，被试面临以下两个新出现的问题：

如果关系 $p \supset q$ 是真的[例如，p＝撞球实验中入射角的增加(第一章)，q＝反射角的增加]，那么 $q \supset p$ 也是真的吗？这就意味着，在确定反射角增加的情况下，被试认为入射角也会增加，即使他无法观察到发射情况。如果真是这样，那么我们就得到$(p \supset q) \cdot (q \supset p) = (p = q)$，也就是说 p 和 q 之间存在命题等价运算(也等同于说 p 和 q 总是同真同假)。

倘若 $p \supset q$ 尚未建构，在整个实验中仍然不太确定，那么被试可能会问自己到底 $p \supset q$ 和 $q \supset p$ 哪个才是真正的蕴涵运算。例如，在指示剂和着色剂实验(第七章)中，被试就会问自己到底是最后添加的液体使混合溶液变色(年纪最小的被试大多数都认同的假设是：添加的最后一瓶液体具有着色潜力)还是混合物将每个成分包括最后一种液体染上了色。那么问题则是到底是 $p \supset q$ 还是 $q \supset p$。而且，立刻很明显的是，提出甚至解决这样一个问题本身就是形式转换的一种标志。只有与其他运算相比，知道 $q \supset p$ 运算和系统连为一体时，它才具有运算意义。

对于 $q \supset p$ 的否定即 $p \cdot q$，它与(8)中运算 $p \cdot q$ 的讨论一样，有相同的论证。我们仅需要注意两种非蕴涵运算 $p \cdot q$ 和 $p \cdot q$ 的整合是一种互反排斥运算，即 $p \cdot q \vee p \cdot q$，将会在下面进一步讨论。

11 和 12. 等价运算$(p=q)$以及它的否定互反排斥②

命题等价运算既不是恒等式，也不是等式，而只是表示两个命题总是同真同假。从类的角度(即命题应用的整套对象)来说，等价运算对应单一类的确定。例如，"这种动物是原生动物"(A)和"这种动物是单细胞软体动物"(B)之间的等价运算对应相同的加法类，因为如果 A'＝多细胞软体动物，那么那个等价运算对应的仅是 $A = B = A'$，但是"这种动物有脊柱"和"这种动物有脊髓"之间的等价运算对应 A 和 A 两个类的合取结果。因此，从关系的角度来看，等价运算就是存在一对一的互反对应，这种互反对应总是可发射的，但并不必须反射。在单摆实验中(第四章)，绳长的增加(用 p 表示)对应振

① 这两种运算对应第 1[illegible] 页表格中的组合([illegible])和([illegible])。英文译文中此处表述$(p \cdot q)$有误，已更正为 $p \cdot q$。

② 这两种运算对应第 1045 页表格中的组合(8)和(9)。

动频率的增加(用 q 表示),其反运算也是真的:此处 $(p \supset q) \cdot (q \supset p) = (p = q)$。当被试构建了蕴涵运算 $p \supset q$ 后,他成功发现结果(q)除了因素(p)外没有其他可能的因素,并且这两个变量总是对应时,他才能理解等价运算。

互反排斥运算 $p \vee\!\vee q$ 是该等价运算的否定,表示 $p \cdot q \vee p \cdot q$ 两个非蕴涵运算的合取,就如同等价表明了 $p \supset q$ 和 $q \supset p$ 两个蕴涵运算的乘积一样。从类的角度来看,排斥运算表示两个完全不相交的类中的互斥关系。从关系的角度来看,排斥运算表示一个非对应关系。例如,在平衡实验(第十一章)中,如果被试考虑了所有的平衡状态,且在这些平衡状态下,天平是水平的,那么他发现每一次增加重量(用 p 表示)都会相应地造成距离的减少(q),而每一次距离的增加(q)都会相应地引起重量的减少(p):因此有 $p \cdot q \vee p \cdot q$。在这种情况下,互反排斥运算描述了两个相反对应的序列排序。对于类对应,我们可以追溯到上文讨论不相容运算时引用的着色剂案例。不相容运算和互反排斥运算唯一的不同之处与组合 $p \cdot q$ 的出现与否有关:当想要知道 p 或 q 哪一个是真命题时,这就相当重要了,但是通常找不出到底哪个是真命题,因为在这种情况下组合 $p \cdot q$ 表示没有产生任何结果的情况。

13 和 14. p 的肯定和否定,即 $p[q]$ 和 $p[q]$①

$p[q]$ 运算等于 $p \cdot q \vee p \cdot q$,它的否定 $p[q]$ 等于 $p \cdot q \vee p \cdot q$。因此,两种运算相当于肯定(或否定)不论 q 是真是假,p 都是真命题。换句话说就是,两种运算肯定(或否定)p 不受 q 的影响。

此外,这种相互独立但不排斥的特别关系对于形式思维的功能来说极其重要:通常情况下,就是因为阶段Ⅲ中的被试构建了运算 $p[q]$ 和 $p[q]$,他们才得以发现假设的变量对已知的现象不构成影响。换句话说,如果 p 所表示的变量既在 q 所表示的事件未出现(q)时出现,又在其出现(q)时出现,那么 p 变量并不是 q 事件的因素。因而,正因为被试构建了 $p[q]$ 运算,他才能够排除已知变量有影响的假设。反之,如果 $p[q]$ 出现,即 $\bar{p} \cdot q$ 和 $p \cdot q$ 出现,用 p 表示的变量分离不影响事件 q 的发生或不发生,这就更加确定排除变量 p 影响结果的假设了。但是 $p[q]$ 和 $p[q]$ 只涉及单一的排斥运算,而不是类似 $p \vee\!\vee q$ 中的互反运算,因为尽管 $p[q]$ 和 $p \vee\!\vee q$ 都包含 $p \cdot q$,但是 $p[q]$ 也包含组合 $p \cdot q$,而 $p \vee\!\vee q$ 和 $p|q$ 中不含 $p \cdot q$。

例如,在磁铁实验(第四章)中,增加某个盒子的重量(增加用 p 表示),有时指针会在下次实验时停在这个盒子前(因此出现 q),但其他时候它又不会停在这个盒子前(即 q)。结果,被试就根据组合 $p \cdot q \vee p \cdot q$ 做出结论,认为重量的增加没有什么影响,指针停或不停(q 或 q)是其他变量作用的结果。反之,重量不增加(用 p 表示),也会发生事件 q 和 q,即 $p \cdot q \vee p \cdot q = p[q]$。这一证据更加证明了先前的结论。

15 和 16. q 的肯定和否定,即 $q[p]$ 和 $\bar{q}[p]$②

---

① 这两种运算对应第 1045 页表格中的组合(6)和(11)。

② 这两种运算对应第 1045 页表格中的组合(7)和(10)。

$q[p]$和$q[p]$这两种运算与上文有着同样的结构，除了p和q顺序互换。事实上，$q[p]$等于$p \cdot q \vee p \cdot q$，$q[p]$等于$p \cdot q \vee p \cdot q$。因此，单独来看，它们没有为系统增加任何运算，但是对比之前描述过的运算，它们使得出现新的组合成为可能。

例如，如果$p[q]$和$q[p]$同时为真，并且他们各自都为真命题，那么就可以得到$p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$，因此$p \vee q$。如果$p[q]$和$q[p]$都是真命题，且各自为真，那么就可以得到$p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$，因此$q \supset p$。如果$p[q]$和$q[p]$都是真命题，且各自为真，那么就可以得到$p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$，因此$p \supset q$。如果$p[q]$和$q[p]$都是真命题，且各自为真，那么就可以得到$p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$，因此$p|q$。而且，其中每种组合所描述的都是被试进行实验尝试时在某一点上的数据构建过程。因此$q[p]$和$q[p]$运算不是$p[q]$和$p[q]$的简单复制，而是能在发现的过程中起到重要作用。

（四）十六种二元运算系统的应用及形式推理的过程

我们刚才已经知道，二元命题运算描述具体运算阶段中某个或某些类与关系八种基础"群集"中的某部分结构。一旦出现这八种"群集"（尽管它们相继应用了不同的情况，但是据我们所知，它们是同时推导出来的），就可以说具体阶段的被试获得了一种运算的范围，等同于十六种基本命题运算，在功能上与组合系统相同。然而，我们认为事实并非如此，因为具体运算的被试没有实现从类和关系的某个群集到另一个群集的转移。但是另一方面，命题运算构建了一个单一系统，使得从十六种元素中的任何一种精确地转移到另一种成为可能。由于这个原因，正如我们所观察到的，将类和关系的群集调整到一个单一系统中需要引入一个新的结构，具有n-n式组合系统的"结构化整体"结构。格形式化的起点是乘法群集；但是在加法运算中，它涉及适用于基础组合（前面描述过的二级群集）分类的普遍化。一旦构建了这个单一系统，它就包含十六种二元命题运算系统。

但是接下来的问题就是：被试知晓命题运算系统是作为一种系统存在的吗？如果我们用"知晓"这个词来询问他们是否将该系统视为一种系统时，显然他没有意识到，因为这一意识的逻辑总是在逻辑学家得出成果之后才存在。然而，正如布伦茨威格(Brunschvicg)所说，逻辑就好像文学批评制定了现有的诗的规则，但是在诗被创作时并不存在。青少年的行为逻辑与逻辑者的形式化逻辑没有什么关联，在他们的行为逻辑范围内，我们只能借助"系统的意识"来表示有目的地尝试找出集合中可能组合之间的关系。在这层意义上来看，子阶段ⅢB中的被试们似乎意识到了该系统。[1]然而，子阶段ⅢA中出现了一个过渡的组织阶段，但其中鲜见协调过程。他们知道当看到基础

[1] 当然，意识到运算系统，而不知道如何用代数符号表示，这种情况也是很有可能的；例如子列排序运算中就是这样。

组合 $p \cdot q$ 或者 $p \cdot q$ 等时，它可能包含于若干组合中的任何一种(例如 $p^{\circ}q$、$p[q]$ 或者 $p \supset q$，等等)，而且他们至少能系统地判断它们的真假。反之，当他们把一种复杂的组合比如 $p \supset q$ 作为假设时，他们知道如何通过回到它的基础运算 $p \cdot q$ 或者 $p \cdot q$ 来进行验证，或者通过寻找 $p \cdot q$ 是假运算的反面证据进行论证。

系统中不同运算或者可能组合间的持续联系有两大深远意义：第一重意义与被试的推导或推理训练有关，第二重意义与整体运算结构的运作有关。

我们已经检验了十六种二元运算在形式阶段被试思维中的作用。但是，它们没有在自身建构过推理或推论。他们描述的仅是稍微复杂的表达，而不是一系列实际的推导。其个蕴涵运算 $p \supset q$ 也仅限于表达有关系，这种表述可以简化为一个单一的表达 $p = p \cdot q$。鉴于这一点，就产生了两个问题：(1)被试实际推理的本质是什么？(2)为了解释自然产生的形式思维的基本推导过程，我们需要形式化一个新的关系集合，超越刚才描述过的集合吗？

逻辑学者提出了基础运算不同于推导机制的两个方面。其一，他们从运算本身的基础上进行区分：例如，在 $[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$("如果 p 包含 q，q 包含 r，那么 p 包含 r")的推导中，三种蕴涵运算 $p \supset q$、$q \supset r$ 以及 $p \supset r$ 将被当作单一或"原材料"的蕴涵运算，前两个与第三个蕴涵运算作为"推导"的蕴涵运算联系在一起。后者接着就能被当作一种新的和原创的运算。其二，从逻辑的角度来看，不言而喻，推导或"决定"问题的解决方案需要运用新的原理和更为形式化的结构(逻辑语法和语义的比较，等等)，而基础运算的理论不必要如此。

然而，我们不需要考虑这些问题，因为也许区分这两个方面仅仅与理论的或规范的逻辑有关。[1] 从心理学的角度来看，我们只需要知道阶段Ⅲ被试在推理时所运用的运算，是否不同于上文所描述的过程，如果没有的话，他们是如何用这些相同的运算机制进行推理的。事实给我们的答案非常简单。目前，由于被试陈述的表达对应命题系统中的运算，而且这些运算可以通过代数符号进行形式化(正如我们在这里所进行的形式化一样)，那么这些被试的推理过程就对应这些彼此关联的运算之间的转换。不需要进一步引入运算了，因为这些转换对应命题逻辑代数固有的微积分运算。简言之就是，推理仅仅是命题微积分本身而已。尽管在被试的思维里，这种微积分与当前的语言模式有联系，但是它能够用命题逻辑代数的形式进行符号化的表达。

例如：在被试通过观察 $p \cdot q$、$p \cdot q$ 以及 $p \cdot q$ 这三种组合建构了某种蕴涵运算 $p \supset q$，以及用同样的方法建构了蕴涵运算 $q \supset r(= q \cdot r \vee q \cdot r \vee q \cdot r)$ 后，没有被试会怀疑其结果也是蕴涵运算 $p \supset r(= p \cdot r \vee p \cdot r \vee p \cdot r)$。除了基本蕴涵式，他随后需要引入针对 $[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$ 讨论得出的推理蕴涵式吗？或者说这种运算足够使用 $(p \supset r)$ 吗？如果我们通过运算 $(\cdot)$ 把 $(p \supset q)$ 和 $(q \supset r)$ 相乘，我们得到如下的三元合成：

[1] 尤其是，我们不需要区分语法与语义，因为我们的被试所运用的运算从一开始就有意义。

$(p\cdot q \vee p\cdot q \vee p\cdot q)\cdot(q\cdot r \vee q\cdot r \vee q\cdot r) = p\cdot q\cdot r \vee p\cdot q\cdot r \vee p\cdot q\cdot r \vee p\cdot q\cdot r$

然而，人们可以立刻看出这四个三元合成包含$(p\cdot r \vee p\cdot r \vee p\cdot r)$，所以$(p\supset r)$。因此，他们给出了探究的结果，更重要的是能以一个更直接的方式计算。①

但是在被试的脑海中，既没有符号也没有符号逻辑，这些运算指的是什么呢？在这种特定情况下，它们只是反映了被试知晓蕴涵是可传递的这种意识。首先，被试有蕴涵的观念，他们用“如果 x，那么 y”（互反不一定为真）或者“如果 y，那么 z”（没有互反性）来表达。另外，如果被试确实有这个观念（基于例如 $x\cdot y \vee x\cdot y$ 等的构成和这些组合纯粹的口头表达），我们有理由说他有能力把这些蕴涵式组成一个单一序列：“如果 x 蕴涵 y，且 y 蕴涵 z，那么 x 蕴涵 z。”因为对应简单口头表达的概念和组合，足够组织这样一个系列传递的组合（而且，在具体阶段，它们是以不对称传递的关系序列而被习得的：$A<B$，$B<C$，因此 $A<C$）。因此，如果假设智慧行为是其自身运算的群集，可以说把这种推理过程归结为一种运算的微积分，并不意味着被试有任何神秘的智慧能力。仅有的一个秘密（但是它存在于逻辑推理的所有解释中）是有一定的发展阶段，语言足以能够对这些组合进行近似的表达，将符号逻辑转换为其他情境的抽象符号。

现在，如果推理是由被试持续执行的运算微积分所构成②，那么他可用的这一整套运算组成了一个依据具体运算各自产生的影响而进行整体运算（通过它的结构法）的代数结构。我们已经看到组合系统的结构是以“结构化的整体”和因之的格结构的精致化为先决条件的，这种格结构具有互反运算的一般规律，这也是它的特点。至于群结构，它出现在使用 16 个二元运算的过程中，以系统地使用否定或反演的方式（例如，组合 $p\cdot\bar{q}$ 可以被理解为连接 $p\supset q$ 的对立面，等等）。

但是，我们是否需要进一步探究这些基本结构是否在命题运算的心理机能中起作用，尤其是在它们引导的建设性推理方面？就基本结构的方式而言，我们的意思当然是这四种转换的群：直接的、反演的、互反的、互反的反演③。我们坚定地认为这是实际存在的结构，但为了证明这一点，我们必须验证所谓的运算格式对立于构成这些格式的特定运算。

① 读者应该记住 $p\supset q$ 也能写成 $p=p\cdot q$。其次，这些案例中的 q 等同于 $p\vee\bar{p}\cdot q$。接下来我们就得出一系列的对等（=表示两种符号的同一性）：

$$(p\supset q)=(p=p\cdot q) \tag{1}$$

$$(q\supset r)=(q=q\cdot r) \tag{2}$$

$$q=p\vee\bar{p}\cdot q\text{［此式由(1)产生］} \tag{3}$$

$$p=p\cdot q\cdot r\text{［(1)和(2)的结果］} \tag{4}$$

$$p=[(p\cdot r)\cdot(p\vee\bar{p}\cdot q)]=p\cdot r\text{［(3)和(4)的结果］} \tag{5}$$

$$(p=p\cdot r)\equiv(p\supset r) \tag{6}$$

因此，性质(6)如 $p\supset r$，是由(1)和(2)产生的。

② 有简化为运算(∨)、(·)、(=)和 N 的可能性。

③ INRC 群。

（五）形式化建构的运算格式

很显然，首先16种二元运算的心理机能需要结构的组织或整合，因为这些运算甚至在被试的头脑中构成了一个系统（这是真实的，不论这个系统是否能立刻获得INRC群的性能，这些将在接下来的讨论中进一步考虑）。其次，这种结构包含了某种形式的可逆性，确保在操作的转换中连续补偿，且通过这一事实，它界定了一个特定的平衡状态。而且，这个平衡状态是一个包含潜在转换的系统，因为它们的代数加法准确地表达了在正向和负向可能修改的补偿。在心理意义上，在被试实际执行运算的同时，系统本身蕴涵着一套潜在转换，它可能根据特定情况变得显现或保持潜在（见第十六章）。

由于这些潜在性的存在，我们必须准确地提出运算格式的问题：运算格式被定义为，当处理某种类型的数据时，被试从形式阶段初期就具备的组织潜力，但在这些情况之外并不显现。形式思维在子阶段ⅢB甚至是ⅢA开始出现，它出现的标志是不仅通过16种二元命题运算和源自它的三元或更高级组合的不断运用，而且通过对那些具体阶段尚不掌握的概念格式进行零星的详细阐述，因为它们的发展是以前期的运算为先决条件。这些运算格式由概念或者特定运算组成（数学运算，但不仅仅只是逻辑运算），当被试尝试去解决某些问题时，能感到对运算格式的需求。当感受到这种需求时，他设法自发地研究出运算格式（或者仅仅是理解，即当相关概念得到了知识指导之后进行再加工）。在形式阶段前，被试没有能力实现这一点。

所以，这里有一个非常重要的心理现象：一组最初相互关系并不明确的概念或运算的同步出现（因为它们不是像16种二元运算那样相互依存的），但却由于更深的连接彼此联系在一起。这种关系的根源必须追溯到格与群的组合结构中，这是形式思维的结构。

如果没有立即识别出这些运算格式的关联性，这是因为被试构建它们的方式在表面上类似于他理解一些有用的概念的方式，即通过命题运算的媒介，但是符合一种由不可预测的需求所决定的序列，这些需求来自于实验条件和特定问题的性质。例如，在第一章到第六章描述的实验过程中，阶段Ⅲ的被试已经用形式运算阐述了弹性、钟摆的振幅、球反弹的角度相等、浮体定律等概念。然而，从结构角度来看，这些概念中没有一个是自身形式化的。尽管它们在形式阶段之前不会出现，因为使用形式运算对其发现和建构来说是一个先决条件，它们不像概念一样形式化，因为它们与特定实验情况或身体的几何构造有关。但是，在被试显然以相同方式组织的概念或运算之间——也就是在被试已经观察了经验的组合后在实验中的演绎或发明——在最多变的情境和问题中，有一些概念或运算会再次出现。我们的分析表明，这些概念与其他概念相比有些不同的特性。

在这个范畴中，比如，我们将包括比例的观念。它适用于一些不相干的问题：作用

力与反作用力之间的平衡、组合概率或者甚至是数学运算的组合，等等。这种观念有一个共同的特征：①它们比其他观念更普遍，因此它们建构运算格式，比那些范畴较窄的概念更容易受不同应用情境的影响；②从心理发展的角度来看，相比于用被试自己的运算结构作为起点的推理或抽象，被试较少在实体中发现它们；③它们都表现出一些与格结构或群结构的关联，且其中的几个与反演和互反的 INRC 群有关。

因为这三个特征，这些格式在形式阶段初期（ⅢA）同时出现，具有重要意义。运算格式是由出现在形式思维的平衡这种结构化的整合发展起来的，有人可能会追问组织这种格式的能力（这个能力可以保持潜在，但当拟解决的问题需要时，就会显现出来）是否并不构成任一平衡中潜在转换的例证，特别是这个平衡的结构像形式运算系统的整合群和格一样复杂。

Ⅰ. 组合运算："结构化的整合"产生了四个元素的集合：$p \cdot q$、$p \cdot q$、$p \cdot q$ 和 $p \cdot q$，我们认为是 1×1、2×2、3×3，全部 1 或者 0，构成一个系统：16 种组合；这个组合系统给 2^2 以 2 次方，即 16 种二元运算（同样的 16×16＝256 个三元运算等等）。然而，我们从来没有遇见一个阶段Ⅲ的被试或者一个成年人（除了逻辑学家）能成功地计算出这 16 种可能的组合，甚至外显地意识到了这样一个组合系统的存在。详细合理地使用这些组合对刚开始形式化推理的被试来说是陌生的，就像让反复哼唱一个曲调或儿歌即兴创作小曲的流行歌手去使用和声法一样。

但是，这种情况在颜色实验（第七章）中发生。在这个实验中，被试拿到四个装有不同液体的烧瓶和一个含有五分之一液体的滴管，被试没有被告知任何关于组合的说明，正是在阶段ⅢA，被试开始使 1×1、2×2、3×3 和 4×4 的组合系统化。

其次，如其他研究中的发现①，如果给小孩 5 或 6 个杯子，装有不同颜色、明显指令的令牌，让他们用杯子中的令牌组成所有可能的配对，再次只有处于阶段ⅢA 才能用系统方法来解决这个问题。在具体阶段，被试通过简单的反复实验法得到组合，并且组合式不完全。至于数列②（3 种不同颜色的令牌间有 6 种数列，4 中不同颜色的令牌间有 24 种数列）和组合③（找到所有能由 2、3、4、…等组成的数字），只有在子阶段ⅢB 这些计算才能被系统化地习得——即不是外显的数学公式的表达，而是一个基于穷举法的过程。

有四种说法可以解释这些自发出现的数学组合运算（年龄原因学校里还没教这些）和同样自发组织的命题组合系统。第一，有人会说，这只不过是一个巧合。第二，有人可能会把组合的（数学）计算认为是最初的习得，把命题组合系统认为是一种派生的应用。第三，有人认为命题组合系统是最初的习得，认为数学组合是派生的应用。最后，

① 《儿童概率概念的起源》，第 8 章。
② 《儿童概率概念的起源》，第 8 章。
③ 《儿童概率概念的起源》，第 9 章。

我们可以假设，从被试思维运算的心理机能角度来看，这两种组合系统组成了一个统一的机制。

基于概率，第一种可能性似乎站不住脚。经过对数以百计被试的考察（超过150个实验问题的推论和至少30种数学组合运算），对进程同步性的描述并不能归于偶然。其次，在大脑或思维中相应区域间未建立任何联系时，很难坚持认为所得的这两种相关结果，一种是逻辑的，另一种是数学的，可以在同一年龄被观察得到，即使存在这样的分类区域。

第二种可能性是不太可能的：一是从发展的角度来看；二是因为它的意思似乎只是看上去清楚的。与之相反，首先可以说它跟通常发现的发展数据相矛盾，因为一个数学运算通常比相应的逻辑运算要复杂得多。实际上，数学组合运算和逻辑组合系统间的不同之处在于前者与单一的单位有关，然而后者与各不相同的实体特质有关。但是可以说单位比定性的实体更抽象，因为它是以初步排除所有特质为先决条件的。[1] 因此，数学组合运算的形成先于逻辑组合系统，这一观点是值得怀疑的。但假设这一观点是真的，那么它就需要先假定后者建立在早先形成的数学运算应用的基础上，这是什么意思呢？很重要的是，读者需要明白我们的被试没有发现也不知道任何关于组合计算的数学公式。他们所发现的是一个操作程序，这实际上仅是一个简单的操作方法，不是有意识地仔细考虑且用公式表达的知识。因此，以下观点并没有明确意义，这个程序首先适用于任何对象且最终推广到逻辑思维和它的演绎运算，因为在运算中逻辑思维已经有效地适用于对象。因此，唯一的问题是，组合系统最先是以实物的单位还是其特质处理实物的；但是，大量的类推法（数字的形成与集合关系的形成相比等等）支持后者的解决方案。

这是否意味着我们必须否定第二个观点，转而采纳第三个呢？在某种意义上说是的，但是因为逻辑组合系统也是在动作中不断建构的，而不是纯粹的反应过程，第三个论证从本质上看和第四个没有不同。究竟，对一个处于建构形式结构过程中的被试来说，命题组合系统的使用意味着什么呢？很简单，当面对要解释的事实时，根据他能得到的所有组合（且在不知情的情况下，在二元关联的 $n \times n$ 组合中形成一个完整的系统）

[1] 在命题组合系统的实验中，元素是有关联的 $p \cdot q$、$p \cdot \bar{q}$、$\bar{p} \cdot q$ 和 $\bar{p} \cdot \bar{q}$，它们不是互相等值的，甚至从特质上讲它们是截然不同的。的确，我们在这里讨论的描述性关联跟实体或定性的事件有关，这意味着更大程度的抽象。然而，读者将会记住这个命题组合系统来源于在具体乘法群中发现的二元列表中元素的一般分类。因此在其来源，这个组合系统处理描述性定性实物的简单关联。在着色剂实验中，给定元素被视为潜在定性的不同，但实际上它们除了编号不同，表面上没有什么区别。某种程度上，这个实验包括单位的组合。最后，在令牌的例子中，情况同样是复杂的。每个元素都是一个单位，但是在一个定性定义的设置中被选择（通过颜色）。因此，如果分析被局限在上述引用的几个组合系统的例子，来决定哪些是最简单，哪些是最复杂的，这几乎是不可能的。虽然命题组合系统是纯粹逻辑的，根据给定的数据，它导致变量的困难（在实际应用中）；关于其他两种情况，都涉及逻辑和数学结构的混合物，因此不能跟第一个相比。

对它们进行定性的联结。面对要组合的实体，除了可能给定性的组合增加一个单位的列举，他什么也没做；对于排列(序列的序列排序)，他的操作是一样的，等等。

因此，好像组合运算组成了一个一般开始于发展特定阶段(ⅢA)的运算格式。换句话说，当被试面临问题的解决方法需要一个组合的系统表格时，一种方法或一种程序在一些场合下被不自觉地自发采用，或是外显地决定，而在其他的场合能有意使用。这个格式是形式的，不是具体的，因为我们已经证明了具体群集和阶段Ⅲ的逻辑之间的本质不同在于缺少或存在一个系统表格。最终，我们不需要此时去提醒读者这个表格是如何跟格结构和"结构化的整体"的构建有关联的。不过，我们遵守自己的承诺回到组合运算，让它们成为这一章所探讨的"运算格式"中的第一个。组合运算实际上并不属于命题运算符的集合，也不是源自它们①。相反，组合运算是命题运算符发展的先决条件(因此，它们是不同的)。其次，它们一旦在这个发展进程中应用，就能被推广到新的情况中。因此，这些心理特性呈现了组合运算的根源是如何深深地扎入现实中的，呈现了命题运算符创造的整体结构的现实，它们表达了一些总体的规律。

Ⅱ. 比例。如果在"结构化的整体"建构的格中发现了组合运算所表达的一些总体规律，比例格式将影响从起源于格上的格式到以群结构整合的格式之间的转换，尤其是反演和互反群(INRG)。

数学比例仅仅是由两个比例 $x/y = x'/y'$ 的相等构成。它们的形成提出了一个心理学的问题，因为它不会出现在具体运算阶段。这个阶段的被试已经可以像均匀分配不同分布的数量一样自然地构造分数或数值比。而且，从定性的角度来看，从具体阶段起，我们看到被斯皮尔曼称为"相关的引出"的运算的证明，其中被试以此方式在双元列表里形成联结以预测比例，例如，"罗马对意大利的意义就像巴黎对法国的意义"。这就是为什么我们想知道8—11岁的被试不能发现形成一种比例的两个比率是相等的原因，这个发现为什么不能在形式阶段前习得。但是在上述实验中(第十一章到十四章)，我们已经反复观察到在子阶段ⅢA之前比例不能被习得；这已经在很多不同的领域呈现出来(空间，速度，概率，等等)。这种现象用学校学习进程的影响来解释，是不够充分的。首先，他们在学校学习这些之前，被试已经在实验情况中建构概念。其次，如果被试能更早的理解，我们可以肯定当前其在课程学习中呈现时，将加速被试习得这些的进程！因此，对于不同阶段的被试所使用的运算，我们必须去寻找其实际结构的理解较晚出现的原因。

但是，与其他运算格式一样，比例格式有两方面，一个是逻辑的，另一个是数学的。在它的一般逻辑形式中，比例是两个术语 α 和 β 的关系与另外两个术语 γ 和 δ 关系的对等。因此，根据定义我们有：

① 见第十三章最后的评论。

$$\frac{\alpha}{\beta} \because \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{如果} \quad \begin{array}{ll} (1)\ \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma & (3)\ \alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \delta \text{ 和 } \alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \delta \\ (2)\ \alpha \vee \delta = \beta \vee \gamma & (4)\ \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta \text{ 和 } \alpha \cdot \gamma = \bar{\beta} \cdot \delta \end{array}$$

例如：

$$\frac{p}{q} = \frac{q}{p} \quad \text{因为} \quad \begin{array}{ll} (1)\ p \cdot p = q \cdot q (=0) & (2)\ p \vee p = q \vee q (= p^{o} q) \\ (3)\ p \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot \bar{p} \text{ 和 } p \cdot \bar{q} = q \cdot \bar{p} & \end{array}$$

以这种方式定义，逻辑比例起源于反演与互反关系(INRC)的群结构和格结构。一个给定的命题表达式(α)对它的互反(β)，就像后者(γ)的否定对前者(δ)的否定一样：

$$\frac{\alpha}{R\alpha} = \frac{C\alpha}{N\alpha}$$

例如：

$$\frac{p \vee q}{p \mid q} = \frac{p \cdot q}{\bar{p} \cdot \bar{q}} \quad \text{或者} \quad \frac{p \supset q}{q \supset p} = \frac{p \cdot \bar{q}}{\bar{p} \cdot q}$$

等等，这证实了性能(1)到(4)。

另一方面，一个命题格中任何两个元素的合取(逻辑乘积或下界)，例如 p 和 q，对它们中的任一个来说就像另一个对于它们的析取一样(求和或上限)：

$$\frac{p \cdot q}{p} = \frac{q}{p \vee q} \text{它的完整形式是} \frac{p \cdot q}{p[q]} = \frac{q[p]}{p \vee q}$$

因此，在整合结构中，逻辑比例的概念是固有的，这个整合结构似乎决定着形式运算水平(阶段Ⅲ)所特有的能力。由于这个原因，有人可能会问，是否比例运算格式的详细阐述不是源自这些逻辑比例，它的后期形式可以通过它们对形式阶段结构整合的必要关系来解释。实际上，不论一个比例系统何时能发挥作用，在被试实现数值关系的计算前，他为定性的比例性分离出了一个预期的格式。其次，这个格式，起初仅是逻辑的，稍后导致发现了量化的比例。例如，在平衡问题中，被试首先发现了重量上的增加可以被到中轴线距离的同比增加而补偿；在远距离处放置一个轻球和在近距离处放置一个重球，被试实现了平衡并且总结出这四个值之间的比例关系。但是，首先，无论补偿还是比例都只是定性的。如果我们用 p 表示重量上的增加，q 表示距离上的增加，$\bar{p}$ 和 $\bar{q}$ 表示相应的减少，被试从概念化以下联结开始：

$$p = R\bar{q} \text{ 和 } \frac{p}{\bar{q}} = \frac{q}{\bar{p}}\text{，由此 } p \cdot \bar{p} = q \cdot \bar{q} \text{ 和 } p \vee \bar{p} = q \vee \bar{q}$$

等等，重量上的增加对于距离上相应的减少来说，就像是距离上的增加对重量上相应的减少(仍然不存在数量化的表达)。

作为发现比例性的起点，定性模式似乎是这种类型的。本质上，它是基于重量和距离的互反性，这个互反性来自于实验过程的启示：重量上的增加能通过取走增加的重量来抵消($Np = \bar{p}$)，但同样可能通过减小距离($p = R\bar{q}$ 或 $Rp = \bar{q}$)来补偿。当这样做时，前

面的比例也可以写成：①

$$\frac{p}{q}=\mathrm{R}\ \frac{\bar{p}}{\bar{q}},\text{由此}\ p\cdot\bar{q}=\mathrm{R}(\bar{p}\cdot q)$$

被试的推理通常是以后者的形式出现：增加重量且减少距离($p\cdot\bar{q}$)等同于(R＝补偿)减少重量且增加距离。

一旦习得这两种格式，被试稍后能插入他测量得到的数值，数值化的比例，对应于下述两个公式中的任一个[见第十一章中的比例(13)和(14)]：

$$\frac{p}{q}=\frac{\bar{q}}{\bar{p}}\quad\text{对应}\quad\frac{nx}{ny}=\frac{n:y}{n:x}$$

和

$$\frac{p}{q}=\mathrm{R}\ \frac{\bar{p}}{\bar{q}}\quad\text{对应}\quad\frac{nx}{ny}=\frac{x:n}{y:n}$$

因此，数值或测量比例运算格式的习得以定性的预期为先决条件，定性的预期按照等量补偿和逻辑比例的形式。后者是导出命题运算的整合结构的一部分。因此，这可能可以解释比例概念较晚出现，可以解释组合运算和我们讨论的其他运算格式在表现形式和出现时间上的一致性。毫无疑问，通过分类乘积的系统作为起点，我们可能可以通过数值量化而习得比例格式。当然，上文提及的"相关的引出"已经为此做了准备，但是这个基本结构的分析表明，在命题比例中尚未发现通用性质。

Ⅲ. 两个参照系的协调和相对运动或加速度。第三种运算格式跟我们早期的研究有关，和本书中的实验无关。然而，我们认为这些讨论对揭示形式运算格式现象的普遍本质非常重要，也帮助被试理解下述举例，这个例子基于相同的结构而与力学平衡有关。

在这个实验中，一只蜗牛可以在厚木板上移动，这个木板能朝着蜗牛移动的相同方向移动，也能朝着相反的方向移动。具体阶段的被试很清楚地知道蜗牛能从左边移到右边，然后通过一个抵消进程反向运算，再从右边返回到左边。同样地，他们知道，如果蜗牛在木板上不动，把木板从左边移到右边将使蜗牛停在相同的位置(相对于外部的参照系)，而后相反的运动将使它返回到起始点。但在形式运算阶段之前是不能同时预测到两种运动的，因为在这种情况下，两个参照系必须协调一致，一个是可移动的，另一个

① 换句话说，如果 $p\cdot\bar{q}=\mathrm{R}(\bar{p}\cdot q)$，我们也会有 $p\cdot q=\mathrm{R}(\bar{p}\cdot\bar{q})$ 和 $p\cdot\bar{p}=\mathrm{R}(q\cdot\bar{q})$……因为对于 $p\cdot \mathrm{C}p=p\cdot\bar{p}$ 的($o=\mathrm{R}o$)，以及因为 $\mathrm{C}p=\bar{p}$ 和 $\mathrm{C}\bar{p}=p$ 而 $q\cdot \mathrm{C}q=q\cdot\bar{q}$。

② 例如，在联结"毛发对哺乳动物来说就像羽毛对鸟类一样"时，我们把A称为包括毛发和羽毛在内的外皮器官，把A′称为其他的器官，把B_1称为哺乳动物的器官，把B_1'称为鸟类的器官(假设$A+A'=B$且$B_1+B_1'=B$)。然后，我们得到关联：AB_1 … AB_1' …，但是不能推断出($AA'+BB_1'$)…(即哺乳动物的毛发加上鸟类的器官等于哺乳动物的器官加上鸟类的羽毛)等。不如说，关系上的相似之处更接近命题比例，但条件是他们不处理对等的关系。

③ 参见皮亚杰：《儿童的运动和速度概念》，Paris，Presses Universitaires de France，1946，Chaps. 5 and 8。

是固定的。例如，困难在于理解蜗牛从左到右的运动能被厚木板从右到左的位移补偿这一事实：在这种情况下，蜗牛仍在同一位置（相对于参照系），没有任何反向运动。

同样地，我们让一些玩具的自行车骑手以统一的节奏和速度在观察者前面移动。问题是如果观察者在他的门前保持静态，或者如果他朝骑车者的反方向走去，或如果他朝着骑车者的相同方向走去，他是否能在相同的时间段看到更多的骑车者。这个问题也只能在阶段Ⅲ得到解决，也是因为相同的原因。但是在这个阶段，被试呈现出对相对论的理解：例如，一个被试告诉我们，如果观察者朝着骑车者的反方向运动，"好像是他不动了，骑车者骑得更快"。

实际上，这些问题的困难在于区分和结合这两种类型的转换：(1)取消（例如，当蜗牛在从A移动到B后再从B返回到A）；(2)补偿（例如，当蜗牛从A移动到B时厚木板从B移动到A）。因此，这个问题涉及两个系统的协调，每个包含一个顺运算和一个逆运算，但是系统中的一个与另一个之间是相互补偿或对称的关系。

而且，我们可以马上看出这个协调与通过INRC群取得的协调是一样的，因为N是I的反演，C是R的反演，然而R是I的对称或补偿（互反）。所以，问题就是要在它们相互协调的同时从互反R中区分反演N。当在运算中需要一个基于INRC群的格式时，这就是为什么这个问题不能在形式阶段前得到解决。

换句话说，如果我们把I称作蜗牛从A到B的运动，N将是它从B到A的运动；R将是厚木板从B到A的运动（因此R＝C对于N），C将是厚木板从A到B的运动（因此C对于I＝N对于R）。但是没有必要研究这种推理模式，因为我们将在力学平衡问题上看到相同的模式。

Ⅳ. 力学平衡的概念。当被试能够直接地理解力学平衡系统的运算过程时，要感谢非常直观的实验设置，被试理解相反方向的平衡概念上没有太多的麻烦，他从具体阶段就这样做了。例如，在天平实验中就是如此：固定重量的称重盘，到中心轴的距离没有改变，平衡状态中的元素是一样的（重量），当两边方向互换时也能看到平衡状态。但是，在这种情况下，无法找出普遍的平衡格式，被试此时面对的困难是装置。在装置中处于平衡状态中的元素不再是同一本质的，特别是其中只有动作是可见的，除了其结果反应仍是不可见的。作用和反作用间相等的原则，在科学史上很晚才出现，希腊人过去没有认识到这一点，显然存在这个困难。同样，从个人角度来看，在形式运算阶段之前，普遍化的平衡格式没有得到组织；我们现在应该尝试解释为什么会出现这种情况。

第一个原因是非常自然的：因为平衡的概念需要在系统的潜在转换间补偿，这是典型的在现实和可能性之间建立联结的例子。同样，它需要组织特别是适用于可能性的认知工具，也就是形式思维。如果这是唯一原因，平衡概念可以被认为是其中的一个，尽管要求命题运算是发现的先决条件，在结构上不一定是形式的。

随之而来的第二个原因引导我们比较平衡格式和组合与比例的运算格式。正如我们所见，它不但在结构上是形式化的，而且在组织方式方面也是形式化的。换句话说，

平衡概念需要同时区分和紧密协调两种可逆性的互补形式——反演和互反。反演发生在通过增加或减少元素来修改系统元素的平衡状态中，因此，当发生转换，它的补偿形式就是无效的。在另一方面，当在相反方向执行转换时，不会彼此取消，而是以我们称之为等价的方式进行相互补偿；作用和反作用的等价是这种以互反来补偿的普遍形式。而且，反演和互反总是在此整合。增加或者减少系统中一部分的元素（反演），我们可以用相同的幅度调整这部分和与之平衡部分的互反关系。相反，为了调整大小相等方向相反的元素间的互反关系，显然你必须拿走或增加一些东西，这就是一种反演转换。

而且，这种通过反演和互反转换的相互依存蕴涵着一个形式结构。正如我们所见，只有在形式运算阶段，可逆性的这两种形式才能被统一到一个单一的系统中。与依靠反演（集）或互反（关系）的基本群集截然相反，命题运算都有一个反演（N），一个互反（R）和一个对射（C）——也就是，互反的反演。通过同一性变换（I），形成四种转换的交换群：

$$NR=C,\quad CR=N,\quad CN=R\quad 且\quad NRC=I$$

但这正是被试在解释力学系统的平衡时所使用的群的四种转换。正如我们刚刚所见，为了理解这一系统，被试必须通过同时使用反演和互反来区分和调整它。这个情况从心理学的角度来说是非常有指导性的。自然，作为理论思考的问题，被试对"群"一无所知，但即使在具体阶段，他在运算上使用基本群集结构（例如，在算术增加和减少的组成里，它们构建了一个有两种转换的群）。在形式阶段当他开始时，为了分析平衡中的力学系统，他必须要像物理现实的客观调整那样区分、协调运算转换；他也根据一个群的模式来构建它们。因此，这个处于平衡状态的运算模式，对应于他自身逻辑运算的内在平衡，这一点他自己并不知晓。以此方式解释力学系统的平衡，反演和互反群（INRC群）在同一时期两个不同的阶段开始发挥作用。首先，它负责描述和解释现实的命题运算；同样，它在思维内部构成了一个整合结构，被试不会自然地觉察到这个结构。其次，作为第一个功能的直接结果，它被投射在外部的现象分析（因为在已有数据中，这些由一个物理系统组成，其平衡恰好表征需要解决的问题）。因此，这个群形成了被试在这种和相似情况下所使用的运算格式，以解释他发现的物理调整以及它们之间的协调。

例如，在活塞对液体施加压力的实验中（第十章），四种转换可以如下区分：(1)首先，存在活塞重量和上面放置的额外重量的作用力（直接转换）；(2)相反，你能拿走放置在活塞上的重量或者活塞本身（反演转换）；(3)而且存在液体的反作用即阻力，是其数量和密度的函数（互反转换）；(4)最后，可以用更换为更少量或密度更低的液体来减少液体的数量或密度（互反的反演）。而且，在检查被试时，我们发现他们的首要困难是难以理解大多数液体施加压力作用在相反的方向，而不是作用在与活塞相同的方向。因此，理解平衡不仅需要明白发挥直接作用和反作用（1 和 2）的转换，也要明白情况(3)和(4)组成的特定调整。液体的阻力(3)也是一种压力，是作用在活塞上的压力，因此是朝着相反方向的。这是一种互反转换，并不是反演转换，虽然在同一时间它与反演转换的

作用方向相同。关于反演的互反转换(4),即减少液体的阻力,它与直接转换(1)方向相同,但并不与其等价。

因此,毫不夸张地说,理解这样一个系统包含了与INRC群同构的四种转换的区别和协调(既困难又相互依存)。在这个和相似的例子中,力学平衡的概念无疑对应在形式阶段构成的运算格式。可以通过命题运算经常使用的反演和互反来解释其结构化(例如 $p \supset q$ 转换成 $p \cdot \bar{q}$,或转换成 $q \supset p$)。正如任何解释包含经验世界的推理调整,通过将它们同化到认知运算的方式①,通过平衡的运算格式进行力学系统的解释意味着(正如上面描述)把对物理系统的不同的和整合的调整同化到基本的INRC群转换,基于这一转换,使用形式运算的整合结构,在意识上理解物理系统的运作基础。

V. 概率的概念。现在我们转向一组同时源于一个或两个以上所述运算格式的概念,它充分发挥了普遍化的作用,因此我们可以将它们和整套形式运算格式中的其他格式一起进行排序。

首先,在形式上概率的概念达到了阶段Ⅲ的形式发展阶段,即它获得一个通用的组合结构。在可能性概念发展的研究中②,我们学到了不确定性的发现过程(时空的、物理的或是逻辑数学的)与确定的运算截然相反,甚至对于具体阶段的被试,也可能简单地区分出:什么是有可能的情况,什么是真实的,什么是需要推理的(在前运算阶段尚不能区分);由此,概率的基本概念根源于对确定和可能情况的关联③。然而,在具体阶段,要决定什么是可能的受限于那些被试能够进行运算组合的情况——也就是,对于组合构成的加法构成:例如,当从集合 B 中提取元素 A 组成两个部分 $A + A'$(因此 $A = B - A'$)。因此,在此情况下变量是随机混合的、不确定的,具体的可能性只不过是现实的延伸;具体的可能性还涉及基本运算群集。但在形式阶段,正如我们所见(第十六章),可能性延伸到阶段Ⅲ的被试可以从可能性开始进行推论(假设),在现实检验中结束,意识到那些在所有可能的组合中真实实现的部分。由此断定,概率的概念获得了一种更宽广的外延和更高的准确性。这仍旧是一个确定情况和可能情况间的关系,但都以组合函数的形式开始进行计算、排列,或者与给定元素相融。例如,根据指定的数值分布从包含多个不同目标的集合中提取两个或三个元素,当面对这样的问题时,其中的区别清晰可见。具体阶段的被试失败了是因为他们缺少组合系统,阶段Ⅲ的被试可以没有任何困难地成功解决。因此,可能性的组合概念可以理解为一种形式运算格式,根据上文已检验过的普遍运算,很容易解释这种格式的形成。我们不再重提上一章局部概率分布的研究中引用的概率态度的例子(见第十五章)。

Ⅵ. 相关的概念。相关概念既源于概率,又源于类似于管理比例的结构。让我们以

① 参见皮亚杰《发生认识论导论》,vol. Ⅱ, Chap. 8, §1,以英文翻译形式出现。

② 《儿童概率概念的起源》。

③ 例如,当从一批指定的子集中提取的时候。

如下四种可能的基本结合，论证两个命题间的肯定和否定：$p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$。像本章讨论的很多其他方面一样，这个集合相当于两个分类乘积（$A_1A_2 + A_1A_2' + A_1'A_2 + A_1'A_2'$）双元列表的四个隔间，从具体阶段的开始被试就能习得。其中的两个结合 $p \cdot q \vee p \cdot q$ 表达了 p 和 q 之间的等价性，因此包含系列排列的数值间的逐项对应。对此情况，我们可以说是完全正相关。但另外两种结合，$p \cdot q \vee p \cdot q$，如果它们被独自提出表达 p 和 q 之间的相互排斥，因此是反演对应或完全负相关。另一方面，如果所有的四种结合都出现，它们相当于通过命题结合阐述事件相等的数值分布，这就是一个零相关。

但是当阶段Ⅲ的被试想找出 p 和 q 所描述的事实间是否存在一种关联，当经验分布是无规则的（因此涉及可能性干扰和潜在的因果关系），他使用基于这些运算的方法。因为被试不知道任何关于相关的测量公式（事实上对数学概率一无所知），他们只能使用逻辑格式。他们必须猜测数学频率对应的数值，确定情况的数量与 $p \cdot q \vee p \cdot q$ 一致，不确定情况的数量与 $p \cdot q \vee p \cdot q$ 一致，进而比较这两个数量。如果集合中的某一个在数量上明显优于其他的，且有充分显著的优势，他们会总结出这一个因果关系，无论积极或消极，并且通过机会变量的干扰来解释少数的情况。

问题是要解释为什么相关概念没有在具体阶段出现。首先，我们在处理一个概率性的概念，它是高度复杂的。只有当因果关系中的一部分因为局部概率分布而隐藏时，我们才会去寻找相关。为了分出这两种元素，从确定的元素中区分出可能的，即有四种可能关联的确定情况的集合。然而，我们刚刚看到了组合概率的格式是形式的。但是，这真的是一个组合概率的问题吗，或者构成具体运算的加法格式足够解决这个问题吗？寻求相关确实需要组合系统，因为被试的问题不是简单地把四种可能的情况分类，而是区分它们之间已实现的和可实现的不同组合。为了把 $p \cdot q \vee p \cdot q$ 与 $p \cdot q \vee p \cdot q$ 置于对立的位置，被试必须从像 $p \cdot q \vee p \cdot q$ 即 $p[q]$ 或者 $p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$ 即 $p \supset q$ 等 16 种可能的组合中分出这两种组合（相当于 p q 和 $p \vee\!\vee q$）。从这个意义上说，相关格式取决于命题组合系统。这就是为什么它较晚出现，并且在形式运算阶段前无法被观察到的原因（第十五章）。

但相关的概念也与比例概念有关，因为例如 $p \cdot q$、$p \cdot q$ 等这些在相关的逻辑结构（以及相对应的数值）中出现的结合，可以用比例形式表达。因此，从逻辑的角度来说，这些可能的命题中的一个具有成为否定比例的特殊重要性[1]，并与零相关相对应。例如，比例：

$$\frac{p \cdot q}{p \cdot q} \vee \frac{p \cdot q}{\bar{p} \cdot \bar{q}}$$

在这里

① 对于否定逻辑比例概念的定义，见皮亚杰：《论逻辑运算的转换》，附录，第 226—227 页。

$$(p\cdot q)\cdot(p\cdot q)=(p\cdot q)\cdot(p\cdot q)=0$$
$$(p\cdot q)\vee(p\cdot q)=\mathrm{N}[(p\cdot q)\vee(p\cdot q)]$$
$$(p\cdot q)\vee(p\cdot q)=\mathrm{N}[(p\cdot q)\vee(p\cdot q)]$$
和
$$(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)=\mathrm{N}[(p\cdot \bar{q})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q})]$$

从数值的观点来看，如果 p 相当于 n，q 相当于 m，$\bar{p}$ 相当于 n'，且 $\bar{q}$ 相当于 m'；我们得出：

$$\frac{n\cdot m}{n\cdot m'}=\frac{n'\cdot m}{n'\cdot m'}\text{ 由此 } n\cdot m\cdot n'\cdot m'=n\cdot m'\cdot n'\cdot m$$

因此，这个比例总是正确的，不论数字 n、m、n' 和 m' 的大小(不仅当 n' 是 n 的反演，而且 m' 是 m 的反演)。其次，它对应一个总是零相关，因为 $n\cdot m\cdot n'\cdot m'-n\cdot m'\cdot n'\cdot m=0$。

Ⅶ. 乘法补偿 乘法补偿与比例的概念直接相关，因为，如果有 $x\cdot y=x'\cdot y'$，那么根据定义也有 $x:x'=y':y$。但从心理学的角度来看，尽管毫无疑问比例的组织总是始于补偿的发现(见Ⅱ)，后者并不总是意味着前者。其次，存在加法补偿(例如，当一个元素正好补偿另一个已经失去的元素)，这种补偿自然地始于具体运算，因此是在理解乘法补偿以前很久习得的。

我们已经研究了关于弹性形变中某些因素之间的相互作用可能抵消的乘法补偿的这些例子(第三章)等。但我们在另一个涉及容量守恒的研究中遇到了一个值得注意的情况。如果一个被试想要证明即使形状改变，一个给定的体积仍是守恒的这一事实，他需要明白体积上一个维度的增加或者减少被另外两个维度的减少或者增加所补偿。很明显，其中涉及了乘法补偿，总是暗含着可能比例的组织。例如，将 3×4×5 单位的平行六面体转变为另一个 6×3×3.33…，如果体积是通过尺寸的乘法补偿来守恒的，是因为当其中一边翻倍了(从 3 到 6)，另两个的乘积减半(4×5＝20 和 3×3.33…＝10)。因此，补偿是基于如下比例：

$$\frac{a}{a'}=\frac{b'\cdot c'}{b\cdot c}$$

或者其他类似的表达。

但是，运算平衡理论的重要事实是，直到能在其他领域发现比例的年龄，儿童才能逐步掌握乘法补偿和体积守恒的概念。但是他的发现过程没有通过测量计算，也没有意识到他定性地进行概念化的补偿的数值计算意味着比例的使用。[1] 因此，一切似乎表明当组织一个运算格式时，被试同时发现了它的各种不同结果，即使没有明确地结合格式的各个方面。在这种情况下，一方面他发现了某些乘法补偿，但没有意识到它们意味

[1] 为了找到体积守恒发展的阶段，我们把一个小球或圆柱形的黏土浸在一个玻璃杯里，在第二个玻璃杯里放第二个圆筒用于拉长或缩短等等，通过水位相平揭露体积守恒。在这种情况下，11—12岁的孩子理解了体积守恒。见 *Développement des quantités* 第 3 章。

着比例，另一方面他发现了某些比例，但没有从中提取到乘法补偿。然后，以一种更为普遍的方式，他能同时发现比例、平衡、相关、乘法补偿等等的概念，没有意识到它们起源于一个共同的运算基础，也没有意识到它们起源的群(INRC 群)的本质。

对于乘法补偿，这种形式尤其引人注目。被试没有用任何计算，定性地出现了补偿的想法。因此他的行为符合某种期望的格式，包括他能够演示解释补偿的运算，这在他们看来是理所当然的。换句话说，以这种方式认识补偿是可能的，并且在能证明它是明确的运算程序之前通常是必要的。但很明显，这并不意味着当被试遇到形状已经改变的体积时不采用任何运算。他的运算格式仅在与他并没有实际执行的测量运算相关时表现为一种期望(或者关于他没有建立任何连接的联合格式)，但它确实需要定性运算，它们让他明白一个维度上的减少并不是简单地放回，而是守恒的，是乘积的一部分。被试在计算之前就感觉到了比例的存在，我们这里可以观察到一些类似的情况。在第一个案例中，他提前就明白了这个问题涉及相同关系的同类转换，而在第二个案例中，乘法补偿，他希望返回相同的乘积。在第三个案例中，他没能建立比例概念和乘法补偿概念之间的联结，因为他还不清楚定性逻辑格式所需要的测量运算。

Ⅷ. 超出直接经验证实的守恒形式。我们已经从乘法补偿格式中总结出了体积守恒概念的发展。然而，即使体积守恒是从在形式阶段开始时习得的，它就具备具体阶段建构的守恒概念的普遍意义，虽然对于他们的发现，实验性证据是不充足的(因为他们需要一个运算组合)，但是它确实满足了完整的论证。与之相反，还存在其他的守恒概念，实验性证据仅从否定的角度证明它永远不会否定它们。但它不能以一种完全肯定的方式去证实它们，因为这个证实无法发生在给定范围的空间和时间内，或与实验者必须接受的实际条件相矛盾。一个重要的例子就是惯性原理。如果被试想要在对照实验中演示匀速直线运动的守恒，他必须面对的基本困难是实验中创建的任何运动最终都会由于外部的阻碍而减速，并且他的观察受限于空间和时间。因此，他推导出惯性原理并从隐含的结果中证实了此原理。严格来说，没有产生显著的实验性证据。

然而，关于我们在解释平衡概念形成中提到的四种转换的 INRC 群结构，阶段ⅢB 的被试确实发现了从妨碍证实的障碍物开始的基本过程。例如，运动损失的原因以下的推理非常简单，但有着重要意义。当任何物体的运动减弱(用 p 表示)，就暗示了存在观测变量的干扰(表示为 $q \vee r \vee \cdots$)，他们会假设如果消除所有这些变量(也就是 $\bar{q} \cdot \bar{r} \cdot \cdots$)，所有的运动损失将同时被消除；结果将是伴有加速度的运动守恒(m，见第八章)：

$$\text{如果 } p \supset (q \vee r \vee s \cdots)\text{，然后 } \bar{q} \cdot \bar{r} \cdot \bar{s} \cdots \supset \bar{p}\text{，这时 } \bar{p} \supset m\text{。}$$

我们可以看到这个推理同时使用反演(N)和互反(R)的否定。

(六) 形式运算的整合结构：思维运算最终的平衡形式

我们从上述分析中得到如下结论：在形式思维中出现的格和群的整合结构，暗示了

不同运算的可能性，这些可能性引起了运算格式的建构。这些格式往往有很大的不同，并且被试没有把它们联结在一起，但是它们或多或少地出现在整合形式中，甚至同时出现在阶段Ⅲ。

因此，下一个问题就是理解这个结构整合的心理意义。因为它不仅是在阶段Ⅲ启用的命题运算的来源，而且还是运算格式的来源，刚才我们已经总结了运算格式在这个阶段智慧行为中所起的重要作用，它似乎在被试行为与思维的因果结构中发挥着持续的作用。而且，尽管它一直很重要，他没有意识到它。鉴于这个事实，它不可能是习得经验的结果，也不可能是思维"先验"形式的表达，因为直到心理成长的最后阶段它才出现——也就是说，这个阶段定义了童年的结束，且指出了从青春期到成年成就的路径。有人假定它与晚熟的神经协调有关，然而，为什么它不能一被组织就全部出现，在某些决定性的器官生效而不是局限于如上所讨论的部分表现中，这个问题仍遗留下来。就这个观点来说，争论在于这样的结构位于神经系统，而不是在无意识的思维或智慧里，它没有进一步解决问题。真正的问题是这个整合结构是否存在于现成的"某处"或者它的存在是另外一种性质。在这一点上，如果我们想要在智慧的因果机制中给它一个位置，同时充分考虑其作用方式的具体特点，我们必须把它设想为一种平衡（而且，这将我们带回到上一章和本章节开始的观点）。

换句话说，如果在形式思维阶段发现的整合群和格结构是平衡的一种类型，它必然以一套可能性的形式存在，其中只有运算和运算格式在外显的成效中实际的进行组织。其他的只作为潜在转换存在，在适当的情况下呈现出作用。

鉴于此，我们可以明白为什么被试没有把普遍结构理解为一个整体：这个整体由简单可能性所形成。但我们也能明白为什么这个整体起着因果作用，因为像我们已经证实的一样（第十六章），心理的可能性能适应证明精神产物。用严格意义的术语来说，这套潜在转换实际上构成了一个系统：其结构遵循群和格把认知领域的新组织作为一个整体的定律，在已经组织了一部分之后不随意出现，但指向通过以反演和互反关系为主的组合定律而填充整体（本章节讨论的运算格式尤其是这样）。

我们还理解了为什么这种平衡形式是早前所有心理发展的必然结果，也理解了正因为这个原因，我们可以将它视为最终联结到后续阶段（成人思维）的成果。首先，我们要记住，在心理发展一个阶段接着一个阶段的过程中，每一个新平台期的运动平衡或运算平衡都是更加稳定的，比之前覆盖了更广泛的领域。尽管感知觉遵循平衡定律，如格式塔理论所示，这个平衡涵盖的无非是情况不断调整的暂时状态（"平衡置换"，正如物理学家所说）。感觉运动行为包含更加广泛的系统中的感知和运动，但一定根据当下的情况且适合同样的置换。随着表征的使用，平衡的范围在前运算行为中更加扩展，但协调作用仍旧依赖于即刻当前的状态，因此经常通过平衡置换的连续性进行控制。另一方面，在具体运算结构的建构过程中，初期运算系统的完整可逆性保证了平衡将维持一个有限的稳定，受限于已经建构的"群"所对应的各种范围。但由于这些运算系统形式

还没有完全从经验内容中摆脱，我们仍旧会遇到平衡的过渡水平，之所以这样定义，是因为其建构的因素存在异质性；然而，还没有形成平衡的普遍形式，可以将这些不同的运算独立于内容之外。最终，形式思维出现，组织了一个这样的形式；其必要性与两个需求有关：在一套不同种类的运算间实现协调，这个形式能够从特定内容中解脱出来。因此，平衡的普遍形式可以理解为在人生过程中不会再被修正的终极意义。虽然它可能被整合到更大的系统中（多价逻辑），且在某种意义上，它融入到了一个到目前为止群集间没有运算联系的单一系统中。而且，它是前期发展的必然结果，因为结构演变必须被理解为平衡的发展，因此是一种定向的进化。这并不意味着它是由最终的原因所决定。在物理学中，熵的增长是一个向平衡发展或不依赖于任何目的论的定向进化的好例子；运算的演变遵循类似的规律，尽管有两处不同：(1)运算平衡增加活动性就像它增加稳定性；(2)潜在或可能的转换对我们上面所分析的心理现实起着关键的因果作用。

因此，将指导形式思维的整合结构视为一种平衡形式，并不同于满足一个关于物理对称性的简单需求，更不用说支持一个哲学论点。正相反，它仅仅是如下事实的结果：心理学不是逻辑。因为它不是逻辑的，它不能满足于用一个抽象的结构去解释事实。它研究的是动作，尤其是我们称之为运算的内化的或意识的动作。这些动作和运算根据因果律彼此互相作用，然而意识最常用蕴涵的形式转换它们（也就是概念间和数值间的关联）。从因果关系的角度，它们可能或多或少地导致平衡混乱或者以平衡结构的组织而结束。经验观察显示了第二个潜力的重要性。在存在结构之处，心理学必须使用能够推论可能性和预测效果的工具，以至于能定义出平衡形式。这样的工具在符号逻辑中发现；但是对于心理学，它的代数学只不过主要用于对分析方式的符号化转换。符号化转换背后的经验现实是协调行为的领域。从这个角度来说，平衡的概念对于因果性解释是不可缺少的，它帮助我们理解，在发展的某个阶段智慧是如何同时处理这个领域所有打开的方向，以与已建构的部分相同特征的潜在转换的方式。如果日后神经学的考虑能够完成我们的解释，群集、格的结构和群将在这个新视角中再现，结果这些平衡定律和只与行为模式有关联相比将会被证明更加普遍。控制论已经帮助我们理解这个联结是如何可能的，因为一个同态调节器中的问题解决方法也是在连续的平衡中进行的，该平衡处于一个包含组合结构（格）和可逆性（规则和群）本质规律的系统中。

第十八章　青少年的思维

迄今为止，虽然已经出版了许多有关青少年情感与社会生活方面的优秀著作——在此我们只提及斯坦利·霍尔(Stanley Hall)、孔佩雷(Compayre)、门多萨(Mendousse)、斯普兰格(Spranger)、夏洛特·彪勒(Charlotte Buhler)、兰迪斯(Landis)、韦恩·丹尼斯(Wayne Dennis)、布鲁克斯(Brooks)、弗莱明(Fleming)、德贝斯(Debesse, M.)等人的研究，或者精神分析专家如安娜·弗洛伊德(Anna Freud)和海伦·多伊奇(Helene Deutsch)的著作以及社会学家和人类学家如马林诺夫斯基(Malinowski)和玛格丽特·米德(Margaret Mead)的著作，其余的著作不再赘述——然而，论述青少年思维的著作竟如此之少，这种情况实在令人意外。

对于青少年的思维只有少数的详细研究，不过正因以稀为贵，这些研究都是很有价值的。但是直到目前为止，所有这些研究都还没有能够达到对青少年思维的整体全貌做出一个连贯一致的勾画。在这些研究中，一方面，推孟(Terman)或伯特(Burt)的智力测验尤其是巴拉德(Ballard)无意义句子智力测验已经对形式思维的假设演绎性质提供了不少信息。而另外一些研究的着重点则稍有不同，他们论述青少年数学、物理思维的著作——约翰诺(Johannot)、米乔(Michaud)等人的著作——则指出了在青少年中所发现的基本思维形式呈现出带有幼儿思维的残余；其结果使一些具体水平的问题泛滥于比较抽象的水平之中。

鉴于目前这种青少年思维研究的缺乏，我们试图在前面十余章(在要求青少年既采取具体行动同时又进行抽象思维的实验情境下研究青少年的实验思维)中的研究结果或能对青少年思维的全貌做出普遍性的概括；而在此以前，无论是智力测验或者言语思维的研究(甚至数学物理思维的研究)都还从未做出过这种概括。

从逻辑结构的观点出发，本书蕴涵的青少年思维与儿童的思维是存在本质不同的。儿童发展出具体运算并对于类、关系和数执行这种运算，但是儿童的运算结构从未超出初等逻辑群集的水平或者说加法数群和乘法数群的水平。在具体运算阶段，儿童开始运用可逆性的两种互补形式(即类或数的反演以及关系的互反)，但是他还不能将这两种可逆性整合到单一的整体系统中去，这种单一的整体系统要到形式逻辑(即形式运算阶段的命题逻辑)中才会出现。与此截然不同的是，青少年能将命题逻辑摆置于类和关系之上，因而青少年逐渐地能够成功建构一种形式运算的机制(在11—15岁时达到平衡水平)，这种形式运算机制的基础就是格结构与四转换群。这种新的整合作用使青少年将反演与互反都整合到单一的整体结构中去了，由此产生的结果是青少年不仅能掌握假设演绎推理和实验论证，这种实验论证的根据是令某一个因素变化而让其他因素都保持恒定不变(即所有其他事物都保持相等)，而且青少年还能掌握若干种运算格式，

并将在实验思维及数理逻辑思维中屡屡重复使用这些运算格式。

但是对于青少年的思维来说，只考虑到逻辑还是不够的。我们现在的问题要去探索是否逻辑变换能适合于对青少年所特有的思维进行普遍的修饰与转换。通常大家都同意把这种思维的修饰与转换看作是青少年的特征，虽然有时人们公开赞成，但更多是含蓄默认，我们不仅必须扼要地指出青少年实际上在做什么，而且更要强调指出结构转换仿佛存在一个中心，由这个中心可以辐射出青少年思维中发生的各种显见的思维修饰与转换。

然而，我们必须在一开始就消除掉某种可能引起模棱两可的误解的根源。我们把个体开始承担成人角色这一事实作为青少年的根本问题。从这个观点出发，性成熟不能视作青少年突出的特征，平均而言各种族各社会中性成熟是在差不多相同的年龄发生的，尽管与此相反的意见流传亦很广（事实上已经证实在加拿大与在斯堪的纳维亚，性成熟年龄只存在很小的差距，而在北方与南方也只有不大的差距，这些说法使我们信服）。但是承担成人角色的年龄则在各个社会有明显的差异，甚至在同一社会的不同社会环境中都会有明显的变化。不过对于我们的目的而言，最本质最重要的事实是青少年所处的主要社会环境的变动（而不单是生理上的成长）。

因而，我们并不打算将形式思维与性成熟联系起来。当然在青少年出现形式结构与发生情感生活的变换这两者之间存在着许多联系，关于这点我们现在就来进行详细讨论。不过这些关系是复杂的而不是单向的问题。甚至在这一点上，如果我们想要把青少年仅仅归结为性成熟的表现，那么在我们开始讨论之前，我们的思维就会出现混乱。例如，有人可能会说爱的感情只有在青少年中才出现，然而不是也有沉溺于爱的感情中的儿童么？在我们的社会中，青少年与儿童爱的感情的区别就在于，一般来说由于充满浪漫色彩或倾向于各种社会的甚至文学的理想而使青少年的情感更加复杂起来。青少年浪漫色彩的形成以及各种社会集体角色模型的出现，既不是性成熟的神经生理变化的直接产物，也不是情感的唯一产物。这二者的出现实际上是由于青少年普遍倾向于构成理论，并且是他们运用周围存在的意识形态趋势的间接特殊反映。而这种普遍倾向的变化是否直接或间接地与性成熟具有某种关系呢？在我们的社会中，七八岁的儿童（除极其罕见的例外）尚不能掌握对于十四五岁的青少年很容易掌握的结构，其原因必定在于儿童还没有具备某些协调，而这些协调的发展顺序是由成熟阶段决定的。根据稍许不同的看法，格群结构可能是与神经结构同构的①，并且必定是用两个因素来解释，这两个因素——思维的转换与成人角色的承担，我们将再次发现它们二者是紧密相连的。承担成人角色这个因素包含着人格的整体重新建构过程，在此期间智慧的转换是与情感的转换平行的或是相互补充的。

① 我们知道麦卡洛克（W. McCulloch）和皮茨（W. Pitts）曾将命题逻辑格式应用于神经联系。（参见 *Bull. Math. Biophys*, Chicago, 1943, Vol. V，第 115—133 页。）

然而，即使形式思维的出现不是性成熟的直接结果，我们能否设想这是由于神经系统成熟而表现出来的大脑皮层的转换结果呢？而且这些与控制论模拟人脑时所提出的机械模型是结构同构的[1]。由于上述这些道理，似乎很清楚，青少年形式结构的发展是与大脑皮层结构的成熟有联系的，但是这种联系确切的形式远非如此简单，因为形式结构的组织同时必须依赖于社会环境。我们发现在我们的社会中，11—12岁标志着形式思维的开始，而这个年龄必定是极其相对的，因为在所谓原始社会中，逻辑刚出现时是没有这种形式结构的，况且形式结构的历史是与文化进化史以及社会集体表象有联系的，而且也与这些形式结构的个体发生史有联系。由于古希腊人仅在进行逻辑与数学的反省抽象时才意识到这一类的形式结构，所以很可能古希腊儿童落后于我们今日的儿童。因而，除去神经因素外，形式思维在11—12岁的年龄出现可能是在教育影响下个体发展递进加速的产物，并且在今后相当遥远的将来，出现形式思维平均年龄的进一步降低也是完全可能的。

总体来说，神经系统的成熟远非完全精心制造的"先天观念"的源泉，它只能做到的只不过决定某一给定阶段的可能性和不可能性的总体。为了实现这些可能性，必不可少的条件是要有一个特定的社会环境。由此可以这样表述：它们实现的加速或延迟可能是与文化教育条件成函数关系。正因如此，形式思维的发生发展以及青少年本身出现的年龄——即个体开始承担成人角色的年龄——更加依赖于社会因素而较少依赖于神经因素。

当我们考虑形式结构时，被试的一些反应与学校教学的某些方面二者间存在的耦合性经常引起我们特别的关注，这种耦合性竟如此显著，我们惊讶于个体形式思维的表现只是社会群体影响下家庭教育和社会教育的结果。心理学的事实使我们拒绝这种完全"社会决定论"的假设。社会不是单纯依靠外界压力作用于成长中的个体，而个体与社会环境发生关系的强度要高于与物质环境的关系中，绝不是一张单纯的白纸，容忍社会强制地随意地将现成的知识印写于其上。倘若社会果真要影响个体的大脑，则必须使个体处于准备同化社会环境作用的状态中。而我们又回到要求个体大脑皮层机制有一定程度的成熟。

从表征着神经系统与社会间一切交互的这种循环过程中，我们获得两种观察结果。第一，形式结构既不是预先铭刻于神经系统的先验内在的智慧形式，也不是超越个体之上的外界现成的集体表象。相反地，形式结构是一些平衡的形式，即是在个体与物质环境相互交往的系统中和个体之间相互交往的系统中逐渐固定下来的。而且归根结底，这两种交往系统从两个不同的角度看来，可以归结为一个单一的系统，这又正好回到我们以前曾多次讲过的情况。

第二个观察结果是在神经系统与社会影响之间存在着个体的活动。也就是，个体

[1] 参见皮亚杰：《运算结构与控制论》，《心理学年鉴》，1953，[illegible]，第[illegible]—388页。

在学习适应物质世界与社会世界中所获得的经验总和。如果形式结构是一些平衡化的规律，如果确实存在个体专有的机能活动，那么我们可以期望青少年思维会显出一系列自发的表现，这些自发表现标志着形式结构的组织化，正如被人们真实体验到的——是否青少年的年龄正是成长中的个体进入成人社会的年龄。换句话说，形式思维的发展应在这样一种方式中产生，即在青少年学习承担成人角色的同时，也促进着他在日常生活中的成长。

但是，我们首先要问担当成人角色这是什么意思呢？儿童感到自己比成人低下并附属于成人。与儿童完全不同，青少年是一个开始把自己看作与成人平等的个体，他开始用完全互反的方法在等同于自己与成人的水平上去判断成人，这是青少年的第一个特征。另外两个特征是不可分割地彼此关联的。青少年是一个正在持续成长中的个体，但他已经在开始思考未来了——也就是开始思考他自己在社会中现在和未来的工作，于是他在自己当前的活动中加上一项关于今后"成年"活动时的生活规划，这是青少年第二个特征。青少年第三个特征是，在我们社会的大多数情况下，青少年在试图规划其在成人社会中现在与未来的工作时，他还带有某种改变社会的观念(从他自己的立场看来，这种观念是直接与他的生活规划有关的)，不论他这种想法是在局部范围内还是完全地改变社会，因此青少年只要充当一个成人的角色就不可能没有冲突。儿童是在眼前的(真实的或想象的)直接补偿中寻求其冲突的解决的，而青少年一般在那些有限的眼前补偿上增加了以改变社会为动机的补偿，甚至特殊的改革计划。

进一步讲，考虑到这三个互相关联的特征，青少年适应成人角色肯定是以情感手段与智慧手段为条件的，正是这些情感与智慧手段的自然发展使青少年从儿童中区分出来了。如果我们将这些新的情感工具与智慧工具作为区分青少年与儿童的出发点，那么我们必定进一步发问这些工具的本质是什么？这些工具与形式思维究竟是怎样关联起来的？

在初步的笼统水平上，对于学生、艺徒、青年工人及青年农民，虽然我们没有根据他们社会态度可能的差异而加以区分，但我们认为青少年与儿童的区别首先在于青年的思想超越了现实。青少年是一个献身于可能性的个体——尽管这绝不意味着我们想要否定他的这种信奉也是起源于现实生活情境的；换句话说，青年是一个开始建造"体系"或"理论"的个体，这是针对这两个术语最广义的意义而言的。

儿童尚无法建造"体系"。儿童自发的思维也可能或多或少有点系统(只是最初程度很小，以后系统程度逐渐加大)。但是观察者是从外部来看"体系"的，而儿童因为他还从来没有意识到自己的思想，所以还无法意识到体系。例如，在我论述儿童关于世界观的一本早期著作中，我们曾经报道过许多有系统的反应。后来我们曾经构造过表征各个发展阶段特点的系统，但是能够构造体系的是我们而不是儿童本人。儿童并没有力图将他的观念加以系统化，虽然他也经常可能自发地回到原来相同的看法并无意识地

给出类似的答案[1]。换言之，儿童尚未具有反省抽象思维的力量——也就是尚未具有直接对自己思维进行批判的二次幂抽象能力。正因为儿童缺乏这种反省抽象思维能力，所以儿童无法建造任何理论。

相反，青少年能分析他自己的思维并能构造出理论。这些理论可能过于简单、幼稚可笑或者通常只包含极少一点独创性，但我们暂且不考虑这些情况。从机能观点来分析，青少年构造的系统是有意义的，意义在于这些理论体系为其承担成人角色提供认知与评价基础，在此无须再指出生活规划与改变社会的计划的意义了。这些系统在同化价值中也是生动有力的，正是价值勾画出社会与单纯个体间关系对立的实体社会阶级。

设想有一群学生，年龄在十四五岁到预备学士考试阶段之间[2]，他们之中大多数都已经具有政治理论或社会理论，并想要去改革世界。他们对于现代社会生活中一切混乱现象都有自己的解释。有些人则具有文学或美学理论并力图将他们的阅读或者美感体验置于一种价值尺度之上，从而投射于某种系统内。另外有些人通过宗教危机冥想信仰问题，发动一种普遍的系统，一种"放之四海而皆准"的系统。哲学的沉思默想席卷了其中的一小部分人，而且对知识分子来说，真正的青少年期总是一生中最突出地富于玄学性的，充满危险性、诱惑力的这段年龄，直到成人水平遇到实际困难时才被忘却。还有更少的一部分学生从一开始就钻入科学理论或准科学理论。但是无论在内容上如何变化，他们每个人都有自己的一种或数种理论，虽然这些理论可能或多或少地明显外露和用言语表达出来，甚或隐含于怀。这些学生则喜欢将他们的观点记录下来，因此，观察他们所录出的纲要以及在后来生活中被实现的情况是非常有趣的。另外有些学生则仅限于空谈和沉思默想，然而他们每一个人都有自己的观念(他往往相信这些观念是他自己独有的)，正是因为青少年具有他自己的观念，才使他从儿童期解脱出来并让他能将自己置于与成人平等的地位[3]。

如果我们现在走出学生和知识阶层的圈子，去考察青年工人、艺徒或青年农民的情况，那么我们会在不同的表现形式中认出相同的现象。我们将会发现他们虽然没有创造出自己的"理论"，但是他们每个人都会赞同某种思想观点，这些思想有的是从别的人那里传来的，有的是从会议中听来的，有的是他在读书时见到的。我们发现在他们中家

① 作为一个实例请参阅：《儿童的游戏、梦与模仿》，Chap. Ⅸ。

② 法文"预备学士考试阶段"(baccalaureat)是法国高中结束时的一种考试，或者系指18—19岁这段年龄。虽然文中对青年的分析从细节看更适合于欧洲青年而不完全符合美国青年的类型，有人可能会提出在美国青年中形而上学理论与政治理论都不太显见。美国青少年的年龄特征和青年文化中典型的现象是在人际关系类型中出现的一种比较"理论"或"假想性"的关系，即这些人际关系还要到稍晚时候才变得严肃起来，但是美国青年与欧洲青年的这种差异仅在于内容，并不在于结构。

英译者注

当然，女孩子们对婚姻问题更感兴趣，但是她们所梦想的丈夫往往也是"理想性"的，而且她们关于恋爱与婚姻生活的各种想法也经常带有"理论"的特征

庭危机较少，宗教危机更少，尤其是他们的抽象程度则差得更多。但是在各种不同的外表下，我们能够轻易地辨别出相同的核心过程。青年已不再满足于生活在其直接的周围环境所提供的人际关系中，也不再满足于运用他的智慧去解决当前的各种问题。更确切地说，尽管他的知识较少，但他的动机也是想要在成人的社会组织中取得他的位置，并且怀着这个目的，通过多种言语符号作媒介，他倾心于参加到更加广阔的社会集团的观念理想和意识形态中去，这在他作为一个儿童时是毫不关心的。

青年具有一种新的能力，使他自己能够朝向抽象的并非当前存在的事物（当观察者自己与儿童相比较时从外部看来如此）。但是这种能力（从青少年自己内部看来）是他适应成人社会组织的一种必不可少的工具，而这又是他最直接、最深刻地体验到别人关心的一种结果。可是我们怎么样才能解释青少年这种新的能力呢？毫无疑问，这种新能力是青少年形式思维最直接且最简单的表现。形式思维既是对于思想而进行的思维（命题逻辑是施加于命题之上的二次幂运算系统，而命题本身的真伪则分别依赖于类运算、关系运算和数运算），同时又是对于"什么是现实"与"什么有可能"之间的可逆关系上所进行的思维（经验给出的资料只是被看作为整个全部可能组合中的一个特殊部分）。这就是形式思维的两个特征。直到目前为止，我们力图以适宜于推理分析的抽象语言来描绘的两个特征，它们是青少年形式思维中永远如此充满感情、生动活泼反应的源泉，青少年正是运用它来建立自己适应于社会的理想。显然，青少年的理论构造揭示出，一方面他已变得有能力进行反省思维，另一方面他的思维使其能超脱当前具体的现实而进入抽象和可能性的王国。虽然这并不意味着形式结构本身须先行组织起来，然后才作为适应工具运用于对个人或社会有利之处。结构的发展和结构的日常应用这两个过程都属于同一个现实。正因为从功能观点来看形式思维起着最根本的作用，所以形式思维才能达到普遍的逻辑结构。况且，逻辑不是与生活隔绝的，逻辑不外乎是运算协调的表现，而这种运算协调正是主体行动的本质。

但是这一意思绝不是说青年在成人社会中占有位置仅仅是由于他赞同一般的理论而毫无自我的卷入。我们必须考虑到青少年进入成人社会时另外两个方面——他的生活规划和他为了改变他所看到的社会而提出的变革计划。首先，青少年不仅能建立新理论或恢复某种旧理论，他还感到他必须建立一种人生观，这样，就能给予他一个肯定自我的机会和创造某些新东西的机会（因此其理论系统和生活规划之间具有紧密的关系）。其次，他想要保证比先辈更加成功（因此青少年需要变革，在这种变革中青少年利他主义的考虑和抱负会被不可分割地交织在一起）。

换句话说，我们曾在儿童发展的各个阶段中发现过的那些过程，又重新在形式运算新的思维和实现水平上再现出来。原来对客体或别人的行动与自己行动的区分模糊，现已让位于趋向于客观性与互反性观点的扩展。甚至早在感知运动水平时，婴儿最初并不懂得怎样将自己动作的效果从外界客体或他人的性质中分离出来。一开始他生活在一个没有稳定性客体的世界之中，尚未意识到自己或者自己内部的主观生活。后来

他分化出自己的自我，并且将他的身体纳入空间和因果组织的场中。这个场是由稳定性客体和其他与他相同的人组成。这是第一次去中心化过程，其结果是感知运动行为的逐渐协调。但当符号功能出现后，语言、表象和与他人的交际将这个场扩展到前所未闻的比例，此时就产生一种对新型结构的需要，第二次自我中心随之出现，这次自我中心是在另一个水平上进行的。第二次自我中心化的形式，还是在儿童自我的与成人的观点之间以及在主观与客观之间相对来说缺乏分化，但这时缺乏的分化是表象的分化而不再是感觉和运动性质的分化。当儿童达到具体运算阶段(7—8岁)，去中心化过程已足以使他能在类、关系与数之间客观地建构起关系来。在具体运算阶段中，儿童在协作的基础上获得人际关系的技能。而且，社会协作的获得与认知运算的构成可看作是同一发展过程的两个侧面。但是当认知领域由于形式思维的构成再一次扩大时，第三种自我中心又出现了，这是青少年期最持久的特征之一；这次自我中心一直要延续到后来出现新的去中心化使得成人工作真正可能开始时为止。

而且，青少年自我中心的表现直接起源于适应成人角色，因为(正如夏洛特·彪勒曾经极好地陈述过的)青少年不仅力图适应于社会环境，而且夸张一点的说法，他还力图控制环境适合于他的自我。换言之，当青年开始思考寻找其就业的那个社会时，他就得去思考自己未来的活动和自己怎样才能改革那个社会。结果仍然是一个相对的失败，由于他不能区分需要组织生活规划的个人自身观点与他所希望改革的集体的观点。

更具体地说，青少年的自我中心是来源于一种救世主的形式，犹如那些用来表征世界的理论以改革者的角色为中心一样，而青少年感到自己将来注定要扮演的就是这种改革世界者的角色。为了完全理解青少年的感情，我们必须超出一般简单的观察并且探索诸如不是为了直接写给公民阅读的作品、日记或幻想的无意暴露这类私人文件。例如杜马斯(G. Dumas)从一个高中班级的全体学生在晚会上朗读有关他们的幻想的诗歌中得出看法，大多数正常的学生——包括最孤独沉默的学生以及最和蔼可亲的学生——安静地暴露出他们的幻想和虚构的寓言，而这些虚幻的东西若干年之后即使从他们自己的眼光看来也承认是一种病态的夸大狂的表达。我们用不着分析这班学生的详细情况就能知道，必须在青年明显抽象的理论与他为自己建立的生活规划之间的关系中寻求这种现象的普遍方面。我们发现在一般的个人的外表背后，这些理论体系隐瞒了行动的规划，而这个行动规划的雄心勃勃及其天真程度往往都是过分的。我们也还可以研究下面一个例子，有从瑞士小镇洛曼希一所学校毕业的十多个学生，他们之中有一个学生现在当了店主，他上学时的文学主张曾使他的同学们大为惊讶，他还曾秘密写过一部小说。另一位学生现任保险公司经理，当年他除了其他兴趣外曾经对戏剧的前途特别感兴趣，他还为一些知己的朋友表演过一部悲剧中的第一幕第一场。但他却没有继续从事戏剧工作。第三位学生现正从事哲学研究，他曾立志献身于调和科学与宗教的事业。我们不再列举其他右倾和左倾的社会和政治的改革者了。在这个班级中只有两个人没有任何令人震惊的生活计划。这两个人(或多或少地背负着家庭出身

的沉重"超"自我感包袱），我们不知道他们可能怀有什么秘密的白日梦。

有时这类生活规划对个体今后的成长会产生真正的影响，甚至可能发生这样的事：一个人在他青少年时期写下的摘记中重新发现某些思想观念的提纲，这些观点实际上后来已经实现了。但是在绝大多数情形下，青少年的计划更像一类高度复杂的补偿功能的游戏，而这类游戏的目标是自我肯定、模仿成人榜样、参与实际上封闭的圈子，等等。因此，青少年所走的往往只是使之满足于一时而不久就被抛弃了的途径。德贝斯(M. Debesse)研究过自我中心主义和少年原创性危机这个课题，不过我们相信青少年的自我中心与其说仅仅是一种单纯的偏离常规的欲望，倒不如说是缺乏分化现象的表现。这一点值得作进一步讨论。

实质上，在任何一个发展阶段中，从自我中心向去中心化运动着的过程，不断地迫使知识的增加向前景重新聚焦。每个人都曾经观察到儿童混淆主观事实与客观事实。但是如果自我中心化的假设只不过重述老生常谈的话，那么这种假设就几乎毫无价值了①。实际上，这却意味着学习不是一个纯粹叠加的过程，并且将一新学的行为或信息置于另一些行为或信息之上这个其自身就不宜于建构一种客观态度。客观性是以去中心趋势为前提的——也就是继续不断地对各种远景（或观点）的重新聚焦。另一方面，自我中心是存在于当前复杂情景之中的一个未加分化的状态，至于客观性则既蕴涵着分化，又蕴涵着对已被分化的许多观点的协调。

可是，在处于更加复杂的形式结构水平上的青少年中所发现的过程也是类似的。由于命题逻辑新工具的出现使得青少年思想力量的无限扩展成为可能，这样一来，立即导致青少年对自我的一些不可预料的能力与他们被应用的场所社会或宇宙之间加以区分的失败；换言之，青少年也要经过一段时期，在这个时期中他赋予自己的思想以无限的力量，以一种光辉的未来通过理念去变革世界的梦想（即使这种唯心主义披上一种唯物论的外形）仿佛不仅是幻想而且具有改变经验世界的实效作用。显然地，这是一种认知的自我中心形式。虽然它与儿童的自我中心截然不同（因为无论感知动作水平的自我中心或单纯表象的自我中心都不存在内省"反映"），然而这种自我中心形式却是从相同的机制产生出来，并且结果是作为被形式思维结构所创造的新条件的一种功能表现出来。

有一种方法能证实上述那个观点，即是去研究去中心过程，正是去中心过程后来使

① 本节叙述的这种观点在欧洲比在美国更为流行。即本书作者们的工作只是单纯证明儿童是一个合理性的创造物这一规范性的。在美国从规范性的观点和心理学研究这两方面看来动机问题比纯粹智慧的问题更为经常地优先予以考虑。然而，在美国有时出现另外一种与此平行的误会，即本书作者们在坚持儿童自我中心的同时，忽略了儿童也可能具有爱的情感这一事实。在这一段落，读者应当搞清楚，最好从自我中心化的根本含义来理解它——即在认知上儿童的知觉是集中于他的自我的，因而儿童缺乏某种智慧的流动性以及缺乏掌握一些不同看法的能力——读者不要把自我中心化与"自私"或"利己"混淆起来。——英译者注

青少年有可能越过分化相对缺乏的早期并治愈他自身唯心主义的危机——换句话说，返回到客观现实中去，这就是从青少年到真正开始成年期的途径。但正如在具体运算水平一样，我们发现去中心也同时发生于思维过程和社会关系两者之中。

从社会关系的观点看来，青少年参加伙伴集团的倾向是有所依据的，如讨论小组或活动集体、政治社团、青年运动、夏令营等。夏洛特·彪勒界定了一个扩张时期和一个撤退时期，尽管这两个时期看来并非是清晰可分的。肯定地说，青年这种类型的社会生活（参与伙伴组织——译者加注）不仅是外界压力使之朝向社会规范的结果，而且也是青少年智慧去中心化的源泉。当朋友之间进行讨论时，当一种理论的主张者不得不经受其他人的理论检验时，这往往是在朋友间的讨论中发现自己理论的弱点。

不过，去中心过程的焦点是青年踏进职业世界或者开始严肃的职业训练。当青年从事一种真正职业，他才成为一个成年人。于是他从一个空想的唯心主义的改革者转变为一位脚踏实地的实践者；换句话说，职业引导他的思想摆脱形式主义的危险而返回到现实中来。观察表明，要达到思想与经验的协调一致，可能是多么困难与缓慢。要了解这一点，只要去观察一下初入大学的学生在开始学习一门实验学科时的行为，就可以看出青少年对其思维力量的信任时间将持续多么长久，还可以看到他们的心理是多么难以倾向于克制其观念去服从事实分析（这并非意味着掌握事实是不需要理论的，宁可这样说，一种理论只有当它得到经验证实时，这种理论的构成才具有价值）。

从这种观点看来，本书一至十五章的研究结果提出一个具有普遍意义的问题。被试对内容广泛的许多实验情境的反应表明，在经历一个发展时期（11—12岁到13—14岁）之后，早期的青少年开始成功地掌握了某些形式运算（如蕴涵、排斥等），然而他还不能建立一种详尽无遗的验证方法。但是，十四五岁的青少年却成功地提出证据（而且这是自发的，因为他还未能使用明确的科学词汇）——青少年才系统地运用需要组合系统的控制法——也就是他每次只改变一个因素而排斥其他因素（所有其他的事物都保持相等）。但是，正如我们经常看到的，这些实验验证的工具的结构是形式思维与命题逻辑发展的直接结果。由于青少年在同一个时候获得了运用演绎法与实验归纳法这两种方法的能力，那么为什么他运用演绎法是如此有效，又为什么他要到这么晚才能将实验归纳法运用到生产和一系列任务中去呢？（因为儿童在实验中对预先准备的仪器做出反应是一回事，而让他自行组织一次研究设计则是另一回事。）这同一个问题不仅是个体发生的问题而且也是个历史问题。为了理解上面这两个为什么，我们可以提出相同的问题：为什么古希腊人仅限于纯粹演绎思维（只有极少例外）①，又为什么现代科学，尤其是物理学，要花几个世纪才将演绎法与归纳法结合在一起使用？

① 至今还没有哪一个人能从社会学观点对这个事实做出一个严肃认真的解释。如果认为古希腊人显露于形式结构应归因于某一社会阶级沉思冥想的特性，那么还是无法解释为什么这种沉思并不限于形而上学的意识形态，且能创造出一个数学系统。——英译者注

我们已知，青少年最主要的智慧特征都是直接或间接地来源于形式结构的发展，因此形式结构是形式运算阶段青少年思维中最重要的事件。至于在形式运算阶段中所发现的情感创新，有两点需要考虑。我们经常发现情感创新是与智慧转换互相平行发展的，因为情感可以看作是行为能量动力，而情感结构又规定着各种认知机能（这并不意味着情感是由智慧所决定，或者反过来智慧是由情感所决定，而是说情感和智慧二者是不可分割地统一于人格机能中发挥作用）。

如果青少年期的确是这样一个年龄，即成长中的个体在成人社会中占有他自己的地位（不管这种角色的变化是否是与性成熟相符的年龄），那么，这种关键的社会性顺应在保证智慧结构化的形式运算发展相对应的同时，必须包含成人的情感社会化所要求的两个基本的转换。第一，理想的情感被添加于个人之间的情感之上。第二，青少年在与来源于社会性相互作用的社会地位和价值尺度二者互相关联的同时，他的人格也在发展着（不再像儿童那样仅仅维持与物质环境或其他个体相互交往的协调而已）①。

自然，本书限于篇幅不准备专论情感心理学。不过，重要的是要看到青年这两种主要的情感特征同由于青年形式结构的发展所引起的行为转换之间是多么密切地交织在一起的。

首先，儿童实际上不存在对于理想的情感，这个事实给予我们深刻的印象。一项关于国籍的观念以及与此有关的社会态度概念的研究②向我们指出，使儿童产生感情的只是他的家庭、他的居住地、他的本族语言和一些风俗习惯等。这项研究表明，儿童不仅对于他自己或他的伙伴究竟是瑞士人、法国人等名称表现出令人惊讶的无知程度和惊人的情绪淡漠，而且同样把他自己的家也只看作是一个集体的实体。这个结果是在我们预料之中，因为对于7—11岁的儿童，逻辑仅应用于具体的或可以直接操作的客体。在这个具体运算水平上，还没有那种能力可及的运算使得儿童超越经验去精心构造一种理想。这项研究仅是许多实例中的一项。人道、社会正义（与在具体运算水平上深刻体验到的个人之间的公平原则是根本不同的）、良心的自由、公民的或明智的勇气等观念如同国籍观念一样，都是对青少年情感生活发生深刻影响的理想，但是这些理想，除个别的隐约感觉外，对于儿童的心理来说是既不会被理解到也不会被体验到的。

换句话说，儿童所体验到的社会情感没有超越出个人之间的感情，甚至道德情操的体验也仅仅作为单向尊敬（权威）或相互尊重的一种功能。但是从13—15岁开始，关于

---

① "个人之间的"与"社会的"这两个词的用法在法语中比在英语中有着更为对立的意义。"个人之间的"系指蕴涵着在熟悉的个体之间面对面的关系，而"社会的"是指个体对整个社会的关系和个体对形式制度结构的关系以及对价值的关系等等。在本文中的意思是说，儿童只是与小集体和特殊的个体发生关系，而青少年则与制度结构和社会价值发生关系。——英译者注

② J. Piaget and A. M. Weil, "Le développement chez l'enfant de l'idée de patrie et des relations avec l'étranger," *Bulletin international des Sciences sociales* (UNESCO), 1951, Vol. Ⅲ, pp. 605-621.

理想或观念的情感就增加到以前那些"个人之间的"感情上去了。当然，这类情感不仅在青少年中存在，在成人中也仍然继续存在。诚然，某种理想永远存在于某个人身上，并且在新的情感综合中，它继续是一种重要的人际关系的组成元素。问题在于探明观念成为情感对象是因为人的缘故，还是人成为情感对象是因为观念的缘故。但是，儿童无法超越这个循环圈子，因为他唯一的理想就是人，而人又是他的现实环境的一个部分。至于青年时期，这个圈子已经被打破了，因为青年的理想变为自律的了。情感机制与形式思维间紧密联系的说法现已无须深入下去了。

人格这个概念是如此难于掌握，以致在心理学词汇中再也没有其他概念比人格一词的定义更为含糊不清了。其原因在于人格运转的方式与自我运转的方式正相反。自我在实质上是自我中心的，而人格则是去中心化的自我。自我是令人厌恶的，当自我过于强烈时甚至更为可憎，至于健全的人格则尽力制约着自我。换句话说，人格迫使自我服从于人格所体现的一种理想，但是这个理想超越于人格之外，并凌驾于人格之上。人格信奉一种价值尺度，不是抽象地信奉，而是同某一给定的任务相关联的[1]，因此，它（人格）最终会选定一个社会角色，不是行政机构意义上的现成角色，而是个人将要创造出来而去实现它的角色。

因而，可以说青少年期是这样一个年龄阶段，在这个年龄阶段青少年在成人社会中取得了他们自己的地位。按照定义来讲，也就等于说这就是人格形成的年龄阶段，因为从另一个互相补充的立场看来，成人角色的选定就是人格的构成。而且，我们曾经把生活规划和改革计划视作青年行为中一个最本质的特征，这些规划和计划同时又是人格形成中推动变革的情感力量。生活规划首先是一种价值尺度，它将某些理想置于另一些理想之上，并且将中等程度的价值服从于思想上认为稳定的目标。但是这种价值尺度是一种情感组织，而情感组织又相应于这位社会新成员对于他将要从事的工作的认知组织。生活规划也是一种自主的肯定，把自己看作与成人平等的青少年最终达成道德自律，也是准备投身生活的青年人格的另一个本质的情感特征。

总之，青年基本的情感形成过程平行于智慧的形成过程。为了理解思维的形式结构在青年生活中的作用，我们发现归根结底必须将这些形式结构置于其整个人格之中。但是，反过来说，如果不包括思维的转换过程，我们也就无法完整理解其人格的成长。正因为这样，我们又必须要返回到形式结构的发展。

康清镳译，曹宁宁修订

1 对于人格与任务之间的关系，请参阅：I. Meyerson, *Les fonctions psychologiques et les oeuvres* (Vrin)。

原版索引

与数理逻辑符号表达有关的心理活动

〔瑞士〕让·皮亚杰　著
朱倩兰　译
蒋　柯　审校

与数理逻辑符号表达有关的心理活动

Les Activites Mentales en Rapport avec les Expressions Symboliques Logiques et Mathématiques

作　者　Jean Piaget

原载于 *Synthese*，1957-1958，10，pp. 127-145.

朱倩兰　译自法文
蒋　柯　审校

内容提要

逻辑学与心理学两门学科长期以来存在龃龉，但同时也存在着某种亲缘关系。皮亚杰在逻辑学与心理学非此即彼的关系之外提出了新的解决方案：数理逻辑结构无法对应某种特定的心理活动，但可以对应心理活动的平衡化形式。为了确定平衡化形式的性质，皮亚杰着重分析了“心理-数理逻辑”依存关系：人类智慧从感知-运动和知觉等内在活动出发，借助言语思维发展和渐进结构化的协调作用，最终走向形式化运算系统的平衡化形式，而这一平衡化形式与数理逻辑结构同构。

朱倩兰

与数理逻辑符号表达有关的心理活动

让·皮亚杰
（日内瓦，巴黎）

有学者在第七届国际符号学会议上向我们发问，在此将问题简述如下：如何用一般意义上的逻辑数学来表达心理活动？逻辑（或数学）符号是否直接地构成了某种特殊语言，在这种情况下，心理活动是否通过其量化特征而被还原为相对简单的活动，从而成为更为简单的言语思维下级分区？反之，同样这些符号是否能够映射出思维更深层的运算与结构，在这种情况下，我们需要追溯到什么水平才能把握心理活动的整体，这一整体为自身的形式化和运用提供了条件。

I

继而，上述问题虽然表面看来是纯粹的心理学问题，但是或许它们在当代认识论领域内是更重要的问题，假使我们判定逻辑（或数学）符号和主体活动之间存在联系，我们就能更好地理解它们同外在现实之间的关系，而活动主体一方面是外在现实的产物，另一方面也是外在现实的组成要素。更简单来说，对逻辑和心理活动之间关系的认知也构成了一项关键元素，以此判定普遍认知机制当中逻辑的重要地位。

然而矛盾的是，虽然问题如此关键，随着逻辑自身的发展，问题的解决方案愈发复杂，仿佛在自我完善的过程中，逻辑逐步远离了实际思维，而在心理层面变得活跃！一方面，逻辑在亚里士多德那里被设想为某种表达式，不仅表达思维的基本结构，也表达现实整体的构成形式；另一方面，人们认为莱布尼茨的组合[combinatoire，译注：该词出自莱布尼茨与1666年出版的《组合的艺术》(*De Arte Combinatoria*)]能够反映建构性理智的能动性，而布尔(Boole)代数则是遵循"思维法则"(lois de la pensee)的直接符号化公式，当代逻辑学家倾向于将逻辑符号体系视作一门纯粹抽象语言，他们并不将它还原为直接的约定俗成体系，与此相反，他们意识到需要跨越逻辑结构和思维结构之间的鸿沟，他们设想中的逻辑结构是"理想形式"或曰"柏拉图的理式"的反映，也就是说，逻辑结构模型存在于人类智慧之外，并非源自人类智慧。逻辑学家在对逻辑做出阐述时，在多层次的习俗语言与多层次的超验模型这两个极端之间摇摆不定，尚不必说他们仍

试图在学科观照的抽象结构和真实思维的实际结构之间维持着古老的同构性。

然而，在这样的情况下，所有人都能看出其中的缺陷。从逻辑的角度看，上述情况最终构成了数理逻辑模型，这些模型无法运用在其他领域，仅能用来证明某些经数学思维上优化后的形式。除了符号体系中的某些特殊类别之外，这些模型彼此不再同构，而特殊类别只构成言语思维中有限的一部分，至于言语思维本身也只能表征、再现有限的智慧环节。于是，最完整意义上的逻辑和通常所谓人类理性之间的联系就此断裂；如果逻辑本身因为其特殊性过强，而不再适合于更加专门化的领域，那么，我们如何期望逻辑能够长时间地体现发挥它的规范作用呢？反之，从实际理智的立场来看，这个问题不可避免地会导致这样的后果，即纯粹理性的领域逐渐缩减，因而绝大多数心理活动都被人们视为不同层次上的非理性活动；令人人们很容易倒向这种势头强盛的非理性主义(irrationalisme)，它建立在某种社会病的基础上，运用一些理论(doctrines)将唯一适用于具体现实研究的方案勾勒成型。

然而，无论我们对此持有怎样的价值判断，事情的发生和发展都可以用上述两种截然相反、在某种程度上又互为补充的流派(近几十年来数理逻辑与思维心理学彼此龃龉)佐以其他一些方法来简单地做出解释。出于公理化和抽象化的需要，数理逻辑理所当然地有着如下趣向：不仅对逻辑模型是否与真实思维中的某种结构相对应缺乏兴趣，还对所有持这一趣向的研究报以怀疑，这是因为非完全形式化的传统逻辑在这一方面留下了糟糕的历史记忆。反之，作为对先前研究成果的回应——这些成果取代了在逻辑承诺(obligations)下开展的关于理智、智慧的实验性研究——心理学成功地避开了对逻辑格式的引述。因而，一方面出于对“心理主义”(psychologisme)即心理学解释对逻辑领域产生不合理干扰(intrusion illegitime)的担心，另一方面出于对“逻辑主义”(logicisme)即逻辑解释对心理学领域产生不合理干扰的担心，人们已经不再追问：逻辑结构究竟对应了哪些心理活动。而在实验心理学和数理逻辑的实际研究当中，两者的对立导致那些被人们赋予了精神逻辑功能的符号化或形式化模型和实际的智慧机制之间看起来不再有任何关联。

只是，以上并未说明事实的全部，因为除了历史的、方法的冲突之外，两门学科之间无疑存在某些共同边界，它们之间短暂的关系破裂反映了某种更为深刻也更为简单的理由，即事实上两者关系的问题被我们提错了。确切来说，我们相信这一理由成立。以下我们将尝试证明这一问题(逻辑和数学符号表述是否对应某些确定的心理活动？)并非只有两种解决方案，而是有三种。我们可以用肯定命题来回应这个问题，正如经典逻辑所做的那样，经典逻辑的逻辑结构曾被用来描述实际思维运算。但这种方案如今已不可取，因为鲜活的实际思维显然并不像逻辑模型那样，有着完美逻辑化的结构。我们

---

① 参见一例，伯奈斯(Bernays)：“在数学性质的推理中，有且仅有一种正确的逻辑推理之用。”(逻辑与科学，第1页，收录于国际科学哲学会刊，巴黎，1949，逻辑研讨会)

也可以用否定命题来回应，大多数当代的逻辑学家也都是这么做的。但这个方案在我们看来同样不可取，因为实际思维比"逻辑外在于思维的本质"所设想的"思维"具备更好的逻辑结构。而且，即使逻辑仅仅构成了一种抽象语言、一个习俗系统，或者是外在于人类精神的模式化映射，它仍然可以解释为了构成这种语言、运用这些习俗、习得这些超验模型而需要具备的理智-智慧运算如何为达到目标而建构自身。何况，这样的建构本身就假定了它与逻辑之间存在某种亲缘关系。由此我们给出了第三种解决方案，即我们在本文中提出的方案：逻辑不对应确定的心理活动，因为后者从属于实际的联结系统，与之对应的是，逻辑构成一个纯粹概率（即理想化联结）的系统；同时心理活动也并非外在于逻辑，因为实际联结采用的某些形式仍以概率为其条件支撑。由此，对于所有思维活动而言，重要的是分清它的实际状态和它所趋向的平衡化形式，即使这一平衡尚未实现或仅部分实现。进而，所有的平衡都涉及虚拟的或者说概率性的转换，每个心理活动系统在它们所处的实际的或现实的维度之外，还包含着相应的平衡化形式的结构；能介入平衡化形式判定过程的，是能与系统内部联结相兼容的概率集合。正如我们所主张的那样，这第三种解决方案支持了以下论点：数理逻辑的抽象模型不仅对应了心理活动本身，同样也对应了心理活动的平衡化形式。

因而，迄今为止始终对立的两种主张取得了和解。一方面，当今大多数逻辑学者所坚持的"形式化模型彼此同构"这一观点仍能站得住脚(legitime)，至少在思维的某些领域成立，当然这些领域相当有限，实际上已经还原为数学思维的某些层面；因为只有在数学这样的领域才能有效取得思维的永久平衡。另一方面，考虑到经典逻辑所支持的一切思维（甚至可以是一切心理活动，如果我们赋予思维以笛卡尔式的宽泛意义）都包含着不同程度的逻辑，因为"一切心理活动都倾向于根据某种平衡化形式来组织自身"这样的观点也同样站得住脚。我们只需补充以下内容，它们导致了经典逻辑从物种不变论(fixisme)到发生学观点的转变：一、根据活动阶段性成型的程度，平衡化形式呈现多样化形态；二、平衡化形式只能在各个阶段中逐步地形成，多数情况下其形态并不完整。不过每种平衡化形式都会对应一种集合结构，这些集合结构又分别对应着概率性的逻辑模式化过程，对应着不同程度的形式化过程。

II

在证明上述观点将导致何种特定结果之前，我们首先要简要地阐述一下方法学的问题，以及逻辑学和心理学在此类研究中各自的能力表现。如果选择上述第三种解决方案，接下来的方法确实会比前两种方案更为复杂：除了纯粹的形式化格式、数理逻辑的各种对象、作为经验事实的心理活动及实验心理学的各种对象之外，还需要考虑平衡形式化分析，这一分析是基于实验数据的心理学研究，同时因其运用计算来对可能存在

的转换做出判定，从而部分地具备演绎属性。下文将给出三种解决方案之间的关联，而不仅限于前两种，因为前两种方案中的任何一种都不足以解决问题。

例如，假如我们追问，在心理活动之中，命题 $p \vee q$ 的二价逻辑普通运算（即 $p \cdot q$ 或 $p \cdot q$ 或 $p \cdot q$）对应着什么。那么，我们应当区分以下三个领域，它们分别对应三种研究方法。

（1）在逻辑领域，运算 $p \vee q$ 只依据定义和公理而存在，这些定义和公理允许我们在句法关联系统和规则意义（语义学的）系统中整合运算，进而整合为一个完全形式化或公理化的理论。运算 $p \vee q$ 构成了一种纯粹形式，它与其他类似的形式通过某些仅由演绎法则由定义、公理或定理的确定联结而紧密地关联在一起，它和所有这些形式之间的若干联系受到定义、公理或定理的限定，即受到排他演绎（façon exclusivement déductive）的限定。

（2）在心理活动的领域，我们可以在某些实验条件下，或者在发展的某些阶段中观察到一些近似于 $p \vee q$ 的实际运算。例如，有两根长度和宽度相同，但材质和截面形状不同的直杆，某个年龄阶段的儿童会给出多种假设来解释为什么其中一根比另一根更易折弯（flexible），并枚举可能的原因，可能是材质，可能是截面形状，或者这两方面共同起作用；相反，处理同样的认知任务时，认知发展水平更高一阶段的儿童却无法同时依据以上三种概率的考察（对新的直杆）来组织经验，他们只能注意到前两种可能原因中的一项或两项，但不能注意到第三项[1]。因此我们是否可以说，发展水平较低的被试忽略了运算 $p \vee q$，而当他们发展到下一个阶段就可以立刻识别出这一运算？这一结论相当突兀，之所以突兀，有如下两个理由。理由一，针对更简单的情形，更年幼的被试也能处理类似格式的问题：比如预计要花一笔钱买东西，要么买巧克力，要么买蛋糕，要么两个都买。而在更复杂的任务中，譬如可折弯直杆的例子，更年长的被试可能忘记了，析取（disjonction）不总是排他性的。理由二则不再以"实际析取和逻辑运算 $p \vee q$ 彼此同构"作为其结论，这一理由如下，倘若逻辑运算 $p \vee q$ 是某个构型良好（例如，完全形式化）系统的一部分，实际运算不能脱离整体语境做出自我解释：相同的语言表达形式可能包含了完全不同的结构性运算，只有研究运算所归属的系统才能定义运算的性质。

（3）这让我们转向对这种系统的集合结构和平衡化形式的考察（这种转向是顺势而行，不需要参考任何先验学说）。为了确定被试关于直杆弯曲的推理的析取（可弯折直杆的金属材质、截面形状，或两者均有）和关于购买活动规划的析取（买蛋糕、买巧克力，或两种都买）之间的区分，显然我们首先要考虑整体心理学语境。被试第一步运算基于事实假设。这个假设可以自发地运作，并在较年幼的儿童那里通过经验性尝试错误的方法试图做出穷尽枚举；相反，被试的第二步运算没有建立假设，而是仅限于想象先

[1] 参见英海尔德（B. Inhelder）《儿童与青少年实验态度》，《心理学报》（巴黎），1954，第272—282页，以及合集（Synthese）最新分册刊载文章，题为《运算中的偶然性起源和现实阻力》。

前经历过的事件，借助具体计算，预测后续的结果。无论表面上两者多么相似，两步运算的层次截然不同，与第一步相比，第二步运算与形式化析取 $p \vee q$ 之间的距离要疏远得多。

为了进一步评价被试在推论直杆弯折原因过程中表现出来的析取运算的特征，我们除了考察假设-演绎思维，还要更进一步：为此有必要重构被试的整体运算系统。在此我们意识到，远在被试能够进行析取运算之前很久，他们就已经可以很好地使用其他运算格式了，比如命题计算（例如，思考类似的逻辑蕴涵：如果只考虑材质这一项原因，那么两种材质相同但截面不同的直杆的弯折性应该相同）。

如此说来，既然我们不能从实际执行的运算中分辨出系统的平衡化形式，又不能通过那些作为既成活动的前提的概率集合或虚拟转换集合来考察系统平衡化形式的特征，在此难免会遭遇诸多困难。为了遵循观察和实验方法所得到的结果——我们借助实验方法来考察被试的推理能力——我们认为，有相当数量的运算格式表面看起来完全不同，但实际上它们基本上属于同一水平，只是被试并不总是能够在它们之间建立联系。例如，我们观察到大致从12岁（平均）起，被试开始运用组合运算（联合与交换），第二类命题间运算（$p \vee q$、$p \supset q$、$p \cdot q$ 等等），并能够在它们之间建立否定（反演）关系和可逆关系（方向相反的转换之间的对称性关系），用来解释在这个年龄还不能理解的物理现象（譬如压力和阻力的作用与反作用）。于是，如果我们要阐释不同的运算格式（及其排除了偶然收敛以后它们之间联结的统计学频率）的同步形成（formation synchronique），只能得出一种解释：这些格式构成了同一集合结构的不同方面，在特殊情况下，只要这个集合结构具有命题间运算的网格化（或网络化）特征。实际上，这个网络包含了命题间运算自身的联结，也包含了反演和可逆关系的规则，从而形成了四种转换关系的群[*]。我们应当承认，倘若类似的集合结构存在于相应发展水平的被试的心理活动中，那么在各种不同的实验条件下，这个结构的多种属性都能够分别地表达。很明显，倘若事实果真如此，被试心智中的集合结构将不会表现为外显和完整的系统形式化，这种外显和完整的系统形式化类似于运算表和理论等这些可以让孩子随时备查的东西，例如儿童能够背诵并使用的乘法表或算术课会用到的其他规则。这种集合结构在心理学意义上仅以某几种现实运算格式出现，这几种格式之间并无明显的关联，而有相当数量的虚拟转换可以将它们与现实运算格式相联结：在准确的字面意义上，这种集合结构构成了平衡化的形式；如果我们不将平衡化形式的发生完全归因于神经协调的延迟发育，那么上述不失为一种便利的解释。

从逻辑格式和心理活动的对应关系的研究立场出发，同前所述，我们发现有必要区分三种而不只是两种解决方案。关于逻辑格式的研究只能覆盖逻辑学领域，这毋庸置

[*] 亦即我们在《合集》和《逻辑公约》（第286页）里描述过的INRC（正、否、逆、逆否）命题逻辑方阵。

疑；而关于心理活动的有效性或现实性的研究则仅仅覆盖了实验心理学领域，这也是确定的。那么，要如何分析平衡化形式？这些形式的特征由集合结构定义，这要求我们能够计算集合结构之间的虚拟转换。因而有必要在此引入同时具备实验性（基于通过实验而得到的现实格式）和演绎性（在概率性的转换系统中嵌入的现实格式）的方法，并且，演绎部分的分析仅仅适用于逻辑代数和普通代数的结果。如果我们能将数理逻辑比作数学（两者都是严格的演绎科学），相应地，将实验心理学比作物理学（两门学科均以实验结果为其出发点），那么，就有必要将有关思维平衡化状态的研究设想为同数学物理学（physique mathématique）相对应的存在。数学物理学运用数学方法，为的是解决那些由物理学实验揭示其性质的问题。而我们提出的新学科其唯一目标在于阐释和预判心理学秩序下的实验事实，这种阐释和预判则作为计算工具，运用数理逻辑的算法，仅仅面向心理学问题。因此，它所涉及的并非数理逻辑或者说演绎真值条件的理论本身（我们并不用数学物理学来证明数学上的真值），而是心理-数理逻辑（psycho-logistique）①，即与真实思维相关的理性运算理论。

这即是说，我们发现，为了在逻辑格式和心理活动之间建立对应关系，必须迂回地经过如下阶段：如果前者不直接地对应于后者，而仅仅对应于其平衡化形式（正如我们在前文1部分结论中所承认的那样），那么仍有必要在某些特定的逻辑结构和平衡化形式中间建立局部同构关系之前，精确判定平衡化形式的性质；这一判定过程也支持了“心理-数理逻辑”。因而，逻辑与心理活动之间的关系问题就与前述纯粹数理逻辑与心理-数理逻辑关系的问题发生了关联。

另外，为了让我们自己相信类似的发展并非人为促成的，我们再次指出，上述多样化考察和研究物理机制与受分析结构的关系时所做的种种考察之间存在着充分的对称性关系（symetrique）。毕达哥拉斯（Pythagore）曾混淆了数量和数字（figures materielles），而柏拉图（Platon）则将数学设想为可感知世界的规则性实在，在此之后，为了分解元素并在它们之间建立对应关系，建构一门数学物理学就成了必要（阿基米德用统计或某种平衡化形式的理论开创了这门学科）；仅仅通过纯粹数学和数学物理学的对照，我们就可以判定今天的物理世界究竟在何种程度上与纯粹数学的特征结构同构，也可判定从何处开始，物理世界不再能还原（irreductible）为纯粹数学结构（我们不能确定这个问题是否已经有解）。至于逻辑学和心理活动的问题，则更多一层复杂性：（身为思想实体的）逻辑学家的演绎本身是一种心理活动，同时（身为理论建构者的）心理学家的心理活动则服从于逻辑规则，因而相对来说，比起物质实在和数学之间的关系，心理逻辑之间的关系更为紧密（我们同样可以说，数学家的大脑活动从属于物质实在，同时物质实在只能以逻辑的和数学的方式被人思考）。

---

① M. N. Isaacs 对我们的著作《逻辑公约》作了批评研究，其中他提到“心理-逻辑”（psych-logic）（英国，心理学期刊）。

Ⅲ

有关符号学会议上的问题，方才我们试图厘清方法论上的难点，暂且不论问题复杂性如何，要针对实际认知情况得出某种研究结果，或者做出与研究结果相似的预测，对我们来说并非不可能之事。

首先，所有人都认同的一点：在任何情况下，逻辑结构都和某种语言形式同构，进而也和某种言语思维结构同构。一般而言，逻辑和心理活动（心理活动可以在言语层面取得特别稳定的平衡化形式）之间存在着一个交会点。

但随即出现了第一个问题：言语思维是否是语言学习的产物？是思维赋予了心理语言学的逻辑结构以一种更接近社会学而非正统心理学的特征，还是反过来，是语言映射出了思维的法则，也映射出同时包含了个体的一般运算（包括个体的心理生物学特征，个体的神经系统，等等）以及个体间合作的某种思维法则？这个问题从一开始就难住了我们，所有人都清楚问题难点的范围和严重性所在。

有一点要指出，如果说上述问题是关乎思维和思维内容（由概念、范畴等构成的系统）的综合考虑，那么幸运的是，如果我们将其限定在形式化结构范畴，并将问题归结为一点，这在逻辑上尤为重要：即运算，或者，我们更愿意称之为"算子"（opérateurs）或"概念运算的格式"，那么问题的范围将会缩小很多。从这一角度来说，我们确实可以指出，运算格式远不是由语言（langage）将碎片组织而成，而是存在于语言之前，并在更为抽象的意义上得到语言的简单修正，这类修正取决于运算格式对象的符号化程度。首先需要指出的是，有关类别或者言语命题的运算仍然是一种运算，也就是，更准确地说是一种内在活动，而不仅仅是某种运算的标记符号。联结两个对象类别 A 和 A'（$A+A'$）或者两个命题 p 和 q（$p\vee q$）的活动，总是有效地将某物与另一物联结在一起，当这些"物"仅仅是符号化的对象而不是实体对象时也是如此；而联结活动事实上被表达为（+）或（$\vee$）之类的符号，这一事实并不排除另一项事实，即所谓的联结仍然是实际的联结（尽管是针对符号对象的联结）而不是符号的联结。确实，对应于物质实体，类别 A 或 A' 不过是符号式的存在，但当我们用 $A+A'=B$ 这样的形式联结两个类别，由此形成的联结，其真实程度绝不逊于将两个物质群集联结为一个整体的活动，因为上述联结生成了新的类别 B（同理，命题 p 和 q 的联结生成了新的命题 $p\vee q$）。简而言之，我们必须说，从心理学的观点看，符号的联结仍然是实际的运算（是内在活动），而不仅仅是符号的运算（对无法自行完成的内在活动的指称或者描述）。其中可能涉及更为短暂简易的内在活动，正如内在言语是由一系列迅速而耗损少的微小动作组成［见让内（译注：Pierre Janet，法国心理学家）相关论述］的那样。假如我们忘记探索抽象语言和言语思维的活跃特性，那将造成极大的错误，这一特征在命题运算的现实性中以极特殊的方式

呈现。

也就是说，这类运算或内在活动理应有其心理学意义上的发生和发展历史（在其社会学意义上的历史之外），观察表明，儿童不能在所有层面上掌握此类运算，不过他们可以逐步将其建构出来。而关于心理学意义上的发生的研究能为我们方才提出的语言思维难题提供解决方案。

我们完全可以坚持以下观点，即思维（即使是运算思维也同样）全部源于言语活动，同时支持以下两个命题：(a) 言语运算是完全通过语言生成的内在活动；(b) 儿童作为社会（语言群组）和语言本身的一部分即教育活动的对象，逐渐（可以说相当缓慢地）掌握了这种运算。我们并不否认发展中环境的作用，但必须承认的是，儿童并非纯粹的接受者，外部知识的同化作用遵循精确的阶段性连续法则，这些法则取决于借助内部结构将所得知识重构或重新组合这一事实：正如语言不能一生下来就已经学会，是由于缺少符号化功能（符号化功能直到儿童1—2岁时才开始习得，习得过程可能表现为多种其他特征：符号化—象征性游戏、区别性模仿、初级心理表象，等等），而语言体现的多种类型的联结，只能逐个阶段并在某种具有部分自发性的结构建构过程促进作用之下得到同化。总体而论，社会环境能加快个体智慧发展，但个体智慧并非全由社会环境生成，社会环境仅能推动心理结构（部分来自遗传，部分则由个体自身的活动决定）的分化和使用。

基于上述思考得出的结论是，言语运算的建构并不仅仅取决于语言的使用，这一建构假设了一系列由主体行动决定的次级结构，并由语言轻松予以实现。为了将其维持在运算联结的范例内，很明显，用析取关系联结两个命题 $p \vee q$ 并不等同于两个类别的相加运算 $A+A'$，同时相加运算也不能还原为两个实在群集的物质性联结。在所有的联结形式中，仍然存留某种连续的发生学谱系（尽管演变过程中有大量的分化和转换），从最基础的感知—运动活动汇集相似的对象，到符号化过程所能生成的最抽象形式都是如此。并不是语言教会了人类将不同集合的对象联结在一起，而是因为一般生物尤其是人类都有能力完成联结活动，语言则使这些活动得以延伸和分化，及至将它们转换为言语运算。

从语言和思维之间关联的角度来看，将两者共有的结构与前言语阶段感知—运动活动的分析和知觉研究所揭示的结构加以比较，这将是最好的方式。我们理应承认，没有语言就不可能产生思维，因为在严格的术语的意义上，思维（即所有现实知觉场域之外的对象表征—再现）本身就假定了一种符号化的表达手段。但也存在一种先于思维的智慧形式[即感知—运动智慧，借由知觉和运动或体位特征（的协调）而实现]，思维则成了它的后继延伸。因而，是语言支撑了思维，两者之间不是单方面的作用，而是有着持续的相互依存（符号和意义相互依存），以上论点最有力的证据是在言语思维结构与感知—运动智慧结构之间，甚至在其与知觉结构之间，存在着大量的共同元素。

实际上，考虑到运算属于内在活动，正如我们方才将其视作联结活动那样，这些运

算是从物质活动或曰外部活动衍生而来，物质活动的基础形式先于一切语言而建立在纯粹的感知—运动层面上。当然，这并不意味着感知—运动的结构已经达到了与言语思维即形式化思维的逻辑结构同构的水平；正如我们已经强调过的，逻辑结构只与思维的平衡化形式同构，而感知—运动智慧的结构离最终的平衡化形式仍很遥远。但其中也包含了不少活动，从这些活动中我们应当辨认出未来运算发展的端倪，而运算的出现体现为集合结构的形成，这些集合结构表明了最终平衡化形式的特征。对于分类活动与形成关系的活动来说更是如此。

我们无须从感知—运动层面来谈论严格符合逻辑的分类活动，在一个包含了层级化(hierarchique)的系统中，存在分类活动，这种分类活动内化于我们称之为活动格式的功能之中。由此，对于一个8—10个月的婴儿来说，世界的客体可以分为：吮吸的、可以摇晃(并发出声音)的、可以在摇篮边上摩擦的，以及用来保持平衡的，等等，这些类别之间理应存在着可能的相互作用。因此值得我们注意的是，观察主体在陌生对象(比如一个烟嘴)出现时的反应：他以正面的方式(*à son endroit*)依次地尝试上述几种活动，就好像为了探索新事物的本质，关键在于把这个陌生的对象纳入自己已有的几种活动格式中，并根据这些格式构成的运动概念(concepts moteurs)对新事物的种类和功能进行分类。分类开始的最有力证据是，在更晚些的时候，即习得语言之后，当5—7岁的儿童按照成年人的要求对客体—对象进行分类时，一开始采用的是"使用功能"的定义[参见比奈(译注：Alfred Binet，法国心理学家)的研究]，之后过渡到是单一属别的逻辑定义，再之后才是属别加种差的定义。例如，儿童首先定义：桌子是"用来写字的"；妈妈是"要爱我们的"，之后才有了：桌子是"一个物体"，并且是"一个平的物体"；妈妈是"一位女士"，并且是"有孩子的女士"等这样的描述与定义。

此外，显然，即使面对无(实际功用)意义的对象，人们也能依据知觉，基于可感知的对立或相似性等的分类线索(linéaments)来分类，故而，视知觉能独立于所有概念，直接分辨图形是开放的还是封闭的，图形元素是曲线还是直线，如此等等。对于量的概念，如果要求被试区分垂直杆子"是大是小"，我们发现在大小这两种范畴之间存在一条相对稳定的界线(对应于一个绝对中位数)，在年幼儿童组中这个数值是9—10cm，随着年龄增长有所降低；这里重新出现了二元(dichotomique)分类，虽然可以通过言语表达，却是建立在前概念的知觉格式化的基础之上。我们仅指出形状或量的格式化具有活跃的性质，这是相对于"知觉活动"的活跃：开放的图形是我们不能用眼睛(或手)无间断地追寻的图形，等等；用来判断的杆子大或小的区分界线大致对应于杆子比例中位数(而不是遵循韦伯定律的代数中位数)，而这些大小不同的杆子都可以纳入(需要保持一定的接近距离)同一片视域。

不过，在基本分类之外，感知—运动活动和知觉活动因其联结能力显得格外突出。故而，在所有语言和所有概念化思维之前，感知—运动智慧和知觉本身发展出了几何学、动力学等多种关系的复杂系统，不仅取决于质的相似与不同，还取决于密集的量值(量

多,量少,或者等值)。暂且不论这些关系能否导向严格意义上的运算(由于缺乏完全可逆性),它们已具备资格参与换位和代偿活动(例如著名的量值知觉守恒),参与对称活动(即可逆性 réciprocité 的来源)也参与到其他以基础形式表达运算的协调活动。运算的感知-运动预备阶段程度如此之好,以至于庞加莱(H. Poincaré)能以充足的理由援引一组临近空间内的经验性位移,这类位移指明了最原始的协调活动的特征。我们近两年来关于发展的研究证实了这一假设:18—24个月的婴儿不能从最开始就给出某种位移群的先人形式,但却在大量摸索和渐进建构中(其中经验发挥了部分作用)发展了感知-运动结构,并最终走向了平衡化形式。

我们可以从这些事实中得出结论,要识别哪些心理活动介入了结构——被介入的结构的最终平衡化形式与逻辑结构同构——关键在于不能局限于只考察言语思维活动:言语思维运算不过是源于活动本身的漫长建构过程的结果;经由一系列不间断的连续结构——起初是全然不完整且极少平衡的状态,其后愈发开阔、复杂、精密——智慧最终形成了言语思维的形式化结构,而逻辑的任务则是将这些结构从它们的心理学关联中抽象出来,并将其进一步形式化。

这一演变过程中,以下三点尤为重要:

(1) 首先,有这样一类运算,它们在思维的深层水平(对应于智慧的基本水平)和发展程度最高的言语思维形式之间构成了连续性的因子;实际上,这些运算是内在活动,通过集合结构的协调活动而获得了可逆性,运算的每一种基本类别或多或少地都源于活动,于是,这些运算的最初发端都可以追溯到心理组织的感知-运动阶段。

(2) 在常规意义上,除了技术性的形式化,即指出事物合乎逻辑的特性之外,还存在着自发的渐进的形式化,即指出事物接续演变的发展阶段的自然顺序的特性。这是符号化的开始,符号化标志着2—7岁儿童组从纯粹的感知-运动活动向具体化并伴随着语言活动的转变,这也构成了形式化的开端;实际上,随着言语名称和基本句子(如叙事)的成倍增加,感知-运动格式即转换成了概念,并逐渐嵌入到语言驱动的集合概念系统之中;于是,类别和关系与被感知的对象分离出来,即使对象不在面前,类别和关系也能被唤起,这便是通往形式化道路上的第一站。伴随着具体运算活动之间的协调作用(从7—8岁起),某些系统化的推理成为可能,但只能针对特定的对象进行推理,这标志着形式化水平的新发展。接着从11—12岁起,儿童的这类推理开始基于简单的假设而自动组织化,从而构成了假设-演绎机制的起点,并且从具体对象中解放出来;继而,命题逻辑与(仅在具体运算层面上实现的)类别逻辑和关系逻辑发生了重叠,这标志着严格意义上的形式化思维的出现。总体上,存在着一种自然的形式化过程,是语言为其提供了可行性,而形式化正是思维本身发展的结果,从简单的给定条件(即时性活动)到具体运算,再到假设-演绎运算的必然性,因此这种诞生于活动的运算最终在高阶言语思维阶段发展为自身可协调的系统,其平衡化形式与逻辑结构同构。

(3) 在自发形式化的相互依存中,思维运算经自身协调成为越趋复杂和平衡的集

合结构。因此我们需要充分理解，其一，上述系统走向平衡化形式的趋势，其二，从活动到运算的转换，这两点是同一个发展过程中不可分割的两个方面。其实，平衡化状态的特征即在于建构一个可逆的系统，也就是这样一个系统，在其中与联结兼容的虚拟转换之间彼此互为代偿，而每种实际转换都可以用另一种相反方向的转换予以抵消。继而，有些特征能使运算区别于简单（具体的或内在的）活动，确切地说，就是可逆的转换系统中每种运算与同类别的其他运算总体之间的协调性与可逆性。从单向作用活动到运算的转换，依照事实，意味着动态平衡化形式的建立，这种动态平衡遵循可逆性的最高法则。

另一方面，可逆性又有两种基本形式：一是反演或否定形式（运算被其反演抵消），二是逆转或对称形式（互逆的两项运算乘积等价）。前者是群结构的特征，后者是网络结构的特征。

所有的智慧发展和接续的思维发展都由如下三条法则统领：从活动向运算过渡的法则；由运算协调为形式化程度更高的结构，直至接近假设－演绎结构的必然性法则；以建立在反演和逆转基础之上的可逆性结构整体为其特征的平衡化形式阶段性地建构了规则平衡化的形式。

为了论证上述命题，让我们倒着追溯回去，首先考察最后一个阶段——即平衡化形式和逻辑形式化结构同构的阶段。这一阶段的特征实际上是同时呈现出“群”和“网络化”集合结构的特征，其中“群”由四种转换构成（直接转换、反演转换、可逆转换和逆否转换）；这一集合结构将反演和逆转协调在一个单一系统之中，并阐释了11—12岁到14—15岁儿童的命题间（interpropositionnelle）（即命题逻辑）运算的形成。

不过，在到达最终平衡化形式之前，反演运算和逆转运算在具体运算的层面上分别地形成了，前者是对分类运算的否定，后者则是关系运算的转换。此外，在具体运算的层面上，一些特定的集合结构已经形成（从7—8岁到11—12岁）；这便是所谓的基本“群集”（groupements），这些群集分别协调分类与关系的加法和乘法运算，并基于各自的倾向而组成了某种半格（semi-lattice）或不完全群（缺乏完整的关联性）。

再有，“群集”作为形式化层面上单一集合结构（这一结构产生了整体性协调作用）形成的预备，其本身则是在表征性的前运算思维阶段（从2岁到7—8岁），由一系列心理活动的集合预先地成形的，这些心理活动促成感知－运动向运算的过渡，并由直观的分类和关系的渐进性联结（articulations progressives）构成。这些心理活动还处于前逻辑的（还没有严格意义上的守恒性和可逆性原则）水平，起源于一些表现出近似可逆性特征的调节作用。这些调节的结构在知觉结构和运算结构之间充当了中介，并具有重要的发生学意义，但它只包括了限于当前空间和时间范围内的平衡化形式（一旦知觉状

说其是动态的，是因为其中涉及多种运算的转换，而不涉及静态的表征－再现。但我们也清楚，平衡化状态可以同时拥有稳定与动态两重属性。

态发生了可识别的变化，平衡化也随之位移）。

最后，发展的起点是感知-运动结构，这一结构中尤为重要的部分是由知觉结构组成的。这些知觉结构受直接活动的场域和感知空间的限制，尚不具备表征性。不过，在它们有限的范围内，知觉结构的发展方向已经趋向了可逆性（实际位移群），以及由可逆性导致的常量（知觉守恒与恒常对象的格式）。

结论是，心理活动的渐进结构化过程为逻辑结构做了铺垫，也因此覆盖了发展的全过程，应该说逻辑的根基比我们通常想象的要扎得更深更广。跟随逻辑蔓生的趋势我们不得不后退到足够远的距离才能追问，神经机制的特定集成（integrations）是否并不构成逻辑嵌套的最初雏形；当我们发现研究大脑活动的当代控制论模型向平衡化过程中的群结构和网络化结构寻求灵感，我们理应假定，前文大致勾勒出的发展过程的框架在某种程度上与有机体的进化过程同构，有机体的进化过程并不排除语言学与社会的因素，而是允许环境影响下的同化作用，从而提供了某种功能统一体，以确保其生物的、心理的和社会的适应性。

运算逻辑试论

〔瑞士〕让·皮亚杰　著
肖　源　姚桂明　应厚昌　左任侠　译
蒋　柯　审校

运算逻辑试论

法文版　*Essai de Logique Opératoire*，Paris：Dunod，1972.

作　者　Jean Piaget

肖　源 姚桂明 应厚昌 左任侠　译自法文

蒋　柯　审校

内容提要

皮亚杰的《运算逻辑试论》(*Essai de Logique Opératoire*)1972年在法国Dunod出版，该书是1949年出版的《逻辑通论》(*Traité de Logique*)基础上的再版。1991年，由应厚昌翻译、左任侠审校的第五章，收录于由华东师范大学出版社出版的《皮亚杰发生认识论精华译丛》。此次是国内首次对全文进行翻译整理，第五章则保留了应厚昌和左任侠翻译的版本。

《运算逻辑试论》一书系统地阐述了皮亚杰的心理逻辑学的理论基础和推演技术，是我们了解皮亚杰逻辑的重要文献。全书内容可分成三个板块，引言是第一板块，从总体上介绍了皮亚杰逻辑的对象与方法，以及探讨了皮亚杰逻辑与心理学、社会学、数学等学科之间的关联与区别，特别是与罗素的数理逻辑之间的区别。引言之后的内容共有八章，分成两个部分。第一章至第四章构成"第一部分"，第五章至第八章构成了"第二部分"。第一部分讨论了命题内的运算，包括命题、类和关系，类别的逻辑、关系的逻辑、集合的逻辑以及命题间运算和数字之间的关系等内容。第二部分讨论了命题间的运算，包括命题计算，命题间运算的量化表征等运算示例，还包括了皮亚杰对演绎的基础、经典三段论和数学推理等传统逻辑学议题在皮亚杰逻辑意义上的解读。

皮亚杰的逻辑不同于传统逻辑学。皮亚杰逻辑并不是由逻辑学家发明出来"规范人们应该正确思维的规则"，而是从对儿童动作的观察中形成的"人的实际思维活动"的形式化表征。皮亚杰的发生认识论解释了逻辑如何从儿童的感知—运动的协调之中形成。在本书中，皮亚杰专门讨论了类、关系、数字、命题等基本结构是如何建构的。这些结构不同于传统的逻辑学独自建立的形式化系统，而是在"自然"思维中的运算关系的表达。因此，皮亚杰的逻辑不是从实际动作中逐步抽象出形式化法则，并因此而脱离了自然思维的纯粹的自下而上的形式化体系；也不是从公理出发，通过演绎而形成的自上而下的形式化逻辑。皮亚杰的逻辑是通过辩证建构的方式，在实际关联的两个系统之间形成新系统的发生性运算的形式化表征。两个系统之间的关联也是"意义"发生的基础。因此，皮亚杰的逻辑是一种"走向意义的逻辑"。

蒋　柯

目　录

第二版引言

1947年，人们请我写一本《逻辑通论》，仅是因为那一时期更有资质的作者都拒绝承担这种风险。而我曾出于已开始研究的发生认识论的需要，于1942年出版了一本关于《类、关系与数》的小册子，其中已经包含对这些结构建构的初期逻辑分析。因此我接受了这一"论文"的任务，但同时在小标题"运算逻辑试论"中表明了我的意图，主要是为了尝试说明逻辑形式是如何建构的。

专家们怀着复杂的感情接受了这么一本书。一方面，这解释了为什么他们中的某些人至少是得到了某些东西才会希望出版第二版；另一方面，解释了为什么负责这次再版的逻辑学家格里兹，愿意以他的奉献与友谊来承担这份并无好处的审定工作。

那么，本书从何处着手的问题就是要理解类、关系、数字、命题等的基础结构是如何建构的，这些结构是由逻辑学家完全独立自主地形式化的，此外还要探寻它们与"自然"思想下"运算"的关系，"自然"思想更简陋且非形式化。和一些人说问题不存在，是忘了数学家的算数是从"自然"数出发的，而自然数在所有理论存在以前就已经被建构，且从逻辑学家的共同观点来看，数字表示了和类、关系的某种亲属关系。可能也忘了亚里士多德是从对于整体思想的思考中得出的三段论，假如他能在自发的推理中发现存在一种关系以及空类等的简单逻辑的话，他的想法也许能更加完善。此外，现今关于形式化限制的研究已经够多了，因此，在这种形式化内存在着"自觉的"现实，需要理清它们与形式化结构的关系，后者已经变得非常强大。

这意味着，发生认识论存在的一般问题就是要根据认知的形成机制来抓住认知的本质，显然我们应当将对逻辑结构的建构包含在这个程序中。然而，自从1952年在日内瓦建立了一个发生认识论的国际中心，这一机构的工作主要就是跨学科的：在那里，逻辑学家、数学家、控制论专家，等等，与心理学家和生物学家一起合作，因此，如果我们这本取名不太好的《逻辑试论》在十年后出版，它本该是一个团队的作品，它跨学科的本质让我不得不尝试坐在两把或三把椅子之间。

专家们的反应有两种。一些人赞同使逻辑运算研究从属于集合结构研究，并且认为，假如集合结构存在，应当在"自然"思想归属的结构中探寻集合结构的根源①。但

① 此外，我们要说明"自然"结构规律通常缺乏主体意识：它们表明了在解决任意问题时知道"做"的事，而没有表明以自反方式所想的事。

是，在这种情况下，还需要解决中间阶段形式化未被控制的问题，因为，如果有可能将群、格结构等大型已完成结构公理化，问题就只与以前结构有关，例如"集群"结构，之后我们将再谈到这一点。相反，另一些逻辑学家完全没有兴趣提出我们刚才说到的问题，他们责备问题产生的缺陷，因为我们的试论中缺少形式化。相反，我们备受鼓舞，因为我们说服了这些反对者中的一位，著名逻辑学家贝丝(E. W. Beth)在发表了一篇极其严肃的文章之后，与我们合作撰写一部名叫《数学认识论与心理学》①的作品，在这部作品中，我们对"逻辑学与心理学之间一定的合作"(共同结论，见原版第325页)的必要性达成了共识。

现在适合来仔细说一说在本部作品中将会看到的和不会看到的。其中的中心观点是，形式化不是一种状态，而是一种过程，因此形式化立足于一层层建立起来的结构之上。我们尝试达到它们之间最基础的结构，但是自然是在它们已经能够进行必要组合或有效推理的情况下，我们在代表类与关系逻辑最简单阶段的分类运算和连接运算中发现了这些结构：例如仅有某些描述性学科的阶段，如动植物系统分类学；例如系谱关系中的阶段或者最初"运算"建构中思想发展研究所明确的阶段。

然而，要分析这些结构，恰好它们没有构成"格"，例如布尔代数证明的结构，这是命题逻辑和类的完整逻辑的基础：事实上，分类只能通过逐步的(或"邻近的")嵌套进行，它不包括"部分的集合"或单形，就如同命题组合的情形一样。这种机动性的缺乏同样让我们不能将分类简化为群。相反，我们可以从系列化或对应乘法结构中得出某些不变的组合特征，这些特征已经可以让我们探讨群的结构，而这种结构在科学认识前的"自然"思想和简单描述性学科中十分常见。我们以"集群"之名表示这种结构。

但是，虽然"集群"与其性质内容十分接近(因此它对追寻基本的人有益，而对抨击普遍的人无用)，对它的分析却导向了两种出人意料的结果。第一种与整数、类和可传递不对称关系之间的联系有关。事实上，我们将尝试证明八种可能性质集群中的两种(简单包含的集群与系列化的集群)是如何失去限制特征且必然融合成唯一体系的，只要我们将表现它们个体元素特征的不同品质抽象出来即可，那么可以通过包含与顺序的综合从这一融合中提取出整数的序列。因此，有可能得到"自然"数的建构机制，而不使用逻辑之外的成分，同时避免了《数学原理》(*Principia Mathematica*)简化论中难以解决的难点：事实上怀特海和罗素引入类之间一一对应的运算已经包含了数，将类别个体固有的不同品质抽象出来。而基础集群中的双单义对应只与包含相同品质的项有关(见第四章)。

集群研究的第二个结果是使人理解，从逐步的嵌套出发，某些我们称为"替代"运算的一般化是如何得出这种对所有分类的分类(或二次幂分类)，而所有分类是由组合分解和"部分的集合"所建构的。实际上，这和集群到格，然后到日常逻辑所依靠结构的过

① 《发生认识论研究》第十四章，巴黎，PUF出版社，1961。

没有关。但是也还有其他，因为在组成反演N（已经作用在类的集群中）、相互性R（已经作用在关系的集群中）、关联性C（或R的逆命题）和恒等变换I的同时，我们发现了四元群的可交换群，如RN=C，RC=N，NC=R和NRC=I。然而，对那些害怕思考逻辑中"自然"思想的人来说，也许指出一件事会比较有趣，早在1949年——也就是逻辑学家尚未着手以前，我们就已经在命题运算中发现了这一群的存在（相信这件事已经为众人所知）。

这意味着，出现了一个关于集群形式化的有趣问题。实际上或者，有人（如格里兹，1967年）以提出公设的方式进行，但公设有映射的限制性规则，又或者有人得出了一个过于丰富的结构，这一结构属于格，但因为有限制而不属于集群。然而这些困难都十分有意义，可能有一天我们能实现一种公理化，但比实现格或群的公理化要简单得多，也有可能遇到的障碍都难以逾越。在这两种情况中，首先肯定了形式化构成一种过程，而不是独立于被考虑等级之外的一种后天情况。其次，似乎证明了一个结构和其内容越接近，形式化就越容易。其实，我们知道，弗雷格（Frege）本人，在一篇给人深刻形象的文章中已经承认未能建构出一种内容的逻辑①。通常，我们还将看到形式与内容总彼此关联，所有形式都与某一内容有关，而与更高等级的形式相比，它又构成了另一内容。因此与集群有关的困难可以解释为又一个将这种结构看作基础的理由，因此它既缺少机动性（这让她丧失了传统逻辑学家与数学家关注的高级结构的一般性）又难以形式化。

然而，对我们而言研究这种结构还挺是有趣的，准确来说是因为它的一些缺陷，因为它构成了自然思想运算和足使逻辑学家形式化的运算之间一种较为稳定且十分常见的过渡项。事实上，正如我们可以对"半群"等感兴趣，这一结构既构成了半格集合也构成了未完整群。就群来说，集群已经包含了完整的可逆性以及一般与特有恒等运算，但是，因为它的运算也包括重言式，所以结合性只是部分的。至于格，不考虑这种比被补格互补性更强的可逆性，我们可以看到半格，主要是因为，它分别对待加法运算（+，∪或∨）和乘法运算（×，∩或•），因此缺少一种"部分的集合"，"边界"的数字也有局限性（出现"上确界"不常出现"下确界"或相反），还有一种通过逐步简单嵌套得到的组合。如果我们只关心"一般"结构，那么这种组合模式没有任何价值，而且所有公理学家的趋势可能将会是取消这些限制以实现一种完整的群或格，这是很简单的。相反，如果我们寻找"基础"以达到"自然"运算和可形式化结构运算之间的关系，那么应该需要分析员来证实，这些组合可以去往何方。然而，它们不仅可以导向被补格，还可以如前文所说，通过顺序和包含的综合导向自然数，还可以通过反演和相互性的组合导向群INRC，这些似乎都证实了这一研究。

我们没少尝试（第六章）证实集群组合的一般规则给命题间运算集合的内容，再是

① 弗雷格，1962，引言。

我们同时把加法运算($\vee p$)选择为顺运算，而将乘法运算($\cdot p$)选为逆运算。这种情况下，集群当然囊括了所有"部分的集合"的组合，但是指出这一情况是很有趣的，因为在可能组合的细节中，我们重新发现了分类与序列化集群的命题等价物，这建立了基础却有限的结构之间更紧密的联系和被补格的最终结构。

最后，我们希望感谢格里兹(J. B. Grize)，他负责了本次的再版，同时主要使用了一种比之前我们所使用的更符合逻辑学家用法的符号体系，我们从前的关注点侧重于结构主义而不够形式化。读者将为此感谢他，我们的这位同事放弃了"集群"的形式化是因为已经提到的原因，与这种结构的特殊情况有关，这一结构作为"自然"结构，与其性质内容关系紧密；然而我们重复一下，这其实带来了一个受到广泛关注的问题，不论未来的解决方式是什么，对于"自然"思想与形式主义日渐增长的要求之间越来越被忽视的关系来说，都将是十分有意义的。

让·皮亚杰 1970 年 5 月

引 言

逻辑的对象和方法

如今人们都得承认，任何一个逻辑公理或定理的效力(度)，已独立于人们所持有的关于作为普遍性学科的形式逻辑的各种观念之外。这一事实表明，逻辑[1]由于它的严谨方法代替了古典逻辑依赖反省思维、语言的表达方式，已经跻于真正科学之林。然而，同其他科学，包括所有的演绎科学一样，一旦涉及它所特具的原则意义，所要达到的目标以及所遵循的方法，则各派学者使意见分歧了。正因如此，申明一下我们将要谈些什么是必要的，并且明确一下所使用的方法也是不可避免的。

老实说，我们本可以这样颠倒次序，从"在行动中(in medias res)"[2]开始，到陈述结束后再问及逻辑是什么，最后从原则的讨论中做出总结。这种方法不是没有理由的。可是这篇《引言》乃是一个初入门者对于前辈的工作表示立场，甚至许多论点又同他们有分歧，那么，遵从——逻辑原则归属于逻辑学者本身——这一事实是主要的。可是，前人的意见又不一致。夏·瑟路斯(Ch. Serrus)于1945年写道[3]："人们不用数学家讨论数学的原则，但仅要求他们提出原则。任何一种科学是在自身形成中证实着自身，而逻辑学不是什么别的东西，只不过是一种科学，一种思维的规律的实证科学。"数学家们完全有理由严格为他们自己的科学要求自主权，今天看来任何学科都有这样的趋势，为逻辑，也应当保留这种权利，即使它的领域和认识论之间也应明确划定(夏·瑟路斯却要逻辑在基本原则意义上向后者请教)。另一方面，别的逻辑学家果真像夏·瑟路斯那样理解为"思维规律的实证科学"吗？阿姆斯特丹学派却更愿意把逻辑的基本原则理解为"交通"规律的科学，至于维也纳学派更把逻辑的原则理解为一些"句法"的规则。纵使承认了逻辑是研究思维本身的学科，可是又产生了一个新的问题，这样一种思维规律的科学又与心理学的一部分，即思维心理学辐合起来。这里就留下这两者的分界问题，

① 当皮亚杰单独使用逻辑一词的时候，它是指的运算逻辑而言。——译者注

② 古希腊诗人荷马(Homer)的用语。——译者注

③ 夏·瑟路斯(Ch. Serrus)：《逻辑通论》(*Traite de Logique*)，巴黎，Aubier出版社，1945，第71页。

即历来称之为规范性的和实证性的区分。

在上述种种以外，要加上一种基本的理由用来确定逻辑本身的地位，这就是：一些逻辑结构是被一切科学利用来做验证的唯一共同工具（除各科学本身的特殊工具外）。当一个数学家构造一种数的系统或一种几何时，并未向自己追问数或邻近空间究竟是什么（尽管事后在"基本原则"理论上会发生反省深思），他有权这样进行工作，因为他依靠一组先在的真理，逻辑的真理。但，欲想分析这真理的人又得依靠另一种被人承认的（甚至反省得来的）证据，或者依赖于交通（交际）的必要性，甚或依恃来源于其他科学有效的指导（甘愿冒一种循环的危险……）；或者不依据任何东西，仅站在先入论上来加以解释。显然，这将会存在一个循环：人们只能借助某种形式的逻辑推论（直觉地，等等）来构造逻辑。但这一切问题全在于了解这一选择：宁可缩小这一循环而甘冒使之造成恶性循环的危险，还是扩大这一循环而使之统一于一切科学的回环系统①的这一集合之中。

如果受到数学直接构造程序的启发，径直完全从命题运算开始，那么，就逻辑相对于其他科学的地位讲来，逻辑学者定会遭遇到不可克服的困难。我们可用这一事例来做说明：任何两个命题 p 和 q（即可令之为"真"，也可令之为"伪"）在它们之间可给出 16 种组合；三个命题则有 256 种组合与之相对应，如此等等。何故得出这些题目？来源于 2^n 这一公式吗？在这一情况下，就可提出两个疑问：每种数目分明的组合表明一种不同的逻辑意义，这是如何达成的，尤其是何故认为逻辑建立在组合性分析（Combinatory analysis）之上是先入的，而组合的数学演算本身却蕴涵②着整个逻辑？人们果真找不到一条更自然些的出路吗？

一提到逻辑发展的"本性"是什么，那就把我们引回到原则的讨论上来了。现代逻辑之所以趋向于"纯粹化"，也就是形式化，这是因为大家易于取得一致的意见。可是，人们可以提出疑问，而且上述命题间的组合实例亦足以立即揭示疑问的意义。与其困处于完全的形式主义中，即在这种科学中使尽一切演绎验证（即完全形式化）的方法对先决条件作分析，倒不如为了达到从各个具有重要意义方面看来的形式，采用跟踪逻辑形式化本身的发展阶段这一更好的方法：让我们从地面向屋顶（况且还可以免除"浮居阁顶"这一必要性）建筑上去，以代替把下层建筑倒挂于上层建筑之下吧！

§ I 逻辑的对象

这一论点是所有逻辑学者不论他们属于哪种学派都会同意的：逻辑的分析指向于

① 参阅皮亚杰，《科学的回环》，载《发生认识论导论》，第三卷，巴黎，P. U. F 出版社，1950。——译者注

② "蕴涵"着什么，意指"以什么为（先决）条件"。——译者注

某些真或伪的陈述，换言之，逻辑的对象是关于“真”和“伪”的问题。不管是规范逻辑（正确思维术或真理法规汇编），或是反省思维逻辑（认为是“真”的思维之分析），抑或形形色色的数理逻辑，如柏拉图派、唯名论者，唯实论者，等等，他们中的每一个人只不过乞援于对真和伪的差别见解。因此，作为第一步逼近，人们可以这样表述：逻辑是真的知识（只从它的最一般的形式来考虑）的研究。

但，真的知识，在各自特殊的形式下，则依存于别的科学，不依存于逻辑，各种类型的科学知识的研究乃是认识论的对象。这样一来，先得区别认识论和逻辑间的各自领域；然后还得区别逻辑和其他科学间的各自领域。在第一种区别中，有些人把逻辑吸收入认识论的领域，另一些人则相反。比较广泛的意见（也是我们所能接受的）是，研究知识可以借助主体与客体之间的关系来进行，也可以凭借形式来进行，传统上把认识论叫作主、客体间关系的研究，而把逻辑一词保留给知识的形式的分析。

对认识的主体和经验中给出的客体之间的关系构造出一种理论的确是可能的，而且习惯上则把这一理论赋予一个名称，叫作知识论或认识论。但，历史表明，如果人们企图（从主体内在、先天方面或从构成知识的后天方面）一劳永逸地掌握主、客体关系这样一种广泛形式来对待这个问题的话，那就会导致多种多样的、彼此不相调和的认识论，它们必然同心灵玄学，或外界玄学，或两者的玄学结成一体。我们相反地认为，建立一种实证的[1]认识论是可能的，然而要把整个问题归结为这样一个疑问[2]：各种知识是怎样生长着的？从发生的和历史—批判的角度，所有古典的认识论问题都曾加以讨论，但要借助于生长的字眼，而决不能从静止观点出发。

看来同样在广义的形式下和在狭义的形式下认识论都是既从客体也从主体的观点看待知识的。甚至当它处理公理化的数学学科或纯粹形式的逻辑关系时，认识论也会回到主、客体关系的问题上来：它自身所特有的问题，即涉及一切演绎科学的问题，就是去理解逻辑和数学不仅在它们的主体活动方面，而且在恰当符合现实方面是如何可能的。那么，这一问题就比逻辑问题广泛得多，而后者仅只涉及命题系统的内在效度，就是说，仅论及某一命题从该系统中被推导出或其他命题从该系统中被排除去的方式。认识论于是可假定逻辑问题已经解决；反之则不真实了。甚至纯先天的认识论连同其最唯心论的玄学，还不得不提出一种经验理论并用以解释假定在先天的一些框框和一些感觉的给出之间的吻合。逻辑则相反，仅单纯地研究那些给出被命题陈述出来的方式，并且研究那些命题怎样在它们之间递相推导出来，因此它只针对主体活动之内的一个领域。即使感觉给出（所与；张本），从认识论的观点来看，是同客体和主体行动之间的相互作用有关联，即使一些命题表示着运算，即主体施加于客体的动作；逻辑所关心

① 皮氏在此地所用的“实证的”一词意味着“积极的”，绝无实证主义的含义。——译者注

② 参阅皮亚杰：《发生认识论导论》，三卷，1950。《发生认识论研究》，第一卷，P. U. F. 出版社，1957。——译者注

的只是这些运算（运转）的系统化和内在的一致性，而不是它们和客体本身间的关系。就在这一意义上，逻辑绝对地仅与主体的活动有关，而不关心主、客体间的相互作用，至于后者则专属于认识论的范围。这并不意味着逻辑在任何意义上有否定或肯定认识论上的客体存在的意思，但那些运算（逻辑上研究它们形式内的一致性）可能被人们运用去施加于某些外界客体，逻辑本身却绝不考虑去干涉它们的①。

现在要确切认识这一点，逻辑关心的真和伪唯一地在构成一种形式的真理和一种形式的虚伪。因此，人们应当区别实在的真理（或命题与经验间的符合）和形式的真理（或命题间的符合）。实在的真理属于实验科学的方法论的问题，形式的真理则是“形式逻辑”这一学科的研究对象。对于各别科学的特殊方法的研究，有时人们称为“应用逻辑”，而形式逻辑后来我们就简称为“逻辑”。我们认为方法论并不等于逻辑，而且为了反对使用“应用逻辑”一词，提出了三个理由。第一个理由是，从历史的、发生的观点讲，所谓应用逻辑总是存在于形式逻辑之先。人们总是首先向现实进行推理，并且只有当智慧的运转已经组织就绪，整体结构充分营造以后，人们才会向自己提出怎样推理的疑问。逻辑于是只能是一种人类反省的和回忆的形式化的产物，而非在应用以前业已制定的法规。当亚里士多德企图制定（形式化）逻辑时，数学早就已经存在了，他自己也早在那里试图理解宇宙，并特别在那里对生物进行分类。第二个理由是，在逻辑已变成一种实证的（积极的）科学，即持有它自己的计算术以后，它才能被应用于数理各科，以至于其他科学，如数学各科被应用于其他科学，也如物理、化学被应用于生物学一样。但，这些应用完全不同于各门科学自身的方法论：它们只在于把逻辑的公式整合到那些演绎科学的公理化的理论中，而且应用它们的时候也只限于那种一时当不能用数量而只能用质量的词来表示的东西，或利用它们来构造各种模型②。第三个理由是，方法论是各门科学专家们的事情，为了有成果地对待各种方法，最低限度的（如果不是完全的，但的确是必要的）条件是让它们经受实践，经受生活的检验！由于不肯承认这一自明之理，那些来源于培根的“归纳”逻辑，一直显得如此地不恰当，以致它的效果迄今仍赶不上古典的演绎法的成功。

各门科学方法论的程序各自经过专家分析以后，大家自然而然地都极端推崇认识论和逻辑，唯独方法论对前者特别重视，因为认识论确切地揭示出联系着主体与客体的生动活泼的关系。逻辑则相反，仅仅从方法论的给出中汲取那些与逐渐形式化知识——从纯事实的陈述开始一直到建立一种连贯的理论知识——有关的元素。这样它就不能把本身置于历史的、发生的角度，而仅停留在形式化地位上踏步不前了。

---

① 贡塞斯（Gonseth F.），于1[illegible]年认为逻辑的特征就是任何外物的物理。这一唯物念派逻辑的强调，未免走得太远，以致侵入认识论的领域了。

② 在心理学里，人们可能借助逻辑学符号来描写（独立于量数之外的）某些机制，例如，智慧的机制，知觉的机制，等等。——译者注

简言之，真和伪就逻辑来讲只不过是形式上的真和命题陈述间的矛盾。逻辑并不一定要建立一种经验的理论。确实是这样的：逻辑从基于事实的给出(张本)[1]之极可能简单的、当前的那些陈述出发；但不是它，决定着一个命题，对于事实而言，是真的还是伪的；它仅仅只凭借某些纯粹的"给出"，即一定数目的"陈述"，来接受某些陈述已被规定为真的，另一些已被规定为伪的，而它本身的工作则是从对这些通过假设规定为真或伪的陈述的形式结合开始的。于是它就指出(这也正是它的绝对作用)，这些在彼此间组合起来的陈述怎样抵达于某些形式上必然的结论，或者达于某些矛盾：这都要视它们是否遵从某些结合的形式结构为转移。就在这一意义上，我们认为逻辑只对纯形式结构为转移；只对纯形式感兴趣，而毫不关心客体本身，后者则受到实验科学和认识论的关注。

现在正好来决定一下"形式"是由什么组成的，也就是说，形式是什么的形式。这里存在的一个先决问题是：此处所指的是一种规范的形式(即，一个由若干规则和规定好的价值的集合)，还是一种被某些必然性规律而不是被一些强制性律令所规定的结构。解答这一问题有两种意见。一种意见以巴黎大学教授阿·拉朗德(A. Lalande)为代表，他认为逻辑本质上就是一种规范的学科，因为它研究的对象就是真和伪，而真和伪便是些被规定的价值，又因真是被义务性地强加于精神之上，并非遵循着自然的或心理学的规律，而是遵循着道德规范的东西。另一种意见以维也纳的唯名论者为代表，他们认为逻辑建立于其上的那些形式的结合组成着一种结构，确实是理念化的、格式化的结构，但是结合的转化亦可达成一种演算，从而既能产生心理的验证，也能产生一切组合分析。

实际上，以上两种论点相应于对逻辑的两种可能看法(是相互补充的)，并且涉及逻辑的认识论的意义，但不影响它的技术。所以它们是可以同时被接受的，任何逻辑的命题既可以依照规则用规范的言语来表达，也可以依照规律用验证的言语来表达。比如说，试令两个命题 p 和 p，通过形式构造，表示真和伪。如果从规范的观点使用"真"和"伪"这两词来考察，例如，这一 p(日内瓦是在法国)，这一 p 当然是伪的(应写成 p)。但，如果从证验的角度来考虑问题，试令 p 和 p 表示"肯定"和"否定"二义，则(日内瓦不是在法国)这一否定命题 p 反是真的了。"无矛盾的原则"于是仅意味着任何一词不能同时既属某一给出的类(例如，法国的城市)又属于这一类的补(不位于法国的城市)。固然有时人们提到命题的真假，有时又提到命题的肯定和否定。要了解任何形式的结合借助以上的释明被归结为一种同样的结构，不管它们来源于规定的价值(真和伪)，抑或来源于简单的组合关系(肯定的和否定的)。

但，结构是什么东西的结构呢？换句话说，构成一些规则或规律的逻辑形式是什么

[1] "给出"乃数理学科对英文的 The given 或 data，法文的 la donnee，德文的 das Gegebene 的译名，在哲学中尝译为"张本"，在实验科学、技术中，又被译为"资料"或"数据"。——译者注

东西的形式？一种解决办法是把逻辑形式当作适合于某种完善语言的那些协调的总体（集合）。这是维也纳学派和阿姆斯特丹学派的共同意见。两者间不同的地方在于：前者纯粹使用语法来解释逻辑；而后者则使用一种"交通"系统（同时特别着重交通的意义）。属于这样一类认识论上的区别只在于着重点的不同，有的着重于实验的知识，有的着重于直觉的知识，至于它们的所有形式结构却都是那些彼此间可组合的简洁陈述。尽管把逻辑形式归结为一些纯粹的符号，可是每一符号仍带有一种意义，而且形式作用本身虽然独立于其所指的内容之外，仍然是一种带有清晰意义的系统，因为它具有真和伪（或肯定和否定）的价值。那么，除非对于它的内容完全是冗余的，一种形式的组合系统至少可生成同个别组合一样多的意义，并且运转某些符号，于是，就等于在运转意义，也就是说，在结合智慧的运算。这种唯名论的逻辑解说，结果仅只涉及逻辑结构的认识论，而且就主体的活动而言它并没有削弱结构的性质：这样的结构于是同时既带有符号，又带有推理运算，并且就在运用符号中赋予它们的组合自身以意义。

由此就有可能得出第二种解说：逻辑结构表示着思维的规律。这自然不是涉及因果规律和时间规律，但只涉及规定主体活动的规律，而这些活动又是可能生成真或伪的关系。那么，这些活动又是什么，如果这不涉及一种纯粹的言语？这是一种命题的系统，它包括两类结构：一个命题内各项（词）间的内在联系；诸命题本身间的外在联系。如果我们把结合和分离这类联系的智慧活动叫作"运算"的话，那么，我们就可以认为逻辑结构是在表示思维的运算。

于是，逻辑在第一次逼近化中，就可以认为是思维运算的形式的理论。这里又可提出疑问：逻辑和心理学（或社会学）间的界限何在，因后者亦在研究思维的运算（参考第二章）；逻辑和数理学科间的分界问题，后者都在结合各自的逐渐分化的运算结构（参阅第一章）。除开这两个保留问题以外，上一定义包含着古典逻辑和现代逻辑的全面方案。因为前者针对的是语言的陈述，即"运转"的静态结果，而后者则实质上已变成"演算"本身。那么，演算（Calcul）如实地表达着运转（Operations），并且，不管它（指运算）的公理化精细到任何程度，那些公理最后也只能描写一定数目的基本"运算子"（Operateurs）的作用。事实的真情使成了这样一种局面：为了把形式化推于最大限度，现代逻辑趋向尽量减缩乞援于思想内容（即事物间的关系），甚至心理的任何给出（即张本）——因为后者具有把直觉元素引入形式的机理内去的危险，而直觉元素正是现代逻辑在可能范围内力图清除的。因此，在唯名论思潮和形式化需要的双重影响下，逻辑结局就往往回避在它自身的领域之外不借助其他领域的任何表述：这便好让一些逻辑学者显示出完全忽视思想观念并且是在坚持可被称之为一种行为的逻辑（这与同名的心理学类似，在发现思想与行动间的联系以前，它也曾把思想归结为言语）。但，正是遵循这样一条道路人们达到了最佳的局面，突出运算子的不可还原的作用。无论是动作运转——这有时也称为"操作"，或是思维运算，那都是心理学的工作领域；从逻辑的观点看来，这就仅只涉及形式化的运算，并且这一点就足以表示具有连贯性的逻辑的特征。

现在采取的定义在某种意义上岂不带有倾向性吗？因为，它一开始便引入运算转化的观念，而别人却仍旧着重于静的元素上；仍着重于命题的表述来替代命题的演算方面；仍着重于关系和类来代替那些原始结构的逻辑方面。的确，我们承认，存在侧重运转观点这种意图。这正是我们历来，尤其本书中所发展的观念，它企图阐明整个系统的一些性能：即运算的整体性表现于形式化的各个阶层上，既表现于类和关系上，也表现于命题上。可是，除开转化集合的整体（或系统）在逻辑上起着有效的作用这一完整假设之外，本书尚有这种思想，即运算观念还可运用于一切逻辑元素，甚至于那些尚被人们看作是静止的东西（例如，空元的运算）——这在逻辑和心理学上同样都是错误的，如果人们相信：他们可以自己随意对一个类，一种关系，甚至一个个别的客体给予一定数目的肯定的或否定的属性（某些限定的性质的存在或不存在），而不需运算（并合、对应、替代、系列化等等的运算）的参与，并且只要提一个命题 p 而给与以肯定的或否定的属性就足够令它（即 p）从事其他的运算，而不管它借助于类和关系所取得可能的内在分离。如果逻辑企图达于一种具有形式连贯性的完备的理论，它就应该去把思想的各种运算（运转）的整体加以形式化。

§ II 逻辑与心理学和社会学的关系

如果说逻辑是一种思想运算的形式的理论，那么心理学和社会学，或者说这两种学科的某些部分，相反地便构成同样那些运算——个人进行的运算或者通过言语交流的、共同进行的运算——的一种现实的理论。原则上，逻辑的对象与心理学、社会学的对象间的界限是分明的：那就是划分一种具体的和因果的机制与一种纯粹形式的界限。但，实际上，划清界限果真是这样容易吗？

原则上，逻辑的观点与心理学或社会学的观点有着明显的区别的。就前一学科说来，唯一的问题是运算结合的形式效度的问题：一个真和伪的命题系统经给出以后，哪一些是从那些已经承认的关系中有效地推导出来的真和伪的其他命题？那么，分析形式的效度，就有必要把它奠定起来，而逻辑的实质目的也就在于把那些必要的和充分的原则或公理探明、厘定出来，以便保证运算链索的严整性。就心理学和社会学而言，问题则相反地在于建立行动的或思想的运算的现实性规律并加以“解释”：问题就不在于“奠定”，而在于绝对地（排中地）理解和发生地重构[1]。

1 举例以明之，类似这样一种推理：（A=B，B=C，故A=C），对于一个逻辑学者将会显得极其原始的（如同一个公理，或者，如同直接从公理引出的东西）。但，对于一个心理学者则将会证实这种传递性对达于一定水平以前的思想是不可及的，于是他将会寻找那些决定性的因素来说明它的形成过程，如，心理运算递进的可逆性导致给出的守恒，等等。——原注

由此看来，运算可从不同的见地表现得极不相同，这全凭研究者是从形式观点出发，还是从现实观点（即把自己置于生动活泼的时间、因果格局中）出发为转移。形式的看法：所有的运算都是一些转化（或转换），俾得建立某些命题或关系，而后者又是从另外一些命题或关系和转化出发的，而这些命题或关系的效度（效力）又是被某些公理的接受（或拒绝）所规定的。现实的看法：所有运算都是平衡化了的动作。说它们是一些动作，那意味着它们有一段历史把它们同主体的具体活动联系起来。在心理学方面，那就等于显示出感知运动和外显动作间的协调，随后，外显动作和内化动作（或作为思想特征的象征动作）间协调的连续性；在社会学方面，那等于显示出这种现实的动作向智慧的动作过渡，是怎样同个人间具体协作以及人们间的某种交际系统紧密团结在一起的。另方面，说运算是平衡化了的动作，那等于肯定在思想中内化了的、并以命题（语句）形式做交际的那些动作已达到相当协调的既机动又稳定的一些系统，而这些系统的转化已成为完全可逆的，同时这些系统的守恒反过来又被这种可逆性所保证，并被"互反"（意指可逆性的个人之间的表示）的集体规范所规定。简括一句，逻辑的着眼点在于其效度依存于一些公理的那些转化的形式运算，至于心理——社会学则认为这些运转是一些内化了的、在集体（或人与人间的对应）中实现的、受平衡化协调（意即，可逆的结合：既在个人的思想上，也在个人交际间进行）所制约的动作。

照上所述原则看来，运算的形式理论，或逻辑，与运算的现实理论，或适用于心理学和社会学的发生、因果的二者分析，绝不会互相侵犯，而它们相反地会以完全界限分明的方式、毫无矛盾可能的方式来相互补充。

但，尽管这样划界的原则多么明显，人们发觉这种划分和这种补充，实际上只是最近发生的事情，并且经过了长期分裂和相互侵犯，直至如今才被认可。

因为若没有现代的符号算法，古典的逻辑是不会从概念、判断和推理的一种心理学（内省的和非发生的，但同样值得怀疑的）的描述中解脱出来。它深信唯有借助思想投射于事物中的这一方式来抵达宇宙本体，并且从这一观点它就坚持问题的规范方面，把它的真理思想的描述同一些逻辑谬论的描述对立起来。可是，缺乏一种严格公理论，这类真和伪的标准只能局限于主体自己认为真和伪的东西的内省而已。表述真的"原则"（如，同一原则、矛盾原则和排中原则）时，它也曾形式化了它们，但不借助于从自主的形式构造出发的公理，而是借助于在个人的或集体的意识中观察到的一些"规范的事实"。事实上，它因此并未逾越心理学的和社会学的框框，并且它描写逻辑现实如同人们在社会学里描写某一社会内（或在所有社群内，如果人们相信能够发现共同的规范的话）的现行规范一样。

人们在戈布洛（Goblot）主义①中尚能发现这种心理学主义，不过，他的最大功绩是他曾论及运算本身，但，他的运算主义停留在心理学理论上多于抵达形式连贯性的境

---

① 戈布洛：《逻辑通论》，巴黎，A. Colin，1918。

界。因为，通过运算构造来标志演绎，那就是在表述心理学的明证，但那仅是初步提出逻辑的问题。那么，那些运算子间结合的方式是怎样才能担保构造的严整性呢？从第二个观点看来，那就是真正的问题所在，并且为了解决这个问题，绝对必要的事情，就是能够形式化构造过程的调节本身。

再者，逻辑停留于心理学主义的时间太久，心理学和社会学也曾相反地滥用过逻辑主义。思维心理学就是这样，它奠基于诱发内省的方法之上，从事分析仅仅为成人意识中的判断（可识别真和伪的）和简单联系间的区别。由于缺少运算的发生研究，像这样一种方法最终总会遭遇到与一种不能约束的"逻辑残余"相碰撞的情况，到那时人们就把它（逻辑残余）认为同时既是"超心理学的"（马尔比 Marbe）但又是作用于心理状态之上的东西①！

相反地，随着智慧的研究趋于发生的方向，同时逻辑在另方面专对运算构造的结构从事形式化的工作，这两门学科便分化开来，甚至达于企图排除任何交掩的地步，尽管它们正在事实上显然变得相互补充，甚至在某些领域内业已变得准确对应！

让我们在此顺便用简短的几句话提一下从前作过的关于个人和个人间的运算发展的研究，借作心理学研究的实例，但这些研究却是辐合于一种可能的逻辑形式化（即是，辐合于在《试论》②中准确地采用作为指导原则的形式化）的。首先应当注意的一点就是智慧运算的任何系统，从心理学角度看来，表现出两个平行的方面：从外在观察来说，这是关于（外显的或内化的）动作间的协调动作；从内在意识来说，这便涉及许多彼此间相互蕴涵着的关系。于是心理学的解释就得从外部进行到内部，而不是相反，即是，在反省的蕴涵中可看出意识把握着的动作组织的产物。这种方法应用于从诞生到成人的认识行为的结果，就是揭示一些必然的蕴涵的意识（例如，独立于部分排列之外的一个整体的守恒的概念）乃联系于两个心理学上不可分割的条件：在某些动作之间结合成另一种动作（动作 α 与动作 β 相协调给出动作 γ）的能力与它们的可逆性，即把它们向两个方向展开的可能性③。一句话，逻辑必然性的意识在心理学的意义上是联系于动作的一种可逆结合之成就上的，并且，正是这种可逆的结合才把那些简单动作转化为真正的运算。但是，这种可逆性只能通过阶段逐步获得：这只是在动作的感知组织和表象直觉清晰化以后，运算才能形成，先以具体的形式（由类和关系组成的运算结合）出现，随后才以抽象的（或形式的）形式出现[把具体运算翻译成借助假设提出的某些命题以及这些命题按照运算的二次幂（二阶）进行的结合，如演绎的"蕴涵"和"不相容"，等等]。

这些心理学的给出（张本）于是就对应于一种可能的逻辑形式化，因为运算的可逆结合呈现出一定的结构，而它们的发生也可能在心理发展过程追踪出来。不过在这儿

---

① 参阅皮亚杰：《智慧心理学》，1947，巴黎，Colin，第Ⅱ章。

② 即本书书名的缩写。

③ 参阅皮亚杰：《智慧心理学》，1947，巴黎，Colin，第Ⅳ和Ⅴ章。

要仔细地区别两种心理过程。一方面，存在本义上的形成或演进过程，这并不直接引起逻辑的兴趣。另一方面，存在某一观念系统在发展尾期达到平衡的一些状态，并且这种平衡的准则的确是运算的发展完善的可逆性。可是，这类可逆性，它不仅包含一个因果的侧面（从这一观点看来它也标志着平衡状态存在的特征），且还带有一个蕴涵的或逻辑的侧面：一种反演可能性的可逆运算。再者，可逆性仅仅是运算的平衡结合的诸侧面之一，而平衡的结合还得同样需要假定两种运算，即零（或同一性）运算和结合性运算（后者相应于心理学中的"迂回"，而前者，即反演相应于"返回"）的参与。简括一句，心理学上的平衡化的结构同时也是逻辑上的可公式化的结构：分类、系列化和对应关系在具体运算领域中是这样，而演绎的系统在命题运算领域中也是如此。

从这一观点并由此仅就平衡状态而言，以逻辑为一方和智慧运算的心理学或社会学为另一方之间的关系就可被理解为这样：逻辑是运算结构的公理学科，而思维的心理学和社会学则是研究运算结构的现实运行的学科。在这一情况下，在形式理论和现实分析之间就存在着同在任何公理学科和并存的任何现实之间的完全一样的关系（例如，公理的物理学和物理对象的几何之间的关系）：各自的研究方法的独立和双方问题的可能的对应。

问题的对应是很明显的。首先，逻辑的形式化所引起的一切问题都可能对应于心理学和社会学的一些问题。因而，逻辑象征论的恰当应用便对应于某些符号的问题；每一形式化的结构可对应于一个现实结构，这种现实结构或者存在于公众心理内，或者，如果不存在公众间的话，存在于逻辑学者自己的心灵内，如此等等。相反地，由于个人心理运算或由个人间的协作所达成的任何结构又可引起可能的形式化的逻辑问题：可逆性以及由具体的或抽象的运算构成的各种整体群集就是这种情况。

虽然存在问题方面可能的对应，但在方法方面却存在根本上的独立性：心理学的或社会学的某种事实给出（张本）绝不可被援引到逻辑形式化中来，后者毕竟是独立自主于社群或个别人们所承认的规范之外的；相反地，基于形式算法式的推理也绝不会压制心理学或社会学内关于思维的实验事实。从另一个角度看来，正是这种方法的独立性保证着它们各自问题的对应。古典逻辑和心理学彼此缺少对应性，除开其他原因，也就缘于没有逻辑本身的方法。逻辑学（logistique），通过它的形式化的技术，独自担保着逻辑和心理社会学各自的自主权，因为只有公理化才能把一种演绎的科学从直觉的束缚中解放出来，同时也把一种具体的因果的研究从它的一些规范前提中解放出来。

§ III 逻辑和数理学科间的疆界

虽然，逻辑如上所述已同心理学的分析分离开去，它却以同样的步调同纯粹数学接近拢来。关于这方面，人们观察到，在从 19 世纪后半叶到 20 世纪的思想运动中，一种

像刚才提到的方向相反的移动。古典的逻辑只同数理学科维持些许遥远的关系，因为它那时事实上仍然停留于心理学的部分之内。可是数理学科很少关心形式逻辑，因它们那时本质上还是直觉的。可是，既然逻辑和心理学在方法上向不同方向发展，于是逻辑和数理学科间逐渐辐合也就从一种双重的过程（特别富有意义的是出于部分独立的理由）产生出来了：这一双重过程，一方面是逻辑的数学化，归因于简明象征（逻辑代数）的必要性；另方面是数理学科的逻辑化，归因于公理化的要求，即是说，借助抽象知识的基础达于直觉的逐步消除。

但，应该在逻辑和数理学科之间的关系中，区别两类问题（它们应当是合法地完全独立的）：逻辑学的和数学的方法辐合问题和数学结构最后归结为逻辑结构的问题。这两个问题事实上往往纠结在一起，或者至少可以这样说，在罗素的影响趋于把它们连在一起的时代，事情确实是这样的。可是这类思想的最终演变显示出这两个问题有着多么明显的区别。

关于诸种方法的相互作用，为了发现一种逻辑代数和古典逻辑向关系逻辑延伸这类观念曾经如何可能受到数学本义上的代数启发，人们应当回溯到莱布尼茨（Leibniz）的普遍组合的计划。这个计划在19世纪中叶由于德·摩根（A. de Morgan）和布尔（G. Boole）的首倡，随后又通过杰文斯（Jevons）、皮尔斯（Pierce）、弗雷格（Frege）、施累德（Schroeder）和布伦塔诺（Brentano）在后半个世纪的继续，业已具体地形成，但没有在公众中产生深远的反响，这是由于当时数学家们尚未关心到基础的和公理学的问题上来。后来罗素和怀特海在英国，皮亚诺（Peano）、布拉利-福尔蒂（Burali Forti）和巴杜阿（Padoa）在意大利，库蒂拉（Couturat）在法国，刘易斯（C. I. Lewis）和丘奇（Church）在美国，锡卡斯台克（Chwistek）、莱斯涅夫斯基（Lesniewski）、鲁卡西微支（Lukasiewicz）和塔斯基（Tarski）在波兰，维特根斯坦（Wittgenstein）和卡尔纳普（Carnap）在奥地利，还有其他等人的工作，共同构成了这种运用准确算法的逻辑，同时也保证着完成演算方法和数理形式化方法间相弥合的工作，这是因为同一时期通过博尔扎诺（Bolzano）、帕斯（Pasch），继之以希尔伯特（Hilbert）等人的工作，公理的方法逐渐增长的要求，遂迫使数学家们感觉到有比古典逻辑更一般、更严格的一种逻辑的必然性。所以，希尔伯特及其同人阿克曼（Ackermann）、伯奈斯（Bernays）等等同事共同协作达于这样一种严格意义上的逻辑构成（以上引述的某些逻辑学者同时也是一些专业的数学家）。

至于把数学结构归结为逻辑结构的问题，它并不是在讨论方法辐合的场合提出的。它毋宁说是产生于一种巧合——数学的最一般的部分同类与关系的代数之间的会合。因为，被康托尔构成的集合论，在它的基本形式上如同在它的最抽象的部分（超穷基数和序数，参阅第四章§26），被发现其中的某些结构辐合于一般的类和关系的运算；正是这种接近启发了弗雷格、罗素做出著名的尝试，把基数归结为逻辑的类，而把序数归结为非对称的关系。另一方面，来取于同样有启发的许多关于归结的论文，它们也讨论到群论和关系逻辑间的关系（如，库蒂拉），并讨论到函数观念和关系逻辑的类似性。最

后，以上情况就在一般性的演绎理论和公理分析之间结成一种共同领域之后，人们就尝试把这种著名的递演(recurrence)推理［而递演推理的作用乃被马洛里克(Maurolico)首先发现，随即被庞加莱(H. Poincaré)置于特别显著的地位］归结为一种纯逻辑推理。

简言之，在一方面它们方法上的融合和另方面逻辑和数学学科内若干一般性篇章间的部分耦合这样双重影响下，有一种趋势逐渐变得强大起来，将会把这两门学科联合成为一门学科。但，人们希图的联合模态则随各个学派而有所不同，于是，为了表明立场，且来提一下四种可能的解决方式。人们可能追随罗素，把全部数学理解为逻辑的一个亚类，这种隶属表明把数学的一些关系完全归结为逻辑的某些同一性(恒等性)关系的愿望。人们也可能追随希尔伯特，把逻辑的一些关系理解为数学的存在(实体)的一个亚类，所有数学的存在不能完全归结为逻辑的结构，却要包含着后者作为其中的特殊实例。作为第三种解决办法，人们也可能把逻辑的和数学的结构理解为从形式的或抽象的结构的总类中析取的两个亚类。最后，人们也可能把逻辑的和数学的结构理解为部分地析取的，但同时理解为通过相互同化构成为一个共同的部分(这也并不具有唯一的意义)。

人们可清楚地看出，逻辑和数学间的关系问题在提法上完全不同于逻辑和心理学间的关系问题。在后种情况，那只涉及分离的两个领域问题，不仅着眼于分清类别，而且在于达到根本的方法论目的：避免通过非法侵犯来改变形式分析和实验研究的各自的纯洁度。于是问题就更容易解决了，特别是双方都有分离的意愿，并且持有协作愿望的作者们还发觉到甚至在分离中尚可获得这样一种有利机会：既可把问题置于对应的地位，又可收得相互补偿的解决之功。至于逻辑和数学学科间的疆界问题则是另一回事了。这只涉及对从同一意识形态激发出来的两种帝国主义加以缓和的问题，同时期待着要么一方克服另一方，要么部分地相互融合起来，但得采用一种联盟的形式。所以现在的问题，不是对这四种可能的解决方案加以认真的选择，而仅从事一种临时性的选择以图达于未来彼此间的最佳关系。

在这一情况下，第一种公式无疑的是会被排斥的。弗雷格和罗素尝试提出的把数学归结于逻辑的主张，不但从一开始就受到反对(我们行将有机会看出基于纯逻辑的理由那也是值得怀疑的)，而且数理逻辑本身的历史也导致了预料不到的情况转变：人们不能通过初级的手段来验证算术无矛盾性就是这种情况，并且哥德尔(Gödel)于1931年证明了这样的验证的不可能性，除非乞援于高于算术的工具。因此，当前就得排除把数学认为是逻辑的一部分的想法。至于第二种解决——相反的隶属——它不过奠基于文字协定之上而非奠基于自然的联系之上：使逻辑成为数学的一个部分当然会表示一种建设性的意义，如果，从一种单独的、普遍性的结构(例如，一种"普遍性的逻辑"、一种所有群的"群"，或者一种概括一切可能的逻辑集合的"集合系统"，等等)出发，人们能够在逻辑结构和超逻辑的或纯数理的结构之间生成一种鉴别性的原则的话。然而，这种普遍性的结构实际上并不存在，于是在具有这种缺陷的情况下，要把某些(例如一个生

物学家进行的）逻辑运算叫作数学运算，那就留下一种纯粹字眼上的疑问了，因为他对一族动物进行种、属、科等等分类是按照某些具体的质的性状之有无来分的。

至于第三种解决办法，那也是不可能接受的，因为在逻辑和数学之间存在着共同的结构：纵使二值命题的逻辑不顾一切数学推理的形式，但它与后者交掩着相当可观的一部分内容，并且这两门学科从而就有相互隶属的一部分。最后，还将考虑的就是第四种解决办法：逻辑和数学的相对自主和它们之间部分的相互归结。但，这样一种图式当然是在具有一种启发性意义上提出来的，它任令彼此之间的边界敞开着，又让未来的归结带有可能性。在人类的知识的现状里，逻辑相对于数学而言是居于下层领域的地位，即是说，比较简单，比较原始的地位，而数学学科对于逻辑而言则是处于上层地位，因为它们在复杂性和丰富性两方面都超过它①。于是在上下层间就产生一种相互同化的双重对流，这同在其他一对有上下层关系的科学中所出现的情况是一样的②：上层被部分地同化于下层，而下层则被上层同样多地丰富了。逻辑不是从外部被"应用"于数学，它是部分地体现于数学学科之内，同时它自身也就（被人发现）概括为数理逻辑。相反地，数学学科也绝不会归结为逻辑，而是遵循一种不断交流的过程，适足以补充逻辑，修订逻辑。

逻辑与数学间的相互同化表现于量的范围内显然已是部分地存在了。正如我们将要在本书以后见到的，逻辑的量化可归结为部分与整体的关系和补偿的关系（浓缩的量），至于数学的结构则另外在总体的部分之间更须设定一种量的关系（延展的量）。因此人们就可能构造某些逻辑的结构，而不需求援于数学（分类，等等），同时相反地数学结构的总体则溢出于逻辑结构之外。但是，浓缩性的（逻辑）结构（Structures intensives）也会参与到数学中来，这是明显的：结局将会在数学内部（在集合论内）建立一些紧密的关系，即一方面是逻辑和数学的共同结构（包含和补偿）和另一方面是延展的结构（元素间的对应，等等）之间的关系，虽然如此，也不会在它们之间生发什么纯粹的和简单的等同问题。

§ Ⅳ 逻辑的定义及其方法

对于逻辑的对象和领域进行审察以后，我们就能在第一次逼近中把逻辑定义为"演绎运算③的形式理论"。形式的质的规定便足以区别逻辑一方不同于另一方心理学与社会学。至于逻辑研究的领域和数学的关系，这个领域则从数学本身这方面开始：因为

① 关于这一问题的讨论，请参阅：运算逻辑试论，第282—285页。——译者注

② 参阅皮亚杰：《发生认识论导论》，第三卷，《总结》那一章。

③ 此处"演绎运算"一词意指在使演绎成为可能的那些必要的和充足的运算，自然不是指所有的运算，即操纵它们进行某一演绎的所有运算。——译者注

它包含着前数学性能的原始运算的一个集合，而这又绝对依存于浓缩的量。可是，这一领域渗入数学之中，并且停留于数学内部而向外敞开着。由于它也包含着本义上的数学推理的分析，但又不可能预先规定其极限。因此逻辑领域在上端总是敞开着，除非人们证明某种"普遍性逻辑"的存在，也就是说，这样的一种推理系统，以致它能够统辖其他一切系统。

另一方面，演绎运算的分析包容着考虑命题本身内部的某些运算，而后者乃由分割命题为类的关系、各种类型的关系等等所构成。因为，逻辑不得不关心这类原始的运算，并且按照它们能够产生某些可能的演绎结构（例如，类的包含的传递性，等价关系，等等）的程度来关心。然而，这种运算（我们称之为"命题内的"运算）集合也处于敞开的地位，但是向下敞开的，因为人们不能预先知道从哪一极限开始引起演绎的关切。人们能马上看出关于这种运算，那就是将要在类和关系逻辑部分所论述的问题，因为类的套入（套叠）和关系的连续也可提供可形式化的、连贯的推理。人们将会同样承认类、关系和数之间的关系是可包含于逻辑研究的领域内的，由于类和数的差别无疑地支配着递演推论①和二值命题特有的推理间的关系这个问题②。但，我们不能先验地确定这种逻辑将会在何处终止，和命题内的运算细节会在何处诱发新的分析，在演绎理论上所引起的反响简直是不可预料的；因为各种关系的类型是众多到无限制的，人们无法决定它们的最一般的形式性能，另外还可能鉴别出一些不断分化的特殊性能。正是在这一意义上逻辑的领域仍然是停留于向下端开放着的。

然而，这种向上和向下的双重敞开，使得对逻辑的方法发生一种反省思考就不可避免了，因为它们与外显的相反，可能大大地在多样化，并且引起同数学家们的方法一样的分歧性，尽管在最终的结果上是一致的。尽管所有数学构成一门绝对演绎的学科，人们总会从中发觉一切或多或少直觉的或形式的差异，也就是，各种各样直觉的或形式化的类别。最显著的差别就在于着重于构造或来源的自然秩序的研究方法和追求证验纯洁化超于一切的方法之间的对立。在逻辑内，存在着同样的情况，人们在以下二者间犹豫不前：依照较自然的、仔细分析的准则作近似的构造呢，还是较人为的，但较纯洁的作再度构造呢？人们可能从上端（命题的逻辑）开始，或是从下端（类和关系）开始。人们可能着重于静止的关系，或者着重于各种运算。人们可能从原子论的方式进行工作，或者从事研究运算的整体。人们尤其可能从数理逻辑和超越数理结构的逻辑间之共同元素出发，或者从一开始就坚持那不同领域的差别。总括一句，尽管最后抵达的公式都是同一的，人们却可能依照不同的方式来理解逻辑所专心致力的形式化工作。

① 就类的逻辑而言，如果定义"四足类为具有四只脚的动物，则任一有四只脚的动物都属于四足类"；就数的逻辑而言，从一起到 $n\rightarrow(n+1)$ 直到"无穷"；这在罗素的《数理哲学导言》（1928 年法文版）中都被称为递演推论。——译者注

② 类的观念和集合观念的区别在本书后面将要详述。——原注

但,这样多种分歧的真正理由是,标志逻辑特征的"形式"一词绝不是标志着一种静止状态的、被给出的一种性质,而却是一种形式化的过程或运动的表示。我们刚才接受的逻辑定义实质上是指这样一种理论,并非演绎运算的(已完结的)形式理论,而是演绎运算的正在形式化中或具有形式化活力的理论。换言之,某一逻辑理论的本质就是在构成一种递进的形式化,而不可能预先窥见它的完结,正因如此,演绎运算的整体总得向上端和向下端敞开着的。说形式化上端未曾完结,这是因为不存在(或尚不存在)普遍性的逻辑;尤其它的下端未曾完结,这是因为许多原始运算来源于作用于外物的心理学的动作,更因为要把"形式"从各种活生生的"内容"彻底地分离出来。

结局是,由于推动逻辑学者从顶端,从基础,或从形式化层次的中层出发的不同趋势,最后达成的整个建筑的面貌就大不相同了,尽管使用着同样的砖头,同样的墙壁,甚至或迟或早将会发觉所使用的是同样的构架。在建筑物完成后这将引起各种对立的印象,有些人甚至达于把逻辑理想化到这种境地,从中可看出永存观念的反影;另一些人则从某一建筑场所的各方面来审查这个建筑物。因此,甚至在逻辑内谈一谈方法是事关重要的。就这一问题讲来,也存在一种观点:形式化的技术本身,逻辑的原子论还是整体的决定论,以及形式化的自然的次序。

关于形式化的技术的必要性,现今人们大都同意在所有算法(algorithmes)内找到一种逻辑构成的绝对先决条件。但这一胜利还是近来的事情。在1918年戈布洛(Ed. Goblot)尚这样写出,"演绎逻辑"和"归纳逻辑"形成一个领域已经太分明了,再加上一个第三者"逻辑学"(Logistique)那简直是无用的!前面两种逻辑已经是彼此分居,好似互相视为陌生的人;我担忧行将见到第三逻辑形成第三股潮流……我们岂不因而有三种逻辑,它们间互不相识,三种源泉各流各的河道而互不汇合吗?①"还有一点(在比例方面有保留)好像在笛卡尔(Descartes)时代一位数学教授这样讲过,我们从毕达哥拉斯(Pythagore)时期起就有了算术,我们从欧几里得时期起有了几何,并且它们之间已经太少关联了。不要再加上一种代数吧,代数,人们吹嘘它的用途将会致命地产生第三种分裂的领域。实际上,逻辑的代数不仅为逻辑构成了一种比古典的语言形式化更精确的言语——它以一种抽象构造的技术代替了简单的反省思维的方法,而且这种逻辑代数同时还扩大了和改造了演绎运算的领域,这正类似(再一次在比例方面作保留)此前的方式,如同数学的代数也曾扩大了算术运算的领域,并且在解析几何内通过坐标的引进改造了欧几里得空间一样。因为,数理逻辑一方面保证着抵达古典逻辑从未知道的或被忽视了的一系列运算,另一方面它还导致建立同命题演算这一中心机理成函数关系的系统以及它的整体结构,而这些结构的丰富性质还在方兴未艾中。

使用逻辑学技术的决定性理由是,唯独本义上的代数才能担保一种递进的形式化,去对立于半形式化的状态,而停留于这种状态的任何逻辑则满足于简单的语言表达技

---

① 戈布洛:《逻辑通论》,巴黎,A. Colin,1918,第XIX页。

术。承认逻辑能够满足于流行言语来表达各种类型的关系和运算，那就是，认为流行言语一次已经足够达成形式的联系。由此往往在逻辑学算符的反对者中发生这种思想，把言语命意所指的东西再转译成新的符号是无用的。戈布洛走得更远，甚至相信共同的言语比逻辑的言语丰富得多，在以鄙弃的口吻断定逻辑的代数"把精神里烦劳的运算带到笔头上极其简易的运算中来"以后[1]（注意，这是在对所有数学学科进行谴责），他又加上一句："岂不害怕人们会流于不懂或偏离新符号不可能写出的东西？"[2]可是，纵令符号比书写言语贫乏些，然而它的优越准确性却便利着精神的运算和不可能写出的反省思维，况且并不排斥展开普通言语的加入。何况逻辑符号，远非贫乏，却以区别歧义著称于世，甚至能够区别某些字眼，如，"是"、"和"、"或"，等等所包含的不相容的可能。相反地人们有足够的理由确认：经历了二千多年逻辑史的半形式化状态仍然还未固定下来，这是一个方面；另方面，属于逻辑的形式化于是仅构成着一种过程，而不是一种完成的状态，为的是想尽方法来保证一种技术来做出必要的努力和从事不断地创新。然而，当前除了象征表示和公理分析外，没有其他演绎形式化的技术了。正如在实验科学中一样，实验被召唤出来代替直接的观察，并用来系统地分析笼统观察弄混乱了的因素；同样在演绎科学中，观念的符号化的改造才能唯一地厘清流行言语任令不加区分的那些蕴涵和关系。逻辑学的技术因此不仅仅是一种准确的言语，它基本上是一种思维和反省的方法：它是一种担保反省分析、反对思辨的方法，也就是说，恰好反对那种无能避免流行言语陷阱的思想形式的方法。

第二个要讨论的问题就是为逻辑分析指明方向的问题。为了更有效地掌握形式的必然性的规律，我们应该把努力放在思想和议论的预先分隔开的元素上呢？还是放在演绎动作中形成的整体系统上呢？也就是说，应该置信于那些简单的、方便的、但也许最人工的造作呢，还是尽力去厘清（找出）那些自然的联系，尽管在这一命意下可能冒有塞进某些超越逻辑的成见的危险呢？

这里有一种误解要加以扬弃。每一个逻辑学者都有些超越逻辑的成见，因为形式的真理绝非自身单独存在的真理。所以维也纳学派表现出一种"物理论"(physicalisme)的倾向性，它的主要成见之一在于最大限度地取消表达的现实（或实验的）内容和它们的逻辑形式间的中介，而把逻辑形式理解为"多余的"和以"句法"为特征的。罗素的显著的成见就是把数学归结为逻辑。大多数的数理逻辑学者的成见则倾向于保证公理学的严谨性和演证他们的系统的无矛盾性。至于本书的作者自认为，他的基本成见既不是物理论的，也不是数学的，但旨在通过相应的形式结构的分析，希图阐明现实的思维机制，特别是它的可逆性。简言之，每个人都可持有某些超越逻辑的成见，而这些成见并不妨碍逻辑学形式化的严整性，只要它们停留于形式化的严整性之

---

① 戈布洛：《逻辑通论》，巴黎，A. Colin，1918，第XVIII页。

② 戈布洛：《逻辑通论》，巴黎，A. Colin，1918，第XIX页。

外；因为人们向形式化要求的仅只提出一种充分的内在连贯性，并不要求由它自身回答人们向它提出的有关认识论的疑问。只要一经超越逻辑的考虑并导致在非形式的名义下改变这种连贯性，那时这种考虑才变成非法的了。但是，如果这些考虑谨守范围只从事指导逻辑研究朝向某一方向，同时保持连贯性的形式化的一般条件，那么，那些考虑只能构成在数学中曾经发生过的情景的等价物，当数学家致力于用他自己专有的方法解决物理学者或统计学者等等向他提出某种问题的时候；这些问题仅仅丰富其研究，充其量也不会修改绝对的演绎分析的方法。

这就等于说，逻辑中自然联系的研究可能从两种分明的意义来理会：从同逻辑范围以外某些领域相对应的意义与从更和谐、更连贯的内在系统化的意义。在第一种意义内，我们可以举出，逻辑的构造或多或少地是自然的或人为的全凭同心理学的（主体的运算或交流的系统，等等）或数学的系统相对应的程度为转移。在第二种意义内，逻辑的构造将会减少矫揉造作的程度，是按在逻辑范围各部分内重新找出相似的结构，并把那些出于分析的需要被分离的方面重新接合成一更加连贯的整体的程度为转移的。作为这种情况的一个世人皆知的例证，那就是，命题函数的概念在该词的两种意义上都是自然的：它符合于（外在的意义）函数和自变量（常数和变元）的数学区别；另方面，它又容许很自然地把类和关系的逻辑置于命题逻辑的框框里。

于是我们可以提出疑问（本书全部将要尽力揭示这个问题的重要意义）来探知，究竟是通过分离的元素组合来进行工作对于逻辑较自然呢，还是通过分析整体结构特有的规律来进行工作对于逻辑较自然呢？这里存在一个问题，现代数学的发展已显示出它的不可否认的远景，可是，它在逻辑内，令人惊奇的是还很少被人讨论过。

在数学内如同在心理学内一样（逻辑就是夹在这两个学科之间的学科），运算整体的作用，连同它的整体特性，在抽象的运算系统中如同在动作思维里起作用的现实运算中一样，已经成为基本的。在数学内一切运算不存在于孤立的状态中，而是与一些整体的结构团结在一起的。所有的数都不是彼此互相独立存在的，例如，它们构成一些"群"（连同它们的集的结合规律），一些"体"，一些"环"①，及其他的整体系统。各种空间形式按照一种群的阶层形成序列，每种几何学的"基本群"在构成该种基本群的一个子群的同时便标示着上级阶层的特征。函数在它们之间构成一些"族"，而"正规族"的观念则代表着它本身特具的某些组织规律所定义的整体。集合构成一些次序分明的"序列"或"格"，等等，并且格也具有和整体同样的一些特性，这些特性可在极繁多的领域内被发现（一个群及其子群构成"格"的一种特例）。简言之，在逐渐增加的这种情况下，正是一个系统的整体被规定好的运算转换结构化了，并且也正是被那些系统元素反映出来的这些整体转化，赋予考虑中的数学领域以一种层次、序列关系。

然而，面临这种总的趋势，即如此深刻地使现代数学与从前重分析研究相对立的趋

① 这些概念，请参阅谢邦杰编《线性代数》的"补充"那一节。——译者注

势，逻辑学居然表现出悠然自得地停留于令人惊讶的原子论的状态。毫无疑义，由于逻辑学者们的优势关切总在于经常加强纯洁的公理化，而不是在于递进的运算构造，他们将会向世人做出这样的回答，任何公理化的理论旨在为它自身构成一个完全的、封闭的整体；从这一观点出发，某一系统将被称为完善的，即如果任何属于它的具有普遍价值的命题是通过被承认的运算子的手段从那些公理演绎出来的话。但是，我们绝不相信这样一种研究可能穷尽逻辑的一切可能性。在逻辑里同其他领域一样，最纯粹的公理论实质上是在表示一种基层的运算机制：某些公理的作用是在规定操纵一定数目运算子的运行法则，并且通过它们的唯一中介，理论就从一开始使自公设得来的命题中被演绎出来。这样完结的理论，尽管它的连贯性和严整性达于若何的境地，但作为达于它的封闭的必要条件的那些公理的表述便不能获致解决，而且相反地引起运算整体的问题：被运算子本身构成的整体结构是什么？换言之，某些对于另一些运算而言是孤立的，还是它们彼此都是统一于同一个转换系统呢？再者，如果它们是彼此独立的，那么，这样形成的个别系统它们本身间是独立自主的，还是它们是一方从另一方派生出来的呢，等等？关于结构的疑问存在着一个可观的数目，其中有一些已经解决了（例如，关于布尔代数的运算，或者命题间的运算子的各种关系，和格论，等等），但，远未穷尽一切。

按常规，相反地，人们每每论述运算子好像只涉及一些规定好了的、但又可隔离的辅助程序，而不去探讨它们所暗含的东西，也不去清理出它们通过自身联系编涵着的那些整体组织的规律。于是，人们就把类和关系的运算搁置一边而不坚决主张它们在其整体中组成这样具有特征性的结构。人们凭借组合分析，就是说，进行每次2对2等等各种结合性的分析，研究命题逻辑是单单从互相之间组合起来的某些命题出发的。对这种组合分析必要的公理研究也曾导致尼克德（J. Nicod）①把那些公理总括为建立于五个命题和一种关系上的一个单独公理，可是，人们未曾从这一尝试所包含的一切中探求、开发关于一种位于下层的整体的存在。更有甚者，在思想里理解类的逻辑和命题逻辑相对应之后，人们对它们加以分离就认为一切都完成了，就把形式化的两个层次的存在加以证明而论。的确，分离是有益的，但这也绝不会削减其意义，倘若人们果真随即重建这二者（层级）之间的接触，同时寻出这两种分别的整体的同构性；人们想由这一分离的情况从事推理，那就恍惚如在实际演绎中，命题间进行相互联系时便缺少作为概念内容的一种事前分类和缺少命题所表达的关系的一种事前组织。那么，在一边是逻辑的原子论，另一边是建立于整体结构之上的数学研究这样一种对比的面前，人们怎能希图把数学归结为逻辑呢？

还有另一方面，更加旗帜鲜明的一派原子论表现了它的一切工作都是旨在建立命题

① J.尼克德：《关于逻辑的原始命题数目的简约》，Proced. Camb. Philo Soc.，1917，19，第32—41页。

逻辑于最可能原始表述之上。因为这一整个逻辑潮流从"事实"的表述出发朝向于命题间的结构改造，而这些事实则又被翻译为主体和直接的、感觉张本间最简单的接触。关于这一点，我们恐怕逻辑学者们，例如，维特根斯坦（Wittgenstein 在他工作初期）和维也纳学派物理论者的成见会导致他们的逻辑分析不由自主地受到某种心理学的影响（因为当人们决定从任何心理学做出抽象，他们总会从常识性的心理学吸取观念）：缘于人们从未达于同某一给出的事实，甚至限定好的事实发生接触，并且特别是从未达于表述某一事实而不参照整体的系统。于是，自然地就应当仔细区别逻辑本身形式化的问题（关于这一点在第一章§3还要谈到）和终竟有关心理学的前提或对应的问题。关于后者，在此只作一点粗略的表示。那么，从后一观点出发，设想人们可能接触到某些孤立的事实，这是违反现在所有公认的心理学研究资料的：固然可能随后加以分解，但真正把握到（意识到）某一事实须得建立于一种综合大量的同其他事实发生联系的组织上。知觉本身仅仅达于某些相互依存的关系，并停留于有关的动作上，针对这些动作，知觉起着一些标志或符号的作用。言语赋予一个字以意义时，只有在同整个意义系统的关系中才有可能。至于思维的运算，我们曾经（在§2中）看出它们绝不能在一种孤立的形式下构成，但它们是在以可逆的结合为特征的整体系统中彼此间相互支持着；不可能存在着类或关系而不参照于某些分类化、系列化，等等。最个别化的事实表述因此总是团结于某些结构的一个整体里；这些结构超越于个别化的事实，而个别事实则总是处于同整体结构发生某种关系中。从心理学讲来，"捕捉"或"表述"一个事实而又加以孤立化，正如在度量空间中决定一点的位置而不用一个参照（或坐标）系统是同样不可能的。

既然整体结构，在数学的抽象领域里和在心理运算的具体领域里，扮演着同样的角色，做出这一发问就确实是合法的（无须任何超逻辑的考虑参与到逻辑验证的本身中来）：人们在逻辑里就不会再找到同样的运算整体吗？可告慰的，是在此申明不仅同样的结构可以凭借纯逻辑的语词来构造，而且结构的参与容许按照隶属关系整理（理顺）结果比按原子论的分析要更加自然得多（自然一词既是从内在的意义来讲，同样也是从外在意义来讲）。这也是本书致力揭示有关命题逻辑和类与关系逻辑的双重观点的意义。

但，要试图把逻辑的这两个领域间的关系这样措置于对应中，遵循一种恰当的呈示顺序，便显得事关重要。有两种理由促使我们从类和关系的运算开始写起，不同于前人通常所做的那样从命题演算开始。第一个理由是，由于形式化毫不构成一种状态，但只是一种过程，跟踪这种形式化本身的阶段从具体到抽象的过程，这是令人极感兴趣的。第二个理由是，某些类和关系的运算在它们自身已经形成着一个完成的整体，但尚只是达于第一次幂（一阶）；人们可能把命题逻辑的运算理解为前面运算的上级运算，同时又建立于前种运算的结果之上（因为一个命题是以一个类或关系的运算作为它的内容的）；某些命题在它们之间组合的运算，那么，就是第二次幂的（二阶）运算，于是被递增

的形式化所遵循的次序同运算的幂的次序将会巧合起来（这就是下一章从§1和§2开始就要谈到的）。

[引言由左任侠译自让·皮亚杰：运算逻辑试论（Jean Piaget：*Essai de Logique Opératoire*）Paris，Dunod，1972 年版。]

第一部分　命题内的运算

第一章　首要问题：命题、类和关系

在开始讨论类和命题的演算之前，一些先期问题首先需要被弄明白：命题内和命题间的领域界定、命题的功能性角色、形式与内容间的关系，等等。在第一章内初步讨论这些问题。

§1　命题，命题内的和命题间的运算

古典逻辑学对概念、判断和推理做了区分，而后者却是判断的构成部分。至于概念，它们首先被认为是独立且静止的存在，从这种观点来看，判断就成了概念的一个组成部分。于是，人们发现概念本身来源于先前的判断，却转而揭示了整个"虚拟判断"(jugements virtuels)[1]。所以古典逻辑学已经将初始判断的依据导向了运算动作。但这种做法遗留下一个重要的问题：推理是建立在纯粹的判断的形式化组合之上，还是依赖于那些由判断的术语所定义的概念呢?

这个问题一下子就使有关形式化的讨论变得十分有必要：只有一个清晰的符号体系才能让这样的区分成为可能，即以判断为出发点，通过考察逻辑学关于判断的分析而区分两种类型的运算。

如果我们以命题 p 来表示判断：这是完全形式化的条件，因为一个内隐的判断或是潜动作(action muette)的固有特征是无法得到确切地分析的。

---

① 戈布洛(Goblot)，1918，第 87 页。

定义 1　我们将“命题”命名为 p、q、r 等，它们陈述明确，真或假，肯定（正性）或否定。

用于表示陈述的符号语来自日常用语或是常规符号体系。一个清楚明了的陈述就意味着它排除了命令式和祈愿式，但不排除简单假设性命题的真实或谬误。一个陈述为真或为伪意味着它阐述了一种含义，而不是毫无意义的陈述。真和伪是二价逻辑学仅有的两种可能的价值，但是在多价逻辑学中，我们还可以添加其他的价值（非真非伪，或然，等等）。我们将肯定（正性）命题标为 p、q、r，将否定命题标为 p、q、r，这也就是说，不论是正命题或是否命题，每个命题都是非真即伪。此外，我们规定，如 p 为真，则 p 为假；如 p 为假，则 p 为真。

于是，我们可以构想一组运算，将一个命题与其他命题或其自身相组合，以得到一个真值（valeur de verité）确定的命题。例如，当且仅当 p 为真以及 q 为假，条件判断 $p \supset q$（若 p 即 q）将会是一个新的伪命题；而当且仅当 p 与 q 同时为真，合取命题 $p \cdot q$（p 与 q）将是一个新的真命题。

我们将此种运算称为“命题间运算”，并定义如下：

定义 2　“命题间运算”就是所有通过任何只知其真伪的命题 p、q、r 形成的组合，且这些组合能建构其他由这些真值的多种可能组合分别限定和表达的命题。

我们可以设想一组运算用于改造命题，把每一个命题分解为各个因素而后对这些分解而成的因素做出改变。例如，关于命题“这朵玫瑰是红色的”，我们可以将“这朵玫瑰”替换为其他词口（“这面旗子”、“所有玫瑰”，等等）或者将“红色的”换成其他实词（“黄色的”、“黑色的”，等等），又或者改变关系词“是”（“这朵玫瑰比那朵更漂亮”，等等）。这些操作都是命题内运算：

定义 3　我们把以下这种运算称为“命题内的”，它们能将命题分解为因素（分解可以在不同程度上进行），并且通过改变这些因素而组成新命题；由此产生的命题的真和伪则是由因素自身之间的组合关系决定的。

谈到证明和推理之间的关系时，我们马上就能发现古典逻辑学在推理的形式结构概念中所遗留的模糊性。例如理阿赫德（L. Liard）所说的：“推理，就是推断；推断就是从单个或多个命题中得出一个新命题，而这个命题已经暗含在前面的命题中了。倘若推理不经过中项，那就是直接推理，倘若经过了中项，就是间接推理。”[1]依据亚里士多德的逻辑学，无论是普通命题、特殊命题或单个命题间的直接推理还是间接的或三段论的推理，都取决于“所有”和“有的”的区别，在一定意义上，这主要涉及命题内运算。比如说，“所有人都会死；苏格拉底是人；所以苏格拉底会死”，这个推理实际上是将命题分解为几类，把人这一类归到会死亡的类别中，然后把苏格拉底的归属推至第一类和第二类中。这就是建立在概念之上的推理，也就是如我们之前所说的在外延层面上（en

① 理阿赫德，无日期，第 31 页。

extension)，或是在内涵层面上(en compréhension)(通过谓词的层次)的推理。但是我们也可以仅仅将推理建立在判断的命题间组合之上：

$$(p\supset q)\cdot(q\supset r)\rightarrow(p\supset r)$$

也就是“若 p 即 q 和若 q 即 r 则可以推出若 p 即 r”。这种被古典逻辑学所广泛忽视的普通形式的推理其实比三段论推理具有更高的形式化水平，符号化分析提供了这方面的证据。

至于概念和证明之间的关系，则只能根据一种命题内运算的方式，通过分解的论证来予以建立。但最重要的是明白这种分解包含不同程度。这就意味着，从一方面来说，古典逻辑学为之满足的分解不过是一种初步的近似值，根据类别和系词，逻辑学区分了不同的种类，尤其是“关系的逻辑”，后者被亚里士多德的逻辑学笼统地表达为系词“是”，因而被忽略。然而从另一方面看，这意味着所有成为初级因素(原子“事实”，等等)的分解都是相对的，这种因素仅仅得到关于分解模态的相对简单属性，而分解模态本身却依存于我们已经见过的重组模态。

§2 形式化结构的概念和形式与内容的区别

命题内和命题间运算的差别已明确证实了存在着两种形式的联结，我们可以把二者都称为“形式的”，但它们显现出不同的形式化水平。然而，这样的观点是错误的，即认为一个低级运算的特征不能由自足的形式化结构来描述。“命题的逻辑是，或者说希望是……一种形式逻辑”[1]，夏·瑟路斯(Serrus)如此说道，然而关系的逻辑“不再是一种形式化的学科”[2]，因为其原理“取决于对客体的考量”[3]。可以确定的是，在定义的意义上，命题内的逻辑是建立在命题的“内容”之上，相对应的“形式”则建立在命题之间的联系上；所以命题内逻辑的形式化水平低于那些关于命题间运算的理论。然而，“内容”本身也具有由类别和关系的结构组成的“形式”，还存在一种比这种“形式”更低水平的“内容”，也就是说，它被包含在这种“形式”中，而后者本身又被包含在命题间的形式里。例如，包含关系 $A\subset B$ 是一种形式，它可以容纳具体的内容“鸟类脊椎动物”，而它本身也作为内容，即一种特殊实体(réalisation particulière)而被包含在一般性的蕴涵形式“p 蕴涵 q”之中(例如“金丝雀是鸟类”蕴涵了“金丝雀是脊椎动物”)。

所以我们不能持这样的观念，即，命题内的逻辑建立在对客体的考量之上，而只有命题间逻辑才是“纯粹的”。这两者共同构成了运算的形式化，也就是说形式的精致化

① 夏·瑟路斯，1945，第 15 页。
② 夏·瑟路斯，1945，第 197 页。
③ 夏·瑟路斯，1945，第 15 页。

建立在这样一些事实之上，它们在心理学和认识论的意义上意味着主体对客体的动作；但是这两者只考虑运算的结构性协调以实现演绎性重构。在这一点上，逻辑的这两个领域总是有一个比另一个更加"纯粹"或更加形式化，但这也只是程度的差异而不是两者性质的对立。例如，当我们谈到一个代表这种性质的任意对称关系的传递性，$x_1 = x_2$，$x_2 = x_3$，所以 $x_1 = x_3$，我们所运用的是置换的一般运算的特点，而没有引用实现中可能的多种特殊模型；这就是不参照客体，而只是参照运算活动的基本形式。此外，当我们从这种共同性形式过渡到更为特殊的形式，比如同一性形式 $x = x$，质量或强度(qualitative ou intensive)的同一性 $x_1 \leftrightarrow x_2$[1]（又或者，我们将在§19中看到逻辑同一性的多种可能形式），两个数字间的等价（或者两个集合的等势），我们自然会从较高形式化降低到较低形式化，但我们所研究的依然是形式化的结构：不是特定客体的属性，而是我们通过特殊的结构和类别的形式把这些客体组合起来时，能够运用在客体之上的运算的结构属性；所以通常唯有结构属性与逻辑学有关，而逻辑学的目标是探索这些属性的基础。

所以，我们可以把所讨论东西的用"结构"、"形式"和"内容"等术语来进行定义。根据维特根斯坦(Wittgenstein)，如果我们只讨论任意客体 x、y、z 的任意"事实" p、q、r 和任意谓词 a、b、c，用平常的语言来表达，也就是，我们只对任意命题进行思考，而它们的表达术语也是任意的，那么命题的结构应该由其余的东西来表达。一个陈述系统的"结构"的解离，即是用其他术语，但是任意且被抽象符号指代的其他术语来替代每一个使用的具体术语和每个命题间或命题内的联系。于是我们可以看出，形式化呈现出不同的程度：于是，怀特海(Whitehead)和罗素(Russell)（见《原理》第二版）从陈述既定事实的命题出发，仅为了随后过渡到更加普遍的命题（从有确定谓词和客体或者相反，到最终有任意客体和谓词）。这就是为什么明确我们关于形式与内容的词汇是很重要的。

假设有三个命题 $p \supset q$、$q \supset r$ 和 $p \supset r$。不论前两个是真或伪，它们的合取就形成了第三个命题，我们可以写成：

$$(p \supset q) \cdot (q \supset r) \supset (p \supset r)。$$

当然有可能 $p \supset q$ 和 $q \supset r$ 两者都是真命题，用某方式表达就是"p 蕴涵 q"和"q 蕴涵 r"。然而我们可以看出两个"蕴涵"动词的区别。符号 $\supset$ 所表示的蕴涵在于以两个命题为基础而构建一个新命题 $p \supset r$，且后者比起 $p \supset q$ 和 $q \supset r$ 两个命题所呈现的蕴涵有着更加形式化的特点。所以我们说，如果条件命题 $p \supset q$ 为真取决于 p 和 q 的意义，我们就面对一个"实体性蕴涵"(implication matérielle)。而不论其成分的真值为何，如果一个条件命题为真命题，我们就说这是一个"形式化蕴涵"(implication formelle)。

比如在这个逻辑等价关系中：

$$(p \supset q) \leftrightarrow (\bar{p} \vee q)。$$

① x_1 和 x_2 都有性质 a，参见§6。

即，命题"p 实体性蕴涵 q"相当于说有"非 p 或 q"。这一定义展现了蕴涵 $p \supset q$ 所表达的简单事实特点，当这个蕴涵是被独立地给出的：即我们必须在"非 p"或者"q"中做出选择(或者两者，但通常排除非 q 和 p)；如果这个抉择不是一个先前的形式建构的结果，那么，事实上它就只可能来自这些命题的内容。以一般方式来说，p、q 和 r 要被看成不同的命题，作为先决的已知条件同样只能依据其内容。其实，形式建构既不管实体性蕴涵 $p \supset q$ 和 $q \supset r$ 的内容，也不管不同命题 p、q 和 r 的内容，而只单纯把这些命题当成有差异的已知条件；但这一条件必然涉及内容。在这种情况下，我们可以提出不同于维特根斯坦的标准的另一条标准，并且把那些实体性蕴涵 $p \supset q$ 和 $q \supset r$ 看成内容，与把 $p \supset r$ 作为结果的形式建构相比：这里的内容相当于已知条件，形式相当于建构。

然而，我们一下子看出这两条标准是重合的，除了第二条更加凸显形式和内容概念的相对的或多变的特点。事实上，它们是趋于同一目标的，因为限定项其实和先决条件重合，任意项和建构内容重合。任意项 x 和限定项 x 的区别在于，前者是由 x_1 和 x_2 等之间的泛指替代产生的，所以实际上是来自于一个既成的建构。在实体性的和形式化的蕴涵里，给出的蕴涵 $p \supset q$ 从另一方面来说没有构成推论 $(p \supset q) \cdot (q \supset r) \to (p \supset r)$ 的蕴涵那么随意，因为即使第一个和第二个蕴涵本身是被建构的，结论也为真。而在特殊情况下，$p \supset q$ 只有在被给出时才为真。总之，限定性和任意性都有程度的差异，并且这些程度与先决条件和建构内容的程度是统一的。

所以，我们可以把形式定义为当替换了先决条件时，在运算联系中保持不变的东西；把内容定义为由这些条件本身组成的东西，而这些条件可以代表限定性的所有程度：

定义1　运算联系的"内容"是由已知先决条件，或者可代替它们的项组成的，而"形式"则是在这些替代过程中不变的东西。

比如，在 $(p \supset q) \cdot (q \supset r) \to (p \supset r)$ 的建构中，给出的蕴涵 $(p \supset q)$ 和 $(q \supset r)$ 组成了联系内容，而把二者连接至结论 $(p \supset r)$ 的蕴涵则构成了连接的形式。虽然实体性蕴涵 $(p \supset q)$ 与建构 $(p \supset r)$ 相比时是内容，但如与可以在关系 $p \supset q$ 中代替 p 和 q 的非任意命题集合相比，它就是一种形式，且代表了此类集合的一般形式。所以，实体性蕴涵 $(p \supset q)$ 既是内容又是形式，与它在其中做因素的形式相比是内容，与它代表的类别限定性更高的命题相比是形式，也就是替换运算的形式化产物。

现在我们来看这些限定命题 $p \supset q_1$ 或 $p \supset q$ 中的某一个命题的情况，用 $p \supset q$ 代替了这些命题。这样一个特殊的实体性蕴涵在作为已知条件时是内容，但是如果我们能建构它，此蕴涵也会成为形式。然而，我们要通过命题内的运算才能完成，也就是说，通过比命题间形式低一级的结构来实现。假设 p 表示"x 为 A"，而 q 表示"x 为 B"，且 A、B 两项代表构成"A 包含于 B"的两个类别(那么 $A \subset B$)。在这种情况下，实体性蕴涵 $p_1 \supset q$ 不仅作为已知条件为真，更是代表了 A 的认识要素 x_1 和 B 对 A 的包含之间所存在的关系。所以，比起 A、B 两类组成的低级内容，x 对 A 的所属关系及 B 对 A

的包含关系而言，这个实体性蕴涵就是形式。

至于 A 和 B 两个类别本身也是被给予或者是被建构的，在第二种情况中建构的是内容不同的形式（根据诸如：低级类别、个体并集、交点、对应等的叠加运算）。如果不考虑类别，而是分析个体项之间的关系，我们则会发现存在两种关系的可能性：在形式化建构内容的意义上的关系（relation），或是通过其他更基础的、作为内容的关联（rapports）而被建构的关系。

简而言之，运算联结（liaison）的逻辑形式和内容是彼此相连且不可分割的。不过，为了探讨这种情况下的议题，很有必要再介绍以下两个定义：

定义 5　我们将所有能继时性地或同时性地起作用的，形式的或内容的逻辑联系称为“结构”。

定义 6　我们将不能行使内容功能的项称为“超逻辑内容”。

所以，比起所包含的较低级结构，每个结构都建构了一个形式，而比起将其作为已知条件或构成成分的高级结构，它则建构了一个实体。更确切地说，每个结构既是低级形式的建构（形式），又是高级形式的应用（内容）。这就是为什么“形式化的”这个逻辑概念表达了形式化的一种连续过程，而不是一种静止状态。

于是，接下来自然就出现了两个重要问题。首先，在这样一种结构等级的顶端，是否存在一种只有形式而不包含内容的纯粹形式，它构成了所有形式的形式，或者说它扮演着最一般化的逻辑或最高规范的角色？又或者，这个序列的顶端是保持开放的？毫无疑问这是数学逻辑最主要的问题。其次，这个序列的基础又是什么呢，我们一定能找到不包含任何形式的纯粹内容吗？这些“超逻辑内容”是否是从个别的逻辑符号，比如 x、中突然涌现出来的，或者从被其包含且作为其最终内容的个别经验①中被辨别出来？又或者，与之相反，我们所面对的是一种未定义的还原，比如说最初的逻辑赋予经常是随意选择的，它们仅仅构成了我们称之为“个别化结构”的那些东西，后者既可以作为高级建构的内容，又可以作为通常被认为是“超逻辑内容”的形式，这是不是可以反过来说是未完成的形式化呢？现在我们要探讨的就是这第二个问题。

§3　基础命题和形式的个别化

如果逻辑结构组成了一个结构序列，其中每个高一级结构相对于低级结构都是形式，相对于更高级结构则是内容，那么这个逻辑结构的前提问题就在于确定初始因素是

① 要注意受操作的个体可以是精神客体也可以是物质客体，因而逻辑学不应该区分客体和作用于其上的动作。罗素不赞同“独角兽”式的逻辑存在，那么，像N射线或巨蟹座这样的逻辑建构，是否只要我们相信，它们就逻辑地存在，而只要我们不相信，它们不存在了呢？

如何构成的，还有与其相关的基础结构（定义 5）和超逻辑内容（定义 6）之间的关系是什么。这个问题对一种逻辑原子论来说似乎很容易解决，对一种整体性逻辑学来说似乎就比较复杂了；但是这种表现有可能是具有双重欺骗性的。

维特根斯坦和罗素为了在命题原子论的领域内解决这一问题付出了巨大努力，这一观点的反对者和其支持者一样，对他们付出的努力都十分敬佩。这两个作者告诉我们，存在着一些非一般化的基础性叙述，以描述那些不能分解为其他事实的事实。维特根斯坦把它们称作不能更简化的"原子事实"，如 p、q 等，罗素则称之为"原子命题"。根据罗素（的定义），我们可以通过不相容性的中间关系（$p|q$ 即 p 与 q 不相容）将原子命题进行组合而建立一个分子命题。于是，基础命题就是原子命题与分子命题的集合。原子命题的固有特征是关于个别事实的叙述，而不涉及"所有""有的"，或者"总是"和"有时"等（模态限定）；所以它们仅包含确定项（与任意项相反）。相应地，它们也包括否定运算（$\sim p$），合取运算（$p \cdot q$），析取运算（$p \vee q$），等等，都可还原为不相容性。

于是我们在这里提出的问题就是，原子命题的概念本身是否是没有矛盾的。我们不是想说，这种由维特根斯坦和罗素建立的，通常用于作为命题计算的基础的基础命题中计算中存在矛盾。我们只是想知道这些所谓的原子命题是否作可以确实地解离为先于其存在的构成因素，以及，是否它们就这样建构了逻辑学大厦建设工程的最基础性的出发点。相反地，我们认为，它们通常是由更复杂的整体结构分解而产生的。

在某种意义上，真正的问题是，我们能否言说基础命题？如果我们立足于命题间运算的排他性立场，不考虑命题的内容，那么一个基础命题自然不能区分为任意命题 p，q，r 等的相应组合（$p \cdot q$ 或 $p \supset q$，等），因为它们与这些加工无关。相反，如果我们站在命题内运算的立场，一个基础或原子命题则会表现出一些确定谓词（a 或 b）和谓词修饰的个体项（x_1 或 x_2）之间的关系；当这些关系为真时我们把它们记录为 ax_1 或 bx_2，当其为假时我们记为 $\overline{bx_1}$。所以这两个问题需要仔细区分，不管怎样，我们认为罗素和维特根斯坦多少混淆了这两者：关于这种结构的基本逻辑（或不可分离的）特征的问题，以及它们与相对应的超逻辑内容之间关系（现实中个体化事实的单一性）的问题。

然而，第一个问题有一个避不开的答案：以命题 p 的形式陈述个体项 x_1 和谓词 a 之间的必然性关系即意味着将这个个体项 x_1 置于与其他项的关系之中，不仅因为命题 p 可以与 q，r 等组合在一起，还因为组成命题的命题内项，即 a 和 x_1 本身，只有在一种条件下才具有逻辑意义：即与其他假借命题的项（b、等，或 x_2、等）产生联系，以显示 a 和 x_1 的特征，或者与在其他命题中，作为与 ax_1 不同关联的成分重新出现的相同项（a 和 x_1）产生联系。

事实上，只存在两种描写的方式，也就是 x_1 的个别化逻辑离析：或者给它不同于所有其他个别项的谓词（使它成为一个单独的"类别"），或者通过它自身即为其中一项的"关系"为中介，将它对应于其他个别项。我们首先设想个别项 x_1 仅代表一种独特的属性 a，将其与被 b、等修饰的 x_2、x_3 等区分开。这样也就是说存在着两个类别，一个类

别 X 包括具有属性 a 的个别项，而另一个类别 X' 包括没有这一属性的个别项，或者说，是具有互补属性 $\bar{a}$，于是有：

$$X = df\{x \mid ax\} = \{x_1\} \quad 和 \quad X' = df\{x \mid \bar{a}x\} = \{x_1, x_2, \cdots\}$$

如果设：$X \cup X' = dfY$，则有：

(0) $$X' = Y - X$$

另外，如果同样设：

$$X_1 = df\{x \mid bx\} = \{x_2\} \quad 和 \quad X_2 = df\{x \mid cx\} = \{x_3\}，等，$$

则可以建构 Y 的亚类别：

$$K_1 = \{x_1, x_2\}, \quad K_2 = \{x_1, x_3\}，等，$$

并得到：

(0′) $$\{x_1\} = K_1 - \{x_2\} = K_2 - \{x_3\}，等。$$

这也就是说项 x_1 并不单单表现为有谓词 a，而且还表现为没有谓词 b，等，(或是 b、c 等)，且这些在场或不在场的谓词已经足够组成一个有所限定的亚类的集合(ensemble)，也就是一个分类(classification)，K_1、K_2 等类别的共同部分的总和等于 X，不同部分的总和等于 X'。现在让我们设一件的谓词 a 为 x_1 的属性，于是项 x_1 只能在属性 b、c 等不在场时才能被识别。这也就是通过属性 b、c 等同时不在场来定义谓词 a，且没有对之前的判断做出任何改变：原子事实(fait atomique)总是相互关联的一个集合的分类。

最后，让我们姑且认为个体化事实 x_1 和其他事实 x_2、x_3 等之间的差别是一种表现或多或少的度的差别。这也就意味着项 x_1 释意一种不对称关系的规则区别于 x_2、x_3 等等的。如果我们用一个箭头(←或→)指示这些表示一种定向差异的关系，我们就得到：

(0″) $$(x_1 \rightarrow x_2) 或 (x_1 \leftarrow x_2)；\quad (x_1 \rightarrow x_3) 或 (x_1 \leftarrow x_3)；等。$$

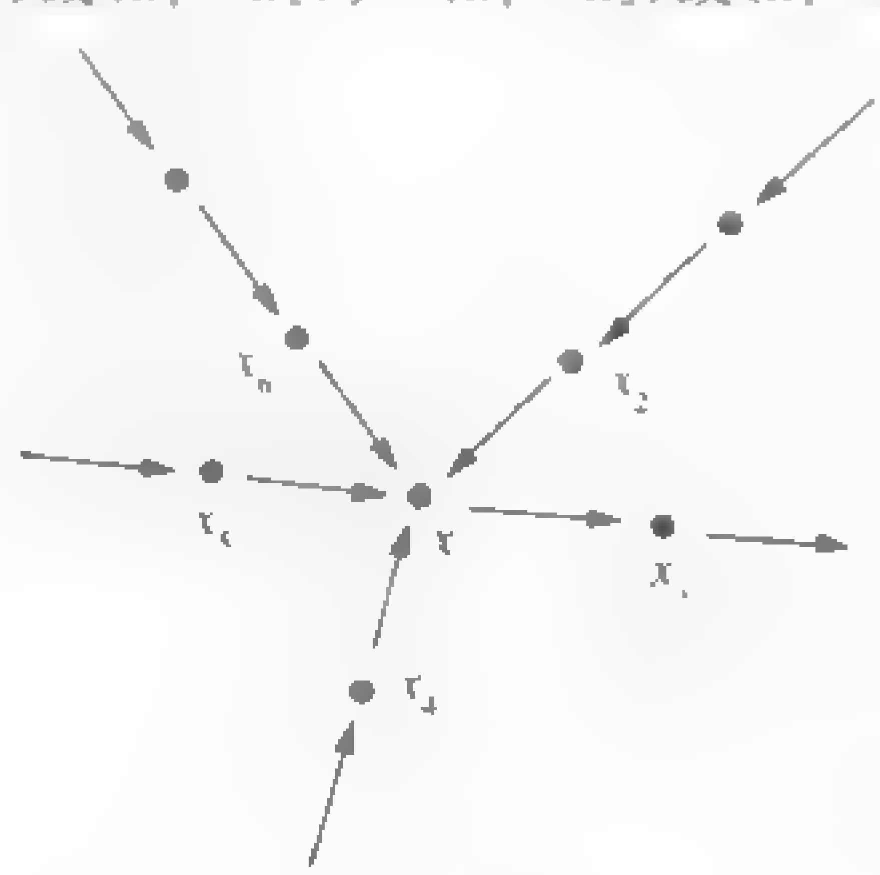


图 1

在这种情况下(图 1)项 x_1 明显区别于 x_2、x_3 等，但是因为存在着一种关系体系，它会因此与其他项联系紧密。

总的来说，倘若只考虑 x 与其他个体项 x 等之间的差异，这些差异或假定了一种分类(α)或(α')，或假定了一种联结体系(α'')。换言之，一个独立的事实是必然的，或者是一个完全的奇点，来源于几个亚类的相交；或是一个关系中心，它构成多重偶(multiples couples)或是更复杂的系列化(seriations)。在这两种情况下，所谓原子事实的个体化或是一定数量其他类别内部划分的结果，或是一个关联体系内的联结。只有这些类别和这些不对称关系能制定命题运算，维特根斯坦把他的原子命题也归于其中。这些命题的可能性本身已经假定了一种层级或一种先决关系。事实上，维特根斯坦已经深刻地认识到，表现为一种"事实"的初始命题是从通过对其他"事实"的否定来建构的；然而，这种否定和不相容性并非其他，而仅仅是形式化类别(α)和(α')，或者是形式(α'')的不对称差异性等的命题表达的约减——至于析取、蕴涵等运算，它们是将这些类别或关系领域所含的扰动(interferences)或包含(inclusions)解释为命题间的项(参见§28)。

所以我们能够以否定原子因素的逻辑存在来解决上文提出的两个问题中的第一个问题。所有独立因素都和一种形式联结，这种形式本身从属于一个高级形式体系。最基础的形式，即最具独立性的结构(定义5)，是独立类别或一个单独项与其他项之间的关系。但是所有的独立类别都是与其他类别联系在一起的，这是一个层级化的集合。至于最简单的关联，它取决于超越它自身的联系(mises en relations)。因此，同时构成独立类别的原则以及前述最大独立性(一项与另一项之间的关系归于其本身)的同一性被罗素引用为个体"描述"的标准①；然而，同一性只作为等价(或部分同一性)和差异(等价是一种无效差异)的限制而拥有了逻辑单一性：事实上，同一性 $x=x_1$ 假定了一种限定性，这种限定性介于 x_1 的等同物和另一种不包含在 x_1 所属的"事实"内的存在之间。因此同一性本身只能根据其他超越它的关系表现出来。

于是我们可以进入第二个问题：最简单的形式化的超逻辑内容(定义6)是由什么构成的，即，是什么构成了独立类别和同一性关系？换言之，如果所有逻辑学考虑的个体都一定是类别的成分和关系的项，那么那些不再是任何"形式"的内容又是什么呢？是否我们最终面对着一个真正的原子事实，也就是一个先决独立因素？这也不可能是真的。从心理学和认识论来说，除非逻辑学要立足于这一点，一个独立的事实或是客体总是与主体的行动要求的划分相关，因此也就是和同化它们(且反过来适应它们)的集合的知觉结构和智慧结构相关；从这种观点来看，不存在这样的独立事实，且个体因素不是先于它们之间建构的体系而存在的，而是可以根据各系统的集合的分解而得到的。从逻辑学的观点来看，也是我们所关注的重点，即以下的说法是完全相同的：作为最简形式的构成内容的个体(例如一颗石子作为个体，是一个单独类别的唯一成员和同一关系的独立项)只有在与其相关运算体系中才构成一个不可分割的因素。在建构另一个

① 罗素，1928，第211页。

类别与关系体系的同时，第一个体系的个体因素可以在第二个体系中成为高等级别的形式[同一颗石子被看作是微粒的集合或是一组几何关系丛(faisceau)，等等]。所以，逻辑分解的最终项相对应的是那些确保个体存在的形式化组合(édifice)，也就是说，这个个体化本身是随着体系的整体性而变化的。因此，逻辑形式的个体内容只有在一定精确的范围内是超逻辑的，它必须是已知的而不能像类别、关系和命题那样是通过运算而建立的，后三者的建构都从属于集合的运算结构。但是无论是从生理学还是心理学的观点来看，还是从逻辑学的观点来看，"已知的"或"超逻辑"这样的修饰语绝不意味着它们就是初始条件。综上所述，结构体系总是向下开放的，也就是说能引起接下来的更加精细化的分析和关于内容的新形式化加工，直到这些内容被转换到已知的和超逻辑的水平。这种向下的开放性必然会妨碍作为整体的构成因子的原子化加工，相反，它仅仅表达了一些逻辑体系的整体中可能的未确定区分(différenciation indéfinie possible)，而这些逻辑体系是建立在从整体到部分的集合关系之上的。

§4 命题的功能，类别和关系

在前面的章节中，我们用类别化(和关系)的术语来解释命题内的运算，假设逻辑类别化的概念具有明确的效用。然而，类别化的逻辑在成了罗素著作中奇妙的重组对象之后，在以建立逻辑体系，乃至一般性形式化必然性的名义下而被抛弃。我们现在来探讨其中具体原因。

那些被人们归功于罗素的重要概念，以及那些以最自然的方式将类别与命题(这概念几乎取代了类别概念的存在的全部意义)的观念联结在一起就是"命题的功能"，这是从命题到命题函数的过渡，而后者则转向了关于命题内运算的研究。

命题 p 是真或假，且只有在这种名义下它才能参与到命题演算中，也就是命题间的逻辑运算中。独特的真或伪值是它的特征，所以它不具备明确的量词，"一个""几个""所有"等表达也不直接关联于命题逻辑，因为这些表达与命题的内容有关，也就是和命题内运算有关。

但是，我们可以用一个任意项代替一个命题的限定项："这朵玫瑰是红色的"这个命题因此变为"x 是红色的"，而且如果我们把"红色的"这个事实描写为 a，我们就可以把这个命题写成 ax。至于 ax 这个表达式，也就是"x 是红色的"，我们不能肯定它为真或者为假。这个叙述不总为真，因为我们可以用一些不是红色的限定项 x'、x'' 代替 x；所以命题 ax' 和 ax'' 就成了假命题。但是 ax 也不总是为假：它本身非真非假，也就不构成一个命题，因为一个命题的主要特点就是为真或为假(定义 1)。我们像罗素一样把它称为"命题函数"，同时把 x 叫作"论题"(argument)并把 a 当作函数：

定义 7　命题函数 ax 是一个非真非伪的叙述，但可根据代替非限定论题 x 的论

题规定性(détermination)而获得真值或伪值。

可变化的 x 在给定的集合中获得其价值，我们还可以通过两种方式把命题函数 ax 转变为一个命题(或真或伪)。不管有没有道理，我们可以肯定所有的 x 都具有性质 a，我们把这记为 $(x)ax$，又或者至少一个 x 具有这种性质，我们将其记为 $(\exists x)ax$。通过三段论联系到命题理论的“所有”“某个”和“没有”等概念则通过一些词被表达为命题函数的项，这些词是“所有”“某个(些)”“没有”或者“总是”“有时”“从未”等。然而，这些概念主要表达了一种类别的嵌套结构。我们能够看出命题函数概念和逻辑类别概念之间的相似之处。我们可以把一个命题函数 ax 和一种类别连接起来，这个类别中的因素满足这个命题函数，也就是 $\hat{x}(ax)$，这个类别有可能为空。反之，每个类别都可以被某个命题函数定义，这个命题函数对类别成分来说为真，而对互补类别成分来说为伪。

然而从命题函数到类别的过渡包含着一些需引起注意之处。有些与“类型理论”有关，后者排斥把其本身也作为其元素的类别(例如，所有类别构成的类别)，另一些与类别作为基础逻辑结构的存在有关，并且，在第二点的基础上，罗素做了改良修订。我们现在对此进行讨论。

事实上，一个逻辑类别不能简单地看成一堆元素；罗素认为，对此最好的证明就是类别可能为空。应该补充的是，如果它们存在，构成一个类别的元素是有效的并且是命题的对象。因此，类别不能简化为一个有形的聚集(collection physique)，而是源自命题内一个元素对另一元素的替换；类别的逻辑存在的首要条件就是建构命题函数(心理学的概念同化格式的逻辑学对应物)。

但是根据罗素所言，这一条件还不够。除了数学类别(集合)的约束条件之外——对此我们现在不打算讨论(见第四章)——罗素还提出了如下条件：两个“形式上等同”的命题函数，也就是总是等同的命题函数，应该适用于同样的对象；而两个形式上不同的功能则应该决定不同的对象。然而，如果所有命题函数都对应于一个类别，那么同一个元素也就可以对应于好几个类别，这是需要被排除的。罗素说道：“当 $\varphi(x)$ 总是等于 $\psi(x)$ 的时候，这两个命题函数在形式上也是等价的。如果有其他函数在形式上与某个给定函数等价，那么我们将不可能辨别两个函数的类别，因为我们不希望两个不同的类别可能拥有着完全相同的成分。”[①] 因此，两个形式上等价的函数必然限定同一个类别。但是根据罗素的看法，这在任何情况下都是不可能的。事实上，罗素把一些命题称作“外延的”，如果用等价的命题函数替代它们的话，它们的真值仍维持不变。因此“16 的平方根是 4”这个命题在这种意义下是外延的，且如果用等价的函数“$x=2+2$”代替命题函数“$x=4$”，那么这个命题仍然为真。相反，“罗素说遇见了一个人”这个命题在此意义下是外延的，但尽管“x 是一个人”和“x 是一个理性动物”是等价的，他也不是说遇

① 罗素，1928，第 128 页。

见了一个理性动物。在这种情况下，类别和函数之间不再是单义对应的关系。

以这种方式来构想逻辑关系当然是令人惊讶的[这就解释了为什么维特根斯坦再地试图区分类别的概念和"约束命题"(proposition intensive)的概念]。但这种方式与逻辑原子论是完全一致的，因此逻辑原子论被证实是一种语法或言语的原子论。如果一个命题能与其自身分离，并同时独立于所有的类别系统，以及包含了某种整体性规则的关系之外，那么我们就可以将命题"符号Ⅳ指第四个基数"和"符号4指第四个基数"看成包含两个形式上等价的功能("x是Ⅳ"和"x是4")，而同时又可以宣称在命题"他写了4"中，功能"x是Ⅳ"不再能代替"x是4"。但是，在整体性的逻辑中，可以考虑在命题"他写了4"中4不再等同于Ⅳ的这一事实是否与肯定Ⅳ和4"总是等价"是相互矛盾的。换言之，如果我们从集合结构的观点来看，首先应该说，我们不能把一个命题孤立于其语境之外且不拘泥于文字，其次应该说，等价包含许多等级阶段，因此意义不同；除了严密的同一性外，不存在"总是等价"的项。

在符号4和Ⅳ的例子中，我们能够建构一个只包含"符号4"的单称类别A和包含"除4之外其他代表第四个自然数的符号"的类别A'。这个类别A'也就包含符号Ⅳ。把两者结合在一起，A与A'就构成了类别$B=A\cup A'$，它包含"所有代表第四个自然数的符号"。于是我们可以定义单称类别的内部等价，在类别A中我们写作$4\overset{A}{\leftrightarrow}4$，即同一或自等价。相反，4与Ⅳ之间的等价只与类别$B$相关，所以记作$4\overset{B}{\leftrightarrow}$Ⅳ。从$A$或$A'$的角度看把4等价于Ⅳ是错误的，因为Ⅳ不属于类别$A$，4也不属于类别$A'$；所以$4\overset{A}{\leftrightarrow}$Ⅳ和$4\overset{A'}{\leftrightarrow}$Ⅳ这两个表达式与前文相矛盾，也就是错误的。另一方面，符号Ⅳ将建构一个单称类别A_2；于是就有了Ⅳ$\overset{A_2}{\leftrightarrow}$Ⅳ。此外，$A_2$在类$B$下会有一个补类别$A'_2(=B-A_2)$，它包含类别$A$，就像类别$A'$包含类别$A_2$。因此会有多种多样的等价和类别被如此这样地建构出来：在这个体系中，等价是两个元素属于同一个类别或是同一个整体类别中所包含的两个附属类别。从这种观点来看，如果属于一个集合体系，就不能再说一般等价；这样我们虽然失去了普遍性，但我们避免了"总是等价"的概念和没有明确等价的情形之间的矛盾！

那么，关于约束命题[1]的追问出离了作为一种逻辑视野的立场，逻辑使得不同种类的等价问题被置于集合体系中予以考量，因此可以通过功能真值集合而将整体性命题函数与定义类别对应起来。然而，(这样做时我们)还是要遵循类别的等级，而不能混淆不同水平的真值。这是罗素通过它著名的"类型理论"所涉及的，个体属于类型(0)，只包含这个个体的类别被称为类别(1)；只包含类别(1)的类被称为类别(2)，等等。建构

---

[1] 在有关"内涵"(intensif)与"外延"(extensif)这些词的使用上罗素的术语与我们的术语不相符，对这一点没必要强调(参见定义14及15)。

类别的基本原则就是永远不要把一个类别合并到比它自己更低级的类别中去。我们稍后再讨论关于类别"集群"的问题(第二章)，到时我们会证明属于"集群"的集合规则能解决这个问题。

在开始讨论这些集合体系之前，我们先将类别定义如下，这是第一逼近法则(en premiere approximation)：

定义 8　类别是项的集合，这些项能作为赋予命题函数真值的论题而彼此替换。①

这样的定义一方面等于说类别从某种观点来看是一个等价项的集合；但另一方面则意味着，这种等价是隶属于某种需要确定规则的替换活动。

事实上，命题可以通过命题内或命题间的运算而相互联系起来；命题函数内可能的替换是通过这些运算规则的组合本身所决定的，这是第二逼近法(en deuxieme approximation)。

但是，到目前为止我们所讨论的命题函数只包含一个论题：ax 或 bx 等。然而，命题函数也可能包含两个论题，axy，或更多论题。我们习惯于把这种含有两个或多个论题的函数看作是在刻画"关系"的特点②：事实上，函数 axy 只有在两个项 x 和 y 之间为关系 a 时才能被证实。为了区分类别和关系，我们是否应该将讨论局限于两种论题的差异，即对应于类别的包含单个函数的论题 ax 和对应于关系的函数的论题 axy 和 $axyz$？而在定义 8 中我们完全没有引入这种差异，那么是否这一定义就不具有普遍性呢？

不过，这种介绍事物的方式虽然常见，却需要两个预设(reserves)。首先，两个项 x 和 x' 轮流满足使包含单个论题的函数 ax 为真的条件，它们之间至少有一种关系：从 ax 角度来看的等价关系，然后 x 和 x' 都可以替换 x。那么类 x，x'，… 就通过这种等价关系而获得了有效性(qualifie)。其实，x 和 x' 之间的这种等价性已经由它们的共同谓词 a 决定了。a 在这时起到一种关系的作用：如果符合 ax 的类由 x，x'，…构成，那么函数 a 就是一种关系。第二，包含双重论题的函数 bxy，表述的是 x 和 y 之间的一种关系，在这个函数中，关系被谓词 b 重新建构了。也就是说，通过这样的函数，项 x 和 y 构成了我们所谓的关系"场"(champ)，也就是形成了通过关系 b 而联结成的类别。因此类别和关系的嵌套关系可能比在一个或多个 ax 和 bxy 论题陈述中出现的情况更加紧密。

但此时出现了一个先决性问题：有可能类别本身就是关系，或者相反；换言之，关于

---

① 严格来说，应该区分项和它们的名称(noms)。这是那些能被命题功能中可变的 x 代替的东西。所以，我们不能动用"尼克松先生"代替命题"尼克松先生是美国总统"中 x 的位置，而只能用他的名称。

② 例如 axy 表示 x 是 y 的父亲。

这两种结构之间的差异的追问首先应该对这种差异本身的合理性提出疑问。事实上，类别是个体项的合并(或者是其他类别的合并，这些类别的亚类总是合并在一起的，最终追溯到个体项)，而关系则恰好相反，它能使这些项根据其等价或命令等方式合并到一起：那么类别就不是一种关系，或是一种特殊形式的关系了吗？是的，因为类别本质上是"外延"(extention)：它由函数 ax 和 bxy 中的 x 或 x, y 组成；相反，能够合并这些 x 或 x, y 的是函数本身，和"内涵"(comprehension) a 或 b，我们会发现在任何情况下都是函数构成了关系。

换句话说，我们可以承认类别是由它自己的"外延"组成，而对应的"内涵"是由关系组成。反之，关系的外延，或者更确切地说关系场(champ)只是一个类别，而关系本身，只要是关系就是通过其内涵组成的。关于这个问题，我们至少先要尝试直接论证，然后(见§5)再通过对谓词的一般性分析来进行证明。

传统逻辑学不区分类别和关系，而是将这两者合并在无区分的项，即"概念"(concepts)之下。但相反的是，传统逻辑学又细致地将外延和内涵两者进行对比：根据定义，外延是概念(恰好)符合要求的个体的集合，而内涵则是这些个体共同拥有的属性的集合。这种外延的含义和我们今天所说的类别一致，我们可以用类别来定义所有外延的概念(参见定义 8)。问题仅在于确定是否只有一种形式的类别，就是不考虑排列顺序的类别，例如"人类"，或者是否存在根据合并项的关系或多或少具有一定结构的类别，比如说"父亲和儿子"或"数列"，等等。当涉及构成内涵的特征属性，问题就复杂多了。古典逻辑学把所有的判断都同化为述词(attribut)形式"x 是 a"，唯一可以考量的关联词是归属(∈)或者包含(⊂)。由此可知，在"x 是比 y 更大"这样一个判断里，这个判断被分割成一个主语 x、一个述词"比 y 更大"和系词"是"。但是，如果"比 y 更大的客体"构成一个类别，那这个判断的主要意义就在于把两个客体 x 和 y 通过系词"比……更大"联系起来，也就是通过一个谓词联系起来，这个谓词在判断"x 很大"中不再有同样的述词意义，且它不再是一个古典意义上的述词。这就是为什么命题函数的现代语言把"x 很大"写成表达式 ax，把"x 比 y 更大"写成 axy 或 bxy 等，并在两者之间做了仔细的区分。

只是，像我们隐约地发现的那样，这种包含单个或多个论题的函数之间的差异还不足以成为类别和关系之间差别的特征，因为即便在包含两个论题的函数 bxy 中，x 和 y 作为项构成了类别；并且即便在包含单个论题的函数 ax 中，函数 a 构成了一个关于 x 的关系，就像函数 b 构成关于 x 和 y 的关系。

所以，在所有关系 bxy 中，我们都可以辨别关系的"域"(domaine) $x(\exists y)bxy$，也就是前件的集合，还有共同域(codomaine) $y(\exists x)bxy$，也就是后件的集合，而场(champ)

$$x(\exists y)bxy \cup y(\exists x)bxy$$

也就是前件和后件的集合。例如，关系"丈夫对应妻子"[1]中的域是丈夫(前件)的集合，共同域是妻子(后件)的集合，场是所有已婚男人和女人的集合。相反的关系"妻子对应丈夫"的场是相同的，但域和共同域就反过来了。

此外，我们还应该区别关系的场以及逻辑学家们说的关系的外延，以及我们说的关系的范围(portée)，也就是满足表达式 $(x, y)\ bxy$ 的序列对(不再是个体)的集合。毫无疑问，这让我们可以把域、共同域和场叫作关系外延的不同形式。但是这些外延由什么组成呢?

首先是一种特别简单的情况：对称关系，也就是对所有 x 和 y 都有等价 $bxy \leftrightarrow byx$ 的关系 b。那么，比如类别之间的相等关系：命题 $A = B$ 与命题 $B = A$ 是等价的：如果第一个为真，那么第二个也为真；如果第一个为伪，那么第二个也为伪。于是，对称关系就有一个特点，它们的域和共同域和场都是重合的。从结构的角度，我们立刻可以看出对称关系是最简单类别的特征：这些类别中的个体是通过共有属性而被结合在一起的(例如，是同样颜色物体的集合，与之对应的是被诸如"x 比 y 更红"这样的关系决定的序列化对应)。在这种情况下，界定类别的内涵最少包括一种关系：等价关系，它表示属于同一类别的个体一定共有某种相同属性(例如，"都是红色")。

其次是不对称关系，比如，不论 x 和 y 是什么，有 $bxy \rightarrow \overline{byx}$。也就是，假如 $<$ 表示关系"比……更轻"，如果 $x < y$ 为真，那么 $y < x$ 就为伪，因此 bxy 和 byx 是两个不同的命题函数。不对称关系的域和它的共同域是不同的，对三个对象 $x < y$ 且 $y < z$ 来说，域是 (x, y)，共同域是 (y, z)，至于场，也就是类 (x, y, z)，它只被定义为客体的一种属性，这种属性让物体可以在重量方面被比较，所以在这里共同属性就是"重量"。相反，如果我们考虑三个因素 x, y, z，我们还要和另一类别打交道，这个类别是通过有关的不对称关系构成的。在这种新的情况下，可以明确的是关系的外延构成了一个类别，而关系本身则是由关系的内涵("多少比较重"，等等)组成。于是，我们给出下面的定义(通过第一逼近法)：

定义 关系就是通过另一个项作为中介来显示一个项的特征。

这个定义衍生出了两个问题：被定义为内涵的关系是否和一般性运算(比如 + 或 × 等)有区别；它是否涵盖所有内涵的谓词，例如 ax 中的函数 a；还是只包含有两个论题的函数的谓词，比如 bxy 中的 b。

关于第一个问题，我们通常认为，无论在逻辑学或是在数学中，都是运算本身构成了关系。因此 A 和 A' 两类能组合成一个整体类 $A \cup A' = B$，X 和 Y 两类能够包含共同

1 原文是 mari a femme，根据上下文关系翻译为"丈夫对应妻子"。下文"妻子对应丈夫"同理。——译者注

2 这对同一也成立，因为在 $x = x$ 中，后件是以不同于前件的方式提出的，之后在任何情况下都被看成是可代换后者的。

因素：它们的乘积 $X \cap Y$ 就建构了一个新的类别 Z，由既属于 X 同时又属于 Y 的因素组成。"和""同时"等表示加法或乘法运算的词可以被当作连接 A 和 A' 或 X 和 Y 的关系。相反地，我们还可以认为，所有关系都是为了组合项而进行的运算，因为关系通过一些项的中介表现了另一些项的特征。所以，在关系和运算之间并不存在任何本质性差异。但是，如果我们确实可以构想所有关系的结构，并且把所有的类别看作是一个运算体系的整体，那么（我们）就必须区分这些已知或建构、但本身保持不变的关系（或这些类），以及区分作为转换的运算，以及那些它们所支撑的作为结构调整的运算：维特根斯坦——他的标志性特点是他的所有逻辑联系的都是重言式（tautologique）——把运算定义成为了把一个结构转换为另一个结构而"应该做的事"。我们采纳了这个定义并用可逆性①对其进行补充，这个定义充分表明了运算的建构性特点，这和关系在不用运算彼此进行比较时的不变性是相反的。

定义 10 —— 我们把"运算"称为一种结构（定义 5）到另一种结构的可逆转换，这种转换或是通过改变"形式"，或是通过替代"内容"而实现的。

于是就很清楚了，关系概念和运算概念是不重合的。相反，如果关系是通过一个项的中介来表现另一个项的内涵特征时，我们就需要了解是否这个定义唯独应用于形式 bxy 的函数，或者它也可以延伸到函数 ax。那么又产生了谓词意义的普遍性问题：是否存在不是关系的内涵谓词？如果不存在，那么所有的 ax 和 axy 的函数 a 都会帮成一种关系；唯一的区别在于，在 axy 中，关系 a 是作为 x 和 y 之间的关系（不对称或对称的）明确地被给出的，而在 ax 中，关系 a 则是作为一种暗含的对称关系，它处于可替代 x 的 x_1，x_2 等论题之间。

§5 在外延中和内涵中谓词

我们刚刚承认类别和关系之间的差异是一种结构性的差异：在任意一个命题函数 ax 或 axy 中，类别由项 $\hat{x}\ ax$ 或 $\hat{x}\ (\exists y)axy \cup \hat{y}\ (\exists x)axy$ 的集合构成，这些项被当作外延的（定义 8），而关系则是通过另一些项的中介来表现另一些项的特征（定义 9），也就是说它被看作是内涵的函数 a 本身。那么"谓词"是什么呢？

首先我们回想一下，主词和谓词之间最主要的区别是功能顺序的区别而不是结构性的区别：这两个项在命题中扮演的不同的角色，两个角色的意义主要和嵌套（emboitements）的顺序有关：在命题"这个男人是黑人"中，"黑人"扮演谓词的角色，"男人"扮演主词的角色，而在命题"这个黑人是男人"，则是相反的情况。在这两种情况里，语言分别离析出个体的一种属性为了指明个体，并以谓词的名义赋予个体其他谓词。

---

① 参见后文 §31。

因此，有关的问题不再是了解一个孤立的谓词是如何被赋予主词的，而是认识一个个体或一类别个体的不同属性是通过何种方式彼此逻辑地联系的：这些属性是根据已知的存在或缺失简单并列或重合的吗？又或者，一些属性和另一些属性如何共同支撑着一些可能的运算建构的关系，比如一个三角形或一个数类的特性，等等？

从这种观点来看，命题的意义比它的言语形式更重要。只要我们打算研究逻辑而不是语法时，这一点就是明确的；只是，对这个原则的肯定与当代的唯名论潮流是相违背的。有时逻辑学家希望根据语言的形式，把言语命题忠实地转译为代数形式。这当然就加强了逻辑原子论，因为语言把动作和运算思维等分割为人为的元素，而对意义的分析则侧重于句子中没有被阐述但又起到了基础作用的一些关系。[①] 另一方面，除了实际关系之外，语言常常引入词的形式所承载的人为关系却忽略其意义。正因如此，罗素在其精妙的理论：谓词的谓词（des predicats de predicats）中，最终建构了一种逻辑形式以精确地应和某种语言表达，比如"拿破仑具备一位伟大的将军的所有品质"。如果我们只注意词的唯一意义，则我们会说一位"伟大的将军"是一个个別项，它具备一定数量的属性（谓词）a、b、c等；而拿破仑因为具备了所有这些属性，因此根据定义，他是一位伟大的将军。但是罗素不只限于此，他渴望表达一个事实，及成为一位伟大的将军就意味着拥有这个概念的所有属性：由此可知，如果 ϕx 意味着 ax 并且 x 是一个满足函数 ϕx 的论题，那么它也满足 ax。而我们可以继续推论："拿破仑具有所有这一些属性，这些属性正是一位伟大将军所应该具有的"，等等。这种逻辑重言式比起第一种形式不会有更多或更少的教益。那么问题就来了，了解逻辑学是否就是为了实现这样一种语言分析，并满足于建构一种通用的（universelle）语言（供数学家使用的世界语），或者说逻辑学的目标是为了达成思想的运算衔接。与词相比，如果我们更侧重于观念的话，那么重要的是要知道拥有一个类别所特有的属性就意味着拥有这个类别所有其他的一般性特质；更关键的是，要了解这些特质是根据何种结构来彼此推衍的，以及这种结构对所有类别都是一样的还是会区分成不同的形式。[②]

这意味着，我们应当还罗素以公道，他已经很好地指出了谓词语法概念中的含混之处，并且他只谈论"总是"为真或"有时"为真的"函数"，其中会出现那些"所有"和"一些"；他把"谓词"这个项保留给不含任何概括性的特性。问题仅在于确定谓词概念是否还有用处，以及是否不再应该局限于用类别和关系运算的方式进行命题函数分析。像我们之前已经看到的（§3），不存在个体的"事实"，而只有"个体化的内容"和其主项的

① 这篇文章写于乔姆斯基的语法问世之前。参见皮亚杰，1968，第五章。

② 比起言语更侧重象征思想确实会有限制符号论的危险，而且只考虑言语表达更简单。但是不论怎样，这是符号论的局限，因为我们不能把符号论的原则或是主要定义变成符号。维特根斯坦避开了这个难点，他建立了一种关于符号的理论，把符号作为客体的直接表象。但这属于心理学而不是逻辑学，并且是一种有争议的心理学：符号总是关联于一个意义集合的体系，自然它就不符合服从于所有原子论。

已知、肯定或否定条件的成体系的集合有关。因此不能确定是否存在没有概括性的谓词："这个(x_1)是红色的(a)"意味着"这个(x_1)和其他项(x_2、x_3 等)有相同的叫作红色的颜色，而不是和所有有色客体的颜色都相同"。在谓词的领域中，就像在项的领域中一样，立足于有效运算的整体性是十分重要的，从这一观点出发，我们将看到，所有谓词都会归结为一种或简单或复杂的关系。

在开始把谓词翻译成命题函数的语言之前，让我们首先罗列一份关于各种可能谓词的详细表格。第一步我们需要构想外延的谓词和内涵的谓词。第二步，我们可以把谓词归于其他项并同时考虑这些项，我们也可以只把它归于其自身或只归于自身的部分。最后我们可以区分简单谓词和谓词的谓词(在不同的水平上)。

外延的谓词不再被古典逻辑学所承认，"所有的哺乳动物都是脊椎动物"或者"一些哺乳动物是水生动物"，在这些例子中，命题的外延谓词和其他项还有被考虑的项有关。命题"动物是除了植物之外的活的生物"只是把谓词和被考虑项联系起来。这些不精确的外延关系让汉密尔顿(Hamilton)形成了著名的谓词量化的思想，这种思想将所有谓词都被转换为明确的外延项："所有哺乳动物都是脊椎动物"就变成了"所有哺乳动物都是一些脊椎动物"。

汉密尔顿这种丰富的思想让一件事变得很明显，外延的谓词都可以还原为类别的运算。罗素的逻辑学也因为谓词概念的原因而去掉了所有外延的介入。为了从命题函数过渡到使用"所有"或"一些"的命题，像我们已经看到的那样(§1)，罗素简单地加上了一个"量词"(x)或($\exists x$)。这些量词完成了决定外延的角色，而汉密尔顿早已发现了外延的必要性，但是从中分离出外延谓词的符号表达，如 a，却允许保留后者本身的意义，这种意义与内涵有关。然而，因为所有命题函数的外延都构成了一个类别(一旦提出，則需要以各种序列的等价为前提，其困难在§1中已做过陈述)我们可以重新使用类别化的术语：这是我们在第二章中会做的事，把外延的量化推延至比汉密尔顿更远的地步。

于是，谓词的观念(或者说命题函数本身，和它的论题和量化特征相对应)就被还原为内涵。我们现在需要探讨内涵是怎么构成的。我们试图证明所有内涵的谓词都归于一种关系，虽然把主词和外延谓词的关系解释为类别的运算，重要的是把主词和内涵谓词之间的关系表现为关系的运算。在这方面有三种情况要考虑：被赋予除考虑项之外的其他项的谓词，被赋予其本身的谓词，以及和其自身的一部分有关的谓词。

1° 第一种情况以两种形式出现：ax 和 axy("x 是红色的"或"x 比 y 更红")。功能 axy 明确表示一种关系(见§1)，所以它证实了假设，且坚持了此并无益处。至于形式 ax 的功能，首先要注意的是，语言常常通过赋予主词 x 一个谓词 a 来表达一种相对基本的属性，这种属性的意义必须——尽管是内隐地——参照其他项的含义。当我们说"这座山很高大"或"这座山丘很高"，谓词"高大"和"高"对山丘和山的意义是不一样的，但它们都是和这两个不对等的项相关；它们并不是表达了一种纯粹的重言式。从另一

方面来看，这两个谓词意味着前面提到的山和山丘比一般的山和山丘的平均期待高度要更高；所以尽管肯定的形式是绝对的，但是谓词和功能之间是双向参照的。一系列的述词也是一样的，比如"北欧的""南北极的"，等等，它们以一种简单的谓词的形式表达了复杂的关系。

但是通常来说，函数 ax 不会更多地赋予客体以绝对属性：彩色的、重的、虚假的，等等。只是通过在谓词 a 与个体对象 x 之间建立联系，函数 ax 用一种属性来形容 x_1，这种属性同样地属于 x_2、x_3 等，总之就是属于类 $\hat{x}$ ax 中所有个体的属性；事实上，谓词 a 构成了对应于外延的"内涵"所包含的属性之一。于是，它就成了一种新的必然性关系，因为它自身述者某种同时属于很多个个体的属性：其实，谓词只是一种建立在 x_1，x_2，x_3，…之间的相似关系，也就是说在所有构成一个类别的 x 之间表示了同一种属性；用 ax 指 ax_1，ax_2，ax_3 等表达式所表示的，就是通过对同一种属性的共同所有，在外延项 x_1，x_2，x_3，…之间建立一种可定义的等价关系 a。可能有人会说，应该在这种共同属性中区分属性（"红色"）和共同事实（le fait d'etre commune）如，"都是红色"(co rouge)。然而，在一个被当作内涵的属性中，不存在任何可以被定义、被陈述，甚至被标记的东西，除非参照了除了被修饰项之外的其他客体：因此，在陈述句"x 是红色的"中，除了 x 和其他项之间通过以属性为中介而建立的等价关系之外，并无其他（定义 9）。①

2° 我们现在讨论第二种情况：在这种情况中谓词 a 只符合唯一的个体项 x，不符合其他任何个体。那么，问题就是要知道我们怎样才能把谓词 a 描述成与众不同的属性。于是有两种可能：属于 x 的属性被一组明确的关系所定义（x 是按顺序排列的一系列中最小的项，或是两条直线的交叉点，等等。），或者它以一种绝对形式被指定。这两种可能性中的第一种进一步肯定了我们想证明的东西。至于第二种可能性，我们没法用种类和个体差异来构成一种唯一的、绝对的属性的特征，因为个体差异包括了对种类中其他个体对应属性的否定。因而我们要用一个组合谓词来定义只属于 x 的属性 a，$a = df\ ba'$（一品质 a 是一种属性 b，而不是 a'）。但是这个组合函数构成了我们之后会看到的（第二章，§ 19）等价对称关系集群中的一种关系：相异性（alterite），即是对第一种等价的肯定，并对包含在第一种等价中的第二种等价的否定（例如，"嫡亲堂兄弟"——同一个祖父的孙子，但不是同一个父亲的儿子）。从这种观点出发，这种绝对属性即使是分别属于独立的个体项，它们也是有关联的

① 从另一方面，我们可以反对（这是我们，尤其是某些数学家提出的一种反对意见）（原文中没有破折号，此处为译者添加）在"这块石头是白色的"或"天是蓝色的"中，我们没有看到任何"关系意识"，而只有把一种品质赋予一个客体的印象。只是，从我们的观点出发，逻辑学不应该顾忌内省的心理学的那些错觉，正如几何学家不服从于敏感的直觉的判断（比如，没有切线的曲线），而是通过更精确的分析做出修改，同样逻辑学家应当追溯意识和内省变形之外的精神的实际运算（另外变形通常是集中的）。

3° 至于第三种情况，谓词因为和被修饰的客体的一部分有关，可以归结为前例。如果动物 x 因为在群体成员中表现出一种畸形，所以它是它的种类中独一无二的，我们可以根据多种不同的逻辑形式来表达这种属性。我们首先使用特性的关系：怎样的个体就有怎样的特点(是脊椎动物就意味着它有脊椎骨，等等)。在这方面，所有属性的赋予都可以简化为这样的关系，或是在一方面，或是在个体的一部分。但是我们也可以根据划分运算，把个体的因素分成类别：一个生物是器官的集合，线是点的集合，等等。这种分割包含了新的外延运算；关于这些类别的量化表述，以及类别的元素的量化表述，都能按照其自身顺序而被还原为不同种类关系的建构，这就把我们带回前面的情况。

于是我们可以这样总结，在所有的情况里，把谓词赋予个体的或集体的项，也就是将"内涵"赋予了它们，其本身就是关系体系的建构。所以，首要问题就是要确定在"谓词的谓词"这种情况里，哪些关系是彼此支撑着的谓词。根据通常的观点，罗素尝试(并不完全成功地)以最普遍的形式得出"谓词的谓词"的结构，并建了一个对非数学和数学谓词都有效的表格。然而，倘若所有谓词都是关系[1]，那么"谓词的谓词"的问题就变成了关系之间的关系；因此，从可能的结构种类多样性观点着手比从最广也最正式的普遍性观点着手会更有趣。一个生物可以同时是四脚动物、哺乳动物和脊椎动物；如果四脚动物蕴涵哺乳动物，并且哺乳动物蕴涵脊椎动物，那么其逆命题将不为真，并且这些蕴涵关系只能说明通过命题函数而建构的类别之间的包含关系。其实，我们可以不依靠脊椎动物的属性来定义哺乳动物的属性，也不靠哺乳动物的属性来定义四脚动物的属性；想象地建构一种没有乳腺的四脚生物或有乳腺没有脊椎的生物应该没有任何逻辑矛盾。当然，我们并没有遇到这种生物的经验，这让人想到，在无脊椎动物的特有性质和拥有手脚或乳腺之间有着不可兼容性。但是，只要我们不能通过定义运算的方式来进行推论，在这些器官与脊椎动物之间建立联系，那么这些关联就始终停留在简单的观察事实的水平上；即不可能从另一些关系出发而建构另一些关系，而蕴涵关系只能是已知的而不是由推论形成的。现在，让我们用欧几里得三角形来比喻哺乳脊椎动物和四脚动物。前者的特性是封闭的、三条边的、三个角的图形的，并且内角的总和是 180°；这四个特性中的任何一对都蕴涵着另外两个特性，也就是这里的每一个特性都包含了可能由定义运算(从封闭和维度的拓扑学概念，到角度的测量)而产生的关系。谓词又重新成了关系，但是在这一次，这些关系包括了更多建构的"结构"(定义 5)并不再像在四脚脊椎动物的情况里那样直接涉及"超逻辑的内容"(定义 6)。那么对我们来说的主要问题就不再是知道是四脚动物或三角形的事实是否蕴涵所有的属性，而是确定属性(也就是关系)之间存在的是什么关系，这些属性或是刻画像四脚动物类那样几乎没有形式化

① 在数学里，这很明显，一个谓词就是一种"特性"，因为从项的逻辑意义来看，一种数学特性只能是一种关系。

的内涵类，或是刻画像三角形那样的类别，其内涵只包含了所建构的基本的、结构清晰的关系。

从一种整体性逻辑的观点来看，谓词之间的关系所提出的主要问题就是外延的类别和内涵关系之间各种可能的"结构"（定义5）的问题。以此看来，不应该只是以类别的名义比较那些在形式化程度上，差异度接近脊椎动物类与整数集合类的关系的结构。因为类别将产生于一种简单的嵌套体系或"形成的规律"——确切地说是从一些关系到另一些关系的建构——这个类别的运算结构可能是不同的，定义其内涵的谓词之间的关系也会表现出不同的形式。为了解决这一问题，我们现在要探讨一般外延和内涵之间关系的问题。

§6 外延与内涵之间的关系和类别的多种结构

如果类别符合概念的外延，而关系符合其内涵，那么外延和内涵之间的关系问题应该能够通过类别和关系之间的分析来阐明。

古典逻辑学忽视关系的结构，它将谓词或是看作一种比主词类更普遍且包括主词类别的类，或是看作一种被包括在主词品质内的一种品质，因此外延和内涵根据两个彼此相反的嵌套体系而获得了对称关系。因此就有了那条著名的法则，根据这条法则，外延与内涵是成反比的：上帝所具备的属性是唯一的，所以具有"最小的"外延和"最大的"内涵，而一般性的存在则具有无限大的外延和最小的内涵。然而，最重要的是要看到，这条法则对于最少结构化的类别是很准确的，而在根据一些关系按序列排列的，或被修饰的类别的领域内，则并不如此了。比如，圆锥曲线的一般性公式所对应的外延类别要比抛物线的更广，因为抛物线只是圆锥曲线中的一部分；然而一般性公式的内涵却高于抛物线内涵，因为它以一种能从一般性法则中推衍特殊情况的方式而包含了抛物线的内涵。所以我们现在就需要理解为什么这条内涵与外延之间的反比法则只在一些领域内为真，同时还需要根据类别是否与之前提到的法则有冲突来判断类别的结构之间的差异。值得注意的是，逻辑对类别的内部结构关心甚少：原子论倾向认为，建构这样一个类别，它独立于关系和相邻类别，以及独立于数学逻辑与基础逻辑关于共同元素的研究之外，其实是为了把研究旨趣指向类别的更一般性的方面，而不是它们的结构差异。然而，这样的讨论已经面临了相对的困难，这些困难在于无穷集合以及那些被考察集合的整体关联性特征之间。这些困难导致了对非谓词定义的排斥，转而求助于罗素关于型的理论：逻辑学不是继续探索问题，而是试图回避问题。

让我们从这两种极端的情况出发。类别的最简形式可能是通过属和种差（per genus et differentiam specificam）的方式来定义的。这也是动物系统分类学使用的类别，比如§5中所讨论的四脚哺乳动物。这种分类的特征是不使用高级或低级类别谓

词而分别地给每个类别提出可以被描述的属性；其实，拥有乳腺的事实可以不参照是否拥有脊椎骨和四肢来进行陈述。庞加莱（Poincare）把这种类别称作"谓词的"（predicatives）类别，与之对应的是"非谓词的"（non predicatives）的类别，他做出这种区分的"依据……在于类别的元素的与集合整体之间的某种联系"。因此，这里存在两种分类（categories）："不会被引入的新元素所干扰的谓词类别；会被引入的新元素持续强制修改的非谓词类别"①。然而，如果这些被罗素反对但被数学家们一直运用的非谓词的定义仅仅和某些无穷集有关，那么更有可能从类似的角度区分不同类的种类。事实上，如果我们比较哺乳动物到脊椎动物的关系和圆到圆锥曲线一般方程的关系：

$$Ax^2+A'y^2+Bxy+Cx+C'y+D=0$$

（其中圆的方程我们用 $A=A'$ 和 $B=0$ 表示），我们马上就能发现圆并不仅仅是一条圆锥曲线（"genus"）加上一些圆锥曲线属性之外的其他属性，而相反是去除了和这些一般属性的直接联系；即，关于乳腺的关系定义不能产生于关于脊椎特征的描述的简单转换，而圆的属性来自一种对椭圆、抛物线等属性的转换，正是这种引导一个亚类向另一个亚类的可能转换，且保留了特定不变量，才构成了圆锥曲线的一般类别特征。在这个意义上，作为亚类或种的"圆"的属性参照了作为一般类别或属的"圆锥曲线"的属性，而"乳腺"的特殊差异性则通过混合建构而简单叠加了"脊椎骨"的一般属性。同样地，"偶数"的类别表示了一种特殊差异性（n 乘以 2），这种差异性必然参照了到属"整数"的属性，因为运算（$n\times 2$）蕴涵单位 1，这个单位的重复 +1 定义了接下来的整数；在这种情况下，我们没有必要对"属"和"种"做更多解释，至少在和之前相同的意义上是这样，但我们需要看看那些被一种内在构成法则所限定的类别，这种法则使类别的一些因素根据另一些因素而产生。

于是，两个结构之间被插入了一个中间者（tertium）。如果我们是不同的各体 x_1，x_2，x_3，…，根据任意一种顺序排列（例如，越来越重），很显然，一种局部的差异（x_1，x_2）可以独立地描述高阶序列（x_1，x_3）或（x_2，x_3）的差异。相反，整体差异是部分差异的"和"：

$$(x_1,x_3)=(x_1,x_2)\circ(x_2,x_3)$$

且整体差异依存于部分差异。在这种情况下，亚类 x_1，x_2 和高阶类别 x_1，x_2，x_3 之间不再有异质，正如被属（genus）和种差（differentiam specificam）定义的类别。但是，没有任何已知的转变规则能从（x_1，x_2）②出发而建构了差异（x_2，x_3）。这两个差异简单地通过运算"∘"结合在一起，以使建构总体差异（x_1，x_3）。

因此，我们需要区分至少三种类别的结构。

假设有类别 $A=df\{x\mid ax\}$，$B=df\{x\mid bx\}$，$C=df\{x\mid cx\}$，等等，且我们假设 $A\subset B$—

① 庞加莱，1913，第 104—105 页。

② 原文如此，但是依据上下文意思，此处应该是（x_1，x_3）的笔误。——译者注

C。我们已经看过(参见§4)如果两项 x_1、x_2 是 B 的因素，我们可以写成 $x_1 \overset{B}{\leftrightarrow} x_2$，即相对于类 B 来说 x_1、x_2 是相等的。但因为 B 被特定属性 b 所定义，也可以记作 $x_1 \overset{b}{\leftrightarrow} x_2$ 以便标记 x_1、x_2 对属性 b 的共同拥有。

定义 11　我们把一些类别称为"弱结构化的"(faiblement structurees)，属于这些类别其中之一(例如 B)的个体通过拥有属于这类别的某些共同属性 b 而彼此联系。任何已知运算都不能从这些属性 b 出发来建构属于类别 C 的属性 c，且类别 B 包含于类别 C，即使是那些被包含在类别 B 中的其他类别，如类别 A，也没有运算能(通过属性 b)建构属于类别 A 的属性 a。

备注 1　$\overset{a}{\leftrightarrow}$、$\overset{b}{\leftrightarrow}$、$\overset{c}{\leftrightarrow}$ 等关系介入之前所定义的关系就是构成了与 A、B、C 等类别对应的内涵。例如，存在于类别 A 的个体间的关系 $\overset{a}{\leftrightarrow}$ 表示所有个体共同拥有四脚动物的特定特征；同样地关系 $\overset{b}{\leftrightarrow}$ 通过对乳腺的共同拥有来定义哺乳动物的类别 B，而关系 $\overset{c}{\leftrightarrow}$ 通过拥有脊椎骨的共同属性来定义脊椎动物。我们将这样的关系称为"质的等价"(équivalences qualitatives)①。

备注 2　定义 11 意味着 $\overset{a}{\leftrightarrow}$、$\overset{b}{\leftrightarrow}$ 等关系在修饰弱结构化类别的同时构成了"已知的"(données)、不是被建构的特征。也就是说，我们不能把 $\overset{b}{\leftrightarrow}$ 改变成 $\overset{a}{\leftrightarrow}$ 或者 $\overset{c}{\leftrightarrow}$；事实上，我们不能从哺乳动物($B$)的乳腺出发而得到四脚动物($A$)的脚或者脊椎动物($C$)的脊椎骨。

备注 3　不应该混淆 $\overset{a}{\leftrightarrow}$、$\overset{b}{\leftrightarrow}$、$\overset{c}{\leftrightarrow}$ 等"质的等价"和其他可能从 A、B、C 类别中得到的关系，例如，属于 $x \in A$ 或包含 $A \subset B$。这些包含关系是可以复合的，通过一些运算如 $(A \subset B) \cdot (B \subset C) \cdot \supset (A \subset C)$ 等，并且我们可以得出如下蕴涵

$$(x)(x \in A \supset x \in B), \quad (x)(x \in B \supset x \in C) \quad 和 \quad (x)(x \in A \supset x \in C)$$

但是这些运算绝不能等同于从一个关系建构另一个关系，诸如 $\overset{a}{\leftrightarrow}$、$\overset{b}{\leftrightarrow}$、$\overset{c}{\leftrightarrow}$ 等；这些运算只能建构类别的嵌套(与它们所属和所包含的不对称关系)，以及在已知条件允许时，从这些嵌套中得出必然彼此连接的一组命题。

定义 12　当考虑 x_1、x_2、x_3、x_4 等各体时，它们是按照差异 (x_1, x_2)、(x_2, x_3)、(x_3, x_4) 等被分类的。如果我们有 $(x_1, x_3) = (x_1, x_2) \circ (x_2, x_3)$，$(x_1, x_4) = (x_1, x_3) \circ (x_3, x_4)$，等，并且不存在任何运算能从唯一差异 (x_1, x_2) 出发而构成差异 (x_1, x_3)、(x_1, x_4) 等，那么类别 $A = df\{x_1, x_2\}$，$B = df\{x_1, x_2, x_3\}$，$C = df\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 等就可以被称为"半结构化的"(semi-structurées)。

备注 1　这里和弱结构化类别的情况一样，所提到的部分关系是已知的而不是

① 参见后文§8，定义 16 和建议(prop.)1—2。

建构的，但是整体关系并不等于部分关系的总和。

相反，假设有一组平行线，它们按照某种间距递减规则排列（即按照"纹理梯度"透视法则排列的一组线段）。在这种情况下，一种特定的运算（在这个例子中是一种映射变换）能够从其中一种关系出发建构出连续性关系（也就是在线段长度变化所体现的透视关系和线段之间差异这两者之间的关联）；并且，根据定义 12，我们在这里不是在讨论一个半结构化类别，而是一个"结构化"的类别（定义 13）。

定义 13　我们把这样的类别称为"结构化的类别"：它们从属性（关系）出发，规定了一个亚类 A 的特征；通过特定运算的中介可以构成其他的亚类 A，A' 等的特定关系，并定义了与完整类别 B 的关系（或者相反地，从 B 的属性出发构成了 A 或 A'，A'' 等的属性）。

备注 5　大部分的数学类别，但不是全部，是结构化的。从一个几何"基础群"（groupe fondamental），比如"仿射对应"（affinités）的群出发，我们可以通过一些涉及或不涉及直线、平行线、角和距离的运算，从而得到这些亚群的属性（相似性和位移），或者追溯包含这个群的高阶群的属性（投影性和异物同形）。相反，任意一个集合的亚集合不能通过自己而构成一个结构化类别体系。

从这些差异中我们很容易看出外延和内涵之间的反比规律只适用于弱结构化类别，而不适用于半结构化或结构化类别。事实上，在第一种情况中，一个外延交叉的类别 A，B，C，也就是 A 被包含于 B，且 B 被包含于 C，那么，类别 A 的内涵，除了特征 a 之外还包括特征 b 和 c；相反，B 的内涵包括 b 和 c，但不包括 a；而 C 的内涵包括品质 c，不包括 b 和 a。于是我们可以看出，一个弱结构化类别的外延越是延伸，它的内涵就越贫乏；总而言之，"种"比"属"的内涵更丰富，因为它既包含一般特征也包含特定的差异，而属的内涵只包含一般特征而不包含特定差异。

相反，在半结构化类别中，内涵与外延会同时增长，即类别越是延伸，项之间的关系越多，并且，局部的关系被纳入到整体关系的内涵中。假设 $x_1 < x_2 < x_3$（例如 x_1 比 x_2 轻且 x_2 比 x_3 轻）：类别 x_1，x_2，x_3 代表了比类别 x_1，x_2 更广的外延，且前者的内涵也更丰富，因为关系 $x_1 < x_3$ 包含关系 $x_1 < x_2$ 和 $x_2 < x_3$；所以内涵与外延是成正比的。我们要注意，这种推衍不适用于弱结构化类别的包含关系：假设（四脚动物）$\subset$（哺乳动物）$\subset$（脊椎动物），我们同样以 $A \subset B \subset C$ 来表示。事实上，由于类别 A'（非四脚动物的哺乳动物）和 B'（非哺乳动物的脊椎动物）的介入，这种类别间的嵌套关系与依据一种简单不对称关系（更重或更轻）而建立的项的序列相反；其结果是，我们不能再对项的集合进行分类，因为，如果我们有 $A \subset B \subset C$，但同时既没有 $A \subset A'$ 也没有 $A \supset A'$（也没有 $B \subset B'$ 和 $B \supset B'$）。正是因为缺少一种唯一的顺序，所以体系是多结构化的，而不是半结构化的；所以内涵必然通过一般特征和特定差异的隶属关系来予以定义，于是，内涵与外延之间成反比。相反地，在半结构化类的情况下，内涵属于一种唯一的不对称关系，并适用于所有的项（贯通性 connexité），外延与内涵之间有独特的顺序且成正比。

最后，在结构化类别中，很明显内涵与外延同步增长，因为整体类别的属性作为特殊情况，包括了部分亚类的特征。

现在我们尝试来分析外延本身，也就是能够合并为一个类别的个体的数量，对应于决定其内涵属性的关系。我们于是发现了一个根本性的差异，不是第一种形式（弱结构化）和另外两种形式之间的差异，而是前两种形式（弱结构化和半结构化）与第三种形式（结构化类别）之间的差异。这个差异甚至从本质上可作为区分逻辑学和数学的一般准则。

我们从两个定义开始，在这两个定义中"量的关系"（rapport quantitatif）的项意味着外延的相等或不等：

定义 14 —— 我们把这样的量的关系称为"约束的"（intensifs），它们只包括部分和整体之间的不均衡性，或者同一性，而不包含一个部分和其他属于同一整体但不相交部分之间的量化关系，也不包含一个整体的部分和另一个整体的部分之间的关系。

定义 15 —— 我们把一些不相交类别之间的量的关系称为"延展的"（extensifs），尤其是一个部分和同一整体中的其他不相交部分之间的关系，或一个部分和另一个整体中的任意部分之间的关系。

定义 15 附 —— 我们区分了两种延展性关系，一种是蕴涵单元迭代的数量化的（或度量的）延展性关系，另一种是包括不相交部分之间的量化关系，但不包含单元迭代的简单延展性关系。

备注 6 —— 我们把仅仅在约束关系中形成的量称为"约束量"，把在不区别延展的或约束的关系中形成的量称为"任意量"。另外，我们将用"约束类别"的名称来指那些其量化特征是固定地约束性的类别；我们将会证明，约束类别是被弱结构化类别和半结构化类别建构出来的。

我们立刻就发现了先前所做的区分的重要性：说逻辑结构只使用约束量，其实是肯定了在逻辑学中，在两个不相交类别之间做任何外延比较都是不可能的；相反，数学量则存在任意性，承认不相交类别之间和嵌套类别之间的量的关系。

首先对于弱结构化类别来说，我们认为，除了在空类别或单称类别的情况下，它们的外延不能像嵌套类别（classes emboîtantes）或被嵌套类（classes emboîtées）的外延那样被承认。假设类别 B 是被包含在类别 C（脊椎动物）中且包含类别 A（四脚动物）的哺乳动物类别：我们只知道关于 A、B、C 的外延的一件事：那就是 $B>A$ 且 $B<C$①。假设已知只有一种——或任意一个我们想要的种类数字——特定的非四脚的哺乳动物（类别 A'），以及另一种——或任意一个我们想要的种类数字——非哺乳的脊椎动物（类别 B'），这些都不会对我们建构这些类别有任何帮助：我们只知道 A、B、C 的外延代表量的关系是 $A<B<C$，我们却不知道任何不相交类别和 A' 或 B 和 B' 各自的外延；另外我们

① $B>A$，$B<C$ 等写法是外延 $B>$ 外延 A，外延 $B<$ 外延 C 等的缩写。

还知道有 $A'<B$ 和 $B'<C$，因为 A' 被包含了 B 而 B' 被包含了 C。但是，如果我们遵循弱结构化类别的纯粹"形式"，那么 A 和 A' 之间、B 和 B' 之间的外延关系就不能被确定。只有单称类别和空类别本身有一个确定的外延，因为它们都简化成了一个个体或逻辑上的零。但逻辑上的"一"不是算术单位，因为它不承认重复：

$$\{苏格拉底\}\cup\{苏格拉底\}=\{苏格拉底\}$$

这不是有两个苏格拉底。其实，可以用同一性表示单称类别中的因素彼此是相同的（不论是苏格拉底、柏拉图的老师、赞西佩的配偶或是被判服毒的哲学家），其主体没有任何基数成分的介入。至于空类别，它们产生于逻辑减法 $A-A'=\bigcirc$。从前文来看，我们可以推断出弱结构化类别的外延只承认量："全部""几个""一个"和"没有"（以及它们的否定形式）。如果没有预先确定什么是数学量的话，那么我们就能够建构一种弱结构化类别的逻辑，在我们能决定这种逻辑与集合或与数学类别的关系之前，它首先是为了其自身而建构的。

至于半结构化类别，则有两个相关的议题应该被区分：这些类别的外延，也就是根据连续不对称关系排列的个体的集合，以及作为内涵关系的关联性。但是，因为在这些结构中，外延与内涵之间有直接的关联，构成这种内涵的有序差异的关系恰巧表现了一种"约束性的"等级观念，与延展性量的关系一一对应（因此它们也属于约束量）。假设有一个根据任意的多价量分类的客体的集合（例如一组按光洁度排列的酒瓶）：x_1、x_2、x_3、x_4，等等。连接这些客体的关联性就是那些区分诸如 x_1 与 x_2、x_2 与 x_3 之间的差异根据被考虑的量，我们把 x_1 到 x_2 的关联性称为 $\overset{a}{\rightarrow}$，x_2 到 x_3 的关联性称为 $\overset{a'}{\rightarrow}$，$x_1$ 到 x_3 的关联性称为 $\overset{b}{\rightarrow}$，如此等等。那么我们就可能像组合差异那样组合这些关联性：

$$\overset{a}{\rightarrow}\circ\overset{a'}{\rightarrow}=\overset{b}{\rightarrow}\text{作为}(x_1,x_2)\circ(x_2,x_3)=(x_1,x_3)$$

$$\overset{b}{\rightarrow}\circ\overset{b'}{\rightarrow}=\overset{c}{\rightarrow}\text{作为}(x_1,x_3)\circ(x_3,x_4)=(x_1,x_4)\text{，诸如此类。}$$

如果我们假设 $A=df(x_1,x_2)$，$A'=df(x_2,x_3)$，$B=df\,A\cup A'$，等等，那么我们会发现在关联性 $\overset{a}{\rightarrow}$、$\overset{a'}{\rightarrow}$、$\overset{b}{\rightarrow}$ 之间存在一些关系，它们对应于我们在类别 A、A'、B 之间确定的那种差异：我们知道差异 $\overset{a}{\rightarrow}$ 比差异 $\overset{b}{\rightarrow}$ 小，因为后者包含了前者；也因为同样的原因，差异 $\overset{b}{\rightarrow}$ 比差异 $\overset{c}{\rightarrow}$ 小；换言之，A 和 B 之间的差异比 A 和 C 之间少；A 和 C 之间的差异比 A 和 D 之间的少，以此类推。但对于 $\overset{a}{\rightarrow}$ 和 $\overset{a'}{\rightarrow}$、$\overset{b}{\rightarrow}$ 和 $\overset{b'}{\rightarrow}$ 等，或 $\overset{a}{\rightarrow}$ 和 $\overset{b'}{\rightarrow}$ 等之间的关系，我们则一无所知。于是，我们不得不又重新回到约束量概念，别无他法（至于等价关联性，从这种观点看来，它们构成了无差异关联性）。

如果我们现在把这些有序差异的关联性都转换成为外延的项，很明显（鉴于这种情况下外延和内涵之间可观察到的直接关联）我们又回到了约束性量化，但这次是类别的项而不是关联性的项。其实，序列项的类别，对应于之前的关联性，其本身是外延交叉

的：类别 x_1、x_2 对应于关联性 $\xrightarrow{a}$，类别 x_1、x_2、x_3 对应于关系 $\xrightarrow{b}$，如此等等。于是，我们得到了这样的包含关系：

$$\{x_1, x_2\} \subseteq \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \text{等等。}$$

它们包含了一种约束的排他性量化，类似弱结构化中的类别的量化。确实，我们可以把所有被每个类别和其前一个类别之间的差异形成的单称类别看作相等的外延，也就是类 x_1、x_2 等等。但是，从一方面来看，x_1、x_2 等这些项，即使它们是单称的，也不构成迭代单元，因为它们没有相同的价值（其中某个项和其前一个项之间的差异不能被确定）。从另一方面来看，我们可以在 x_1、x_2、x_3 等之间插入许多其他的项，这可能会排除不相交的连续类别之间所有的外延的比较，只保留部分类别和包含这些部分类别的整体类别之间的比较：例如，$x_1 \cdots x_2 \cdots x_3 \cdots$ ＝ $x_1 \cdots x_2 \cdots x_3 \cdots x_4 \cdots$，只要两个类别中的插入项是一样的。然而，确切地说是这些比较在内涵上对应了序列差异本身的关系组。

相反，对结构化类别来说，当然它们可能有延展性量化。事实上，它们的定义本身就蕴涵了，一个部分类别 A 根据其他部分类别 A' 和整体类别 B 而被限定；那么 A 和 A' 之间可能有一种外延的比较。例如，在属于集合理论的概念中，这个概念通过词组"几乎全部"来表达，也就是"排除了一定数量之外的全部"，类别 B 代表整体集合，类别 A 代表"几乎全部"，类别 A' 代表对应于 $B-A$ 的不完全代表的或有限的（faiblement représenté ou fini）集合；那么我们可以赋予量的关系 $A>A'$ 某种含意，这就形成了延展量的特点。

我们可以把这一系列讨论总结成如下：

辅助定理 当在一个类别的体系中，描述整体类别(B)的属性的形成，不能通过某种既定运算从其某个亚类别(A)的属性特征中被实现时，那么体系的量化仍是约束性的。

事实上，延展量化（定义 10）建构了一种外延的比较，这些外延属于亚类别 A 和同属整体类别 B 的其他亚类别 A'（与 A 不相交），为了建立这种量化关系，必须要能够通过除了 A 和 A' 在 B 下的互补性之外的方式来界定类别 A、A' 和 B；否则 A 和 A' 之间的量的关系仍然是未定的。然而，在弱结构化类别的情况中（定义 11），类别 A、A' 和 B 的特性都是直接地被给出的，不能通过一些属性来建构另一些特性；所以仅仅呈现出或只缺少这些属性将会成为这些类别的界定方式，而 A 和 A' 各自的外延就只能通过它们在 B 下的互补性来确定了，那么确定的量的关系就只有 $A<B$、$A'<B$ 和 $B=A+A'$①。同样地，在一个半结构化类别中（定义 12），比如 x_1、x_2、x_3，关联性 $\xrightarrow{a}$、$\xrightarrow{a'}$ 和 $\xrightarrow{b}$ 是直接地被给出的，$\xrightarrow{a'}$ 或 $\xrightarrow{b}$ 不能仅仅通过 $\xrightarrow{a}$ 来建构。因此我们只能通过 $\xrightarrow{b}$ 下的互补性来认识 $\xrightarrow{a}$ 和 $\xrightarrow{a'}$。从中可以得出，内涵上被承认的关系只在 $\xrightarrow{a}$ 和 $\xrightarrow{b}$ 之间，$\xrightarrow{a'}$ 和 $\xrightarrow{b}$ 之间或 $\xrightarrow{a}$ 和

① 这意味着 B 的外延与 A 和 A' 的外延总和相等。

→○→之间，我们不能比较 → 和 →，在外延上也是一样的。于是我们知道，外延 [illegible] 外延 [illegible]，外延 [illegible] 外延 [illegible]，但我们不知道类别 [illegible] 和 $\{x_2 \cdots x_3\}$ 的外延之间的关系。

§7 逻辑运算和数学运算

根据经典观点，逻辑学对数学来说是独立的，它应用于数学就像形式之于内容。根据罗素(Russell)的观点，原则上数学可以完全地被还原成逻辑学。而根据希尔伯特(Hilbert)(和大部分现代数学家)的观点，逻辑学反而是数学的一部分。然而，约束量和延展量之间的差别，比如我们曾经根据类别或大或小的结构化所引入的量，使得(我们)能够用第四种方式(参见引言§Ⅲ)来构想逻辑运算与数学运算之间的关系：一方面，逻辑学是独立的，因为它只建立在约束量的基础之上，而约束量不包含数；相反，逻辑学与数学相互冲突，所以确切地说，逻辑学不能被应用于数学，因为数字显示了一种更高级的结构，并将延展关系和约束关系结合成一种"任意"量(参见备注6)。因此，数学或就是其自身的逻辑，或我们需要建构一种通过数学手段来建立的特殊的数学逻辑。

事实上，所有的数学理念除了弱结构化或半结构化类别和简单约束量之外，还假设了结构化类别和延展量的介入。在集合理论中，无穷量、幂(puissance)等概念，甚至两个集合的积的引入都需要延展量的支持。拓扑学和连续函数概念以及聚点的观点也是一样的。相反，我们可以仅仅通过约束量的方式来建构所有类别、关系，以及二价命题的逻辑。

然而，弱结构化或半结构化类别与结构化类别之间的差异取决于"形式"和"内容"之间的关系。我们回想一下(定义4)，运算结构的形式在替代给定条件的情况下是保持不变的，而内容是被可替代的给定条件所建构的。从这种观点来看，可以或通过"属加种差"或通过序列差异的不对称关系作为中介来定义的弱结构化或半结构化两种类别，都是通过直接给定的关系而被建构的，不超过约束嵌套的结构，其定义可能是"超逻辑的"(定义6)。因此它们的形式是逻辑形式中最贫乏的：比如脊椎动物之类的类别，或者那些根据客体的可感知属性的有序排列而形成的类别，事实上只包括一种最小形式，可以直接应用于超逻辑内容。

相反，结构化类别，不论它们是否有序，都从开始就代表了一种比前者更丰富的形式。因为除了部分与整体之间的约束关系，它们在外延上包括部分之间的延展关系，并且在内涵上包括了根据整体系统属性而对亚类别属性的描述。例如，如果一个幂集合或一组被嵌套间隔的数列(une suite d'intervalles emboîtes)趋向于一个蕴涵某种建构规则的极限点，那么其中所有部分都联结成为整体。其结果是，为了直接处理超逻辑内容，结构化类别和延展性类别必须要建立一些以其他形式为内容的形式，而这些作为内

容的形式恰好包括了先决的逻辑结构。正因如此，要清点个体的集合，就应该事先把个体集中起来并加以区分，也就是说要对它们进行整理并分类。从此，谓词的谓词或关系之间的关系就以另外的方式在结构化或数学类别和逻辑类别（弱结构化和半结构化）的情况中呈现：类别的结构化特征越强，定义它的关系就越是需要被其他关系所限定；因此这些关系是复合性的，而不是直接给定的；这同样适用于形式化因素，即，形式化因素的形成是通过真正的"形成规则"，而不是直接的约束化嵌套。

因此谈论逻辑之于数学的"应用"是非常含混的。事实上，它们彼此都把对方作为了不可缺少的部分加以利用，而不能将一方完全还原为另一方。逻辑学作为约束性结构的理论保有了一定的独立性，尽管约束性结构也引入了数学所关注的"任意属性"（quantités quelconques）。但是，只要讨论继续存在于数学推论的实质和算术的不矛盾基础之上，这两种结构间的关系问题就仍然保持开放。

为了进一步研究这个基础性问题，尤其重要的是不能将要素看作独立的点，而是应该，也是必须，立足于集合运算的系统性立场。无论是对逻辑学还是数学而言，运算只存在于那些有良好定义的整体和结构之中。即使描述弱结构化和半结构化类别的关系属性是独立于整体关系之外的，但是针对部分类别或关系的运算从一开始就依从于整体的运算：不论 A、A' 和 B 的定义是什么，合并运算 $A \cup A' = B$ 与区分运算 $A = B - A'$，以及其他将 B 嵌入 B、C、D 等序列中，或从中拆分出来的合并运算和区分运算都是一个整体性的运算。因此，首先要在个体性的名义下来研究那些建构或转换纯粹约束量化类别系统的运算集合。其次，要分析那些由约束关系建构集合的运算体系。只有在这之后，我们才有可能描述数学运算的特征，进而才可能描述由此所孕育的类别和关系，并以此为基础去考察约束性运算中关系的衍生关系或区分关系。

第二章 类别的逻辑

本章唯一的问题只在于我们称为"弱结构化"(定义11)的那些类别。至于"半结构化"类别(定义12)，我们仅从内涵的角度，也就是从关系的角度考虑，我们将在第三章中对其进行探讨。最后"结构化类别"将在第四章中进行讨论。因此在这里只涉及基础类别的逻辑，它们像生物学类别那样被看作一种质的分类。

§8 类的建构

假设一个个别项 x_1 来证实命题函数 ax。例如命题 ax 代表 x_1 是"木制的"，那么我们可以用其他个别项 x_2、x_3 等来替代 x_1，它们把自己的真值保存至函数 ax。这样我们就引入了初级运算，"简单替代"(substitution simple)的运算(对应于§15将会讨论的"互补替代"(substitution complementaire)。简单替代(下面我们也称之为替代)是难以定义的，除非以等价作为中介。但我们更想用作为一种运算的替代来定义作为一种关系的等价，以便遵循世系的自然顺序，这种做法的立足点是，我们将被引导向去认识运算的整体性。

从主体的实际运算的观点来看，也就是说从心理学的观点来看，简单替代对应于动作的与思想的某种完全一般性机制，这是将客体同化至一种活动格式的机制。在所选的范例中，如果一个针对木块 x_1 的动作在其他客体上重复，且这些客体同样也可以被分割、裁剪等，那么从被考虑的动作的格式的角度来看，这些客体 x_2、x_3 等就可以被同化到第一个客体中，正是这种同化的形式化构成了替代的基本逻辑运算。从另一方面来说，这些主体的动作或综合判断的格式本身则对应于谓词 a。

如果说 x_2 或 x_3 等能代替 x_1，那么就可以在 x_1、x_2、x_3 等之间引入一种关系，且这种关系是质的等价关系，我们可以用替代的可能性来定义这种关系。

定义16 两个项可以说是质性等价的，如果它们可以作为论题彼此替代，且赋予形式为 ax 的命题函数同样的真值。

那么质的等价总是和某种观察视角有关，体现为前面所考察的函数；因此 x_1 和 x_2 可能从初级函数的视角来看是等价的，但从次级函数的视角来看不等价。把我们在前面举过的任意函数的例子中"木制的"品质称之为 a，并用↔表示等价关系。那么我们

就可以将“x_1 和 x_2 一样都是木制的”等命题记为：

(1) $$x_1 \overset{a}{\leftrightarrow} x_2, \quad x_2 \overset{a}{\leftrightarrow} x_3, \text{等等。}$$

这种关系是可传递的，也就是说从(1)中我们可以推衍出：

(1 乙) $$x_1 \leftrightarrow x_3$$

另外，它也是自反的(也就是说，它可以存在于被考虑客体和其本身之间)：

(1 丙) $$x_1 \overset{a}{\leftrightarrow} x_1, \quad x_2 \overset{a}{\leftrightarrow} x_2, \text{等等。}$$

相反，如果从质(或函数)a 的视角来看，x_1 等于 x_2、x_3 等等，那么它不一定在其他视角与后者等价。那么我们应该把同一关系看成等价的下位界限(limite inferieure)，它是项只与其本身的等价。在单独客体的情况下，我们把同一性写作：

(2) $$x_1 \overset{x_1}{\leftrightarrow} x_1, \quad x_2 \overset{x_2}{\leftrightarrow} x_2, \text{等等。}$$

就像我们已经看到过的那样(§4 至§5)，等价关系和所有关系一样，是一种内涵品质。对应的外延，或者说这种关系的场，就构成了一个类别(参见定义 8)。其中最简单的类别就是单称类别——即类别中的项是一个单一的存在。我们把这样由单个项 x_1 构成的类别写作形式 $\{x_1\}$；由单个项 x_2 构成的类别写作形式 $\{x_2\}$，如此等等。至于非单称类别，它们由在同一性之外的另一种视角上等价的项的合并构成。因此，基于 $\overset{a}{\leftrightarrow}$ 的等价项构成了类别 A，我们在下文中将讨论这个问题。首先介绍一种新的运算。

定义 17　我们这种运算称为合并，若存在两个①类别，此运算决定了包含彼此的最小类别。

如果我们用$\cup$表示合并，就有了：

(3) $$\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots = A = \{x_1, x_2, \cdots\}$$

合并是可交换的：

(3 乙) $$A \cup B = B \cup A$$

这种可交换性是合并把内涵上既有的等价关系表达成了外延的结果。

但是，如果基于限定品质($\overset{a}{\leftrightarrow}$)，个体 x_1 等价于 x_2、x_3 等，那它也有可能还在其他品质的层面上与后者等价，这些品质也能够刻画除 x 以外的其他个体项的特征：于是，个体项 x 可以等价于 y_1、y_2、y_3，等等，当基于函数 bx 时，例如“x 是易燃的”。我们记作：

(4) $$x_1 \overset{b}{\leftrightarrow} y_1, \quad x_1 \overset{b}{\leftrightarrow} y_2, \text{等等} \quad \text{和} \quad x_2 \overset{b}{\leftrightarrow} y_1, \quad x_2 \overset{b}{\leftrightarrow} y_2, \text{等等。}$$

同样也有：

(4 乙) $$x_1 \overset{b}{\leftrightarrow} x_2, \quad x_1 \overset{b}{\leftrightarrow} x_3, \text{等等。}$$

因为个体项 x 并不只是在特定品质$\overset{a}{\leftrightarrow}$的意义上彼此等价，它们在与 y 共享的一般

① “两个”一词是“一个以上”或“几个”的缩写，不指基数 2。

品质$\overset{b}{\leftrightarrow}$的意义上也彼此等价。

符合等价关系$\overset{b}{\leftrightarrow}$的外延就构成了类别 B（这里是指可燃客体的类别）：

(5)　　$\{x_1, x_2, \cdots\} \cup \{y_1, y_2, \cdots\} = B = \{x_1, x_2, \cdots, y_1, y_2, \cdots\}$

然而，所有 x 都是基于假设 B 而存在（所有木质的客体都是可燃的），而不是所有 B 都是 x，类别 B 代表一种比类别 A 更大的外延：

(6)　　$A \subset B$　且　外延 $A <$ 外延 B

不等式(6)意味着类别 A 是类别 B 的一部分或一个亚类。如果不是这样的话，我们其实就没有任何方法来比较 A 与 B 的外延。等价关系$\leftrightarrow$和$\overset{b}{\leftrightarrow}$确实也给了我们这种可能，因为同时从 a 和 b 的视角来看，x 之间都是相等的，然而 x 和 y 则只有从 b 的视角来看是相等的；但这反过来更确定了类别 A（或 x 的类别）是类别 B（x 与 y 集合的类别）的一部分。所以关系(6) $A \subset B$ 意味着"类别 A 被包含在类别 B 中（逆命题不成立）"，这就引入了关系"包含"(inclusion)①。

包含关系只存在于类别之间。我们把个体项和其所属类别之间的关系称为"属于"$\in$ (appartenance)。严格地说，个体项 x_1 只属于单称类别 $\{x_1\}$，而后者包含于 A：

(7)　　$x_1 \in \{x_1\}$

和

(7 乙)　　$\{x_1\} \subset A$

包含是可传递的，那么我们从(7 乙)和(6)中可以推衍出：

(7 丙)　　$\{x_1\} \subset B$

另一方面，如果类别 A 包含于 B(6)，那么 B 与 A 之间就存在一些差异，也就是说，存在一个包含于 B 的 A 的补充类别，同包含于 B。我们将这个 B 下的 A 的补充类别称为 A'；在我们的例子中，它包括非 x 的所有 y，也就是说所有我们只知道"在 B 中，但不在 A 中"（="可燃，但非木质"）的项。就有了

(8)　　$B = A \cup A'$

类别 A 和 A' 是"析取的"(disjointes)，也就是没有共同元素，因为从定义看，A' 是"所有 A 之外的 B"。类别 A 与 A' 在类别 B 下是"互补的"，这还意味着类别 B 中只有这两个类别。那么有：

(9)　　$A' = B - A$

以及

(9 乙)　　$A = B - A'$

这里引入的运算就是逻辑"减法"(−)(soustraction)，这个运算表示排除或分解，构成了合并的反面。减法是一种部分否定：$B - A = A'$ 意味着"B 中非 A 的部分就是

① 当我们想明确类 A 是严格包含于类 B 时，我们记成 $A \subset B$，否则就记成 $A \subseteq B$。

A''”，但这种否定是类别 B 之内的。我们以前经常通过符号 A' 来表达整体的否定，即相对于被考虑的全体而言，之后我们将它写作 $\bar{A}$，且把它看作一个“单”(unaire)运算。事实上，否定总是二元的，减法 $B-A=A'$ 是一种有关 B 的对 A 的否定(或排除)，而完全否定 $\bar{A}$ 是一种相对于被考虑系统中所有类别的对 A 的否定。

这就是说，项 x_1 可能等于 x_2、x_3，等等，还在其他视角上等于 y，且这些视角包括除 x、y 之外的新个体项 z_1、z_2、z_3，等等。例如，x、y 和 z 除了它们的特殊的和一般性的特征之外(x 是“木制的”且 x 和 y 都是“可燃的”)还都是“沉重的”，那么接下来就有了一种新的等价关系 $\overset{c}{\leftrightarrow}$，在我们的例子中，它表示“都是沉重的”：

(10) $$x_1 \overset{c}{\leftrightarrow} x_1, x_1 \overset{c}{\leftrightarrow} z_2 \text{ 等；} \quad x_1 \overset{c}{\leftrightarrow} y_1 \text{ 等} \quad \text{和} \quad x_1 \overset{c}{\leftrightarrow} x_2 \text{ 等。}$$

从另一方面可以得到建构的两个新类别：符合 $\overset{c}{\leftrightarrow}$ 的类别 C，和包含于 C 但不包括 B 的类别 B'(沉重但不可燃的个体项)：

(11) $$C \supset B$$

(12) $$C-B=B', \quad C-B'=B \quad \text{和} \quad B \cup B'=C$$

这样我们可以逐步继续在前面的等价的基础上添加更一般性的等价，从而建构外延更广的类别。

注意，在继续之前，是根据这样的等价或类别，一个个体事实才确实被个体化，就像我们已经在 §3 中看过的那样(不谈关系，它将是第二章的讨论对象)。描述一个个体对象的特征，事实上就是将其引入类别 A、B、C 等，同时赋予其品质 a、b、c 等。这些品质使它等价于其他这些类别中的个体项，并通过否认其他等价来使它区别于一些亚类 A'、B' 等等。这样我们就能得到总是与集合体系有关的单称类别和个体同一性了。

§9 全体性的问题：分类

这些基础性推论一下子就证明了所有类别都是与一个整体体系相互关联的(即使是在“弱结构化”类别的情况中)。那么这样一个集合体系是由什么组成的呢？我们先考虑前面被描述类别的运算(合并和减法)，以及决定与这些类别的“内涵”相符的关系，那么就已经有可能用明确的术语刻画第一个集合的运算结构了：“分类”(classification)，也就是通过析取的基础类别的一种等级嵌套而形成的体系①。事实上，所有类别都与分类相联系。不论是共同思想运用的类别(比如 §8 中作为例子的类别 A、B、C)，或是不同科学运用的类别(化学或生物种类等)，类别在逻辑上只联系于其他与它本身有区别的，或是根据负性或正性等价关系来看它所属的类别。因此，我们不

① 在最简单的情况下，就是波菲利概念树(arbre de Porphyre)。

能把分类想象成一种不考虑其本身的既有基础类别的简单并列；相反，应作为全体，它包含了自身的形式结构和集合组成的规则。

但是，为了得到这些规则，需要分析逻辑视角中可能最简的类别化模式，同时保持足够的精确性。通常意义上的分类不满足第二个条件。至于化学、物理和数学分类，它们在不同程度上引入了外延的或可度量的量（定义 15 和 15 乙），因此它们或多或少地需要极致的“结构化”（定义 13）的类别；化学元素周期表等等就是如此。那么我们就以生物学分类为例，生物学分类表明逻辑希望建构一种完美的形式化结构，以对应于从部分到整体之间的纯粹的“强度”关系，但也不超越这种关系（定义 14），也就是不超越“弱结构化”（定义 11）类别的领域：

Ⅰ．形式上建立一种分类的首要原则就是所有类别同时被包含于某个更高等级的类别，且包含某个更低等级的类别，只有被当作整体的类别（包含所有类别的参考类别 Z）和被当作基础的类别除外。

我们把和“种”对应的类别当作基础（系列 a）：假设有“大蜗牛”（普通蜗牛）中的“法国大蜗牛”。我们可以一直分辨到亚类、品种、种系，直至单称类别 $\{x_1\}$。但我们从种出发，将个体项 x_1 和其单称类别无区别地写成 $x_1 \in A$ 或 $\{x_1\} \subset A$。“法国大蜗牛”种是“属”B 的一部分（“大蜗牛”属，不谈及亚属）。属 B 是“科”C（“大蜗牛科”）的一部分，后者包含于目 D（肺螺目）；这个目 D 本身被嵌套于纲 E（从词语的生物学意义上来看，“纲”就是“腹足纲”），后者是“门”F（“软体动物门”）的一部分；这个门最终属于动物“界”G。这些不同的嵌套 $A \cdots G$ 形成了基础序列：

(13) $$\{x_1\} \subseteq A \subseteq B \subseteq C \subseteq D \subseteq E \subseteq F \subseteq G$$

我们也可以选择另一个序列。之前的分类学（classificateurs）序列不包括所有这些等级水平。现在分类学序列通常还包括亚属、亚科、亚目等等，这就能得到序列 $A \subset H \subset \cdots \subset K$。但是嵌套的数量并不重要。但是特定的被定义的嵌套的存在是必需的。

Ⅱ．第二原则：属于同一等级水平的不同类别是析取的。换言之，同一个个体项 x_1 不能同时属于两个种（A_1 和 A_2）、两个属（B_1 和 B_2）等等。同一个种 A_1 不能同时属于两个科（C_1 和 C_2）或两个目（D_1 和 D_2）等等。如果我们用 $\cap$ 来表示决定两类共有部分的运算，那么对 A_1 和 A_2（任意两种）、B_1 和 B_2（任意两属）等就得到：

(14) $$A_1 \cap A_2 = \varnothing, \quad B_1 \cap B_2 = \varnothing, \quad C_1 \cap C_2 = \varnothing, \text{等等。}$$

相反，每个类别都构成其本身和高级序列类别之间的共有部分：

(15) $$A_1 \cap B_1 = A_1, \quad B_1 \cap C_1 = B_1, \quad A_1 \cap B_1 \cap C_1 = A_1, \text{等等。}$$

Ⅲ．同一等级水平的类别必然不相交的事实与第二原则是并驾齐驱的：同一序列中的类别只能通过二分法的方式被刻画，也就是通过已知特征的有或无。

如果考虑同一属的种，比如大蜗牛属的种，法国大蜗牛、散斑大蜗牛、白线大蜗牛等，或者是莺或乌鸦等等的不同种，其实通过一般方式我们可以看到，我们不能根据一个简单的序列来把这些种进行分类，更或是提供一个外延结构化的或可度量的规则，通

过另一些种来产生一些种（就像门捷列夫的化学元素周期表）。这个种被多种特征 a，b，c，…（大小、形状、颜色、某些器官的配备等等）共同刻画，另一个种被 a，d，e，…等刻画。我们也不能把这些特征归于一个组合分析，就像一个属的种那样实现所有可能的组合：这些组合中的一些是成立的，而另一些若没有固定的建构规则是不成立的。就是在此意义上，（我们说）生物学分类只由“弱结构化”（定义 11）类别构成的。

由此得出，一个属 B_1 中被考虑的种 A_1 只被品质 a_1 的复合体刻画，后者在 B_1 的其他种中都没有。如果我们把这些其他的种称作 A_1'，那么 B_1 则两分地分为 $B_1=A_1\cup A_1'$。其他的种 A_1' 也包含一个种 A_2，后者是以品质 a_2 的复合体为特征，这种品质在属 B_1 中的其他种 A_2' 中是缺乏的（这个亚类 A_2' 本身包括 A_1）。对种 A_3 来说也是一样的，A_3 与 A_1，A_2 都不相交，而且根据二分法将属 B_1 分为 $A_3\cup A_3'$，等等（那么 A_3 将同时成为 A_1' 和 A_2' 的一部分）。继续往后也是如此。

如果我们尝试建立关于属 B_1 的表格，那么就有两种陈列方式可选择（分类学家使用的两种方式），它们都可以从形式的角度简化为一系列的两分法区别：

1° 我们通过将每个种与其他种对立的方式，连续地描述一些种（例如 A_1，A_2 和 A_3 这三个种），这就等于将 B_1 分成了不同的补充亚类：

种 A_1 对立于其他种 $A_1'(=A_2\cup A_3)$

种 A_2 对立于其他种 $A_2'(=A_1\cup A_3)$

种 A_3 对立于其他种 $A_3'(=A_1\cup A_2)$

那么就有（见图 2）：

$$B_1=(A_1\cup A_1')=(A_2\cup A_2')=(A_3\cup A_3') \tag{16}$$

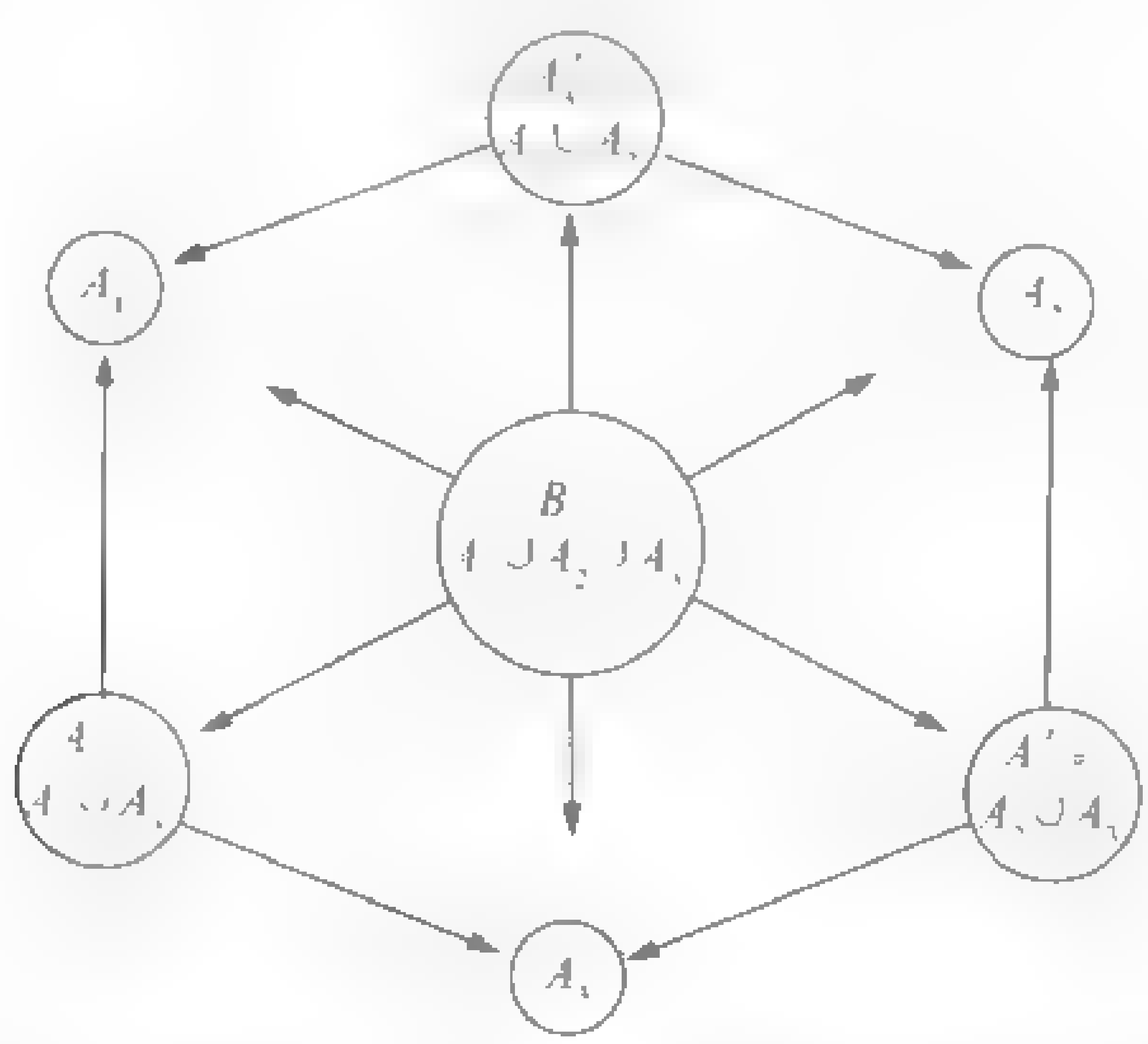


图 2

2° 或者我们建立一个清楚的两分表格（比如我们在教材里为了便捷定义经常做的那样）。于是，我们就得到如下排列：

A_1 .... A_1

(17) B A_2 .... A_2

A'_1 A_3 .... A_3

$(A'_1 - A_2)$ A_4 .... A_4

$(A'_1 - A_2 - A_3)$ A_5 .... A_5

$(A'_1 - A_2 - A_3 - A_4)$

$(A'_5$ etc.$)$

在这两种情况下，我们看到，属 B 在种 A 上或是科 C 在属 B 等上的分配原则只能是两分的，缺乏可能的序列化或有关品质的外延性量化标准。

A_1、A_2 等编号本身只涉及简单的量化区分；种的数量也不干预其中：一个属 B 可以有任意数量的种 A，包括一个。这将我们引向了第四原则：

Ⅳ. 分类第四条主要原则，所有个体项都被嵌套于一系列类别中，这些类别分别包含于它们的相邻高阶等级。一方面，事实上，如果基础序列是：

$$A\subseteq B\subseteq\cdots\subseteq G\text{（命题 13）}$$

那么，没有个体项能直接包含于 B 至 G 的任何一个类别而不包含于其之前的类别。另一方面，任何个体项能被归属于分类序列中的一个种 A 而不被归属于属 B，诸如此类，一直到 G。从这个角度设想，我们发现了一个属于新种 A_x 的单独个体项，且这个种不代表任何序阶(rang)E 中已知"类别"的特征，而仅仅属于从序阶 F 派出的"分支"之一。在这种情况下，应该为这个单独的新个体项建立一个种 A_x，还有只包含这个种 A_x 的新"属"B_x；只包含属 B_x 的新"科"C_x；只包含科 C_x 的新"目"D_x；以及一个只包含这个目的新"门"E_x。因此，一个序列 E 中唯一不可分类的个体项在加入分支 F 之前就需要一系列的新嵌套：$x\subseteq A_x\subseteq B_x\subseteq C_x\subseteq D_x\subseteq E_x$。然而，在这种情形下，我们有关于 B_x，C_x，D_x 和 E_x 的一系列补充空集：

$$A'_x=\varnothing,\quad B'_x=\varnothing,\quad C'_x=\varnothing\quad \text{和}\quad D'_x=\varnothing$$

这种发现一种未知且独特的固有形式可以在任何时候实现的可能性，它本身就显示出了某种独立的形式化所必需的特征，自身构成了一个类别嵌套的序列，这就是"弱结构化"，这再一次体现了序列性分辨的意义(13)。

Ⅴ. 最后，第五原则：分类意味着某种确定的次序(ordre)原则。我们将初始类别 $A\subset B\subset C\subset D\cdots$ 称作"初级类别"(classes primaires)，其中的每个类别都被嵌套于后一个。我们将与之互补的类别称作"附属类别"(classes secondaires)：$A'(=B-A)$，$B'(=C-B)$，$C'(=D-C)$，$D'(=E-D)$，等等(命题 9 和 12)。然而，显然，如果这些附属类别中的任何一个不是空集，那么它就可能包含了某些初级类别的不确定成分。例如，序阶 B 中的类别 B' 包括了一个或多个类别，这些类别也包括序阶 A 中的某些类别。于是，为了阐明所有可能的初级类别，分类将采取塔形或系谱的形式(图 3)。从顺序的角度来看，序阶 A 的每个初级类别都将被嵌套于序阶 B 的一个初级类别中，并且我们总是会重新发现一样的顺序(纵向的)$A\subset B\subset C\subset\cdots$ 但是相反，等级中的每一序阶(就是

塔形图的每个水平层)将被无序列性的初级类别的不确定成分所占据:事实上,没有任何接续的普遍顺序原则能够(使我们)在已知的属 B 内,把种 A 看作先于其他种,或是在已知的科 C 内把属 B 看作先于其他属,以此类推。所以分类只构成一个"部分按顺序排列的"集合。

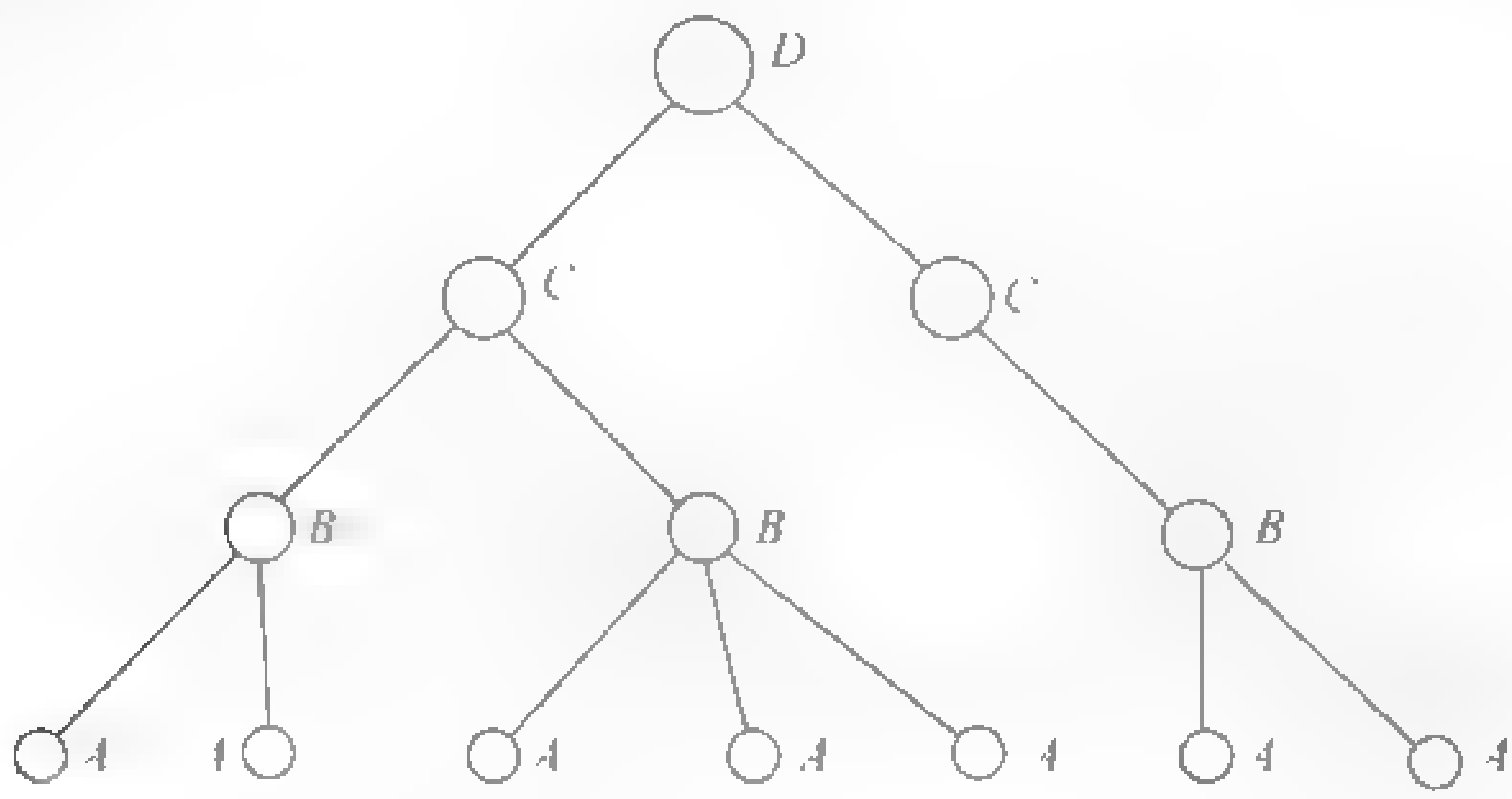


图 3

这就是关于分类的整体结构的五个原则,同时分类只建立在"弱结构化"类别(定义11)和强度量化(定义11)的概念之上,也就是分类呈现为最简单的逻辑形式。

§10 集合的运算结构:群、格和群集

现在我们要尝试从刚才所描述并看作整体系统的分类结构中提取出形式化的组织规则。从这一角度,我们可以构想三个可能的结构:由"群"(groupes)构成的可逆组合的体系;半顺序化和不可逆的嵌套定义的"格"(treillis)的体系;以及被我们称作"群集"(groupements)的由可逆嵌套混合而成的体系。

Ⅰ."群"——群代表的可能是最为基础的数学结构。整数 **Z** 构成的系统就是一个例子。我们将 **Z** 中的元素理解为算子(opérateur)。因此,+3 意味着"加三",-4 意味着"减4",0 意味着"不增加也不减少"。假设有运算∘在整数 **Z** 的两个元素之间实现组合,于是根据一般算术法则可以得到,如:

$$(-4)\circ(+3)=-1$$

说 **Z** 形成了一个有关运算∘的群,就是说:

1. 针对 **Z** 中任何一对元素,∘都使 **Z** 中的一个元素与之相对应。
2. 运算∘是结合的。
3. 在 **Z** 中存在一个中性元素 0,因此只要 $x\in \mathbf{Z}$,就有 $x\circ 0=x$。
4. 针对所有 **Z** 中的元素 x,都对应有一个相反的元素 y,即 $-x$,因此 $x\circ y=x\circ(-x)=0$。此外,这个群是可交换群(abelien),也就是说:

5. 只要 $x,y \in \mathrm{Z}$，就有 $x \circ y = y \circ x$。

于是，存在某些与集合理论相关的基础群。这就是伯恩斯坦(B. A. Bernstein)从布尔的类别代数中得出的那些群：不相交子集相加的群和等价群①。关于命题的计算，我们之后会回头来详细讨论(第四章，§ 36)，但是之前应该先看看它们是否能用于分类。

假设有一个集合 E 和其子集 $\mathscr{T}(E)$。如果 A 和 B 是 E 中的任意两个部分[即任意两个子集 $\mathscr{T}(E)$]，我们用以下方式定义运算 W：

$A \mathrm{W} B$ 是 E 的子集，包含了元素 A 中没有和元素 B 重叠的部分，以及元素 B 中没有与元素 A 重叠的部分，即：

$$A \mathrm{W} B = df(A \cup B) - (A \cap B)$$

在这些条件下，$\mathscr{T}(E)$ 形成了一个关于运算 W 的可交换群：

1. 对于 $\mathscr{T}(E)$ 的每一对元素，W 都使 $\mathscr{T}(E)$ 中的一个元素与其对应。

2. 运算 W 是结合的，如我们所能证明的那样。

3. 中间元素是空子集 $\varnothing$。

4. 每个子集是其自己的逆元素，因为 $A \mathrm{W} A = \varnothing$($A$ 不包括任何未出现在 A 中的元素)。

5. 运算 W 显然是可交换的。

但是，如果一个这样的体系构成了一个群集，那么只理解分类是不够的，因为这个体系将分类从其质的内容中抽离出来了：未考虑不相交的子集，且与这样的嵌套对比，它代表了作为"任意"外延的类别，即作为一个我们尚不能明确其"潜质"(puissance)或数量的集合，以及，因为不确定性而可能任意增减其单元的集合。于是，就有了强分类的两种差异：

1° 在强分类中，只有相邻的子集，通过结合，才能构成具备肯定属性的类别。例如，"种"A，和 A' 构成了属 B；属 B 和 B' 构成了科 C，等等。但是任意的且分离的类别的组合不能形成一个由肯定特征来定义的类别(两个属于不同科的"种"也不能构成一个"属"，等等)；相反，这样由不相邻元素组合而成的类别只能以排除或否定为特征。如果我们将种"河鳟"和种"灰狐"组合到一起，我们不会得到一个属于这个分类的属；我们只能把这个组合"河鳟+灰狐"作如下定义："脊椎动物，减去鳟鱼之外的鱼，减去被考虑种之外的鳟鱼，减去两栖类、爬行类和鸟类，减去灰狐之外的哺乳类"。即使只限于 A 和 E' 这样的两个类别，它们的组合也只能得出 $A \cup E' = F - A' - B' - C' - D'$，因此不仅仅是不相交的子集与分类有关，同时，甚至尤其还有这样的嵌套和解离。然而，一种建立在这些运算之上的计算应该顾及相关类别的相邻性(根据它们不同的等价关系：命题1，4 和 10)，这样必然限制了不相交子集集合的灵活性。

---

① 伯恩斯坦(Bernstein)，1924—1925 年。

2° 从逻辑学的角度来看[1],有两种这个集合能加入的基础运算:这个类别和其自身的结合或和嵌套它的类别的结合。

$$A\cup A=A \quad 和 \quad 若 A\subseteq B \quad A\cup B=B$$

其实,如果想建构一个嵌套的逻辑,我们只能通过 $A\cup A=A$ 的自我嵌套来实现。这个嵌套把与其本身相同的元素(逻辑)和可重复的(数学)单元 $1+1=2$ 区分开来了。另外,如果 $A\cup A=A$,我们同样有,若 $A\subseteq B$ 则 $A\cup B=B$,因为 $B=A\cup A'$。因此 $A\cup B=A\cup(A\cup A')$,所以

$$A\cup B=A\cup A'=B$$

因此,一个像我们在§3中描述的那种分类体系,只能形成一个集合,原因有二。首先,运算∪不能使分类的元素符合所有成对的元素。其次,合并运算的幂等特性阻止了每个元素被当成它自己的逆反。

但是就像伯恩斯坦也指出的那样,集合$\mathscr{P}(E)$也形成了一个相对于运算≡的群,这个运算被定义如下:

$A\equiv B$ 是 E 的子集,它包含 A 和 B 的共同元素和它们相对于 E 的补集的共同元素,也就是

$$A\equiv B=df(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap\bar{B})。$$

可是一个这样的集合对诠释分类的本质属性来说太过笼统。它只是有关运算 W 的群的对映(dual)。

Ⅱ. "格"——第二个数学概念,其在关于结构的理论考察上有重要意义,可以被应用于分类:格。

用一种通常的方式来说,格是一个通过我们记为≤的关系来实现部分有序排列的集合,对于 E 中的每一对元素,我们都可以定义最小上界或"上确界"(supremum),和最大下界或"下确界"(infimum)。在一个类别的体系的情况下,顺序关系可能是广义的包含⊆,且有:

$$A 和 B 的上确界=dfA\cup B$$

$$A 和 B 的下确界=dfA\cap B$$

这就是说,我们可以把一个分类(图1)看成一个格,其中的每一对类别都有一个上确界:因此有针对 A 和 A' 的 B,针对 A 和 B'、A' 和 B' 的 C,针对 A 和 B 的 B,针对 A 和 B 的 C,等等。至于下确界,它存在于所有成对的类别中,其中一个类别包含于另一个类别:例如,A 是 A 和 B、A 和 C 的下确界,等等。相反,下确界不能定义于两个不相交的类别中,如 A 和 A',A 和 B',等等。

但是如果这种从分类到格的同化比到群的同化更能让人接受,因为格主要是一种嵌套结构,然而有三种限制范围的情况:

1　在后文(第八章§3)中我们会看到,这些运算符合命题逻辑公理中的第一条:$(p\vee p)\supset p$。

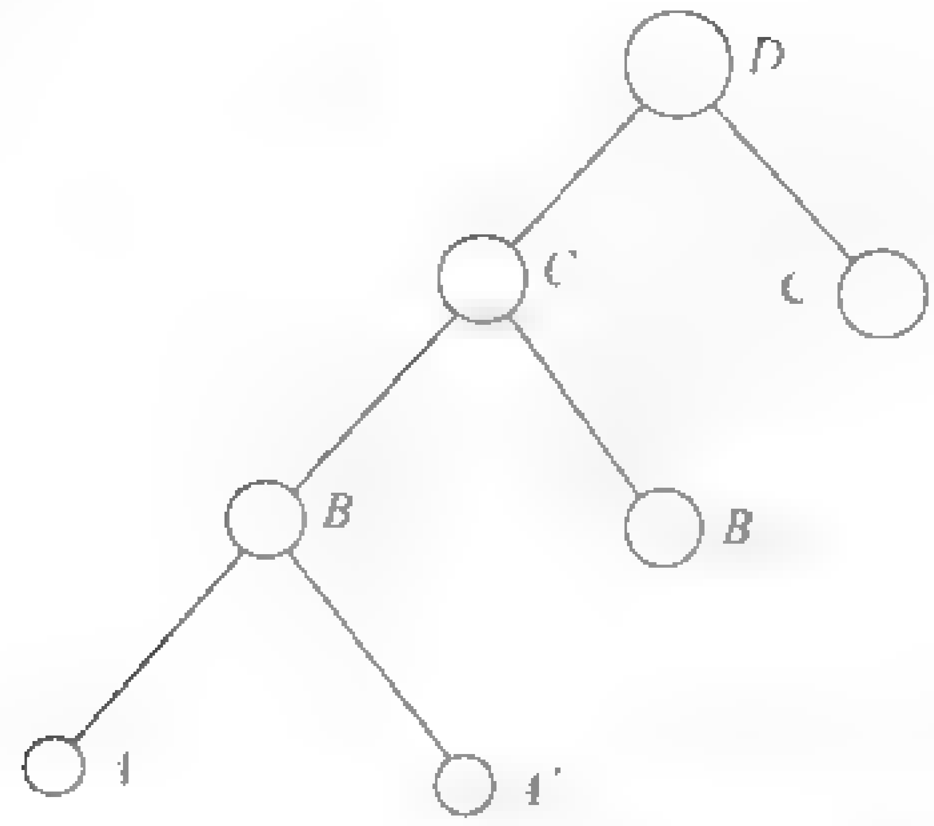


图 4

a. 就如在§9中定义的那样，一个分类只构成一个半格，因为其下确界总是没有确定的。

b. 多个成对的类别可能具有相同的上确界和下确界。例如(图4)，D 同时是 C 和 C'，B' 和 C'，B 和 C'，A 和 C'，A' 和 C' 的上确界。

c. 特别地，格没有完全的可逆性：如果有一对类别对应于一个单独的上确界(最近的属)，那么，从上确界出发返回到两个类别中任意一个的逆运算则不一定成立(根据 b)：对 A、A' 和 B 来说，有 $A=B-A'$ 和 $A'=B-A$；但是对 A 和 C' 来说，没有 $A=D-C'$；事实上有：$A=D-C'-B'-A'$(因为 $D-C'=C$，$C-B'=B$ 和 $B-A'=A$)。

然而，就像我们在这次研究中接下来将要看到的那样，可逆性是所有合理性的条件，尤其是关于命题逻辑(第六章)和矛盾原则(§1)。其实可逆性在运算逻辑中所起的作用可能等同于概念在古典逻辑学中所起的作用。因此，如果我们想建构符合分类的集合结构，那么主要就是要在其中引入严格的可逆性：换言之，要能够从一个高序阶的类别出发返回到一个种类别，同时能够从种类别上升至属类别，诸如此类。

III. "群集"[1]　于是，当前的问题就是要通过一个结构来调和群的可逆性和属于格的有限嵌套体系。"群集"的概念履行的就是这种双重要求。事实上，我们可以这样来构想"群集"，它像是因为二分法或层级互补性(A 和 A'，B 和 B'，等等)而具有了可逆性的格，或者，作为一个群，它的变动性因为嵌套的介入而被限制，这个嵌套意味着特殊同一性，如 $A\cup A=A$ 和 $A\cup B=B$ 等，还意味着临近原则。所以，"群集"是群和格之间的一个中介结构，这样，它就表达了逻辑整体性的本质(就像我们在第三和第四章中

1　让·皮亚杰自1941年引入的群集结构已经被证实是很难完全形式化的。直至今日，虽有些尝试但也不太令人满意，在这方面这些尝试以一种或另一种方式背弃了皮亚杰的思想。这就是为什么我在这一段中对此给出了一个代数版本，但是在§11，我重写了关于群集的文章《逻辑论》，但并未做根本改动。此外，读者可以在我1941和1942年的书中找到其他关于群集的介绍。其他我在文中有所暗示的形式化论文在19[illegible]年格里兹(Grize)、19[illegible]年格兰格、19[illegible]年格里兹和19[illegible]年维兹(Wittz)的书中。

将看到的那样），尤其是在类别化过程中的运算集合的本质。

这个概念可能没有表现出任何数学的旨趣，因为它是"弱结构化"类别的体系所特有的。因此它们有理由被一些作者看作是"从逻辑学观点来看处在最底层且没有太大利益"[①]的，这些作者试图把数学当作一个惊人的角色"数理逻辑的广义延长"[②]来削减它。相反，为了让这个概念涉及一种试图表达思想最基础运算机制的一种逻辑，它只需忠实地阐述了只建立在部分到整体的强度关系上和被生物学分类定义的集合结构就够了。更何况，就像我们将尝试证明的那样（第六章§39），二价命题的整个逻辑学可以简化为包含其运算全体性的单个同一群集。

另一方面，为了有效地运用这个概念，需要以明确的方式定义它并为其保留集合结构的意义。然而，夏·瑟路斯采用了群集的假设，并给提示了我们所有类别和关系群集运算的细节[③]，但他最终忽视了其特性而把群集随意地称为类别或关系的组合。因此，我们最好针对他的双重余（doable exces）有所应对："群集是一个强度概念而不是外延的概念，并且是一个定义良好的概念，它的使命是表示一种这样的集合结构，即相对于整体性联系的特殊运算的集合结构。"

现在我们来定义群集的一般概念，但是为了便于理解，我们参考一个具体的例子。其实，群集的本义就是建构一个简单或复合的一分层套系列，图1所示意的分类就能被当作例子。

假设有群集U，我们选择有限的U的子集，A、A'、B、B'、C等，并将这些U的子集的集合称为$\mathfrak{C}(U)$，另外，构想有空集、和U总是$\mathfrak{C}(U)$的子集。在这些条件下，对每一个$X\in\mathfrak{C}(U)$，我们都可以配给两个算符，其中之一我们记作$+X$，称作"顺运算符"（operateur direct），另一个我们记作$-X$，称作"逆运算符"（operateur inverse）。此外，我们提出，$(\,)$和$(-X)$是同一个算符，将其简单写作0。

如果，在所选的例子中，我们写$+X$替代$+X$，$-X$替代$-X$，那么可以说：

$+X$：增加类别X的元素。

$-X$：减去类别X的元素。

那么假设有算符$+X$和$-X$之间的交换组合的法则，记为$\circ$，还有一种等价关系记为$=$。在图4的分类中，表达式

$$(+X)\circ(+Y)=+Z$$

对应于等价关系，例如

$$(+A)\circ(+A')=+B$$

① 波尔，1948，第523页。

② 波尔，1948，第Ⅸ页。

③ 夏·瑟路斯《逻辑论》的245—313页（除282—284页），几乎完全取自我们的作品《类别、关系和数》（*Classes, relations et nombres*）。

后者表示：增加类别 A 和类别 A' 的元素意味着增加 B 的元素。

现在我们注意到一组有限的等价关系可能成为所有分类的特点：

$$(+A)\circ(+A')=+B,\quad (+B)\circ(+B')=+C,$$
$$(+C)\circ(+C')=+D,\quad \cdots,\quad (+T)\circ(+T')=+U$$

通过一种一般化的方式，我们用 $\mathcal{E}(U)$ 指一组有限的形式表达式：

$$(\top X)\circ(\top Y)=\top Z \quad 其中\ X,Y,Z\in\mathcal{C}(U)$$

此外，我们定义一个关于 U 的群集，假设是 $\mathcal{G}(U)$，以如下方式：

(G1) 如果 $(\top X)\circ(\top Y)=(\top Z)\in\mathcal{E}(U)$，

那么 $(\top X)\circ(\top Y)=(\top Z)\in\mathcal{G}(U)$

所有 $\mathcal{E}(U)$ 的元素都是 $\mathcal{G}(U)$ 的元素。

(G2) 如果 $(\top X)\circ(\top Y)=(\top Z)\in\mathcal{E}(U)$，

那么 $(\perp X)\circ(\perp Y)=(\perp Z)\in\mathcal{G}(U)$

以 $\mathcal{G}(U)$ 的元素逆运算符替代 $\mathcal{E}(U)$ 的元素的顺运算符得到的等式。

(G3) 如果 $(\top X)\circ(\top Y)=(\top Z)\in\mathcal{E}(U)$，

那么 $(\top X)\circ(\top Z)=(\top Z)\in\mathcal{G}(U)$

且　$(\top Y)\circ(\top Z)=(\top Z)\in\mathcal{G}(U)$

因此，例如，因为 $(+A)\circ(+A')=+B$ 是 $\mathcal{E}(U)$ 的元素，$(+A)\circ(+B)=+B$ 是 $\mathcal{G}(U)$ 的元素。则有，类别 A 消失在类别 B 中。这就是为什么我们说吸收法则(lois de résorption)用来指 $\mathcal{G}(U)$ 中的元素。

(G4) 如果 $(\top X)\circ(\top Y)=(\top Z)\in\mathcal{E}(U)$，

那么 $(\top X)=(\top Z)\circ(\perp Y)\in\mathcal{G}(U)$

且　$(\top Y)=(\top Z)\circ(\perp X)\in\mathcal{G}(U)$，

重新从事实 $(+A)\circ(+A')=+B$ 是 $\mathcal{E}(U)$ 的元素出发，我们会有，例如 $+A=(+B)\circ(-A')$ 是 $\mathcal{G}(U)$ 的元素：增加类别 A 的因素意味着增加类别 B 的元素和减少 A' 的元素。

(G5) $(\top X)\circ(\top X)=(\top X)\in\mathcal{G}(U)$

因此，我们有，例如 $(+A)\circ(+A)=+A\in\mathcal{G}(U)$：增加 A 的元素和(再)增加 A 的元素等于增加 A 的元素。我们用冗余法则(lois tautologiques)来指示 $\mathcal{G}(U)$ 的这些元素、冗余法则和吸收法则一起形成了特殊同一性(identiques speciales)。

(G6) $(\top X)\circ(\perp X)=\varnothing\in\mathcal{G}(U)$　和　$(\top X)\circ\varnothing=(\top X)\in\mathcal{G}(U)$

这样 $\varnothing$ 像是群集的同一算符(operateur identique)。在例子中，增加类别的元素和什么也不增加(什么也不减去)等于增加这个类别的元素。

(G7) 如果 $\alpha=\beta$ 且 $\gamma=\delta$ 是 $\mathcal{G}(U)$ 的元素，那么

$$\alpha\circ\gamma=\beta\circ\delta\in\mathcal{G}(U)$$

$\mathcal{G}(U)$ 中元素的相互组合是 $\mathcal{G}(U)$ 的元素。

(Rp) 我们最终得到一个替代的规则，让我们用一个相等的组合替换在 $\mathcal{G}(U)$ 的所

有表达式中的任意一个算符。

这里有三个来自图1的分类的群集运算的例子。为了简化书写和准备阅读接下来的应用，我们不写作$\in \mathfrak{G}(C)$，而是用 X 来替代$(-X)$，$X-Y$ 替代 $X\circ(-Y)$。

例1：$B\circ C=(D-C')\circ(A\bigcirc A')$

1 $C\circ C'=D$　　G1

2 $B=A\circ A'$　　G1 和对称＝

3 $C=D-C'$　　1，G4

4 $B\circ C=(D-C')\circ(A\circ A')$　　2，3，G7 和交换∘

例2：$A\circ(A-A)=A$

1 $A\circ\varnothing=A$　　G6

2 $A-A=\varnothing$　　G6

3 $A\circ(A-A)=A$　　1，2，替换

例3：$(B-A)\circ\bigcirc A=A'\circ A$

1 $B=A\circ A'$　　G1 和对称＝

2 $B-A=A'$　　1，G4

3 $A=A$　　映射＝

4 $(B-A)\circ A=A'\circ A$　　2，3，G7

我们没有假设组合法则是结合的，这种做法导致了一些困难。事实上，重新拿例2来说，它可以写成：

$$A\circ(A\circ(-A))=A$$

如果结合性是已知的，可能还有：

4 $(A\circ A)\circ(-A)=A$　　3，结合

5 $A\circ A=A$　　G5

6 $A\circ(-A)=A$　　4，5，替换

7 $A\circ(-A)=\varnothing$　　G6

8 $A=\varnothing$　　6，7，替换

我们的分类中所有的类别可能都是空集，这是很荒诞的。

同样的，例3可以写成：

$$(B\circ(-A))\circ A=A'\circ A$$

可能还有：

5 $B\circ((-A)\circ A)=A'\circ A$　　4，结合

6 $B\circ(A\circ(-A))=A'\circ A$　　5，交换∘

7 $(B\circ A)\circ(-A)=A'\circ A$　　6，结合

8 $B\circ A=B$　　1，G3

9 $B\circ(-A)=A'\circ A$　　7，8，替换

$10\ B\circ(-A)=A'$　　　　1,G4

$11\ A'=A'\circ A$　　　　9,10,替换

这又是荒诞的。

于是,或者应该像我们已经做过的那样,放弃结合性,又或者,如果我们对其做出假设,同时用严格的规则来限制其适用范围①。

§11　类别和关系的"群集"的本质和数量

"群集"是"集合"结构和格的结构之间的一种中介结构,首要问题是要知道它是否构成一种天然且均匀的体系,还是只是一种来自这两个不同结构的因素的混合。然而,对先前计算规则的检测首先明确提出了第二种阐述。如果确实重言(la tautification)$A+A=A$ 和吸收 $A+B=B$ 只以形式上不同于简化的运算的名义介入非均匀的序列,那么所有变得非均匀的序列只从属于群的代数运算。因而,群集在表面上似乎构成了以下两种结构的一种简单混合:从一方面来说,是属于伯恩斯坦群的不相交类别的相加(A_1、A_2、A_3、等等,所以还有 A 和 A',或者 B 和 B',等等);从另一方面来说,是表达格的结构的重言式和吸收式。因此,总之"分类"不能归结于一系列的形式嵌套:

$$A_1+A_2+A_3+\cdots=B_1,\quad A_n+A_{n+1}+\cdots=B_2,\quad B_1+B_2+\cdots=C_1,\text{等等?}$$

① 这是逻辑论者给出的解决方法,这样能够在集群中写下我们的演示中没有包括的等价。因此它包含三个定义:

定义 18——我们把形式为($A+A=A$)或($A+B=B$)的方程称为"冗余方程"。

定义 19——我们把所有不包含冗余方程的序列称为"均匀的序列"。

定义 20——我们把所有方程的相加且至少其中一个方程是冗余方程的序列称为"不均匀的序列"。

然后就有了下面这四条规则:

规则Ⅰ——(任何符号的)均匀的序列都接受吸收($A+B=B$),且其情况限制了重言(la tautification)($A+A=A$),不论其中的顺序怎样,我们都执行关于另一些序列的序列,只要被吸收的项每次都在序列中有同样的价值。

规则Ⅱ——(都是+或都是−的)相同符号的均匀序列接受吸收和重言,只要它们在所有简化之前或之后被推至最大值。

规则Ⅲ——在混合符号的均匀序列中,为了避免矛盾只需要先在序列的每分别两个项上完成所有可能的简化(比如 $B-A$ 简化成 A' 或 $-B+A$ 简化成 $-A'$),因此这样得到的剩余部分就能服从于吸收,但是最大化,在将一项简化为另一项之前或之后。

规则Ⅳ——均匀序列不总是能没有矛盾地通过吸收或简化被缩减的,当它们是由相反的符号组成时。相反,一旦项改变至统一所有符号(成为+或−),只需要最大化地吸收就能把这样的序列变为均匀数列(属于规则Ⅰ或Ⅱ)。

还要记住,定义和规则使用了符号+和−,它们应该提醒了我们,集群的运算可以有不同的解读,且在准确程度上,这些结构是在前运算和假言推理之间(参见第二版导言)。

那么布尔代数可能满足于所有的计算。

这就是分类结构真正揭示的问题：或者，分类结构可以被还原为一种数学群，以描述那些我们单纯忽略了准确数量和潜质的集合，又或者群集构成了一种比群更基本的事实，且有独特的结构。

然而，三个决定性的论题对群集作为两分法嵌套序列的特殊性起作用。这三个论题都立足于外延结构(准确地说是类别)和内涵结构(对应的关系)的必要平行性(在命题内逻辑中永远不可忽视)之上。从这种观点来看，很容易证明：1° 二级类(A'，B'，C'等等，与计算不相交初级类相反)的自然和非人造特性；2° 吸收运算的必要性；3° 可能把类别和关系的基础逻辑削减至八个简单群集，其中四个与关系有关且与类别的四个群集同形。

1. 鉴于有一系列"初级"类别 A，B，C，等等，其中的每个类别都被包含于下一个类别中，我们将 A'，B'，C'等类称作"次级"类别，诸如 $A'=B-A$，$B'=C-B$，$C'=D-C$，等等。但是，显然，如果类别 A'不为空，它就包含了与其本身同一序阶的类别中数量不定的元素：如果 A 是"属"B 的一个"种"，那么 A'就只代表"除了 A 本身之外的种 A_2，A_3，等等"。同样的，B'包含了序阶 B 中的类别，等等。次级类别的概念，它的意义只是把互补性延伸到所有的嵌套上，换言之就是普及二分法划分，这在本质上不是人为的吗？

我们回想一下，所有的弱结构类别都是通过一种元素间已知的质的等价关系(定义16)来确定的。那么如果这样的话，初级类别 A，B，C 等，次级类别 A'，B'，C'等是通过不等价的特殊关系来相互确定的，我们在下文中将其称之为"相异性"。为了理解它，最好回到分类的最简形式，也就是系谱中，其中类别依据内涵而对应了不同的世系关系。

假设有类别 A ：同一个父亲的儿子们；A_1 ：同上(但是另一个父亲)；A ：同上(又是另一个父亲)，等等。这些不同的类别 A，A，A 等被嵌套于 B 中：它们是同一个祖父的孙子们。同样假设有类别 B ：另一个祖父和另一群孙子们，那么类别 B 包括亚类 A，A，A，等等，它们也是像 A 等那样被定义的。接着像 B 那样定义 B (包括 A，A，等等)。最后假设类别 C：同一个曾祖父和它的重孙子们(见图)，这个类别 C 包括了 B，B，B，等等，还有序阶 A 的类别。我们看到这些类别构成

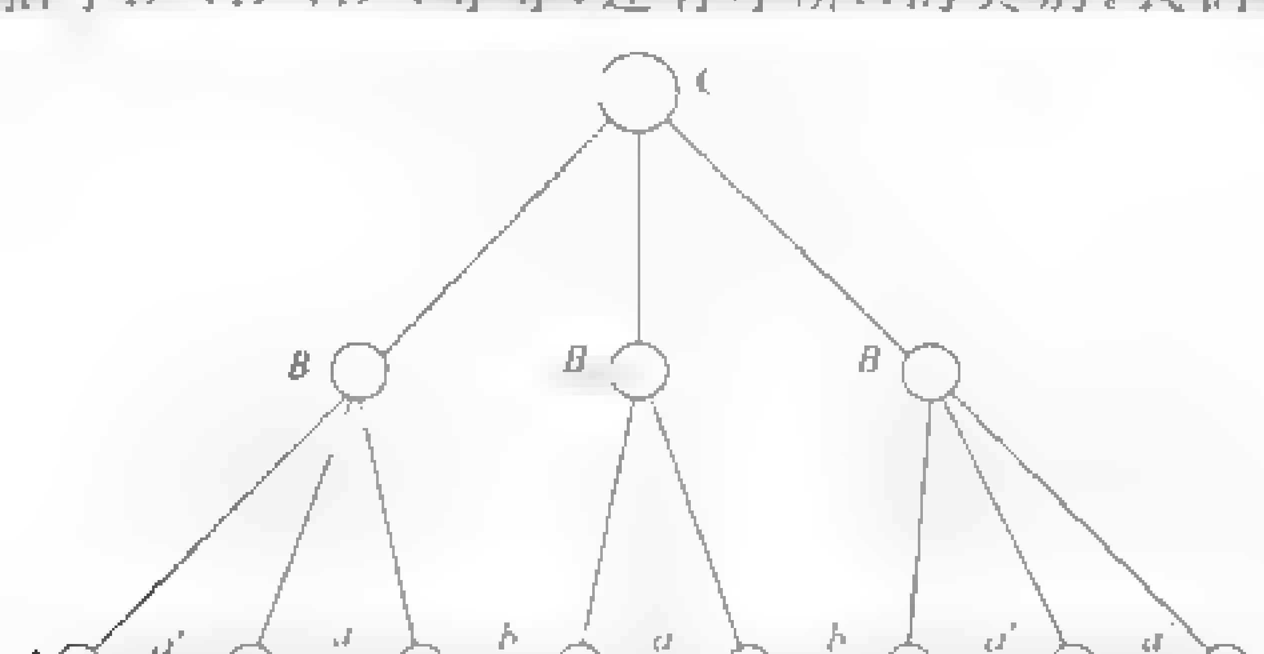


图 .

了以下关系的外延，存在于每个类别的个体项之间：对每个类别 A 都存在一种关系 a——是同一个父亲的儿子；对每个类别 B 都存在一种关系 b——是同一个祖父的孙子；对于每个类别 C 都存在一种关系 c——是同一个曾祖父的重孙。但同样我们也看到，如果这些关系 a，b，c 足够刻画属于序阶 A，B 或 C 所限定的类别的个体项之间的内部关系，那么它们相反就不能表示两个分属序阶 A 中不同的两个类别的个体项之间的已知关系：例如，A_1 的个体项与 A_2、A_3 或 A_4 的个体项之间的关系。

因此我们需要引入新的关系：关系 a'，它会将类别 A_1 的一个个体项与例如类别 A_2 或者 A_3 的个体项结合起来（或者将一个类别 A_2 的个体项与 A_3 的个体项结合起来，等等）。还有关系 b'，它会将 A 中一个类别的个体项与 A 或 A 类别的个体项结合起来。换言之，存在一种"相异性"关系 a'，可定义为 $b-a$，即"同一个祖父的孙子，但不是同一个父亲的儿子"——"嫡亲堂兄弟"；另一种"相异性"b'，可定义为 $c-b$，也就是"同一个曾祖父的重孙，但不是同一个祖父的孙子"——"嫡亲堂兄弟的儿子"，等等。所以 a'，b'等堂兄弟姐妹的关系同时有一种单义的和世系关系建构中不可或缺的意义。这些关系是对称的（如等价关系 a、b、等等），但不是可传递的，所以它们属于一个区别于简单等价关系的组合。然而，我们突然发现是它们决定了次级类别 A'和 B'的存在：如果类别 A_1 意味着"同一个父亲的儿子"；类别 B_1 意味着"同一个祖父的孙子"等等，那么类别 A_2、A_3，等等，要在符号 A'_1 下结合起来，且这个序阶 A'的次级类别包括所有 A_1 的嫡亲堂兄弟；同样的，通常对 B 来说，所有 B_2，B_3，等等，会建构一个次级类别 B'_1，它会是 B_1 在第二等级的堂兄弟。相应地，对类 B_2 或 B_3 等来说，就会有次级类别 B'_2 或 B'_3，它们包含了 B_2，B_3 等在第二等级的堂兄弟。

这个世系关系的例子很好地说明了次级类别的意义，次级类别是通过"相异性"关系 a'，b'等来决定的。通常来说，假设类别 A 是被等价关系 a 决定的，类别 B 是被等价关系 b 决定的，类别 A 包含于 B_1 中，但除了 A_1 的其他类别将包含所有通过关系 $a'=b-a$联系于类别 A_1 成员的个体项。在世系关系的情况中，这些相异性有一个名称：它们是不同程度或等级的表亲关系（cousinages de divers degrés ou rangs）。在种和属的情况中，这些相异性没有名称，但关系是一样的：如果关系 a 意味着"相同的种"，b 意味着"相同的属"，那么相异性 a'则意味着"同属不同种"，同样 b'则意味着"同科不同属"。这种相异性对于对称关系的理论是不可或缺的。同时，可以得出，两分类别 B 而来的类别 A 和 A'（或两分 C 的 B 和 B'等）具有一种逻辑意义而不是只为了运算的需要。然而，次级类别 A'，B'，C'，…和决定它们的关系 a'，b'等不能引出布尔-伯恩斯坦（Boole-Bernstein）群中的一种简单形式，而是它们本身就描绘了群集结构的属性。

2. 至于重言式 $A+A=A$ 和吸收式 $A+B=B$，它们完全出自属于这个伯恩斯坦群的运算领域，和二级项一样，它们的作用对于类别和关系的逻辑建构也是不可或缺的。这无疑证明了是对称关系的组合。对于这一点我们将在第三章（§19）中继续讨论。

我们接着再看刚刚出现过的世系关系的例子，其实很显然，作为更高阶的被定义

（同个父亲的儿子，同个祖父的嫡亲堂兄弟和孙子）关系a、a'、b'的组合，在很大程度上，是建立在简单的重言式和吸收式基础之上。

$axy \cdot ayz \cdot \supset axz$	假设x是y的兄弟且y是z的兄弟，那么x是z的兄弟。
$axy \cdot a'yz \cdot \supset a'xz$	假设x是y的兄弟且y是z的嫡亲堂兄弟，那么x是z的嫡亲堂兄弟。
$axy \cdot byz \cdot \supset bxz$	假设x是y的兄弟且y与z有同一个祖父，那么x与z有同一个祖父。

……等等。

然而，这些对称结构组合是建立在一种类别重言式加法之上：$A+A=A$，$A+A'_1=A'_1$，因为A包含于A'_1中（与$A_1-A'_1=B$相反）；$A+B=B$；等等。如果这些重言式与吸收式似乎首先组成了类别的独立领域中的冗余机制，它们在对称关系计算中的作用是不可或缺的，并且在这种情况下，与嵌套体系本身融为一体。

3. 最后，尤其是根据初级项A、B、C、…和二级项A'、B'、C'、…的格式，二分法嵌套能够以最简单、最对称的方式集中所有类别和关系的运算。其实，命题内运算能针对类别或者关系，这已经构成了两种可能。这些相同的运算可能是加法的或是乘法的，这又构成了两种可能；因此已经得出四个可能的群集：类别的加法、不对称关系的加法（分类运算 seriation）、类别的乘法和关系的乘法。但是，如果我们再考虑到基本事实，即不像在前面的群集那样局限于二级项在初级项（A'在B中，等等）中的嵌套，这里的群集可以针对二级项之间的关系，这样又重新使得群集数量加倍了。于是在类的简单加法之上对应上了一个针对次级类别之间交互性的群集：$A_1+A'_1=A_2+A'_2$，等等（例如兄弟A_1加其堂兄弟A'_1=兄弟A_2加其堂兄弟A'_2，如果$A_2=A'_1$且$A'_2\supseteq A_1$）。另外，在关系领域中，在我们称之为“替代”的附加群集上，对应有主要建立在二级元素机制上的对称关系群集。至于乘法的群集，二级嵌套的发展引出了一个同单义乘法格式（通过一对多的对应）而不是简单乘法那样的一一对应乘法；这就是系谱的格式，可以理解为类别的项，或是关系的项。

因此有如下的详表，对应前面叙述的八种组合：

		类别的群集：	关系的群集：
加法	初级	1. 类别的加法	5. 不对等关系的加法
	二级	2. 替代	6. 对称关系的加法
乘法	二级	3. 类别的同单义乘法	7. 关系的同单义乘法
	初级	4. 类别的一一对应乘法	8. 关系的一一对应乘法

显然，这样一个包括类和关系逻辑所有基础运算的表格不会是一个偶然的产物。然而，它展示的四个类与四个关系群集之间的这种对称主要立足于群集的二分法分配原则，也就是元素在初级项和二级项上的分配。

最后，还要指出，这个群集的概念以及它特有的两分法特征必然会重现在命题间逻

辑的领域中。事实上，在命题逻辑中，对应于构成嵌套基础关系的包含 $A \subset B$ 的是蕴涵关系 $p \supset q$。然而，如果 p 蕴涵 q 而反之不成立（例如哺乳动物蕴涵脊椎动物，而脊椎动物不蕴涵哺乳动物），那么 q 也包含了另一个 p 以外且与 q 互补的命题（例如"脊椎动物，但非哺乳动物"：$\bar{p} \cdot q$）。次级类别 $A' = B - A$ 的概念就包括在蕴涵关系本身之中，我们在下文中还会提及（第六章，§39）。

§12 群集Ⅰ：类别的补群集

我们现在开始对四种类别的群集进行系统陈述，从简单加法（或包含的加法）的类别的群集开始，后者已经在前文中被描述过一部分。

假设有一系列的所谓"初级"类别 $A \subset B \subset C \subset \cdots$，其中每个类别都被嵌套于下一个类别之中。这些类别完全不相等，但是却根据包含关系而排列，那么可以使其与关于下一个类别的互补类别相符：$A' = B - A$，$B' = C - B$，$C' = D - C$，等等。这些最近嵌套类别的互补类别就是所谓的"次级"类别。类别 A 和次级类别 A'，B'，C'，…一起被称为体系的"基础类别"。因此类别的加法群集是通过二分法的嵌套的系列性构成：

(18) $A + A' = B$， $B + B' = C$， $C + C' = D$， 等等。（见图 4）

这个系统中的基础类别可以是单称的，它们不一定要是单称的，而且群集也可以应用于已经讨论过的情况（§9）：相对于其他"属"B 中的种（A'）而言，"种"A 只能在这个位置。只是，如果只停留在这个群集Ⅰ的运算上，次级类别就完全不会被看作是可分解的（它们的分解与群集Ⅱ和Ⅲ相关）。

这就是说，群集的任意两个运算，通过组合可以形成一个新的群集运算。这些组合方式有五种：

1. 顺运算由等式 $A + A' = B$，$B + B' = C$ 等，或恒等式 $A - A = 0$ 和 $A + A = A$ 相加构成。但是，如果在应用计算规则Ⅰ—Ⅲ（§10）时，只停留在这些同质序列（定义 19）上，就可以在广义上将系统的任意一个类别的加法：$+A$，$+B$，$-A'$ 等称作顺运算。

2. 一般性恒等运算是同时满足以下两个条件的运算：(a) 与任意运算共同组成，后者使其保持不变；(b) 它构成了顺运算和其逆运算（见 1）的乘积。然而群集Ⅰ包含一种且唯一的普遍恒等式：就是运算 $0 = 0$（或者 $+0 = -0$）或者广义的 $\pm 0$①。事实上，有：

(19) $$A + 0 = A \text{［条件 } a \text{］}$$

和

(19 乙) $$A - A = 0 \text{［条件 } b \text{］}$$

3. 特殊恒等（冗余与吸收）起到了一般性恒等的作用（a），但与作用（b）是分离的。

① 0 表示空类别，如我们在 §10 中记的∅。

的确，所有那些与其自身相加、与更高序阶且符号(signe)相同的类别相加的类别都会使后者维持不变：

(20)　$A+A=A$，　$A+B=B$，　$A+C=C$，等等。

和

(20 乙)　$-A-A=-A$，　$-A-B=-B$，等等。

$+A$ 在这样的情况下会失去了恒等的作用(a)：具有和自身相反的属性以及与具有和更高序阶类别相反的符号：

$$A-A=0,\quad A-B=-A',\text{等等。}$$

因此，除了一般性恒等之外，还有特殊恒等(即既不是一般化的也不是单称的)。需要注意的是，这些重言式和吸收式的运算，不能被还原为简化运算，尽管，在同质序列中，根据规则1，运算是相似的：简化确实是一种逆运算，是把同一个项分成等式的两个部分(的运算)，而吸收则不是一种逆运算，而是一种保证包含性的运算，因而服从一定的顺序(A 被 B 吸收而不是 B 被 A 吸收)。

4. 逆运算($-A$)是撤销了正运算($+A$)的运算。尽管恒等具有对偶性，但逆运算是唯一的：因为根据作用(b)，只有一般性恒等能决定逆反：

(21)　$A-A=0$，　$B-B=0$，　$A'-A'=0$，等等。

相反，只满足作用(a)的特殊恒等却不能决定任何逆反。

5. 结合性 $(x+y)+z=x+(y+z)$ 是在相同特征项之间或混合特征项之间的一般性，不包括特殊恒等：

(22)　$(A+A)+A'=A+(A+A')$

因为

$$(A)+A'=A+(B)$$

且

(22 乙)　$A+A'=B$　且　$A+B=B$

相反，在混合特征的序列中，当同一个项依次地体现为特殊恒等和另一种其他作用时，是没有结合性的。例如：

$$(-A-A)+B=-A+(-A+B)$$

可能会得到 $(-A+B)=(-A+A')$，也就是 $(A'=-A+A')$，这是荒谬的。

类别相加的群集的基本运算就是非选言加法①(定义17)，与伯恩斯坦群的选言加法相反。在 $A+A'=B$ 的情况中，类别 A 和 A' 是通过定义分离的，而在 $A+B=B$ 中，相加的类别则不是如此。其反面是非选言减法②：

$$-A-A'=-B\quad\text{或}\quad -A-B=-B$$

① 在命题逻辑中，也就是运算 ∨（ 推理）和非 W（ 推理），见§39。

② 在命题逻辑中，就是连比否定 $p\cdot q$(见§39)。

需要注意的是，这个群集Ⅰ是这些类别的唯一群集：在基础类别为单称类别的特殊情况下，所有对这些类别的运算皆为可能。相反在群集Ⅱ至Ⅳ的情况中，当基础类别不为单称类别时，特定运算不再有区别。当群集Ⅰ的基础类别为单称时，可以把这个群集看作构成了一个枚举(enumeration)。这个枚举不是体现为一种点数的运算：它不包含任何数字，且仅仅用至少一种其自身的品质来表示每个个体，也就是用它所构成的单称项的特征中的一种。这种特征可简化为它的名称：诸如名字序列：皮埃尔、保尔、雅克和让，就构成了一个简单逻辑枚举，只要这个序列只借助这些个体的不同特征而不考量4这个数量。但是它必然是一个序阶中的简单关系(参照群集Ⅳ)，或是一个二分嵌套的序列，即使后者仍是暗含的。在四个名字的例子中，这些嵌套是任意的。在随后的枚举中，相反地，基础单向类别的加法符合一种嵌套真正的等级：(例如，)严格的自然科学包括：数学(A)、力学(A')、物理学(B')、化学(C')、生物学(D')和心理学(E')：确实，类 $A+A'=B$(数学和力学)，$B+B'=C$(数学、力学和物理学)，$C+C'=D$，等等，它们符合那些我们不能改变的嵌套，除非改变枚举的意义和范围。否则，另一个同样单称类别的枚举会得到同样的完整初级类别 F(见群集Ⅱ)。

这就是说，这个群集Ⅰ的主要理论旨趣就是凸显枚举和计数之间的差异，也就是一组嵌套的类别的序列 $A\subset B\subset C\subset D\cdots$ 和整数的序列1、2、3、4…之间的差异。我们知道逻辑主义学派(Rusell)倾向把基数词看作一种类别的简单衍生物(见§25)。如果我们将基础类别 A、A'、B'、…还原为对应于加法 $+1$ 的单称项，就得到了这个表格：

$$0+A=A,\quad A+A'=B,\quad B+B'=C,\quad C+C'=D,\text{等等。}$$

$$0+1=1,\quad 1+1=2,\quad 2+1=3,\quad 3+1=4,\text{等等。}$$

但在这两个序列之间存在以下差异，群集的规则以最明确的方式将这些差异呈现出来：

1° 带加号的逻辑元素只能以重言式的方式与其本身相加：$A+A=A$。相反算术单元的加法是可迭代的：$1+1=2$。因而在类别的加法群集中出现了特殊恒等式但在整数的加法群里却没有。

2° 基础类别 A、A'，B'，等等，只有在关于嵌套其本身的唯一初级类别时才是彼此逻辑相等的：

$A\overset{A}{\leftrightarrow}A$ 为真，但 $A\overset{A}{\leftrightarrow}A'$，$A\overset{A}{\leftrightarrow}B'$ 等为假。

$A\overset{B}{\leftrightarrow}A'$ 为真，但 $A\overset{B}{\leftrightarrow}B'$，$A\overset{B}{\leftrightarrow}C'$ 等为假。

$A\overset{C}{\leftrightarrow}B'$ 和 $A'\overset{C}{\leftrightarrow}B'$ 为真，但 $A\overset{C}{\leftrightarrow}C'$，$A'\overset{C}{\leftrightarrow}D'$ 等为假。

相反，算术运算 $+1$ 表示一种所有基础类别之间的一般性等价

$$A=A'=B'=C'=\cdots=1$$

3° 第三，群集的组合不能以相邻的方式实现，也就是关于建构了结构的二分法互补性(见第三章§10)，而整数的组合是无限灵活且独立于嵌套之外的。这第三个差异

包含了其他两个差异，它以最概括的方式展示了区分群集和数字集合的差别：前者只关于从部分到整体的关系，排除了部分和同一个整体之间的直接关系。

§13 群集Ⅱ：替代

类别的加法群集只承认运算 $A+A'=B$ 和 $A+B=B$，但是它既不能把次级类别 A'、B'、C'、…分解为元素，也不能根据初始类别 B、C、D、…分别包含的不同的二分法来对它们进行分解。然而，这些运算都是可能的，在通用定性逻辑的加法组合中，它们是不可或缺的。

假设有类别"对法国人而言的外国人"和类别"对中国人而言的外国人"，这两个类别相加得到"所有人"，因为第一类别包括中国人，第二类别包括法国人。再假设有集合"z 的儿子"，其中包括个体 x_1 和 x_2；类别"x_1 的兄弟"和类别"x_2 的兄弟"就可以相结合得到"所有 z 的儿子"，因为"x_1 的兄弟"包括 x_2，且"x_2 的兄弟"包括 x_1。如果现在我们试着将这两个加法形式化，我们发现它们都不能返回到格式 $A+A'=B$ 和 $A+B=B$，因为要相加的类别不是分离的或者一个包含在另一个中，它们是彼此影响的。因此可以把类别"所有人"看作是序阶 B 中的一个类别，但是根据两个不同的二分法被分开的：$A_1=$ 法国人，$A'_1=$ 对法国人而言的外国人，并且 $A_2=$ 中国人，$A'_2=$ 对中国人而言的外国人。同样的"z 的儿子" $=B$，个体 $x_1=A_1$，他的兄弟 $=A'_1$，个体 $x_2=A_2$，他的兄弟 $=A'_2$。在这两种情况中，就有：

(23) $$(A_1+A'_1)=(A_2+A'_2)=B$$

(23 乙) $$A'_1+A'_2=B$$

和

(23 丙) $$A_1\subseteq A'_2 \quad 和 \quad A_2\subseteq A'_1$$

这一命题(23 丙)表示 A_1 是 A'_2 的一部分且 A_2 是 A'_1 的一部分(见图 6)。因此有类别 B 的双重二分法，但尤其是在嵌套 $A_1\subset A'_2$ 和 $A_2\subset A'_1$ 之间有互反性[1]。

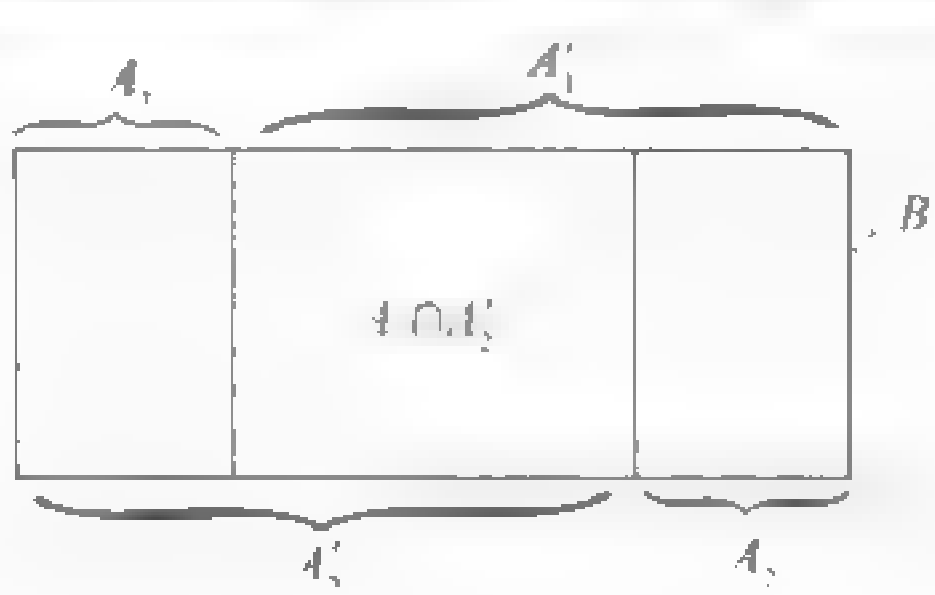


图 6

[1] 参见，在命题逻辑中是 $p \vee p \Leftrightarrow p\,p \vee p\,p \vee p\,p$，也就是不排他的析取(见第三章§28)。

我们将这个运算(23)称为"互补代入"(substitution complementaire)或者"替代"(vicariance)。这些表达意味着，如果在形式为 $A_1+A_1'=B$ 的等式中用 A_2 替代 A_1，那么应该同样也用 A_2 的互补类别 A_2' 替代 A_1 的互补类别 A_1'。

显然替代不止受限于序阶 A' 的次级类别，它与任意一个序阶的所有次级类别都有关。关于 A'，首先要记住类别 A' 可能包含序阶 A 中的好几个类别，这就表示类别 B 可以二分地(图 2)分解为：

(24) $$B=A_1+A_1'=A_2+A_2'=A_3+A_3'=\cdots，等等。$$

例如，除了法国人和对法国人而言的外国人，中国人和对中国人而言的外国人，还有土耳其人和对土耳其人而言的外国人等等。

如果 A' 只包括序阶 A 中的一个类别，那么就有①：

(25) $$A_1'=A_2 \quad 和 \quad A_2'=A_1$$

否则就有：

(25 乙) $$A_1'=A_2+A_3+A_4+\cdots，\quad A_2'=A_1+A_3+A_4+\cdots，$$
$$A_3'=A_1+A_2+A_4+\cdots，等等。$$

另一方面，序阶 B' 的次级类别 B' 如果不为空，则它包括一个或几个序阶 B 中的类别，它本身也包括 A 或 A'：

(26) $$B_1+B_1'=B_2+B_2'=\cdots=C$$

一个次级类别 C' 如果不为空，则包含一个或多个序阶 C 中的类别，其中每个类别被分配于 B 或 B'，等等。

因而替代构成了这样一个群集，两个替代的结合仍是一个替代：

1. 顺运算：

(27) $$[(A_1+A_1'=A_2+A_2')+(B_1+B_1'=B_2+B_2')]=(A_2+A_2'+B_1'=B_2+B_2')$$

其中 $B_1=A_1+A_1'$ 且 B_1' 包含 B_2，同时 B_2' 包含 A_1 和 A_1'。

2. 一般恒等运算：$0+0=0+0$。

3. 特殊恒等式：一个替代与其自身的结合。

4. 逆运算是替代的减法。如果这种减法针对的是对应的带加号的方程式，那么它就会抵消后者：

$$(B_1+B_1'=B_2+B_2')-(B_1+B_1'=B_2+B_2')=0$$

相反，如果从一个大一些的替代中减去一个小一些的替代，那么减法仅仅只是移除了低等嵌套而留下高等嵌套。事实上，通过一个个减法，可以得到：

(28) $$(A_1+A_1'+B_1'=B_2+B_2')-(A_1+A_1'=A_2+A_2')=(B_1'=B_2+B_2'-B_1)$$

---

① 参见，在命题逻辑中，$p_1 \wedge p_2$ 与 $p_1 \vee p_2$ 相反，因而有 $p_1=p_2$ 和 $p_1 \supset p_2$，与 $p_1 \subset p_2$ 和 $p_2 \supset p_1$ 相反。参见第十二章 § 30。

(见图 7)

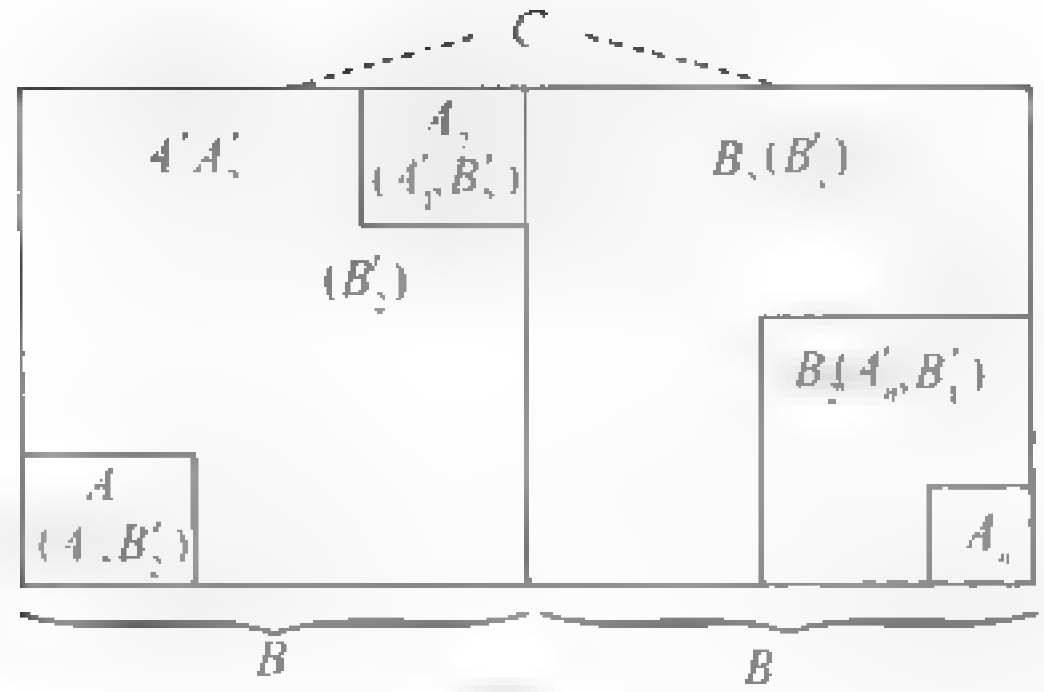


图 7

因而,通过 B_1 的转换得到:

$$(B_1 + B_1' = B_2 + B_2')$$

这个替代的群集可能并没有实际用处,因为所有关于类别相互嵌套的组合问题都会让人立刻想起可逆性[无论是关于质性逻辑里的世系性、"异质性"(etranger)等概念,或是在点集合(ensembles de points)里的相邻性或外在性等]。但是这些运算的理论意义并不因此变少,因为在类别的领域中,是这些运算对应了对称关系的逻辑。

其实,就像我们在§11里见到过的那样,对称关系的组合不是对应了简单重言式

$$A + A = A \quad 和 \quad A + B = B,$$

就是对应了初级类别在次级类别中的重言式包含关系:$A + A' = A'$(例如我嫡亲堂兄弟的兄弟是我的嫡亲堂兄弟:$a + a' = a'$)。但是,在这种情况下,这表现为一个初级类别 A 和一个不互补的次级类别 A'(的加法),例如 $A_1' + A_2' = A_2'$(因为 $A_1 \subset A_2'$)或 $A_2 + A_1' = A_1'$(因为 $A_2 \subset A_1$);因此确切地说,是关于与现在群集组合相符的组合,与群集Ⅰ的组合($A + A' = B$)相反。

§14 群集Ⅲ:类别的同单义乘法

加法只是可能在类别上进行的两个运算之一。类别也接受被称为乘法的运算,我们将对这些运算的基本形式或者交点(intersection),以及两种可能的群集做出区别,分为:同单义(co-univoque)或是双单义(bi-univoque)。

定义 21　　我们将下面这种运算称为"简单乘法"或交点,有两个类别 A 和 B,这个运算能确定同时包含了 A 和 B 的最大的类别,也就是它们的"共同部分"。

假设 AB 是"同时"属于 A 和 B 的个体项的类别(图 8),那么如果我们用($\times$)指乘法,就能得到:

(29)
$$A \times B = A \cap B = AB$$

和

(29 乙)　　　　$AB \subseteq A$　且　$AB \subseteq B$

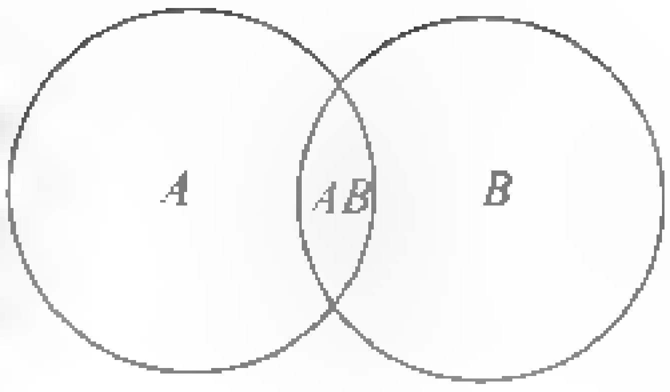


图 8

如果类别(A)包含于(也就是完全属于)(B)，且逆命题不成立，那么结果(AB)则等同于类别(A)本身，但是乘法符号$\times$与加法符号$+$不同，它表示的是所有(A)的成员"同时"也是(B)的成员。

(30)　　　　若$(A \subseteq B)$，则$(A \times B) = AB = A$

另一方面，如果两个类别B_1和B_2彼此包含，也就是说如果这两者中的每一个类别都包含另一个类全部的项，就有：

(31)　　　　若$(B_1 \subseteq B_2)$且$(B_2 \subseteq B_1)$，则$(B_1 \times B_2) = B_1B_2 = B_1 = B_2$

但是包含在B_1和B_2中元素的同一性，也就是B_1和B_2的同一性并不能保证亚类本身的同一性：也许在它们之间只有"乘法等价"(equivalence multiplicative)(见§21)因为B_1和B_2可以根据两种不同的嵌套方式分配相同的元素。这就是在双项表(或是项表等)中出现的情况，我们把它当作"双单义乘法"群集的原则(群集Ⅷ)。

通常来说，为了集中乘法运算，只能在它们之间组合那些根据命题原则(31)彼此包含的类别。这样看来，这是第一种群集形式，比双项表的形式更简单，它只是以群集Ⅰ的基础类别的序列，也就是A、B、C、…，乘上基础类别的形式，这些基础类别是分别地被使用的，我们把这种运算称为"同单义乘法"，因为它建立在一种"一对多"的对应模式上，这种模式可以体现在同单义对应的术语里：

定义 22　假设有A_1，B_1，C_1等这样一个初级类别的序列，其中的每一个类别都包含在下一个类别中，再假设有A_2，A_2'，B_2'等这个基础类别的序列，这些类别可能与序列A_1，B_1，C_1等中的类别彼此相互包含：我们将下面这种运算称作"同单义乘法"，它决定了第一序列K中的任意一个类别，和第二序列中的所有类别之间的共有部分，第二序列包含在A和序列K(K的对应序列)的类别之间。

例如A是"同一个父亲的儿子"，B是"同一个祖父的孙子"，C是"同一个曾祖父的重孙"等。在这种情况下A_2就是"兄弟"，A'就是"嫡亲堂兄弟"，B就是"嫡亲所生的堂兄弟"，等。那么就有了这个表格①：

(32)
$$
\begin{aligned}
&A_1 \times A_2 = A_1A_2 \\
&B_1 \times B_2 = B_1A_2 + B_1A_2' = (B_1B_2) \\
&C_1 \times C_2 = C_1A_2 + C_1A_2' + C_1B_2' = (C_1C_2) \\
&D_1 \times D_2 = D_1A_2 + D_1A_2' + D_1B_2' + D_1C_2' = (D_1D_2) \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

有这种特征的运算意味着在任意一个嵌套类别中，比如在B_1中，都有以共同部分

① 应当理解，依照命题31，包含在这个表格里A_1和A_2，B_1和B_2，或C_1和C_2等中的个体项，分别对于每一对类别来说，都是相同的个体项。

的名义对应的包含在 A_2 和 B_2，即 A_2 和 A_2'（也就是兄弟的类别和嫡亲堂兄弟的类别，这些自然而然是彼此"替代的"）之间的被嵌套类别。

就是这些组合以完整的方式决定了一种分类。例如，如果按§9的意思，A_1、B_1、C_1 等代表种、属、科等，且 A_2、A_2'、B_2' 等这些不同的种、属、科能被包括在类别 A_2、B_2、C_2、…，那么同单义乘法(32)就表示种 A 只包含其本身，属 B 可以包含一个种(A)、其他种(A')和它本身，科 C 可以包括种和属（$C_1A_2+C_1A_2'+C_1B_2'$），但不包括任何高于它自身等级的序阶中的项，等等。

因此这个群集的运算有以下这些：

1. 顺运算：

$$K_1 \times K_2 = A_1A_2 + B_1(A_2 + A_2') + C_1(A_2 + A_2' + B_2') \cdots \text{（见命题 32）}$$

2. 逻辑乘法的逆运算可以被称为逻辑除法（:）。这种运算的意义就是"抽象"(abstraction)的意义，以术语的通常意义来说："不考虑 K_2，则 K_1K_2 返回到 K_1"：

$$(33) \qquad A_1A_2 : A_2 = A_1 \quad \text{和} \quad A_1A_2 : A_1 = A_2$$

我们需要了解两者之间的差异。逻辑加法（+）的反面是减法（−），而逻辑乘法的反面（:）意义则和减法或否定全然不同。把两个类集合起来 $A + A'$，事实上是确定了一个比它们每一个的外延都更大的类别(B)，除了 A 的个体项外还包括 A' 的个体项：脊椎动物(A)和无脊椎动物(A')都是动物(B)。逆运算 $B - A' = A$ 则是为了在 B 的外延中减去 A' 的外延以重新得到 A 的外延（动物减去无脊椎动物等于脊椎动物）。相反，逻辑乘法这样的运算 $A \times B = AB$（或者 $B_1 \times B_2 = B_1A_2 + B_1A_2' + B_1B_2$）不会扩大被乘类别的外延，但是会得到一个外延与它们相同的结果——如果它们两个别的外延相同（B_1 和 B_2）；或是得到一个外延等于最小被乘类别的结果——如果这个类别被包含在另一个类别之中。逻辑乘法增加的只是嵌套的数量：这种运算表示 A 的个体项同时属于 A 和 B，即 AB（同样地，运算 $B_1 \times B_2$ 表示 B_1 同时具有了 B_2 和 A_2，或者 B_1 和 A_2'，即有 $B_1A_2 + B_1A_2'$）。因此乘法逆运算并不是要将一个个体项从结果 AB 中去除，而仅仅只是去掉一个嵌套：因此有 $AB : B = A$。然而因为不能取消嵌套的存在，嵌套是根据类别的加法建构 $A + A' = B$（群集Ⅰ）而来的，那么去除一个嵌套就相当于忽略它。因此类别 A（脊椎动物）属于类别 B（动物）、类别 C（生物），等等。但是把类别 A 放在 A 的形式下而不是放在 AB 或 ABC 等的形式下，也就是不考虑这些嵌套 AB 或 ABC 等，只考虑类别 A 本身。这就是乘法（×）逆运算的意义：逻辑除法（:）是一种抽象，与减法无关。

3. 适合乘法群集的特殊恒等也与加法的恒等不同。我们再次看到了重言式 $A \times A = A$，$B \times B = B$ 等等。但是因为乘法只增加嵌套的个数而不是被乘类别的外延，那么一个外延较小的类别和外延较大的类别的乘法，也就是部分和整体的乘法会得到一个在外延上不等于整体而是只等于部分的结果。加法可以让部分被吸收至整体中（$A + B = B$），而乘法只能让整体被吸收于部分：如 $A < B$，那么 $A \times B = AB$，其中 $AB \subset B$，因为

AB 等于 A 本身：

(34) $$B_1A_2 \times B_1B_2 = B_1A_2，等等。$$

4. 一般恒等运算不像加法群集中那样是 0。相反，空类(0)是没有共同元素的类别相乘得到的产物：$A_1 \times A_1' = 0$。更确切地说，根据逻辑乘法的一般定义（定义 21），空类(0)是同时包含于两个没有共同个体项的类别中的最大的类别。

一般恒等是当我们抽离了所有嵌套时保留下来的东西构成的，因为从定义来看，它是通过它逆反的顺运算所得到的结果，且它的逆反只是抽象。因此，若 $B_1 \times B_2 = B_1B_2$，一般恒等则是 $B_1B_2 : B_1B_2$；同样如果 $A \times B = AB$，一般恒等则是 $AB : AB$。然而，如果用 B 除 AB（即 $AB : B = A$），会得到一个外延与 AB 相等的类别 A，但是如果不考虑 A（即 $AB : A = B$），则会得到一个独立于 A 之外的类别 B，也就是一个外延比 AB 更大的类别 B（因为 $AB \subset B$）。如果继续用 B 去除其本身，$B : B$（或用 AB 去除其本身，$AB : AB$，等）那么得到的就不是空类（因为不能减去个体项，只能减少嵌套）；得到的是整体类别 U，相关系统中最大的类别（并作为系统的参考集），因为抽离了所有的特殊嵌套。换言之，任意一个类别（例如 B = 动物），抽离于其本身($B : B$)表示构成它的个体项没有不同于任意其他类别的个体项，这些个体项只被看作属于现有系统的最普遍的类别：动物，抽象了动物的类别，得到的是任意生物。因此：

(35) $$A : A = U，\quad B : B = U，\quad AB : AB = U，等等。$$

那么，就有下面这个明显的矛盾：一方面来说，类别 U 是有任意一个其他类别 A 或 B 等时被抽象而形成的类别：

(36) $$AU : U = A，\quad BU : U = B$$

另一方面，它也是当一个类别除以其本身时所重现的类别（命题 35）。但事实上，所有属于最一般化类别为 U 的系统中的类别，总是 U 和它本身的产物：

(37) $$A \times U = A，\quad B \times U = B，等等。$$

因此，用 A 去除其本身，事实上就是进行了下面这个运算：

(38) $$AU : A = U，\quad BU : B = U，等等。$$

其实，我们不能同时抽象"整体"，任意类别总是"整体"U 的一部分，同时它也是它自己，要抽象其本身的运算($A : A$)将它归于整体 U，就像上面的运算那样(38)。因此类别 U 与整数 1 在数字乘法中起到的作用是相同的：

$$4 \times 1 = 1，\quad 4 : 1 = 1，等等。$$

5. 适合乘法系统的结合性与加法群集的结合性是相似的：在所有顺运算($\times$)或逆运算($:$)的序列中是普遍存在的，在由特殊恒等和其他运算混合而成的序列中是不存在的。

§15 群集Ⅳ：类别的双单义乘法

同单义乘法是根据"一对多"的原则将一个整体与其部分对应起来。但是同样也可以根据双单义对应的原则将两个类别的序列相乘，就像双项(或三项)表中的情况。

假设有两个类别 B_1 和 C_2，所有 B_1 中的个体项都是 C_2 的一部分，且反之亦然。例如，B_1 是动物，分配为：A_1：脊椎动物；A_1'：无脊椎动物。至于 C_2，重新又是动物，但是，是根据另一种不同的划分来分配的(根据他们的栖息地：A_2：陆生动物；A_2'：水生动物；和 B_2'：能飞行的动物，用适当的定义来指称这三个类别)。于是，我们可以引入以下运算：

定义 23　假设有两个基础类别序列 A_1，A_1'，B_1'，…和 A_2，A_2'，B_2'，…，我们把决定第一组和第二组序列中的每个类别之间共有部分的运算称为双单义乘法。

	A_1	A_1'
A_2	A_1A_2	$A_1'A_2$
A_2'	A_1A_2'	$A_1'A_2'$
B_2'	A_1B_2'	$A'B_2'$

图 9　类别 B_1 是通过两列 A_1 和 A_1' 的结合构成的；
类别 C_2 是由重叠的三行 A_2、A_2' 和 B_2' 构成的。

因而得到(见图 9)，如果每个结合都不为空的话：

$$B_1\times C_2=A_1A_2+A_1A_2'+A_1B_2'+A_1'A_2+A_1'A_2'+A'B_2' \tag{39}$$

类别 A_1A_2 就构成了类别 A_1 和类别 A_2 之间的共有部分(在我们的例子中，类 A_1A_2 就是陆生脊椎动物)；同样，类别 A_1A_2' 代表了类别 A_1(脊椎动物)和 A_2'(水生动物)等之间交叉部分。这种运算一般性地表述了这些交叉，即在两个类别的序列中建立起所有可能的交叉(定义 21)。那么对于这样建立起来的双项表来说，就有双单义对应存在于 A_1 不同亚类(第一列)和 A_1' 不同亚类(第二列)之间，或者还存在于 A_2、A_2' 和 B_2'(行)的不同亚类之间。

如果群集Ⅰ至Ⅲ构成了简单分类的基础，那么这个群集Ⅳ表示的就是多重分类或

是比较分类：例如作用于比较解剖学的纯粹质性的双项表。

群集的组合如下：

1. 顺运算：

$$A_1 \times A_2 = A_1A_2$$

$$B_1 \times B_2 = (B_1B_2) = A_1A_2 + A_1A_2' + A_1'A_2 + A_1'A_2'\text{，等等}$$

$$B_1B_2 \times B_3 = (B_1B_2B_3) = A_1A_2A_3 + A_1A_2A_3' + A_1'A_2A_3 + A_1'A_2A_3' + A_1A_2'A_3$$
$$+ A_1A_2'A_3' + A_1'A_2'A_3 + A_1'A_2'A_3'\text{，等等（见命题 39）}$$

2. 逆运算：$B_1B_2 : B_2 = B_1$，$B_1 : B_1 = U$（参见命题 33 和 35）

3. 一般恒等：U，因为 $B_1 \times U = B_1$，$B_1 : U = B_1$ 且 $B_1 : B_1 = U$（参见命题 35—38）。

4. 特殊恒等：重言式（$B \times B = B$）和吸收式（$A \times B = A$）。因此，对于其本身和被它嵌套的低序阶的类别来说，每个类别都起到了恒等的作用（参见命题 34）。

5. 结合性：如群集Ⅲ。

运算规则和加法群集中是一样的（参见§11 规则Ⅰ至Ⅳ），用吸收（absorption）来代替重复吸收（resorption）。这是很正常的，因为这个双单义乘法的群集可以看作双重加法群集或是复合加法群集。

群集Ⅳ的重要性可通过三个标志来体现：

1° 在类别的群集中它是最普遍的，也就是说，前面的三个群集都可以从这个群集中派生出来，但是反过来则不成立。因此简单加法群集（Ⅰ）构成了嵌套序列之 A，B，C，…，又出现在双单义乘法中。替代的群集（Ⅱ）出现在最初的等价中 $A_1 + A_1' = A_2 + A_2'$，这个等价让完整的乘法 B_1B_2 成为可能。最后，同单义乘法群集构成了目前群集的简单有限部分。

2° 乘法集合 $A_1A_2 + A_1A_2' + A_1'A_2 + A_1'A_2'$ 对应了在命题逻辑中我们说的重言式肯定（$p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$）；因此就到了双命题运算的 16 个二元组合的起点上；乘法集合 $B_1 \times B_2 \times B_3$（其发展见“顺运算”）对应了三元的重言式肯定，并成为适合三命题等运算的 256 个三元组合的出发点。在§28 中我们会继续探讨。

3° 最后这个群集Ⅳ结合了集合的理论。事实上，结构 B_1B_2、$B_1B_2B_3$ 等通过它们的组合 2^n，构成了 16 个和 256 个亚集合，后者形成了集合的二元、三元系统的“部分的集合”（这些与刚刚指出的此结构和命题逻辑结构之间的关系同时存在）。另外，准确地说，B_1B_2 等这类结构构成了格：A_1 和 A_2 的上限是（$A_1 + A_2$），下限是（A_1A_2）。集合的每一成对的部分都是这样被从下和从上两个方向上界定的。

总而言之，这个群集Ⅳ同时标志着类别的逻辑的完成和命题逻辑与集合逻辑的起点——集合逻辑包括一种抽离其性质内容的类别逻辑，同时也因此承认了一系列新的运算。

第三章 关系的逻辑

如我们在第一章(§4)中所见，关系建构了概念的内涵，而其外延是通过类别来表示的。因此我们应该可以预见，在关系群集和类别群集之间存在系统的同构性。但是有趣的是，这种平行性，即彼此研究的显著相似性，通常没有引起逻辑学家的注意，有时甚至遭到了其中一些人的反对，这些人希望将一切归于纯粹的外延——例如，第一范畴，人们引证夏·瑟路斯的方法，我们可以通过群集的方法来表述，但他完全忽略了系统关系，而后者对关系和类别的联合机制的智能化本质是十分重要的。另一方面，尽力尝试鉴别逻辑与群集理论的波尔(M. Boll)，他将关系放在了几乎专属于矩阵(matrices)的术语中，这种术语是从数学家使用的外延关系的概念中借用的。因而首先要论证我们将会采用的观点。

§16 关系的结构

在赞扬摩根(Morgan)跳出了亚里士多德赋予所有命题的专有谓词形式之后

这又说明这位伟大的英国逻辑学家把关系的逻辑从类的逻辑中分离出来是正确的

为了阐述这种逻辑，波尔主张使用矩阵，“它重新强调了科学的逻辑外延性的观点” [1]。然而，这种对矩阵的利用恰好重新在类别逻辑的视角下表达了关系。显然，这种从关系到类别的新型还原在集合理论中是完全合理的，因为一个集合就是外延上的一个系列。但是，如果逻辑要成为思维运算的一种理论，就不能先于它自己或是先于数学，对于数学，它模仿得太多。然而，从基础逻辑的角度来看，从这样的关系外延概念可以得出，关系理论没有成为整体逻辑或是类别逻辑的基础，而是成了后者的一部分。

罗素(Russell)的立场是更令人满意的，他把有单个自变量 ax 的命题函数看作表示一个类别，把有两个或多个自变量 axy 的函数看作表示一种关系。只是，就像我们见过的那样(§4)，函数 ax 已经包括了一种关系，准确地说是：等价关系(正或负)，以这个关系的名义把 x 称为性质 a，后者属于(或不属于)其他自变量。这就是为什么我们把所有关系都看作表示了一个概念的内涵，这个概念的外延是类别，也是为什么我们把

① 波尔，1948，第 256 页。

所有类别看作一个概念的外延，这个概念的内涵则被还原为了一种或多种关系。

这样看来，我们说的弱结构化类别和半结构化类别（定义 11 和 12）之间的唯一差别就在于关系的本质，关系联结了类别的个体项，并因此形成了外延和内涵之间的联系（见§5）。同样，我们不会把半结构类别作为类别来建立一套理论，关于它们，我们只是集中描述它们特征的传递的不对称关系。

我们首先检验一下关系的外延性概念，比如这一概念属于矩阵的方法。一个二维的矩阵代表了两个集合 E 和 F 的"笛卡尔式乘积"（produit cartesien），也就是有序二元组(x,y)的集合，其中 $x\in E$，$y\in F$。此外，可得到 $E\times F$，但在任何情况下，两个二元组(x,y)和(x',y')只有在 $x=x'$ 且 $y=y'$的情况下才能被看成是相同的。

在这些条件下，每个矩阵的局部都代表了域 E 和共域 F 的一种关系。假设，例如 $E=F=\{0,1,2,3\}$。二元组的集合$\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$，也就是阴影格的集合（图 10），代表了集合 E 上的关系"≤"。特别是，对角线也就是集合$\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$，代表了 E 的元素之间的相等关系。

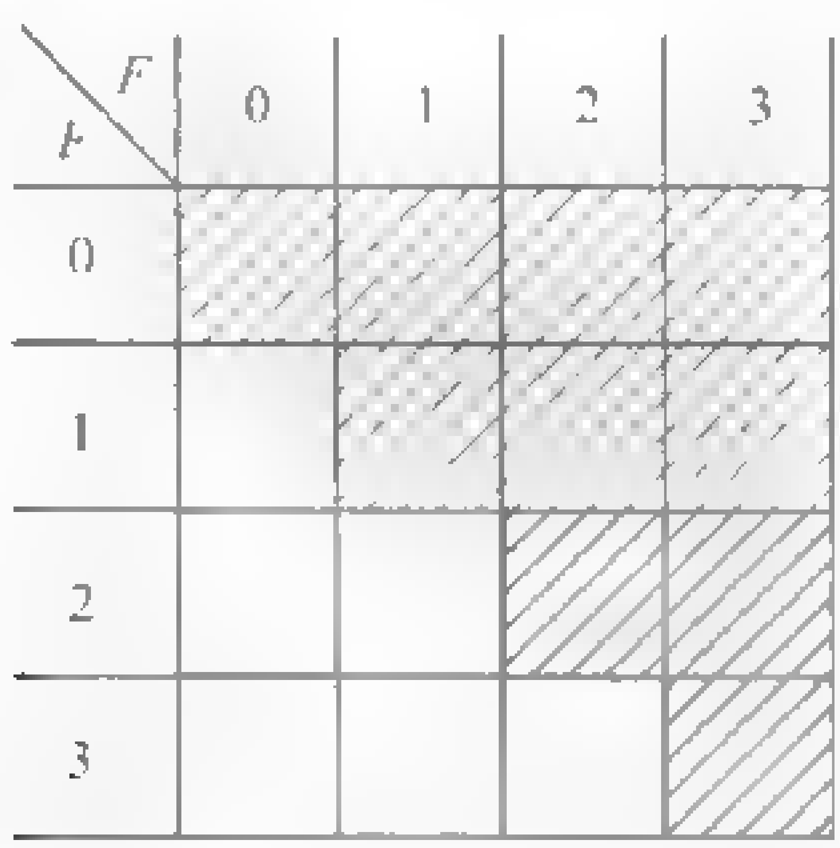


图 10

然而，在这个关系的矩阵表征中，有两件重要的事：第一是矩阵本身的建构运算是类别的乘法；第二是这样的关系不会引发任何计算，但是可以在乘法表内被项的排列替代，也就是被彼此之间有关系的元素 x 和 y 的单一排列所替代。

矩阵的建构运算首先只是关于群集Ⅳ的类别的双单义乘法。在集合的情况下，这种运算包括集合 E 的任意元素与集合 F 的任意元素之间的联合。在原则上，这样的一种运算来自类别逻辑，因为后者不考虑"任意"项，而是考虑有效的个体。然而可以将运算延伸到类别本身，并把关系的项 x 和 y 看作是有效单称类别。那么通过自乘，就会将矩阵的建构还原成群集Ⅳ，并具备自乘法。并且，这个群集Ⅳ包括了前面三个群集。另一方面，每个关系都构成了一个类别的内涵。因此，在矩阵计算中，基本性质（强度的）关系被还原成了类别本身的群集。

但是这样的关系会变成什么呢？它以商的形式表现出来，但商只是项本身的某种

逻辑产物，也就又是类别的乘法组合、以某种方式排列的类别，自然根据它们的组合表示了相关的关系 但是这种计算只涉及了类别，或外延，而不涉及作为内涵的关系。

因此，若 r 是一种关系，就有：

$$\mathrm{Dom}(r)=\mathrm{d}f\,r\ \text{的域}=\mathrm{d}f\{x\mid(\exists y)rxy\}$$

$$\mathrm{Codom}(r)=\mathrm{d}f\,r\ \text{的共域}=\mathrm{d}f\{y\mid(\exists x)rxy\}$$

$$\mathrm{Ch}(r)=\mathrm{d}f\,r\ \text{的场}=\mathrm{d}f\,\mathrm{Dom}(r)\cup\mathrm{Codom}(r)$$

域是 x 的集合，对于 x 存在一个 rxy 中的 y 共域是 y 的集合，对于 y 存在一个 rxy 中的 x，而场是这两个集合的结合。

但仍然存在两种困难。第一种是，从纯逻辑学的角度来看，相对集合理论，有必要对内涵进行这样的分析，这可能只为了建立内涵的形式与外延的形式的同构性。当人们通过乘法表中这个关系单项的组合来向我们描述一种关系时，事实上，人们只是给了我们一个产生关系的结果，而不是这样的关系。等价关系是占据矩阵对角线的项的特征，而通过一种顺序关系连接的项是在对角线之外的 我们以一种肯定单义的方式来解读产生关系的运算产物，但是在把无差别意义赋予等价关系和把递增意义赋予传递不对称关系的同时，我们说明了一个不太直接的事实。也许数学家认为通过特殊运算表示这些关系是完全无必要的，因为他们关心的主要是这些关系所决定的内涵。但是如果逻辑学家只停留在数学家的这一点上，那么他们就会混淆了建构的自然顺序，并且可以说是通过推理束缚了思维，无法通过外延的组合来重建内涵的关系，不能在这个组合中认识建立关系的结果，也不能在内涵的层面上尝试达到这个组合

第二个困难更加严重，同时会加剧第一个困难：存在一些关于这类关系的运算，与它们的相关外延项相反，并且这些运算在说明同构群集的同时，与类别运算是有所区别的。事实上，如果传递不对称关系表示了它所连接的项之间的差异，例如 x y 和 y、z，另外就是要把两个差异相加 $(x\rightarrow y)+(y\rightarrow z)$ $(x\rightarrow z)$，并且把项 x、y、z 交给类别运算（例如 x、y、z ），同时为它们建构有序类别或者根据矩阵和对角线决定的集合。同样，如果等价关系表达了无差别，那么它将引起重言式运算，如 $(x\leftrightarrow y)+(y\leftrightarrow z)$ $(x\leftrightarrow z)$，区别于在项和类上可进行的对应的运算：

$$\{x,y,z\}\times\{x,y,z\}\text{，等等。}$$

然而，因为这些内涵上运算的群集与关于被考虑关系连接项的类别运算群集是同构的，且不是相同的运算，所以更有趣的是尝试就这样从关系本身中抽出关系的结构。所以我们立刻发现，如果这两个差异的加法（$\rightarrow$ $\rightarrow$ $\rightarrow$）对应于两个不同类别的加法 $(A+A'$ $B)$，等价的加法对应重言式 $(A+A$ $A)$，因而也对应加法群集的特殊恒等或者一般恒等 $(0+$ $)$。然而（这就解释了区分于内涵运算的研究），与差异的加法 $+(x\rightarrow y)$ 相反的运算，也就是相同差异的减法 $(x\rightarrow y)$，等于逆向关系的加法：

$$(x \xrightarrow{a} y)+(y \xrightarrow{a} x)=(x \xrightarrow{a} x)$$

与类别运算的互补性($+A$ 和 $-A$)相符的就是关系群集里的"相互性",然而这两类群集之间没有完全的同构性!

这样就产生了一个关于关系的集合的结构问题,就像关于类别那样,尽管不涉及集合理论,但这个问题还是值得我们做认真的思考。因而,我们并不一定要复制数学家的方法就能得到最好的逻辑方法:首先要探讨理智的最基础运算的专门性问题。在这点上,关系值得分别地予以研究,即在关系之内的和指向关系的研究。

另外,很显然,这个对于内涵关系运算的研究与矩阵以及与关系的外延分析是毫不相关的。相反,一旦我们提取出两者关系的机制,就能通过联系内涵与外延来最好地掌握类别和关系的对应。

其实,这是建立在内涵基础之上关系的一种经典阐述方式:矢状表征,用个体或类别的标志来代表关系的项,并用表示关系方向的箭头表示关系本身:$x \rightarrow y$ 代表"x 得出 y"(或 $x \Rightarrow y$;等等)$x \rightleftarrows y$ 代表 $x = y$;等等。至于二元组的列举的方法,则为矩阵排列(disposition)和矢状排列做了准备。

我们之后会研究矢量表现(figuration),它肯定只就其自身表达了对一种简单符号论的旨趣。但是,因为符号涉及内涵,也就是涉及作为相关特性的关系,而不只是涉及相关项,那么在集中这些箭头的同时,符号的使用能够建构关系专门的群集,不会弄混关于关系的运算和关于作为类别的元素的项的运算。

§17　关系的分类和群集

因为关系表达了概念的内涵和类别的外延,那么关系的逻辑就遇到了一个比类别逻辑更棘手的问题,即形式化和"形式"与"内容"分离(见§2)的问题。此外,在类别本身里就存在不同的形式化阶段:一个"抽象集合",从定义来看,其中的元素只有几种特性,同一性 $x = x$,其否定 $x \neq y$ 和属于集合 $x \in E$。通过举例,这个"抽象集合"建构了完全不同于人的类别的其他形式化的类别,其中的每个个体都通过特有品质形成了不同于其他亚类的一个单称亚类。然而通过建立独立于内涵之外的外延的嵌套,就能轻易地将所有类别都与其超逻辑内容分离开。相反,如果是表达内涵的关系,问题就在于如何从"内容"的内涵中提取出联结的"形式",也就是从已知关系的无限变量中提取出来。

关系最普遍的特征(对称性或不对称性、传递性,等等)被简单地当作形式的特征也许就能解决问题。但这条准则是远远不够的,因为普遍与特殊之间的过渡是难以察觉的,这会抹去形式与内容之间所有的固定边界:因为不知道对一般性特征的分析应该进行到哪一步,我们尝试对各种可能的关系进行一个纯粹和简单的描述,这些关系很多都是不定的。连续性关系与非连续性关系的差别是否就像一般性顺序与特殊顺序之间的

差别？

第二条准则更加坚固：所有引出可能组合的关系特性都是"形式的"；相反，这些特性只和始终非复合的内容有关。例如，关系的不对称性与传递性得出了一些顺序组合，这些组合当然构成了逻辑"形式"，和类别的嵌套一样（尤其后者是部分有序的）。相反，非传递关系，如"x 吃 y""x 杀了 y"等，代表了形式上不可分析的剩余，除非用任意一种方式把它们与传递关系联系起来。

但是可能组合的这一特性不能解决关系逻辑的所有问题，因为如果所有纯粹组合都是形式化的，那么所有形式组合就不只是逻辑的。要只用组合能力来定义关系的逻辑，那么它就可能包括所有数学内容。那么，关于关系就和关于类别一样，应该将非特定的数学逻辑限定在强度量的领域内。这样来看，关系 $(x < y) = a$ 和 $(y < z) = a'$ 就只是逻辑的，因为，如果 $(x < z) = b$，组合 $a + a' = b$ 就只能判断 x 和 $z(=b)$ 之间的差异比 x 和 y 之间或 y 和 z 之间的差异更大（因此 $a < b$ 且 $a' < b$），但是这个组合不能告诉我们 a 和 a' 之间的关系。

因此，在这一章里，我们只限于考察"约束关系"（relations intensives），可以定义为，就是只认识部分与整体间的不平等关系这种量化，和同一性质共有的这种等价。然而，第一要点就是，意义首先只和外延有关的这些表达，同样涉及内涵。事实上，在最一般化的形式下，关系只能表示一种相似或差异。然而，差异通常可能更多或更少，这种分度本身就可以承认强度的量化或外延的、数字的量化（如上文所述）。相似性也是这样，包括等价和无差异：存在数字等价、外延等价或强度等价，后两者表示对同一品质的简单共有。在这种情况下，赋予 x 和 y 相同颜色、相同功效等的关系 $x \overset{a}{\leftrightarrow} y$，从内涵的角度来看是强度的等价，从外延的角度来看就是表达关于同一个类别（无序）的共同隶属或共同包含。

这就意味着，要引入关系的第一个部类（division）就是"不对称"关系：

$$(x)(y)(rxy \supset \sim ryx)$$

还有"对称"关系：

$$(x)(y)(rxy \supset ryx)$$

因为这一部类精准地对应了某种差异关系和相似关系的分配。所有对应关系都表示了一种正等价或负等价[1]，后者构成了一种无序差异：例如 x 与 y"属于同一物种"或"不属于同一物种"。相反，不对称关系总是有序差异的关系。我们最好坚持这一点，这并不是对所有关系来说都很明显；另一方面，"不同的"关系，在某些情况下"不对称的"关系本身也是对称关系！

首先，存在着蕴涵的更多和更少的关系：一大的，有效的，等等。显然，这些关系表

1　从项的心理学意义而不是数学意义上来说，在数学意义上，等价关系不只是对称的，也是传递的和自反的。

示了一种相连项之间的一种有序差异。但是不对称关系只包含了一对价值：左和右，外和内，等等（还有一个第三者：不左不右，处于边界上，等等）。在这种情况下，关系是完全不对称的，因为不能对调其中的项（x 在 y 的左边和 y 在 x 的左边是相互矛盾的），但是在内容中，关系也表现了一种通常尤其符合项的几何意义的对称。然而，显然关系通过这样的不对称组合阐述了一种定向差异，其特征源自二元组，是那些根据一定顺序彼此之间可复合的二元组。

但是为什么"差异"关系也是对称的呢？其实"x 与 y 不同"等于"y 与 x 不同"。同样，可以承认，在连续顺序 x，y 中，"x 对于 y 是不对称的"；那么这个关系等于"y 对于 x 是不对等的"。"差异"关系，在一定意义上的"不对称"关系也就是对称关系，它们还表示了另外一些类型的等价："x 与 y 不同"意味着 x 和 y 之间与 y 和 x 之间存在着"相同的差异"，而"x 对于 y 是不对称的"意味着它们之间存在着一个"相同的不对称"！然而，这是很容易解释的，同时也并不与一般规律相悖：只要差异或不对称是以一种不确定的形式表达的，也就是非定向的形式，那么差异或不对称就仍然只是一种无序差异，也就是一种简单的负等价。更确切地说，在任意一个连续顺序 $x\to y\to z\to\cdots$ 中，最好区分 x 和 y，y 和 z 等之间的不对称差异，还有间隔，就是对称的关系"之间（entre）"，因为这个间隔在 x，y"之间"和 y，x"之间"是"相同的"，这就构成了差异中的一种等价，也就是一种无序差异。然而，如果说 x 和 y 之间与 y 和 x 之间存在相同的差异，就肯定是涉及不对称分开这两个项的间隔，而不是涉及把这两项对立起来的定向或有序差异。同样的，如果承认不对称在 x，y"之间"和 y，x"之间"是相同的，那么就剥夺了这个不对称的定位，并相似地对待了它与不确定差异，这又是一种间隔。

还有一种与不对称关系的划分同样重要的是传递关系与非传递关系。传递关系有以下特性：

$$(x)(y)(z)(rxy \cdot ryz \supset rxz)$$

也就是，连接 x 和 y，y 和 z 的关系也连接了 x 和 z。但是应该区分两种情况：一种是传递性表示有序差异的递减，就是同一个性质关系的强度变化；还有一种是传递性是重言式的，因为它表示了对同一个类别的共同隶属关系。至于非传递关系，它们不是完全非复合性的，即便看上去好像是这样。事实上，还存在一种我们称之为"他传递（allotransitives）"的关系，它提供了一个同时包含多种可能的组合：我兄弟的兄弟不一定是我的兄弟，而有可能是我兄弟或我自己；我嫡亲堂兄弟的嫡亲堂兄弟可能是我的嫡亲堂兄弟、我的兄弟或我自己，等等。只有属于"群集"的二级类别的介入能说明（如我们在 § 11 中所见）这种组合。其实，如果用 A 指同一个父亲的儿子，用 B 指同一个祖父的孙子，等等，就有这些关系：$\leftrightarrow$：个体的同一性；$\leftrightarrow$：同一个父亲的儿子；$\overset{\prime\prime}{\leftrightarrow}$：同一个祖父的孙子；还有 $\overset{\prime}{\leftrightarrow}$：兄弟，也就是我父亲的儿子（$\overset{\prime\prime}{\leftrightarrow}$），但不是我（$\leftrightarrow$）；$\overset{\prime\prime}{\leftrightarrow}$：嫡亲堂兄弟，也

就是同一个祖父的孙子($\overset{b}{\leftrightarrow}$),但不是同一个父亲的儿子($\overset{a}{\leftrightarrow}$);等等。在这种情况下,我们有如下组合:$\overset{a'}{\leftrightarrow}+\overset{a'}{\leftrightarrow}=\overset{b}{\leftrightarrow}$,因为 $A'+A'=B$(命题 23 附);我嫡亲堂兄弟的嫡亲堂兄弟($\overset{a'}{\leftrightarrow}+\overset{a'}{\leftrightarrow}$)只可能是我的祖父的孙子($\overset{b}{\leftrightarrow}$),换言之,可能是我的嫡亲堂兄弟($\overset{a'}{\leftrightarrow}$),我的兄弟($\overset{x'}{\leftrightarrow}$)或者我自己($\overset{x}{\leftrightarrow}$);事实上,$\overset{b}{\leftrightarrow}$ 包含了可能性 $\overset{a'}{\leftrightarrow}$、$\overset{a}{\leftrightarrow}$、$\overset{x'}{\leftrightarrow}$ 和 $\overset{x}{\leftrightarrow}$,因为类别($B$)包含 A',A,$\{x'\}$ 和 $\{x\}$。

在确实不可传递的关系中,至少表面上不可传递的关系中,如"狼吃羊,羊吃草,但狼不吃草",重要的是,在每一种情况中下,需要考察这种关系是否与他传递不相称。首先,我们最好对日常用语保持怀疑,日常用语不一定有逻辑;因为在这个范例中,日常语言不能用"草吃土地中的矿物盐"来延续这一系列,然而这显然是相同的关系。接着,我们应该寻找最近的可传递关系,以类似的方式,近似的种类,但用关系的术语表达。在特定的情况下,其中的关系是"吸收提取的物质"或"吸取养分",但是,是间接的,像直接那样:狼吸取羊的养分,通过羊,吸取草的养分,通过草,吸取矿物盐的养分。那么很容易就能构建一个传递的不对称关系体系,比如:矿物盐是被草吸收的,如此等等,在他传递关系的意义上建立起最初的"狼吃羊"关系。这种从非传递关系到传递关系或他传递关系的转变过程只不过是科学完成的工作,科学用规律代替了普通概念并把构成因果关系的这种演绎传递性引入法定关系中。因而,"火燃烧木头"是关于普通概念的一种非传递关系,这种概念一开始让化学受了误导(燃素),而氧化作用的分析用可传递因果关系的体系代替了它。大部分规律和因果推论都带有度量性特征,但也有(诸如,在生物学上)简单的强度特征,这种特征显示了逻辑形式化的类型。总之,一般来说,非传递关系就是一种多少适当形式化的他传递关系,或者是不完全的超逻辑内容的形式,或者一个纯语言的集合。但含有最后一种可能性是真正非传递关系的特征:就是缺少了联系的超逻辑内容的可能的可逆性成分,进而形成的非传递性:例如"x 杀了 y",并且 y 不能再有任何动作。

关系的逻辑同样也区分了自反关系:

$$(x)(x \in \mathrm{Ch}(r) \supset rxx)$$

与非自反关系:

$$(x)\overline{rxx}$$

自反关系是将项与其自身连接起来的关系:我是与我自己"同一个父亲的儿子"($\overset{a}{\leftrightarrow}$ 就是一种自反关系),但是我不是我自己的兄弟($\overset{x'}{\leftrightarrow}$ 就是一种非自反关系)。我们也谈论关联关系,如果对它们领域内的任意两个项来说,关系存在于第一个项和第二个项之间,或第二个项与第一个项之间,或同时包括两种情况。因此,一个系列 $x_1 < x_2 < x_3 \cdots$ 是由不对称关系,传递关系和关联关系组成。

或许可以另外引入一条二价、三价和多价关系①之间的差异。当一种关系只能被肯定或否定，没有中间状态时，它就可以说是“二价的”：x 是或不是 y 的兄弟。如果一种关系同时认可了被考查的关系、其逆命题，以及两者可能存在或不存在，那么这种关系就可以说是“三价的”。例如，“x_1 在 x_2 的左边”，“x_2 在 x_1 的右边”，但是 x_3 可以既不在 x_1 的左边也不在 x_2 的右边（假设在上方，等等）。再举一个例子：“x_1 在界限的外面”，“x_2 在界限的里面”，但 x_3 可以在“边界上”，也就是同时在外面也在里面（假设它是点的集合）或者两者都不是（假设它是一个点）。有些关系可以任意地被定义为二价的或三价的。最后，如果一种关系可以区分大小，那么就可以说它是“多价的”：如“比……更重”，等等。

这些概念足以让我们建立起关系的“群集”。这些群集与类别群集之间的主要差异是，没有针对类别的加法或减法，也就是没有针对有关“项”（个体或集合）的出现与否，它们只承认了这些项之间已知“差异”的加法或减法。其实，关系前面分类的意义在于证明关系的结构只涉及这些项之间的差异（或相似性），而不是涉及属于类的逻辑的这些项（或其嵌套）的会合。事实上，不对称关系表示了一种有差别的有序差异，而对称关系则阐述了一种无差异（等价）或是一种无序差异（负等价）。传递关系承认了有差别差异的叠加或是等价的重言式加法。自反关系涉及同样的重言式，而关联关系则是不同差异的加法。最后二价、三价或多价关系意味着差异本身不同的分配模式。因而关系“群集”的任何机制都在于强度差异的组合，这一发现足以只用组合来论证建立于内涵之上的关系逻辑的合理性，不同于建立在外延之上的类别逻辑（见§16）。

但是，我们还要补充一条重要情况，在§16中我们已经暗示过。因为类别的加法在于把一些项（个体或集体）加到另一些项上，那么逆运算就在于减去它们，而一般恒等运算就在于不考虑其中任何项（空类）。确实，类别乘法运算针对这些嵌套，而减去它们会以恒等运算的名义得到最一般化的类别，但从这个观点来看原则仍然不变。相反，关系的加法在于把差异相加（不是项或嵌套），逆运算在于去掉这些相同的差异，那么一般恒等就被还原成了无差异。然而，空类是零的同义词，无差异只是恒等！所以，在加法中，类别的逆运算和恒等运算建立在一条简单的否定原则之上，也就是关于被考虑整体集合的互补性原则：对类别 A 的否定其实是关于相关整体的互补类别的肯定：$B = A + A'$，$C = A + A' + B'$，等等，因此通常方式下 $\bar{A}$ 是关于整体类 U，就是 $\bar{A} = U - A$，因为 A'②$+ B' + C' + \cdots = U - A$，因此 $A \times \bar{A} = 0$ 且 $A + \bar{A} = U$③。相反，如果把逆运算称为等价 $A - A$ 而非整体 U 的补充，那么关系的逆运算和等价（一般）运算是建立在互反性

① 不应该混淆二价关系、三价关系与二元关系、三元关系。因此“在……的左边”是二元关系：它把两个项连接在一起。但是“处于……之间”是三元关系，它连接了三个项。多价建立在对关系内容的分析上，而不是建立在关系的形式上。

② 此处原文是“A”，疑为笔误，根据上下文改为“A'”。——译者注

③ 此处原文是“$\bar{A} + A = U$”，疑为笔误，根据上下文改为 $A + \bar{A} = U$。——译者注

原则之上的。

因此，一种对称关系的对立面就是其互反命题。同样的，一种有序差异的对立面就是其相反方向上的差异。所以对立面就是差异的减法或者相当于逆向关系的加法，也就是相反方向上的差异的加法。

总之，关系加法运算的对立面是互反运算①而不是像类别加法那样是互补运算。于是关系群集的作用与类别群集的作用十分不同但又紧密相关：在发展出互反结构的同时，关系群集也构成了命题逻辑的两大基础之一，我们将会发现这一基础既建立在同样的互反性基础上，也建立在简单的互补性基础之上。

鉴于类别结构和关系结构的这种二元论，更有趣的是证明这两种群集的同构性。这是自然的方向，因为关系表示了内涵的关联，其外延是通过类别来表示的。但是差异加法和项加法的完全对立，还有建立在简单互补（否定）基础之上的逆向以及建立在相逆性之上的逆向对立都可能可以让人相信这两种群集的多相性。事实上，我们重新找到了两个加法群集和两个乘法群集。后者和类别的对应群集一样，是同单义或者双单义的。前者针对与类别（Ⅰ）简单加法群集有联系的传递不对称关系的简单系列化，或是针对与重言式或符合类别群集Ⅱ的替代相对应的对称性。在外延和内涵关系还有“群集”结构的本质基础特征方面，这样的同构性都是很有启发意义的。

§18　群集Ⅴ：传递不对称关系（强度系列化）的加法

假设有一个包含项 A、B、C 等的集合②，每个项都不相同但都与相同的一个点进行比较（例如更高或更矮、更重或更轻的物体，更深或更浅的颜色，以及根据香味区分系列的价值，或者根据用处和效果区分系列的行动，等等）。这些项可能无差别地由个体元素或类别（单称或非单称）构成。现在我们将这些项根据增长的差异排序，就能得到一系列表示相关差异系列的不对称关系、传递关系和关联关系：

$$O\xrightarrow{a}A,\quad A\xrightarrow{a'}B,\quad B\xrightarrow{b'}C,\quad C\xrightarrow{c'}D,\text{等等}$$

箭头→通过与有序项 O、A、B 等的对照阐释了不对称关系，箭头的方向标志着目标项之间的偏向不平等性；所以“$A\xrightarrow{a'}B$”意味着“B 比 A 更（大，等等）”。相反的就是：

$$A\xleftarrow{a}O,\quad B\xleftarrow{a'}A,\quad C\xleftarrow{b'}B,\text{等等}$$

意思是：“O 比 A 更（小，等等）”。

定义 24　我们赋予运算 $(O\xrightarrow{a}A)+(A\xrightarrow{a'}B)=(O\xrightarrow{b}B)$ 以下意义：“如果把 A

① 因而在矩阵展示中有对角线的作用。

② 我们用大写字母是为了表明相关项不一定是个体项。

和 B 之间的差异(a')与 O 和 A 之间的差异(a)相加，就得到了 O 和 B 之间的差异($b=a+a'$)”，那么这个运算就是系列加法。

我们发现这个系列加法($a+a'=b$)蕴涵 $a<b$ 和 $a'<b$，但是我们忽略了部分 a 和 a'(强度量)之间的比较。

提出这些关系之后，就能建构以下群集：

1. 顺运算就是差异的加法，即 $+\xrightarrow{x}$：

(40)　$(O\xrightarrow{a}A)+(A\xrightarrow{a'}B)=(O\xrightarrow{b}B)$　和　$(A\xrightarrow{a}B)+(B\xrightarrow{b'}C)=(A\xrightarrow{a+b'}C)$

$(O\xrightarrow{b}B)+(B\xrightarrow{b'}C)=(O\xrightarrow{c}C)$　　$(A\xrightarrow{a+b'}C)+(C\xrightarrow{c'}D)=(A\xrightarrow{a+b'+c'}D)$

$(O\xrightarrow{c}C)+(C\xrightarrow{c'}D)=(O\xrightarrow{d}D)$　　$(A\xrightarrow{a+\cdots+c'}D)+(D\xrightarrow{d'}E)=(A\xrightarrow{a+\cdots+d'}E)$

等等。　　等等。

2. 逆运算就是减去一个差异 $-\xrightarrow{d}$：

(41)　$(O\xrightarrow{b}B)-(A\xrightarrow{a'}B)=(O\xrightarrow{a}A)$，等等。

我们把一个含义给予下面的表达：

(41 乙)　$-(O\xrightarrow{a}A)-(A\xrightarrow{a'}B)=-(O\xrightarrow{b}B)$

它代表了两个差异减法的组合，也就是前文中意义为+(命题 10)的组合的完全反演变换；所以这个组合意味着源自更高等级差异的一种可能的减法。

一方面，一个差异减去其本身，即意味着这个差异的取消：$(A\xrightarrow{a'}B)-(A\xrightarrow{a'}B)$。但是这个运算包括两种可能的意义，这两种意义差别非常大，应该要加以选择：1°消除 A 和 B 之间的差异可能意味着把 A、B 变得相等；那么运算的产物就是 $A\leftrightarrow B$，也就是 $A=B$；但是 2°差异的减法也可以当作顺着运行方向的联系 $A\xrightarrow{a'}B$ 后面接着相反方向的联系 $B\xrightarrow{-a'}A$，也就是 $B\xleftarrow{a'}A$，这两者联系的产物就在于把 A 与 A 以 $A=A$ 的形式连接起来。然而，这两个运算中的第一个并不是关系运算，而是类别的运算；其实，这个运算通过加上新的元素或是减去已有元素改变了项本身，A 或 B。因此只有在一种意义(2)上，可以考虑差异与其自身的减法。于是有：

(42)　$(A\xrightarrow{a'}B)-(A\xrightarrow{a'}B)=(A\xrightarrow{a'}B)+(B\xrightarrow{-a'}A)=(A\xrightarrow{a'}B)+(B\xleftarrow{a'}A)$

这样我们就得到了一个重要结论，这个结论不是来源于习惯，而是表示了关系运算的机制，正向的不对称关系(=有序差异)的减法等于其反方向加法。换言之，加上一种关系是从 A 过渡到 B，也就是加上一种差异，而减去一种关系是从 B 回到 A，也就是说朝相反的方向走相同的距离(相互性)。如果可以在一系列运算的开头和结尾处写上通过最终关系(通过过渡组合的产物)一一相连的项，那么有：

(42 乙)　$(A\xrightarrow{a'}B)-(A\xrightarrow{a'}B)=(A\xrightarrow{a'}B)+(B\xleftarrow{a'}A)=A\rightleftarrows$，即$(A=A)$

同样有：

(42 丙) $(O \xrightarrow{b} B)-(A_{a'}B)=(O_b B)+(B \xleftarrow{a'} A)=(O \xrightarrow{a} A)$；等等。

3. 一般恒等运算就是无差异$(A \xrightarrow{0} A)$或$A = A$。其实，无差异在这个群集中只能表示恒等，因为被归类的项从定义来说都是不同的。因此有：

(43) $(A \xrightarrow{a} B)+(B \leftarrow A)=(A \xrightarrow{0} A)$ 和 $(A \xrightarrow{0} A)+(A \rightarrow B)=(A \rightarrow B)$

一般恒等总是像这样：(a)顺运算通过其反向而得到的结果；和(b)不改变构成一般恒等运算的运算。

4. 特殊恒等是重言式和吸收式：

(44) $(A \xrightarrow{a} B)+(A \xrightarrow{a} B)=(A \xrightarrow{a} B)$ 和 $(A \xrightarrow{a} B)+(A \xrightarrow{a'b} C)=(A \xrightarrow{a'b} C)$

5. 结合性遵循与类别的群集同样的规则。

我们发现这样一个群集与类别的简单加法(群集Ⅰ)存在同构性①，这个群集引出了有关类别结构和关系结构对比的一系列有趣的问题。

包含的系列化——需要注意的第一点是，一个类别包含在另一个类别中构成了传递的不对称关系。如果考虑一个相关系列的包含，如相关类别中的任意两个表示包含关系，那么就得到了符合这个群集Ⅴ规律的系列化。比如介入群集Ⅰ中的初级类别序列$A \subset B \subset C \subset \cdots$(相反，二级类别的介入与贯通性条件是相冲突的，因为A既不包含于A'，A'也不包含于A，且A'不包含于B'，诸如此类。)

于是在群集Ⅰ的初级类别的情况中就有$(O \xrightarrow{a} A)+(A \xrightarrow{a'} B)=(O \xrightarrow{b} B)$，等等。但是在此群集中表示这些类别之间序阶性差异的关系$\xrightarrow{a}$，$\xrightarrow{a'}$，$\xrightarrow{b}$等的意义是什么呢？不是区分它们或是定义内涵的属性，因为这些属性可以是任意的，可区分为系列或不可分，并且，因为这些属性是复合性的，由于它们的干扰，即使其中的每个品质单独来看都是可分成系列的，也不一定能得出简单的系列化。象征类别A和类别B之间差异的关系$\xrightarrow{a'}$，不能单独表示任何与二级类别A'的关系(即$A'=B-A$)因为后者不在系列之中。那么在序列$\xrightarrow{a}$，$\xrightarrow{a'}$，$\xrightarrow{b}$等中涉及的差异只包括一种外延差异，也就是从部分(低级外延)到整体(高级外延)的关系：于是$(O \xrightarrow{a} A)$表示A的外延高于O，$(A \xrightarrow{a'} B)$表示B的外延高于A(高了一个价值$\xrightarrow{a'}$)，也就高于O(高了$a+a'=b$)，等等。

那么我们就看到了一个悖论："外延"通过与关系对立的方式表示了类别的特征，同时也通过"外延差异"的关系把自己表达出来，同样地，通过内涵的关系也可以形成一种

① 这种同构性假设我们在这里可以写$(O \xrightarrow{a} A)+(A \xrightarrow{a'} B)=(A \xrightarrow{a'} B)+(O \xrightarrow{a} A)$，如我们在群集Ⅰ中写$A+A'=A'+A$，即使不能完全忠实地反映这个关系群集的意义，仍然应该有这样写的权利。

②、参见第1221页及以后。因此心理"同构性"常常被还原为简单对应

类似任意差异系列化的系列化！但是这种悖论而不是一种矛盾：事实上，“外延”是一个可以定义的概念，因此它和所有概念一样，都有一种内涵。这种内涵的意义是“包括更多或更少个体”（不知道有多少），所以这种内涵是通过更大或更小的差异表示的。这并不意味着类别的外延就是这个类别的内涵的属性，但是这个类别的外延或分构成了另一种关系，这种关系在内涵上被定义，并且关系的项是不同的外延本身，也就是这些类别。要把“形容词”变成类似其他名词的名词就不再矛盾了。

此外我们可以赋予初级类别以某种序列：

$$O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{c} C \cdots$$

一种简单连续顺序意义：“A 在 O 之后，B 在 A 之后，等等”。在这种情况下，我们可以用次级类别建立一个类似的序列 $A' \to B' \to C' \to \cdots$ 但不能同时用这两种，因为如果 A 在 B 之前出现且 A' 在 B' 之前出现，那么 A 和 A'、B 和 B' 等等彼此都是无序的（除非是指定的）。从另一方面来说，序列 $A' \to B' \to C' \to \cdots$ 当然不能表示外延差异的意义，因为涉及的是不相交的、不嵌套的类别。

序列加法的非交换性　如果一系列类别的关联包含构成了关系的一种序列化，那么就有了类别加法和不对称关系（也就是差异：见定义 21）加法之间的第一条差异，前者是可交换的，而后者通常是不可交换的。事实上，我们有：$A+A'=A'+A$（脊椎动物＋无脊椎动物＝无脊椎动物＋脊椎动物）。相反，差异 $\xrightarrow{a}$ 和 $\xrightarrow{b}$ 假设了一种顺序：例如，我们在知道 A 被包括在 O 和 B 之间（$O\xrightarrow{a}A$）以前无法说两个项 A 和 B 之间的差异（$\xrightarrow{b}$）。正常情况下，加法 $\xrightarrow{a}+\xrightarrow{b}$ 是不可交换的，其实在开头加上 $\xrightarrow{a}$ 或 $\xrightarrow{b}$ 都是没有差别的。这种合理的非交换性是通过群集Ⅰ之间的一种主要差异来说明的：我们不再言说初级类别，而是言说整个类别的加法群集（$A+A'=B$，$B+B'=C$，等等）和群集Ⅴ（$\xrightarrow{a}+\xrightarrow{a'}=\xrightarrow{b}$，等等），这是第二个群集替代的缺失。

替代的缺失　事实上，在群集Ⅰ中，次级类别 A' 一般包含（如果它不为空）一个或多个初级类别 A_2、A_3、等等。所以从理论上可以提出：$A_2=A'-A_3$（$A+A'$，群集Ⅱ：“种 A_2＝属 B 的其他种－种 A_3＝除 A 之外 B 的其他种”）。相反存在于 A 和 B 之间的次级关系 $\xrightarrow{a'}$，B 和 C' 之间的 $\xrightarrow{b'}$ 等，不包括低于它们的初级类别（$\xrightarrow{a}$ 对于 $\xrightarrow{a'}$、$\xrightarrow{b}$ 和 $\xrightarrow{b'}$ 对于 $\xrightarrow{c'}$，等等）。换言之，可以把一系列不对称关系细分成想要的段落，总是能得到“连续的”段落以构成同样完整的系列（这就是为什么序列加法一般是不可交换的）；相反，在任意的分类中，我们可以把类别按意愿分解为“无序的”基础类别（它们在同一等级）并建构同样多的不同嵌套。

总之，一系列的关联不对称关系构成了一条线型序列，及时继续拆分也不能产生改变；相反，分类（classification）是一种等级或是一座金字塔，我们可以通过各种途径到达顶峰或是基底。群集Ⅰ显然不能得出这些不同的途径，在这方面它与群集Ⅱ是同构的：

但事实上，在符合二级关系的一级项 A'，B'，C' 下凝聚了一个可分解类的集合，像群集Ⅱ和Ⅲ所体现的那样。

枚举与序列化　当群集Ⅰ被还原为一个简单的枚举，且其中的基础类别仍为单称，那么它会不会变成Ⅴ型的一种序列化呢？这是不会的，因为在改变枚举顺序的同时，我们得到了同样的整体类别（准确地说是替代的表达），而在改变序列中项的顺序的同时，我们也改变了整个序列和组合关系。

不可能将类别的简单加法（Ⅰ）和不对称关系的简单加法（Ⅴ）联合在同一个群集中　前面的对比证明了无法将群集Ⅰ和Ⅴ融合在同一个群集中。这至少在涉及通过彼此没有联系的属性来定义的“弱结构化”类别（定义 11）时是除外的。相反我们思考一下，如果在“半结构化”类别（定义 12）中这是可行的，也就是类别中的个体项是根据传递不对称关系的唯一序列化进行的排序（因此类别构成了这些关系的“场”）。在这种情况下，就有：

(45)
$$O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a'} A' \xrightarrow{b'} B' \xrightarrow{c'} C' \xrightarrow{d'} D' \quad e' \cdots\cdots \qquad (\text{群集V})$$
$$\underbrace{O \quad A}_{\text{Cl. } A + A'} \qquad \underbrace{A + A'}_{\text{Cl. } B + B'} \qquad \underbrace{B + B'}_{\text{Cl. } C + C'} \qquad \underbrace{C + C'}_{\text{Cl. } D + D'} \qquad \underbrace{D + D'}_{\text{Cl. } E} \quad \cdots\cdots \qquad (\text{群集I})$$

但是，即使假设每个基础类别（A、A'、B'、…）都是单称的，那么在类别的群集（Ⅰ）和关系的群集（Ⅴ）中总是存在以下的对立：1°序列中任意两个项都被看作是不一样的，因为群集Ⅴ准确来说是要加上或者减去它们的差异：$A \xrightarrow{a'} A'$ 意味着 A'，例如，比 A 更重；2°相反，当相同的两个项作为类别的元素相加，根据群集Ⅰ，它们在它们之间形成的类别中被看作是相等的：$A + A' = B$ 构成了类别 B，后者被定义为“比下一个元素更轻的元素的集合”，所以 A 和 A' 作为 B 是相等的（但不能作为 A）。这就是为何可以写 $A + A' = A\ (= A') + A'\ (= A)$ 而不能写 $\xrightarrow{a} + \xrightarrow{a'} = \xrightarrow{a'} + \xrightarrow{a}$（其中 a 和 a'，a' 和 a 是相等的）；后面这个排列（或者替换）事实上与序列化本身是相反的。

总之，如果为了研究外延和内涵之间的关系（§6）我们可以说有序类别或是“半结构化”类别（定义 12），那么则不存在针对性质有序类别的类别和关系的唯一群集：从运算的角度来看，有序类别是一个混合体，或者我们可以在其上实行群集Ⅴ的运算，这就限制了群集Ⅰ—Ⅲ的运算作用，又或者我们可以进行这些运算，但同时不能考虑属于群集Ⅴ的联系的运算。

相反，显然，如果撇开这些属性，重新将元素 A、A'、B'等当作同质的简单元素（并重新把它们的类别转化为定义 13 下的“结构化”类别），那么我们可以同时把它们区分序列和分类。但在这种情况下，我们不需要再处理简单逻辑的类别：让元素根据所有可能的组合变得既可分序列又可分类的同时，我们把它们组建成算术单元；因此我们把初级

类别转变成了基数($A=1$, $B=2$, $C=3$, 等等)初级不对称关系转变成了序数($\overset{a}{\to}$ = 第一, $\overset{b}{\to}$ = 第二, $\overset{c}{\to}$ = 第三, 等等)。我们将在第四章(§26)中继续对此进行研究。

§19　群集Ⅵ:对称关系的加法

如果两个个体共同表现了一种(或多种)在内涵上定义了的类别的属性,那么它们则都属于这个类别;由于属于同一个类别,那这两个个体是彼此相等的,又或者,由于它们表现了同一个定义这个类别的属性,它们就是同一个个体。然而这个内涵的属性只能是一种关系,因为类别中的不同个体都有这种属性,那么这种关系只能是等价关系,因为这个关系让相连的每个个体都共同属于这个类别。自然还要加上一个事实,属于两个不同类别的个体项之间表现了一种负等价关系,也就是不共有某种特定的属性。对称关系就是如此:它们与不对称关系不同,没有表示有序差异,它们或是表示无差异或者等价,也就是关于类别的共同属于或共同包含关系,或是表示无序差异或负等价,标志着关于这些类别的共同不属于或共同不包含。例如"同胞"是一种集合了同一个国家类别中所有成员的对称关系,而"非同胞"是另一种集合了不同国家类别成员的对称关系;"相等"是一种对称关系,标志着属于同一个价值类别(可能是法律道德平等,或者算数相等,度量相等,等等)而"不相等"或"不同"则是另一种对称关系,标志着不属于同一个类别;"恒等"是一种对称关系,标志着属于同一个单称项,而"非恒等"或"有差异"则是另一种否认这种共同所属的对称关系,等等。然而,甚至这些在对称关系中不是明确提出的谓词也是这样构成的:"人类的"意味着对人的特征的共同所有者,而"有脊椎的"意味着共同携带有脊椎,等等。

假设有类别 A(同一个父亲的儿子),且 x、y 和 z 三者都属于 A,那么存在一种等价的对称、传递和自反关系 $x\overset{a}{\leftrightarrow}y$(如果 $x\overset{a}{\leftrightarrow}y$ 且 $y\overset{a}{\leftrightarrow}z$,还有 $x\overset{a}{\leftrightarrow}x$ 和 $x\overset{a}{\leftrightarrow}z$),这种关系表示共属于这个类别。同样,如果 x、y 和 z 属于同一个类别 B(同一个祖父的孙子)那么存在一种对称、传递和自反关系$\overset{b}{\leftrightarrow}$,表示它们在 B 中的共性;同样会有类别 C(得到$\overset{c}{\leftrightarrow}$),$D$(得到$\overset{d}{\leftrightarrow}$),等等。对于$\overset{0}{\leftrightarrow}$我们给它的意义不是属于空类别(关系不存在),而是恒等(无差异)。$x\overset{0}{\leftrightarrow}x$ 则意味着"x 与其自身是同一个体"。那么关系$\overset{0'}{\leftrightarrow}$、$\overset{a'}{\leftrightarrow}$、$\overset{b'}{\leftrightarrow}$意味着"非恒等"、"非同一个父亲"、"非同一个祖父",等等。那么我们就可以将意义赋予关系了,$\overset{a}{\leftrightarrow}$ = 兄弟,也就是$\overset{a}{\leftrightarrow}$和$\overset{0'}{\leftrightarrow}$(有同一个父亲但不恒等);$\overset{a'}{\leftrightarrow}$ = 嫡亲堂兄弟,也就是$\overset{b}{\leftrightarrow}$和$\overset{a'}{\leftrightarrow}$(有同一个祖父和不同的父亲);$\overset{b'}{\leftrightarrow}$ = 嫡亲堂兄弟姐妹的后代,也就是$\overset{c}{\leftrightarrow}$和$\overset{b'}{\leftrightarrow}$;等等。关系$\overset{a}{\leftrightarrow}$、$\overset{a'}{\leftrightarrow}$、$\overset{b'}{\leftrightarrow}$等表示的就是"非兄弟"、"非堂兄弟"等意义。

需要特别注意的是，表示非恒等或负恒等的关系，比如$\leftrightarrow$，$\overset{0}{\leftrightarrow}$，$\overset{a}{\leftrightarrow}$，$\overset{a'}{\leftrightarrow}$等，不构成关于对应正面关系的负运算。其实，从一方面来说，组合 $x \overset{0}{\leftrightarrow} y + x \overset{-}{\leftrightarrow} y$ 或 $x \overset{a}{\leftrightarrow} y + x \overset{a'}{\leftrightarrow} y$ 等不能得到恒等，对关系领域上的正运算和逆运算的组合也是如此；从另一方面来说，尤其是，这些组合是相矛盾的，它们在逻辑上是不存在的：首先我们不能肯定 x 和 y 表示某种关系（恒等，有同一个父亲，等等），然后为了否定这点，我们可以提出类别 $+A$，然后把它减去$-A$，因此 $A-A=0$。

在这里我们清楚地发现，为什么属于关系运算的可逆性建立在相互性上而不是建立在否定上：因为关系针对的是内涵而不是外延，对同一个关系的肯定和同时的否定没有任何意义。

关系$\leftrightarrow$和$\overset{b}{\leftrightarrow}$只意味着它们连接的项 x 和 y 不处于同一个类别 A，B 等等，但是 x 属于 A 或 B 等等，并有这些类别的特征，而 y 属于互补类别 $A = U - A$ 或 $B = U - B$ 等等，并表示不同的特征。换言之，在关系$\leftrightarrow$，$\overset{b}{\leftrightarrow}$等中，否定针对类别而不针对关系：这些关系只是被扩散到了否定类别，

$$(\bar{A}=A'+B'+C'+\cdots,\quad B=B'+C'+D'+\cdots,\quad \bar{C}=C'+D'+E'+\cdots)$$

和关系$\overset{\cdot}{\leftrightarrow}$、$\overset{b}{\leftrightarrow}$等，那么相关的否定就是一种类别的运算，而这样的类别只是一种等价关系和共同属于的关系，即使应该追溯到总类别 U；同样$\overset{a}{\leftrightarrow}$意味着$\overset{b}{\leftrightarrow}$而不是$\overset{a}{\leftrightarrow}$，同样$\overset{a}{\leftrightarrow}$意味着$\overset{\blacksquare}{\leftrightarrow}$而不是$\overset{\bullet}{\leftrightarrow}$。

那么，我们可以明确使用的术语（同时参考定义 16 的一般性质等价）：

定义 25　我们将"正等价"的关系称作对称、传递和自反关系$\overset{a}{\leftrightarrow}$，$\overset{b}{\leftrightarrow}$等等，表示同时拥有类别 A，B 等的不同特点，还有作为极端的有关单称类别 x 等的恒等$\overset{0}{\leftrightarrow}$。

定义 26　以下对称、非传递和非自反关系将被称为"正相异性"$\overset{\cdot}{\leftrightarrow}$，$\overset{a}{\leftrightarrow}$，$\overset{b}{\leftrightarrow}$等，它们表示共同拥有类别 A（用$\overset{\cdot}{\leftrightarrow}$），$B$（用$\overset{a}{\leftrightarrow}$），$C$（用$\overset{b}{\leftrightarrow}$）等的专有特征，不共同拥有低级序阶中类别的特点：$(x$ 用$\overset{a}{\leftrightarrow}$，$A$ 用$\overset{a}{\leftrightarrow}$，$A$ 和 B 用$\overset{b}{\leftrightarrow}$，$A$、$B$ 和 C 用$\leftrightarrow$，等等。

定义 27　表示不共同拥有相应序阶中类别的不同特点的对称、非传递和非自反关系将被称为"负等价"$\leftrightarrow$，$\leftrightarrow$，$\overset{b}{\leftrightarrow}$等：$x$ 用$\leftrightarrow$，A 用$\overset{a}{\leftrightarrow}$，等等。否认对应相异性的对称、非传递和非自反关系将被称为"负相异性"$\leftrightarrow$，$\overset{a}{\leftrightarrow}$，$\overset{b}{\leftrightarrow}$等（例如 $x \overset{a}{\leftrightarrow} y$："$x$ 不是 y 的嫡亲堂兄弟"和 $x \overset{\bullet}{\leftrightarrow} x$："$x$ 不是它自己的嫡亲堂兄弟"）。

注意　除了个体之间的关系，我们还可以区分类别之间的关系：这些关系表示同样的形式。例如关系 $A \overset{B}{\leftrightarrow} A'$，$B \overset{\cdot}{\leftrightarrow} B'$，等等，将被称为类别之间的"正等价"并表示 A 和 A' 在 B 之下，诸如此类的等价。

定义 28 我们说"两个对称关系的加法结果"是指，在三个项 x、y 和 z 之间，通过 x 和 y 之间及 y 和 z 之间既有对称关系而确定的(determinee) x 和 z 之间最弱序阶(le rang le plus faible)的对称关系：即 $(x \leftrightarrow y) + (y \leftrightarrow z) = (x \leftrightarrow z)$

当关系彼此兼容(不相互矛盾)的时候，我们也可以把两个相同项之间的已知关系相加：$(x \leftrightarrow y) + (x \leftrightarrow y)$；并且在这个限度内，我们也可以把自反关系相加 $(x \leftrightarrow x) + (x \leftrightarrow x)$。

这些加法运算(28)可以刻画"群集"的特点。但是由于重言式和吸收式起到的重要作用和所对应的次级类别和替代的相异性，这种群集的形式非常特殊。于是，我们最好仔细分析其中机制，因为这个机制对有强度特点的集合结构还有一般逻辑"群集"的本质来说是很有意义的。

事实上，等价关系表示共同拥有同一个类别的特点，所有的正等价组合都会是对应的类别组合的重言式 $A + A = A$：$(x \overset{a}{\leftrightarrow} y) + (y \overset{a}{\leftrightarrow} z) = (x \overset{a}{\leftrightarrow} z)$（如果 x 是 y 的同胞且 y 是 z 的同胞，那么 x 也是 z 的同胞）。因此，不可能仅通过正等价的组合就从低级序阶的关系 $\overset{a}{\leftrightarrow}$ 提升到更高级序阶的关系 $\overset{b}{\leftrightarrow}$、$\overset{c}{\leftrightarrow}$ 等等，尽管如果两个个体之间维持有关系 $\overset{a}{\leftrightarrow}$（例如同胞），那么它们自然也被关系 $\overset{b}{\leftrightarrow}$（例如属于同一大陆）、$\overset{c}{\leftrightarrow}$ 等连接。现在，假如我们用正相异组成一个正等价，$(x \overset{a}{\leftrightarrow} y) + (y \overset{a'}{\leftrightarrow} z)$，例如"$x$ 与 y 的父亲相同且 y 是 z 的嫡亲堂兄弟"，那么我们不再能得到关系 $\overset{a}{\leftrightarrow}$（因为，根据定义 28，对称关系的加法和类别加法一样，决定了最弱序阶的关系）：我们发现了关系 $\overset{a'}{\leftrightarrow}$，也就是说 x 也是 y 的嫡亲堂兄弟。那么就重新有了重言式，或者至少是吸收式 $a + a' = a'$。这是因为，假设 x 和 y 属于同一个类别 A 且 z 属于类别 A'（就是属于同一个类别 B，但不属于同一个类别 A），那么相对于 z 来说，x 和 y 就属于类别 $A(=A')$；那么，组合

$$\overset{a}{\leftrightarrow} + \overset{a'}{\leftrightarrow} = \overset{a'}{\leftrightarrow}$$

用类别的术语，将对应吸收式 $A + A' = A'$（见图 11）。从低级序阶关系出发，唯一的一种到达关系 $\overset{b}{\leftrightarrow}$、$\overset{c}{\leftrightarrow}$ 等的方式就是把正相异相加：$x \overset{a'}{\leftrightarrow} y + y \overset{a'}{\leftrightarrow} z = x \overset{b}{\leftrightarrow} z$：如果 x 是 y 的嫡亲堂兄弟且 y 是 z 的嫡亲堂兄弟，那么唯一可能的结论就是 x 和 z 有同一个祖父（那么

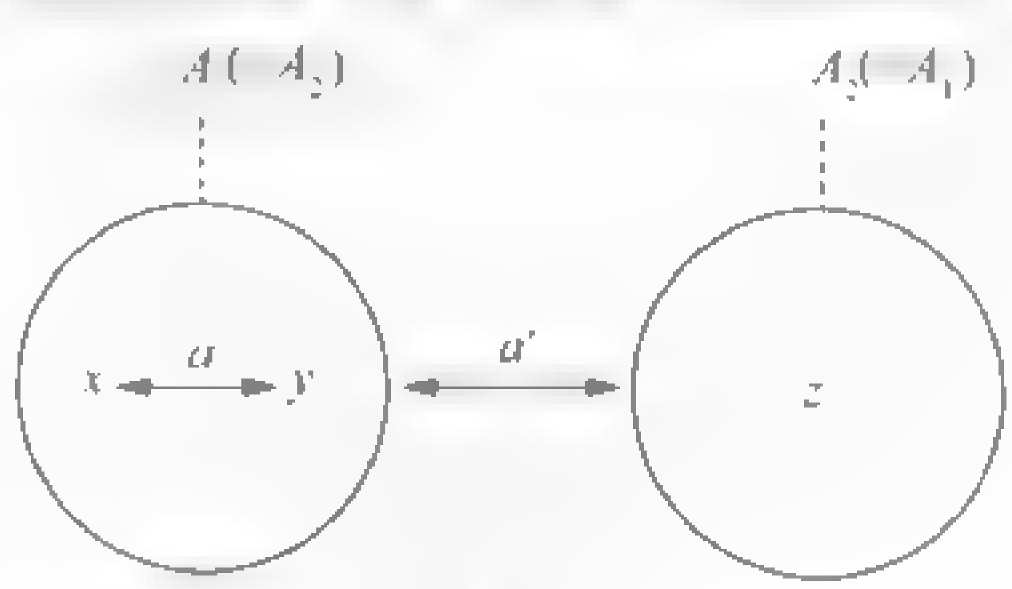


图 11

就可能是他的嫡亲堂兄弟或是兄弟，又或者与 z 本身混同起来了)。这是因为(假设 x 属于类别 A_1)，相对于 x 来说 y 属于类别 A_1'(A_1' 包括 A_1 且 y 属于后者)并且相对于 y (A_1 的元素)来说 z 属于 A_1'；因此 $A_1' + A_1' = B$(见第 1224 页图 14)。同样将得到：

$$\overset{b'}{\leftrightarrow} + \overset{b'}{\leftrightarrow} = \overset{c}{\leftrightarrow}, \quad \overset{c'}{\leftrightarrow} + \overset{c'}{\leftrightarrow} = \overset{d}{\leftrightarrow}, \text{等等。}$$

相反，从高阶正等价重新降到低阶正等价的唯一方式是把前者和一个负等价组合起来，并且这要在两个关系都组合了同样的项 x 和 y 的情况下进行。例如

$$(x \overset{b}{\leftrightarrow} y) + (x \overset{\bar{a}}{\leftrightarrow} y) = (x \overset{a'}{\leftrightarrow} y)$$

就是说“如果 x 和 y 有同一个祖父且他们的父亲不同，那么他们就是嫡亲堂兄弟”；同样：

$$(x \overset{c}{\leftrightarrow} y) + (x \overset{\bar{b}}{\leftrightarrow} y) = (x \overset{b'}{\leftrightarrow} y), \text{等等。}$$

相反，如果在三个项之间组成相同的关系，那么就得到了吸收式：例如 $x \overset{b}{\leftrightarrow} y + y \overset{a}{\leftrightarrow} z$ (假设 x 和 y 有同一个祖父且 y 和 z 不是兄弟)，唯一关于 x 与 z 之间关系的结论就是，它们属于体系 U 最一般的类别，即：$x \overset{\bullet}{\leftrightarrow} z$。

那么，我们再次显然看出，运算 $-\overset{a}{\leftrightarrow}$ 不是 $+\overset{a}{\leftrightarrow}$ 的反面，也就不能构成群集的反面。通常来说，从低级序阶等价到高级序阶等价的过渡，或是朝反方向的过渡都不构成群集的顺运算和逆运算，而是其他(集合结构)中的顺运算。于是，群集的顺运算由加法组成，比起类别的简单加法和减法，它们更符合类别群集的重言式、吸收式和替代。至于逆运算，就是运用于相反关系的同样的加法。这就是群集Ⅵ的特点，不同于其他群集但对于理解群集Ⅰ至Ⅷ集合的结构来说又是必不可少的：

1. 顺运算是在项 x、y 和 z(或者 x 和 y)组成的顺序中任意对称关系的加法(正等价或负等价和正相异或负相异)：

(46) $$(x \overset{\bullet}{\leftrightarrow} y) + (y \overset{\bullet}{\leftrightarrow} z) = (x \overset{\bullet}{\leftrightarrow} z)$$

2. 逆运算是逆向的加法，就是同一个对称关系 $x \leftrightarrow y$ 中顺序变成 $y \leftrightarrow x$ 的加法。

我们也可以把这种反面写成：$-(x \leftrightarrow y)$：

(47) $$-(x \overset{\bullet}{\leftrightarrow} y) = +(y \overset{\bullet}{\leftrightarrow} x)$$

3. 一般恒等，顺运算和逆运算的结果以及让所有其他运算不变的运算，是同一性 $(x \overset{\bullet}{\leftrightarrow} x)$：

(48) $$(x \overset{\bullet}{\leftrightarrow} y) + (y \overset{\bullet}{\leftrightarrow} x) = (x \overset{\bullet}{\leftrightarrow} x)$$

和

(48 乙) $$(x \overset{\bullet}{\leftrightarrow} x) + (x \overset{\bullet}{\leftrightarrow} y) = (x \overset{\bullet}{\leftrightarrow} y)$$

4. 特殊恒等是重言式和吸收式：

(49) $$(x \overset{a}{\leftrightarrow} y)+(x \overset{a}{\leftrightarrow} y)=(x \overset{a}{\leftrightarrow} y)$$

和

(49 乙) $$(x \overset{a}{\leftrightarrow} y)+(x \overset{b}{\leftrightarrow} y)=(x \overset{b}{\leftrightarrow} y)$$

5. 至于结合性，它是一般性的，因为顺运算和逆运算之间是恒等的。

那么主要组合就是：

1. 两个正等价的产物是包含它们两者的正等价中最弱的关系：

(50) $$(x \overset{a}{\leftrightarrow} y)+(y \overset{a}{\leftrightarrow} z)=(x \overset{a}{\leftrightarrow} z)$$

$$(x \overset{a}{\leftrightarrow} y)+(y \overset{b}{\leftrightarrow} z)=(x \overset{b}{\leftrightarrow} z)$$

$$(x \overset{c}{\leftrightarrow} y)+(y \overset{b}{\leftrightarrow} z)=(x \leftrightarrow z)\text{，等等。}$$

事实上，假设 x 和 y 属于同一个类别（A 或 D，等等）且 y 和 z 属于另一个类别（B 或 F），那么 x 和 z 之间的等价关系就是由它们共同属于组合类别（$A+B$）或（$D+F$）等的性质所决定的。在加法嵌套的情况下，就有吸收式 $A+B=B$ 或 $D+F=F$，也就是说两个正等价的产物就仅仅只是高级序阶的正等价（命题(51)）。

但是还有一种情况，等价表示属于乘法类别。"巴黎人（x）是佩平尼昂居民（y）的同胞（$\overset{a_1}{\leftrightarrow}$）"，"佩平尼昂的居民（$y$）和巴塞罗那的居民（$z$）一样讲加泰罗尼亚语（$\overset{a_2}{\leftrightarrow}$）"，巴黎人和巴塞罗那人之间的关系是什么呢？那么等价关系 $x \leftrightarrow z$ 就是包含 $\overset{a_1}{\leftrightarrow}$ 和 $\overset{a_2}{\leftrightarrow}$ 的等价中最弱的关系，也就是：

(51) $$(x \overset{a_1}{\leftrightarrow} y)+(y \overset{a_2}{\leftrightarrow} z)=(x \overset{b_1b_2}{\leftrightarrow} z)$$

其实，符合 $x \overset{a_1}{\leftrightarrow} y$ 的类别 A_1 是法国人的类别（说或不说加泰罗尼亚语），而符合 $\overset{a_2}{\leftrightarrow}$ 的类别 A_2 是加泰罗尼亚人的类别（法国人或非法国人）。因此有四种可能（根据群集Ⅳ）：A_1A_2（＝加泰罗尼亚法国人）；A_1A_2'（＝非加泰罗尼亚法国人）；$A_1'A_2$（＝加泰罗尼亚非法国人）；$A_1'A_2'$（＝非加泰罗尼亚非法国人）。那么总类别是 B_1B_2，等价 $x \leftrightarrow z$ 就是 $x \overset{b_1b_2}{\leftrightarrow} z$。

2. 一个正等价和一个正相异的产物是这两者中属于高级序阶的关系：

(52) $$(x \overset{a}{\leftrightarrow} y)+(y \overset{a}{\leftrightarrow} z)=(x \overset{a}{\leftrightarrow} z)$$

$$(x \overset{a}{\leftrightarrow} y)+(y \overset{b'}{\leftrightarrow} z)=(x \overset{b}{\leftrightarrow} z)$$

和

$$(x \overset{b}{\leftrightarrow} y)+(y \overset{a'}{\leftrightarrow} z)=(x \overset{b}{\leftrightarrow} z)$$

$$(x \overset{c}{\leftrightarrow} y)+(y \overset{a}{\leftrightarrow} z)=(x \overset{c}{\leftrightarrow} z)\text{，等等。}$$

例如，如果 x 和 y 是同一个祖父的孙子($\overset{b}{\leftrightarrow}$)且 y 是 z 的父系嫡亲堂兄弟(即 $\overset{b'}{\leftrightarrow}$)，那么 x 和 z 是同一个祖父的孙子($\overset{b}{\leftrightarrow}$)。

其实，等价关系表示，三个项中的两个属于一个集合类别 X(因而有关系 $\overset{r}{\leftrightarrow}$)。假如两者之一与属于不包含于 X 的类别 Y 的第三个项(图 12)是相异关系($\overset{r'}{\leftrightarrow}$)，那么另一个项与第三个项也是相异关系；因此有 $r+r'=r'$，因为这种情况下 $r\subset r'$。相反，假设类别 Y 包含于 X(图 13)，那么 x、y 和 z 三者都包含于 X 且有 $r'\subset r$，因此 $r+r'=r$

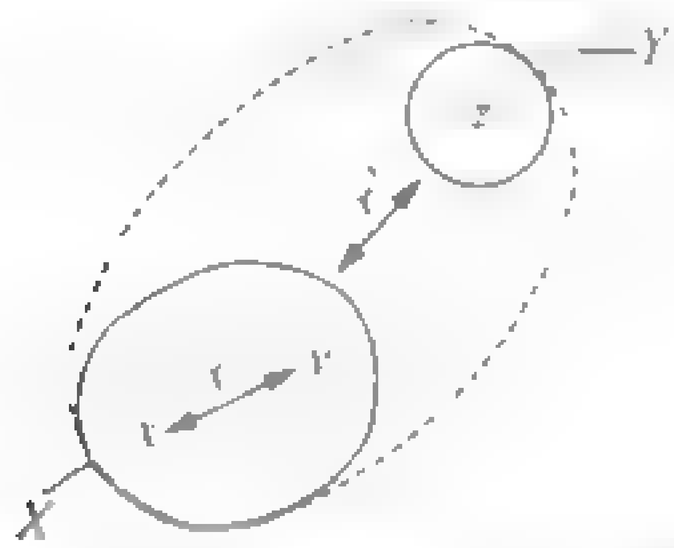


图 12　类别 X 包含项 x 和 y，而类别 Y，与 X 不相交，包含项 z。

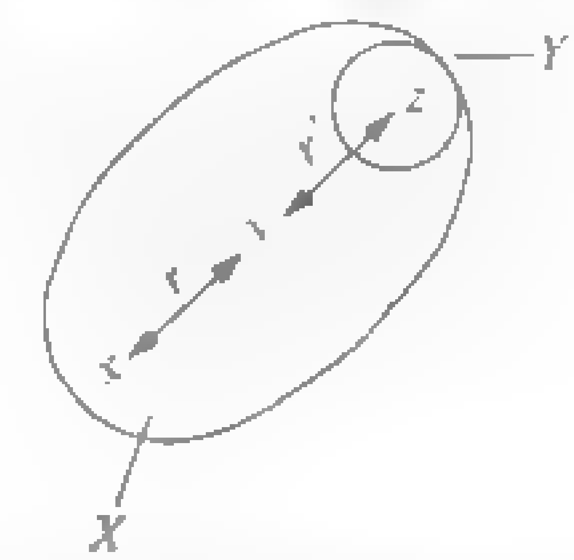


图 13　类别 X 包含项 x 和 y，而类别 Y，包含于 X，包含项 z。

3. 三个项之间两个不同序阶的非相异的产物，是高级序阶的非相异：

$$(x\overset{a}{\leftrightarrow}y)+(y\overset{a'}{\leftrightarrow}z)=(x\overset{a'}{\leftrightarrow}z)\tag{53}$$

和

$$(x\overset{a'}{\leftrightarrow}y)+(y\overset{b'}{\leftrightarrow}z)=(x\overset{b'}{\leftrightarrow}z)$$

$$(x\overset{a}{\leftrightarrow}y)+(y\overset{b'}{\leftrightarrow}z)=(x\overset{b'}{\leftrightarrow}z)\text{，等等。}$$

例如，假设 x 是 y 兄弟且 y 是 z 的嫡亲堂兄弟，那么 x 是 z 的嫡亲堂兄弟。

其实，当两个相异属于不同序阶时，通过低级序阶的相异(例如兄弟 $\overset{a}{\leftrightarrow}$)连接的两个项从临近高级类别的角度来说(例如 $\overset{a}{\leftrightarrow}$ ＝同一个父亲的儿子)必然是相等的。如果这两个项中的一个与第三个项是通过更高阶的相异性连接的(如 b' ＝嫡亲堂兄弟)，那么根据同属于一个类别的性质来看，另一个类别也是如此。

4. 当两个相异属于同一序阶，它们的产物是临近高级序阶的等价：

$$(x\overset{\bullet}{\leftrightarrow}y)+(y\overset{\bullet}{\leftrightarrow}z)=(x\overset{\bullet}{\leftrightarrow}z)\tag{54}$$

$$(x\overset{a'}{\leftrightarrow}y)+(y\overset{a'}{\leftrightarrow}z)=(x\overset{b}{\leftrightarrow}z)\text{，等等。}$$

例如，假设 x 是 y 的父系嫡亲堂兄弟且 y 是 z 的父系嫡亲堂兄弟，那么 x 和 z 是属于同一个祖父，也就是嫡亲堂兄弟、兄弟或本人。

其实，这些同一序阶相异性的组合不再像前面的对称那样建立于对应类别的重言化或是吸收化上，而是建立在这些类别的替代之上，即：

$$\overset{a'}{\leftrightarrow}+\overset{a'}{\leftrightarrow}\quad\overset{b}{\leftrightarrow}$$

这些相异性中的第一个(x 是 y 的父系嫡亲堂兄弟)建构了类别 A(x 和其兄弟)和类别 A'(他的嫡亲堂兄弟，其中有 y)之间的关系；相反，这些相异性中的第二个(y 是 z 的父系嫡亲堂兄弟)构成了 A(y 和其兄弟)和 A'(他的嫡亲堂兄弟，其中有 x)之间的关系。然而，因为 $A'_1+A'_2$　B，$\overset{a'}{\leftrightarrow}+\overset{a'}{\leftrightarrow}$的产物就只能是$\overset{b}{\leftrightarrow}$，因为属于类别 A' 的个体 z 可能是一个 A_1 的个体或 A'_2 非 A_1 的个体(见图 14)。

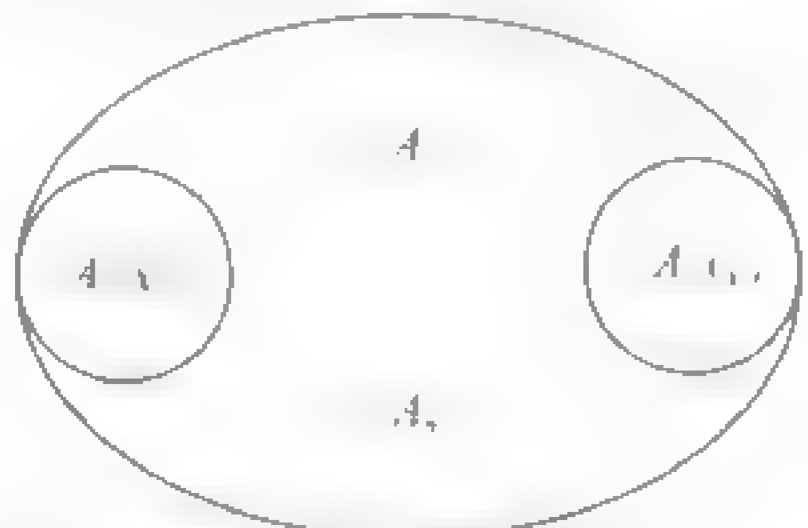


图 14　A_1 是 A'_2 的一部分且 A_2 是 A'_1 的一部分

5. x 和 y 之间正等价($\overset{b}{\leftrightarrow}$)与两个相同项 x 和 y 之间的低级序阶的等价或相异($\overset{\bar{a}}{\leftrightarrow}$)的组合，得到了一种关系，以等价或相异的形式，表示了对应类别的减法，S($A\cdots R'$)：

$$(55)\qquad (x\overset{b}{\leftrightarrow}y)+(x\overset{\bar{a}}{\leftrightarrow}y)=(x\overset{a'}{\leftrightarrow}y)$$

和

$$(x\overset{b}{\leftrightarrow}y)+(x\overset{\bar{a}'}{\leftrightarrow}y)\quad(x\overset{a}{\leftrightarrow}y)$$

例如，假设 x 和 y 有同一个祖父且 x 不是 y 的兄弟，那么他是他的嫡亲堂兄且反之亦然($B-A=A'$ 且 $B-A'=A$)。

当正等价和负关系不属于相邻序阶时，继续组合就没有太大意义了：例如，假设 x 和 y 有同一个曾祖父且他们不是兄弟，他们可能在第一级和第二级序阶上是堂兄弟，并且可以有或没有同一个祖父。

6. x 和 y 之间的正等价组合，与 y 和 z 之间同一序阶或高级序阶的负等价或负相异的组合，可以得到 x 和 z 之间的相同负等价或负相异：

$$(56)\qquad (x\overset{a}{\leftrightarrow}y)+(y\overset{\bar{a}}{\leftrightarrow}z)=(x\overset{\bar{a}}{\leftrightarrow}z),\quad (x\overset{a}{\leftrightarrow}y)+(y\overset{\bar{b}}{\leftrightarrow}z)=(x\overset{\bar{b}}{\leftrightarrow}z)$$

$$(x\overset{a}{\leftrightarrow}y)+(y\overset{\bar{a}'}{\leftrightarrow}z)=(x\overset{\bar{a}'}{\leftrightarrow}z),\quad (x\overset{a}{\leftrightarrow}y)+(y\overset{\bar{b}'}{\leftrightarrow}z)=(x\overset{\bar{b}'}{\leftrightarrow}z)$$

例如，假设 x 是 y 的兄弟且 y 不是 z 的兄弟(或堂兄弟，等等)，那么 x 也不是 z 的兄弟(或堂兄弟，等等)。

7 和 8. 最后 x 和 y 之间的正等价与 y 和 z 之间低级序阶负等价或负相异的组合，或 x、y 和 z 之间的两个负等价或负相异的组合，得到的是对应体系中最一般性的等价(即对应于类别 U 的$\overset{u}{\leftrightarrow}$)：

(57) $$(x \overset{b}{\leftrightarrow} y)+(y \overset{a}{\leftrightarrow} z)=(x \overset{u}{\leftrightarrow} z)$$

和

(57 乙) $$(x \overset{u}{\leftrightarrow} y)+(y \overset{u}{\leftrightarrow} z)=(x \overset{u}{\leftrightarrow} z)$$

和

$$(x \overset{a'}{\leftrightarrow} y)+(y \overset{b}{\leftrightarrow} z)=(x \overset{u}{\leftrightarrow} z)$$

其实，假设x和y共同属于一个任意类别X且y和z不属于同一个包含于X内的类别Y（假设x和y由同一个祖父且y和z不是兄弟），那么x和z可能属于同一个类别Y或者属于一直到U的高级序阶中的任意其他类别，x和z可能是兄弟或者任意其他关系，一直到共同的祖先只有亚当或者第一只原生动物，根据U的定义而定）。同样的，如果x和y不属于同一个类别X且y和z不属于同一个类别Y（类别X和Y之间没有任何关系），我们只能从中得出一个结论：x和z属于体系中最大的类别，也就是U（因此有$\overset{u}{\leftrightarrow}$）。

§ 20 群集Ⅶ：关系的同单义乘法

把一种关系与另一种相乘意味着把第一种关系中的项（所有或几个）转移给第二种关系（同样的，把两个类别相乘就是把第一个类别中的所有项或任意几个项囊括到第二个类别中）。然而在关系之间有且只有两种乘法：双单义乘法或共单义乘法。

确实，我们可以构想出三种乘法，对称关系之间的乘法，不对称关系之间的乘法，和对称关系与不对称关系同时的乘法。但是不能把对称关系与其自身相乘：如果相对于其他个体来说，一个个体可以同时是兄弟、堂兄弟等等，那么他就是同一个父亲的儿子，等等，且他属于被嵌套类别的同一体系；然而儿子、孙子等关系或是类别之间的包含关系都是不对称关系，应该要通过他们的中介把不对称关系插入乘法体系中。相反，我们可以把不对称关系彼此相乘，然后用关系的术语来阐释双向表格（或三向表格等等）（见群集Ⅳ），而这些表中的包含关系已经单独构成了不对称关系；但是相反的，这些表格中的双单义对由对称关系组成，这就让这一体系有了混合特征。至于不对称关系和对称关系之间的乘法，可能有两种。它们可以是双单义的，就像我们在前文中所见，并将在§21中详细探讨的那样。但是也可能存在同单义乘法，我们现在先来谈论后者。

根据罗素阐述的一条关系逻辑的著名定理，不对称关系与其反面相乘会得到一种对称传递关系。例如，关系"x是z的儿子"乘以"z是y的父亲"得到"x和y有同一个父亲"（x也就是y的兄弟或y本身）：即$(x \uparrow z)\times(z \downarrow y)=(x \leftrightarrow y)$。相反，可以把所有对称传递关系看作两个不对称关系的产物。其实，一种不对称关系和关系的逻辑可以得到一定数量的定义，其中有以下四条：

关系的反面也是关系，记作 r^{-1}，如：

$$r^{-1}yx \leftrightarrow rxy$$

关系 r 通过关系 s 的产物也是一种关系，记作 $r \mid s$，如：

$$(r \mid s)xy \leftrightarrow (\exists z)(rxz.\, szy)$$

关系 r 为一对多，如果

$$(x)(y)(z)(rxz.\, ryz.\, \supset x=y)$$

关系 r 为多对一，如果

$$(x)(y)(z)(rzx.\, rzy.\, \supset x=y)$$

于是我们证明了，如果 r 是或不是任意对称关系，关系 $r \mid r^{-1}$ 和 $r^{-1} \mid r$ 都是对称的。此外，如果 r 是一对多的关系，那么关系 $r \mid r^{-1}$ 是传递的，如果 r 是多对一的关系，那么关系 $r^{-1} \mid r$ 是传递的。如此，因为同时对称且传递的任意关系都是自反的，那么关系 $r \mid r^{-1}$ 和 $r^{-1} \mid r$ 为等价关系。

定义 29　我们将所有把同一个项与多个项结合起来的不对称关系称为"同单义"关系。

我们用 $\downarrow$ 标记同单义关系，用 $\uparrow$ 标记其相反关系。例如把一个类别 A 嵌套到其子类的关系是同单义的，可以记作：

(58)
$$(x \uparrow A) \times (A \downarrow y) = (x \overset{a}{\leftrightarrow} y)①$$

定义 30　以下运算被称为"关系的同单义乘法"，它从 x、y 之间和 y、z 之间的已知同形关系出发，决定了两个项 x 和 z 之间的同单义关系和间接序阶的对称关系：即

$$(x \overset{a}{\downarrow}\leftrightarrow y) \times (y \overset{a}{\downarrow}\overset{a'}{\leftrightarrow} z) = (x \overset{b}{\downarrow}\leftrightarrow z)$$

例如，x 是 y 的兄弟（$\leftrightarrow$）的父亲 $\overset{a}{\downarrow}$，y 是 z 的父系嫡亲堂兄弟（$\overset{a'}{\leftrightarrow}$）的父亲（$\overset{a}{\downarrow}$），那么 x 是 z 的祖父（$\overset{b}{\downarrow}\overset{b'}{\leftrightarrow}$）。

这些运算构建了一个乘法群集，与类别的同单义群集（Ⅲ）是同构的。我们可以用一个家族构成来作为例子，来说明一个谱系树的构成中的世系关系，但是我们只考虑父子关系而不考虑源自合并的无数组合（因为有许多同单义体系的干扰，这又另外重新形成了同单义体系）。

首先是一系列相关的不对称关系：

$x \overset{a}{\downarrow} y = x$ 是 y 的父亲	$x \overset{a'}{\downarrow} y = \overset{b}{\downarrow} - \overset{a}{\downarrow} y = x$ 是 y 的父亲
$x \overset{b}{\downarrow} y = x$ 是 y 的祖父	$x \overset{b'}{\downarrow} y = \overset{c}{\downarrow} - \overset{b}{\downarrow} y = x$ 是 y 的父亲
$x \overset{c}{\downarrow} y = x$ 是 y 的曾祖父	等等
等等	

① 这种表达意味着 $(\exists A)(x \uparrow A \cdot A \downarrow y)$，又或者 $(\exists A)(r\ xA \cdot rAy)$ 是 A 的特有属性 a 下的一种等价关系。

为了简便，我们统一用 $\downarrow^{a}$ 表示关系"父亲"，等等（见图 15）。

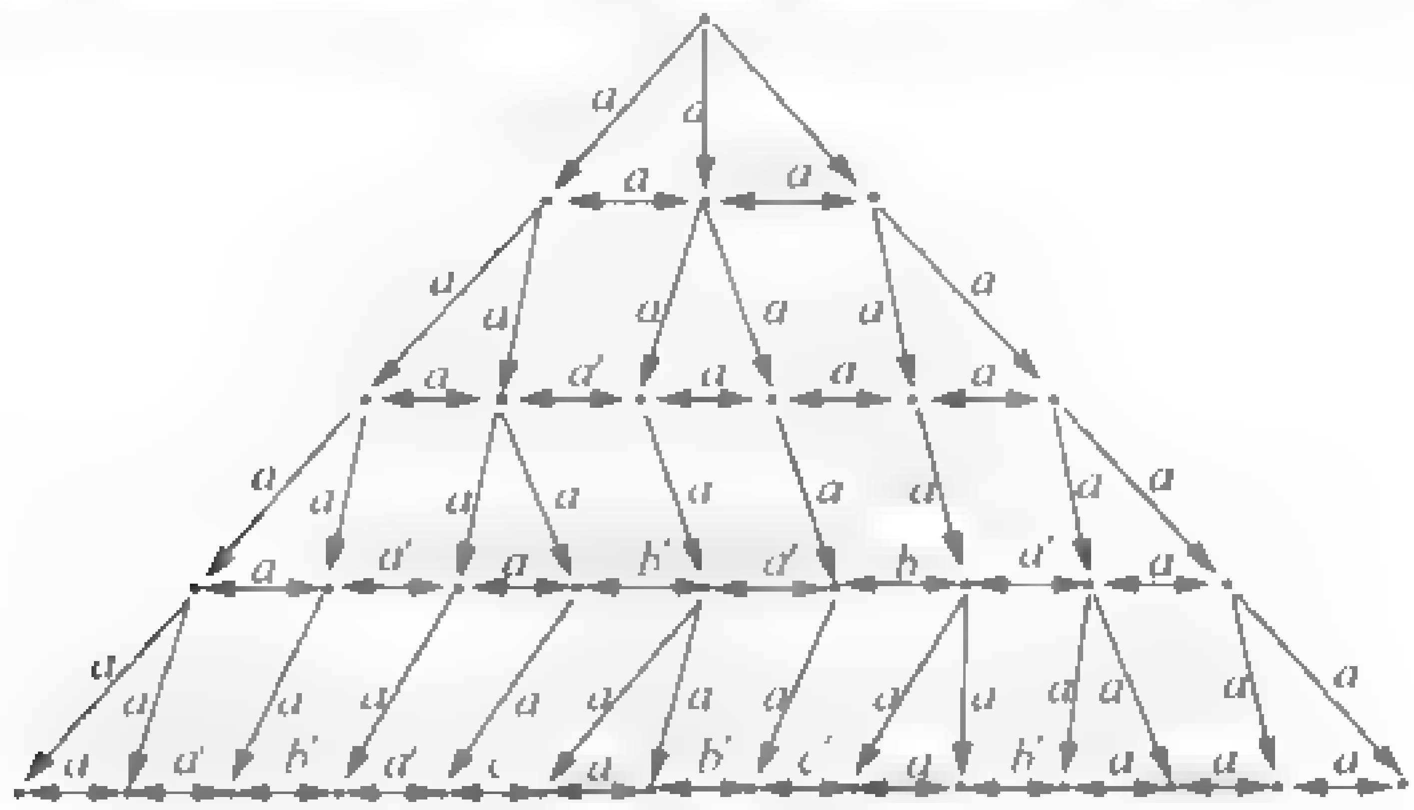


图 15

$x \uparrow^{a} y = x$ 是 y 的儿子　　　　$x \uparrow^{a} y = \uparrow^{a} - \uparrow^{a} y = x$ 是 y 的儿子

$x \uparrow^{b} y = x$ 是 y 的孙子　　　　$x \uparrow^{b} y = \uparrow^{b} - \uparrow^{b} y = x$ 是 y 的孙子

等等

我们统一用 $\uparrow^{a}$ 表示关系"儿子"，等等。

这些关系之间可以通过简单加法相互组合：

$$(x \downarrow^{a} y) + (y \downarrow^{a} z) = (x \downarrow^{b} z)$$

如果 x 是 y 的父亲且 y 是 z 的父亲，那么 x 是 z 的祖父。

通常来说，如果 $\downarrow^{g}$ 是序阶 a、b、c 等的任意关系，且 $\downarrow^{g'}$ 也是序阶 a、b、c 等的另一种任意关系，那么我们记作：

(59) $$(x \downarrow^{g} y) + (y \downarrow^{g'} z) = (x \downarrow^{g+g'} z)$$

和

(59 乙) $$(x \downarrow^{g} y) + (y \uparrow^{g'} z) = (x \downarrow^{g-g'} z)$$

当 $g' > g$ 时，例如（$g' = \uparrow^{b}$ 和 $g = \downarrow^{a}$），显然其结果会有方向 $\uparrow$，即：$\downarrow^{a} + \uparrow^{b} = \uparrow^{a}$。

至于对称关系，它们会构成结果：

(60) $$(z \downarrow^{g}_{g} x) \times (y \downarrow^{g}_{g} z) = (x \overset{g=m}{\leftrightarrow} y) \quad 其中\ m = g$$

这样就得到了被群集Ⅵ认可的关系：

$(z \downarrow^{a} x) \times (y \uparrow^{a} z) = (x \overset{a}{\leftrightarrow} y) = x$ 和 y 是同一个父亲的儿子

$(z \downarrow^{b} x) \times (y \uparrow^{b} z) = (x \overset{b}{\leftrightarrow} y) = x$ 和 y 是同一个祖父的孙子

$(z \downarrow^{c} x) \times (x \uparrow^{c} z) = (x \overset{c}{\leftrightarrow} y) = x$ 是曾孙子，等等

等等

在应用群集Ⅵ的规则时，就有（假设 m 和 m' 是两个初级对称关系和次级对称关

系)①：

(61) $$(x \overset{m}{\leftrightarrow} y)+(y \overset{m}{\leftrightarrow} z)=\begin{cases}(x \overset{m}{\leftrightarrow} z) & \text{如果 } m>m' \\ (x \overset{m'}{\leftrightarrow} z) & \text{如果 } m'>m\end{cases}$$

和

(61 乙) $$(x \overset{m}{\leftrightarrow} y)+(y \overset{m'}{\leftrightarrow} z)=\begin{cases}(x \overset{m}{\leftrightarrow} z) & \text{如果 } m=m'\text{且两者都为初级} \\ (x \overset{m!}{\leftrightarrow} z) & \text{如果 } m=m'\text{且两者都为次级}\end{cases}$$

在后一种情况下，关系 $m!$ 意味着高于 $m'(\leftrightarrow - \leftrightarrow\ b)$ 的第一个初级关系：见命题(54)。

现在把不对称关系和对称关系相加，我们得到：

$x \overset{a'}{\leftrightarrow} \downarrow^{a} y = x$ 是 y 父亲的兄弟，也就是 y 的叔叔。

$x \overset{b'}{\leftrightarrow} \downarrow^{a} y = x$ 是 y 父亲的嫡亲堂兄弟。

$x \overset{c'}{\leftrightarrow} \downarrow^{a} y = x$ 是 y 父亲的第二亲等堂兄弟。

等等

$x \overset{a'}{\leftrightarrow} \downarrow^{b} y = x$ 是 y 祖父的兄弟，就是 y 的伯祖父。

等等

$x \downarrow^{a} \overset{b'}{\leftrightarrow} y = x$ 是 y 嫡亲堂兄弟的父亲。

$x \downarrow^{b} \overset{b'}{\leftrightarrow} y = x$ 是 y 嫡亲堂兄弟的祖父。

等等

$x \uparrow^{a} \overset{a'}{\leftrightarrow} y = x$ 是 y 兄弟的儿子，就是 y 的侄子。

$x \uparrow^{a} \overset{b'}{\leftrightarrow} y = x$ 是 y 嫡亲堂兄弟的儿子。

等等

$x \overset{a}{\leftrightarrow} \uparrow^{a} y = x$ 是 y 儿子的嫡亲堂兄弟。

等等

那么这些因为形成规则(59)至(61)而产生的关系，会产生以下组合。首先应该注意，这个群集中的相关乘法不是可交换的，也就是说 $\overset{m}{\leftrightarrow} \downarrow^{a}$ 不等于 $\downarrow^{a} \overset{m}{\leftrightarrow}$：“$x$ 是 y 父亲的兄弟”(y 的叔叔)不等同于“x 是 y 兄弟的父亲”(即 x 是 y 的父亲)。那么应该首先考虑以下换位规则：

(62) $$(x \overset{m}{\leftrightarrow} \downarrow^{a} y)=(y \uparrow^{a} \overset{m}{\leftrightarrow} x)$$

① 关系 m 可能是次级的也可能是初级的，且关系 m' 可能初级的也可能是次级的。

例如：x 是 y 父亲的兄弟（也就是他的叔叔）＝y 是 x 兄弟的儿子（也就是他的侄子）。

和（62 乙）
$$(x \downarrow^{n} \overset{m}{\leftrightarrow} y) = (y \overset{m}{\leftrightarrow} \uparrow^{n} x)$$

例如：x 是 y 嫡亲堂兄弟的父亲（也就是他的叔叔）＝y 是 x 儿子的嫡亲堂兄弟（也就是他的侄子）。

然后，群集的构成性乘法，同单义和非双单义，基本的组合规律如下：

（63）
$$(x \overset{m}{\leftrightarrow} \downarrow^{n} y) = (y \downarrow^{n} \overset{mg}{\leftrightarrow} y)$$

或者（根据 62 乙），有：

（63 乙）
$$(x \overset{m}{\leftrightarrow} \downarrow^{n} y) = (y \overset{mg}{\leftrightarrow} \uparrow^{n} x)$$

在公式中，结果 mg 的形成源自由命题决定的以下对应表，以及初级对称关系分解为次级成分的过程（见第 1235 页）。这个同单义的对应表进而构成了群集组合的表达式[1][结合命题（60）和（62）]。

这个表格的解读如下。第一行表示 $\downarrow^{0} \times \uparrow^{0} = \overset{0}{\leftrightarrow}$：从后代（$\downarrow^{0}$ 和 $\uparrow^{0}$）和旁系亲属（$\overset{0}{\leftrightarrow}$）的双重角度来看，其中源自接下来几代的个体 x 与其本身是同一的。第二水平行是

$$\downarrow^{1} \times \uparrow^{1} = \overset{0}{\leftrightarrow},\ \overset{1}{\leftrightarrow} \cdots \overset{1}{\leftrightarrow}$$

表示了第一代的个体之间的可能的旁系关系：同一（$\overset{0}{\leftrightarrow}$），兄弟关系（$\leftrightarrow$）还有“同一个父亲的儿子”的关系（$\overset{1}{\leftrightarrow}$）。第三水平行是

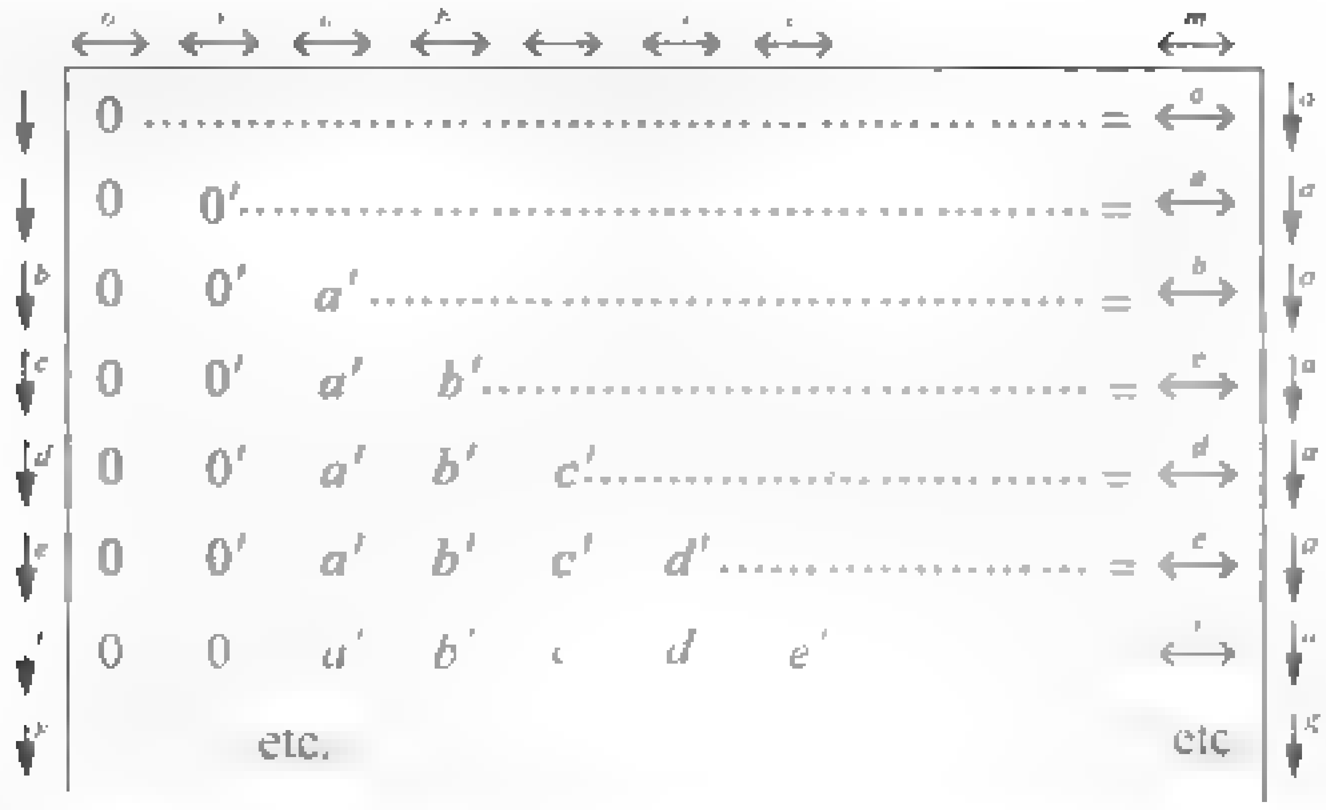
$$\downarrow^{2} \times \uparrow^{2} = \overset{0}{\leftrightarrow},\ \overset{1}{\leftrightarrow},\ \overset{2}{\leftrightarrow} \cdots \overset{2}{\leftrightarrow}$$

表示了第二代的个体之间的可能旁系关系：$\leftrightarrow$（同一），$\leftrightarrow$（兄弟），$\overset{2}{\leftrightarrow}$（嫡亲堂兄弟）和 $\overset{2}{\leftrightarrow}$（同一个祖父的孙子），等等。

为了在命题（63）中形成结果 mg，只需要把关系 $\overset{mg}{\leftrightarrow}$ 当作在下表中已经给出了的系列 g，以及 m 和 g 值的额外延伸。这种加法 $g + m$ 是如下得到的：

关系 $\downarrow^{n}$ 通过值 $\downarrow^{1}$（父亲）表示了每一行与下一行的差异；$\downarrow^{2}$（祖父）—每两列之间的差异；$\downarrow^{3}$（曾祖父）—每三列之间的差异，等等。产物 $\overset{0}{\leftrightarrow} \downarrow^{1}$ 表示，从列 $\overset{0}{\leftrightarrow}$（＝第二列）出发，从 $\downarrow$（见表格右侧的 $\downarrow^{1}$）下降到行 $\leftrightarrow$；产物 $\overset{0}{\leftrightarrow} \downarrow^{2}$ 表示从 $\overset{1}{\leftrightarrow}$ 下降到 $\overset{2}{\leftrightarrow}$，等等。

[1] 夏·瑟路斯，我们从他那里借用了当前群集的所有公式，他是用数量解释这个表格的（夏·瑟路斯，1914，第 244 页），这让表格失去了关于与其他“强度”结构相关的意义。



至于关系$\overset{m}{\leftrightarrow}$，它们可以是初级也可以是次级的。如果它们是初级的，那么产物$\overset{m}{\leftrightarrow}\downarrow^{g}$就是从$\overset{m}{\leftrightarrow}$出发经过$\downarrow^{g}$到达行的终端（初级）关系。例如 $x\overset{b}{\leftrightarrow}\downarrow^{a}y$（＝$x$是$y$父亲的爷爷的孙子）等于$x\downarrow^{a}\leftrightarrow y$（＝$x$是$y$曾祖父的曾孙子的父亲），因为，从行$\overset{b}{\leftrightarrow}$出发，下降一行（$\downarrow^{a}$），就到达了行$\leftrightarrow$。假设$\overset{m}{\leftrightarrow}$是次级的，这也是最有代表性的情况，那么$mg$是加法序列$g+m$最后的次级关系。例如，$x\overset{a}{\leftrightarrow}\downarrow^{b}y$（＝$x$是$y$祖父的嫡亲堂兄弟）得到$x\downarrow^{b}\leftrightarrow y$（＝$x$是$y$第一亲等堂兄弟的祖父），因为，从行$\overset{a}{\leftrightarrow}$（第二）出发，下降两行（$\downarrow^{b}$），就到达了行$\overset{d}{\leftrightarrow}$，其中最后的次级关系是$\overset{c'}{\leftrightarrow}$。

于是我们可以得到如下乘法表，是我们直接从前面的同单义对应表中提取出来的：

$m\times g=mg$	$m\times g=mg$
$0\times 0=0$	$0'\times 0=0'$
$a\times 0=a$	$0'\times a=a'$
$b\times 0=b$	$0'\times b=b'$
等等	$0'\times c=c'$
$0\times a=a$	等等
$0\times b=b$	$a'\times 0=a'$
等等	$a'\times a=b'$
$a\times a=b$	$a'\times b=c'$
$a\times b=c$	$a'\times c=d'$
$a\times c=d$	等等
等等	$b'\times 0=b'$
$b\times a=c$	$b'\times a=c'$
$c\times a=d$	$b'\times b=d'$
$d\times a=e$	$b'\times c=e'$
等等	等等

$b\times b=d$	$c'\times 0=c'$
$b\times c=e$	$c'\times a=d'$
$b\times d=f$	$c'\times b-e'$
等等	等等
$c\times b=e$	$d'\times a=e'$
$c\times c=f$	$d'\times b=f'$
$c\times d=g$	$d'\times c=g'$
等等	等等

相反，则有

(64) $$(x \downarrow^{g} \overset{m}{\leftrightarrow} y)=(x \overset{m:g}{\leftrightarrow} \downarrow^{g} y)$$

或者[根据命题(62)]：

(64 乙) $$(x \downarrow^{g} \overset{m}{\leftrightarrow} y)=(y \uparrow^{g} \overset{m:g}{\leftrightarrow} x)$$

为了形成商 $m:g$，我们要把 g 的值从 m 的值中减去，对应如下表：

$m:g$	$m:g$
$0:0=0$	$0':0=0'$
$0:a=0$	$0':a=0$
等等	等等
$a:0=a$	$a':0=a'$
$a:a=0$	$a':a=0'$
$a:b=0$	$a':b=0$
等等	等等
$b:0=b$	$b':0=b'$
$b:a=a$	$b':a=a'$
$b:b=0$	$b':b=0'$
等等	$b':c=0$
$c:0=c$	等等
$c:a=b$	$c':0=c'$
$c:b=a$	$c':a=b'$
$c:c-0$	$c':b=a'$
等等	$c':c=0'$
$d:0=d$	$c':d=0$
$d:a$ c	等等

$d : b=b$

等等

例：假设 x 是 y 嫡亲堂兄弟后代($\overset{b}{\leftrightarrow}$)的祖父($\downarrow^{b}$)，那么他就是 y 祖父($\downarrow^{b}$)的兄弟($\overset{a}{\leftrightarrow}$)，即：

$$(x \downarrow^{b} \overset{b'}{\leftrightarrow} y)=(x \overset{a'}{\leftrightarrow} \downarrow^{b} y)=(y \downarrow^{b} \overset{a'}{\leftrightarrow} y)$$

因为 $b'-b=0'$。

其实，运算 $b'-b$ 是从列 $\overset{b}{\leftrightarrow}$ 出发上升了两行 $\downarrow^{b}$，得到 $\overset{a}{\leftrightarrow}$。

最后，如果 $m\leqslant g$，自然就有：

(65)
$$(x \downarrow^{g} \overset{m}{\leftrightarrow} y)=(x \downarrow^{g} y)$$

例：假设 x 是 y 的兄弟($\overset{a}{\leftrightarrow}$)的祖父($\downarrow^{b}$)，那么他也是 y 的祖父。

从(63)至(65)的这些基本转变使得三个任意个体之间关系的组合变得可能。首先根据(65)，有：

(66)
$$\text{假设 } m\leqslant g\text{，那么有}(x \downarrow^{g} y)\times(y \overset{m}{\leftrightarrow} z)=(x \downarrow^{g} z)$$

命题定义了 x 的顺序 g 的“家族”，也就是说，对于每代 $a\cdots g$ 来说，集合都不超过亲缘关系 $m=g$。

相反，假设 $m>g$，根据(64)，有：

(67)
$$(x \downarrow^{g} y)\times(y \overset{m}{\leftrightarrow} z)=(x \overset{m:g}{\leftrightarrow} \downarrow^{g} z)$$

例：假设 x 是 y 的父亲($\downarrow^{a}$)且 y 是 z 的嫡亲堂兄弟($\overset{b}{\leftrightarrow}$)，那么 x 就是 y 父亲($\downarrow^{a}$)的兄弟($\overset{a'}{\leftrightarrow}=a' : a$)。

再引入一种关系 $\downarrow$ 时，我们会得到：

(68)
$$(x \downarrow^{g} y)\times(y \overset{m}{\leftrightarrow} \downarrow^{g'} z)=(x \overset{m:g}{\leftrightarrow} \downarrow^{g+g'} z)$$

并且假设 $m\leqslant g$，那么有$(x \downarrow^{g+g'} z)$。

例：假如 x 是 y 的父亲($\downarrow^{a}$)且 y 是 z 祖父的嫡亲堂兄弟($y \overset{b}{\leftrightarrow} \downarrow^{b} z$)，那么 x 就是 z 的曾祖父($\downarrow^{c}=a\times b$)的兄弟($\overset{a'}{\leftrightarrow}=a' : a$)，又或者(命题 63) x 是 z 第三亲等堂兄弟的曾祖父($\downarrow^{c}\overset{c}{\leftrightarrow}$)。

同样，假设 $m>g$，则有：

(69)
$$(x \downarrow^{g} \overset{m}{\leftrightarrow} y)\times(y \downarrow^{g'} z)=(x \overset{m:g}{\leftrightarrow} \downarrow^{g+g'} z)$$

而假设 $m\leqslant g$，那么有$(x \downarrow^{g+g'} z)$。

例：如果 x 是 y 嫡亲堂兄弟($\overset{b}{\leftrightarrow}$)的父亲($\downarrow^{a}$)且 y 是 z 的父亲($\downarrow^{a}$)，那么 x 是 z 的祖父($\downarrow^{b}=a\times a$)的兄弟($\overset{a}{\leftrightarrow}=a' : a$)。

因此，通过(68)和(69)的组合则有：

(70) $$(x \downarrow^{g} \overset{m}{\leftrightarrow} y)\times(y \downarrow^{g'} \overset{m'}{\leftrightarrow} z)=(x \downarrow^{g+g'} z)$$

假设 $m \leqslant g$ 且 $m' \leqslant (g+g')$。

如果这两个条件不能同时满足，于是：

假设 $m'<mg'$，那么 $(x \downarrow^{g+g'} \overset{mg'}{\leftrightarrow} z)$。

假设 $m'>mg'$，那么 $(x \downarrow^{g+g'} \overset{m'}{\leftrightarrow} z)$。

以及假设 $m'=mg'$，那么 $(x \downarrow^{g+g'} z)$。

这是一个关于 $(m \leqslant g)$ 且 $(g+g') \geqslant m'$ 的例子：

$$(x \downarrow^{c} \overset{a}{\leftrightarrow} y)\times(y \downarrow^{b} \overset{b}{\leftrightarrow} z)=(x \downarrow^{c} z)$$

对于 $(m \leqslant g)$，但 $(g+g')<m'$：

$$(x \downarrow^{c} \overset{a}{\leftrightarrow} y)\times(y \downarrow^{c} \overset{d}{\leftrightarrow} z)=(x \downarrow^{d} \overset{d}{\leftrightarrow} z)$$

同样地，有：

(71) $(x \overset{m}{\leftrightarrow} \downarrow^{g} y)\times(y \overset{m'}{\leftrightarrow} \downarrow^{g'} z)$
假设 $m'<mg$，那么 $(x \overset{m}{\leftrightarrow} \downarrow^{g+g'} z)$
假设 $m'>mg$，那么 $(x \overset{m'}{\leftrightarrow} \downarrow^{g+g'} z)$
假设 $m'=mg$，那么 $(x \overset{m!}{\leftrightarrow} \downarrow^{g+g'} z)$

如果 m 属于第一等级，那么其中的 $\overset{m'}{\leftrightarrow}$ 就是包含 m 的最弱联结(la plus faible relation)初级关系。

关于 $(m'<mg)$ 的例子：如果 x 是 y 的祖父的堂兄弟且 y 是 z 的叔叔，那么 x 是 z 的曾祖父的堂兄弟；即

$$(x \overset{a'}{\leftrightarrow} \downarrow^{b} y)\times(y \overset{a'}{\leftrightarrow} \downarrow^{a} z)=(x \overset{a'}{\leftrightarrow} \downarrow^{c} z)$$

对于 $(m'>mg)$：即 $(x \overset{a'}{\leftrightarrow} \downarrow^{a} y)\times(y \overset{c'}{\leftrightarrow} \downarrow^{a} z)=(x \overset{b'}{\leftrightarrow} \downarrow^{b} z)$

对于 $(m'=mg)$：即 $(x \overset{a}{\leftrightarrow} \downarrow^{a} y)\times(y \overset{b}{\leftrightarrow} \downarrow^{a} z)=(x \overset{b}{\leftrightarrow} \downarrow^{b} z)$

也就是说 x 可能是 z 的祖父、或者他的叔祖、或者他祖父的嫡亲堂兄弟；其实 $(x \overset{b}{\leftrightarrow} \downarrow^{b} z)$ 只表示对 x 来说，在这三种情况下都有同一个祖父，但是他和 z 彼此的亲属关系仍然不确定，因为我们只知道 x 是 y 的父亲的嫡亲堂兄弟且 y 是 z 的父亲的第二亲等的堂兄弟；z 的父亲可能是 x 的儿子或者侄子，又或者是他嫡亲堂兄弟的儿子。

这些[从(66)至(71)]都是类别的同单义乘法群集的基本成分。我们可以看到这些成分与类别的同单义乘法群集之间的同构性，根据所有可能的组合来看，这些成分可能是有所区分的。我们已经在别处[1]给出了它们差异性的几种样本，主要根据这四种形

① 皮亚杰，1942。

式：

$$(xy\times yz)=(xz),\quad (xy)\times(xz)=(yz),\quad (xy)\times(zy)=(xz)$$

和
$$(xy)\times(zx)=(yz)$$

夏·瑟路斯在他的《论著》[1]中也取用了这些形式。那么在这里我们就没有必要再重新分析了，因为它们是由所有(63)和(64)的这些基础转变而产生的，并且在相关的不对称和对称关系上分别地实行了它们的加法规则。

只是要注意，当不对称关系相反时，计算会更复杂一些。这是一个例子：

(72)
$$(x\overset{m}{\leftrightarrow}\downarrow^{g}y)\times(y\uparrow^{g'}\overset{m'}{\leftrightarrow}z)=$$

$$\text{对于 } g>g'\begin{cases}\text{设}(g-g')>(m'-m)\text{，那么}(x\downarrow^{g-g'}\overset{m(g-g')}{\leftrightarrow}z)\\ \text{设}(g-g')<(m'-m)\text{，那么}(x\downarrow^{g-g'}\overset{m'}{\leftrightarrow}z)\\ \text{设}(g-g')=(m'-m)\text{，那么}(x\downarrow^{g-g'}\overset{m'!}{\leftrightarrow}z)\end{cases}$$

$$\text{对于 } g<g'\begin{cases}\text{设}(g'-g)>(m-m')\text{，那么}(x\downarrow^{g'-g}\overset{m'}{\leftrightarrow}z)\\ \text{设}(g'-g)<(m-m')\text{，那么}(x\downarrow^{g'-g}\overset{m(g'-g)}{\leftrightarrow}z)\\ \text{设}(g'-g)=(m-m')\text{，那么}(x\downarrow^{g'-g}\overset{m'!}{\leftrightarrow}z)\end{cases}$$

$$\text{对于 } g=g'\begin{cases}\text{设 } m>m'\text{，那么}(x\overset{m}{\leftrightarrow}z)\\ \text{设 } m<m'\text{，那么}(x\overset{m}{\leftrightarrow}z)\\ \text{设 } m=m'\text{，那么}(x\overset{m!}{\leftrightarrow}z)\end{cases}$$

在这个群集中，结合性表示一种特别的意义，因为比起在其他群集中，结合性在这里把自身的作用表现得更加明显：通过不同途径达到同一出发点，尤其是绕了一些比较大的“弯”。例如：

$$(\alpha)=(x\overset{a}{\leftrightarrow}\downarrow^{b}y)\quad(\beta)=(y\overset{a}{\leftrightarrow}\downarrow^{c}z_1)\quad\text{和}\quad(\gamma)=(z_1\overset{b}{\leftrightarrow}\downarrow^{d}z_2)$$

如果我们除了形成组合$(\alpha\times\beta)$之外，然后再形成组合$(\alpha\times\beta)$和(γ)，或者一边是(α)另一边是$(\beta\times\gamma)$，最终的产物都一样是$(x\overset{b}{\leftrightarrow}\downarrow^{e}z_2)$，但是走的是不同的途径，其实$(\alpha\times\beta)$得到了$(x\overset{a}{\leftrightarrow}\downarrow^{e}z_1)$而$(\beta\times\gamma)$得到了$(y\overset{b}{\leftrightarrow}\downarrow^{e}z_2)$。然而这两个表达中的第一个乘以$(\gamma)$得到的是和第二个表达乘以$(\alpha)$一样的结果。

特殊恒等当然是符合习惯规律的。而一般恒等，我们记得，在类别的乘法群集中，它产生于把类别从其本身抽离出来的运算，也就是在把类别的元素留在体系最一般性的类别中的同时，把这个类别作为嵌套去除掉。同样，把一种关系序列$(x\downarrow^{a}y)$从其自身中抽离，也就是减去这些项之间的关系，同时把这些项以其他任意可能关系的项保留

① 夏·瑟路斯，1945，第292—313页。

下来：

$$(x \overset{a'}{\downarrow} y) \times (x \overset{b'}{\downarrow} y) = (x \overset{o'}{\downarrow} y)$$

因此这个关系同单义乘法的群集是目前为止检验过的"强"群集中最丰富的群集。我们可以思考这种丰富性是否没有揭示出一个数量基础的存在，这个数量基础孕育了其中的关系，因为代系(generations)可以被看作相继的单元，而我们可以在家族世系的等级中重新找到这种单元。当然，代系可以很轻易地被记录为等级，但是显然我们不会止步于此，根据不对称关系 $\overset{a''}{\downarrow}$、$\overset{a'}{\downarrow}$、$\downarrow$ 等，我们得到的初级对称关系 $\overset{a}{\leftrightarrow}$，$\overset{b}{\leftrightarrow}$，$\leftrightarrow$ 中，次级关系 $\overset{a'}{\leftrightarrow}$，$\overset{b'}{\leftrightarrow}$，$\overset{h'}{\leftrightarrow}$ 等的嵌套，足以用最明确、最完整的方式来表达亲子体系中的关系的集合。然而，因为这样的体系和类别的同单义乘法群集是同构的，并且后者解释了所有完整分类的结构，那么我们发现当前群集的存在成了最好的检验，让群集的运算机制同时有了自然的和基础性的特征。

§21 群集Ⅷ：关系的双单义乘法和乘法等价的关系(双单义对应)

在类别的双单义乘法的群集Ⅰ，最终对印着一个关系的乘法群集，就像不对称关系和对称关系共同的群集Ⅶ。它构成了双项(或二项等)表格，一端被系列化(群集Ⅴ)占据，而另一端可能是另一种系列化、一种对称关系(对应)的体系，或是两者同时出现。

我们尝试把一个集合中的物体同时根据重量和体积进行分配，不考虑其他度量数据。那么，对于重量，我们只用(+)、(−)和(=)掌握质的评价(感觉的评价)。对于体积，我们连续不断地把物体浸入装了水的容器中，用(+)、(−)和(=)判断结果，重量和体积的对比是成对进行的。那么我们就有可能根据表达重量差异的传递不对称关系的序列来把物体排列成序列：$x \xrightarrow{a} y \xrightarrow{a'} z \xrightarrow{b} u$，如此等等，也有可能为体积建构一个类似的系列。同样还可以根据被看作相等的重量和体积来建立等价关系 $x \overset{a}{\leftrightarrow} y$ 或 $x \overset{b}{\leftrightarrow} y$ 等。但是根据构想，我们没有任何方法可以使差异相等 $\overset{a}{\rightarrow} = \overset{a'}{\rightarrow} = \overset{b}{\rightarrow} = \cdots$，也就是不能建立一个度量单位 $\overset{a}{\rightarrow} = a$，如 $b = 2a$，$c = 3a$，等等。我们也不能根据增序 $(\overset{a}{\rightarrow}) < (\overset{a'}{\rightarrow}) < (\overset{b}{\rightarrow}) \cdots$ 或者降序来逐步增加差异。因此没有任何对外延的量化，而且会只面对建立在了差异嵌套上的强度关系(群集Ⅴ)或者什么也没有(群集Ⅵ)。那么从重量和体积的双重角度来看，如何比较现在的这些物体呢，也就是如何用这两个关系序列来建构一个乘法群集呢？

唯一的方法是建构一个包含两种等价差异的双项表。首先建构包括相同重量或相同体积物体的等价的类别。我们假设不存在重量和体积同时相同的两个物体，但是如

果只考虑其中一个属性时则可能出现等价。在这种情况下，相同重量的物体就可以根据体积区分成系列，且反之亦然。那么我们把相同重量物体的类别称为 A_1；把相同重量但比 A_1 更重的物体的类别称为 A'_1；把更重但重量相等的物体的类别称为 B'、等等。此外我们把物体体积在类别之间上升，但在每个类别内部物体体积相等的这些类别称为 A_2，A'_2，B'_2，等等。那么我们可以通过这些类别建构与群集Ⅳ中形式相同的双项表(见第 1203 页，图 9)，但是每个交点是单称类别构成的。

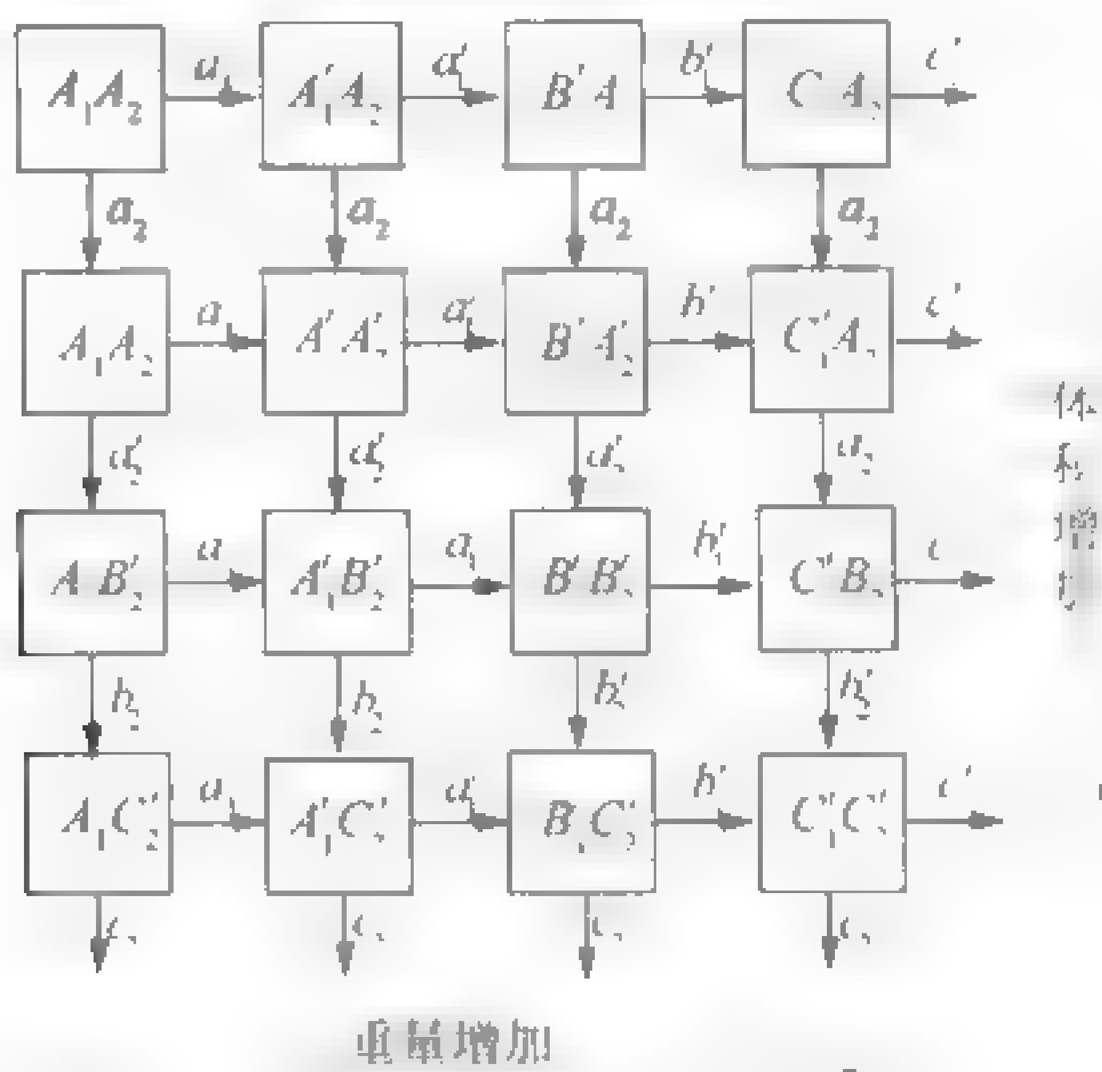


图 16

图 16 用一个集合的矩形来代表这个双项表的单称类别：每一行代表了一组体积相同但重量增加的物体，每一列代表了一组重量相同但体积增加的物体。很容易就能把这些物体通过一个同时表示重量和体积差异的不对称关系双重体系联系起来。对于包含相同体积物体的类别 A_2，就有以下根据重量(忽略 0)得到的系列：

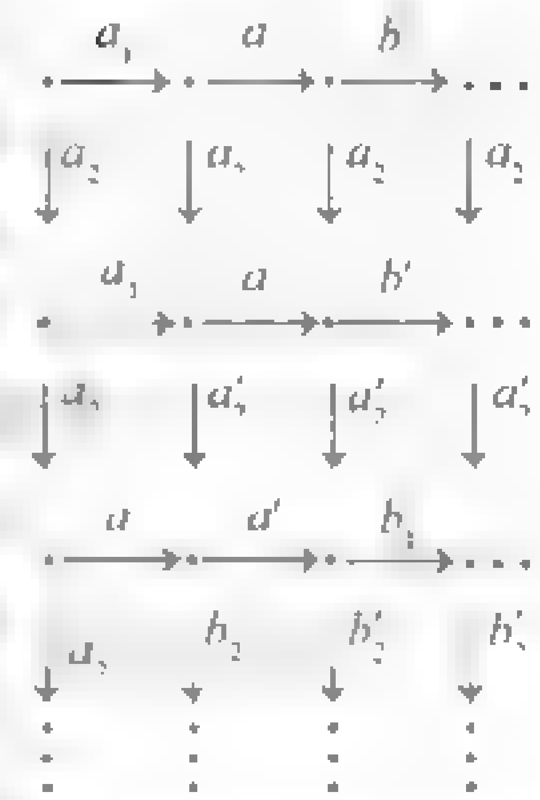
$$(A_1A_2)\xrightarrow{a_1}(A'_1A_2)\xrightarrow{a'_1}(B'_1A_2)\xrightarrow{b'_1}(C'_1A_2)\xrightarrow{c'_1}(D'_1A_2)\xrightarrow{d'_1}\cdots \tag{73}$$

这些关系在类别 A'_2 或 B'_2 等的项之间都是相同的，这些类别只有体积上的不同。相反，对于包含相同重量物体的类别 A_1 来说，则有以下根据体积得到的系列(在图 16 中这个系列是垂直列)：

$$(A_1A_2)\xrightarrow{a_2}(A_1A'_2)\xrightarrow{a'_2}(A_1B'_2)\xrightarrow{b'_2}(A_1C'_2)\xrightarrow{c'_2}\cdots \tag{74}$$

这些关系 ψ'，ψ^{a}，ψ^{a} 等，存在于类别 A_1，B'_1，C'_1 等的项之间，这些类别只有重量上的不同。

如果我们现在从图 16 中提取出关系(73)和(74)，我们会发现一个关系的体系，如下图所示。这些关系构成了群集Ⅷ：我们发现这些关系表示了一种有差异的双重序列，但同时也在不同的物体系列中重复，那么这些系列保持部分相等。需要注意，如果图 16 的表中缺少某些元素，也就是说如果不存在某些重量或体积的序列，那么其他元素



之间的对比也就不可能了；更明确地说，需要从相关的两个属性中的一个出发，假设类似平均项的存在，且不论这些平均项在经验上是否存在。只有外延的量化（一种度量关系或者一种重量与体积之间的比例）才能避免这种限制，但是要隐含地参考同一种方式。如果没有，就要通过质的相等来进行：例如，亚里士多德没有对速度加以测量，他的定义方式仅仅只说两个运动物体中较快的是相等时间内到达距离更远的一方，即在较短时间内走过相同距离的一方；这是一个强度运算的良好例子，它属于当前群集，且建立在与前文表格类似的数据组织的基础之上。在图16的表格中，我们可以说两个物体中密度更大的，是重量相等体积更小的一方，或体积相等重量更大的一方；但是除此之外我们什么也不能肯定，因为缺少强度或度量的量化属性。

这说明，这个群集Ⅷ把一种运算合成了一个整体：两个系列化的乘法（可以跟随新系列化的运算）；根据每个涉及的系列进行的新不对称关系的加法（双重或三重连接，等等）还有根据乘法等价的不对称关系进行的对应（双单义和相互对应）。

Ⅰ. 系列的乘法　我们刚才发现，两个系列化的乘法构成了一个双项表。同样，我们可以把这两个系列化通过第三个系列化（颜色，等等）相乘，并这样构成一个三项表等等。我们仅考虑两种有关的关系。

1. 正运算是我们用 $\xrightarrow{\cdots}$ 的形式表示的关系 $\rightarrow$，$\rightarrow$，$\rightarrow$，乘以我们用 $\downarrow$ 的形式表示的关系 $\downarrow^{a_2}$，$\downarrow^{a_2'}$，$\downarrow^{a_2''}$ 等。那么得到：

$$(75)\qquad \left(\xrightarrow{a_1\cdots a_1}\right)\times\left(\downarrow^{a_2}_{z_2}\right)=\left(\xrightarrow{a_1\cdots a_1}\ \downarrow^{a_2}_{z_2}\right)$$

这种形式仅仅只简要地表示了图16中详细关系的集合。

2. 逆运算是抽离：

$$(76)\qquad \left(\rightarrow\ \downarrow^{a_2}_{z_2}\right):\left(\downarrow^{a_2}_{z_2}\right)=\rightarrow\quad \text{或者}\quad \left(\rightarrow\right):\left(\rightarrow\right)=\left(\rightarrow\right)$$

这意味着：如果在图16这样集中了重量和体积关系的表格中，我们抽离出体积关系，那么我要考虑的就只剩下重量关系。又或者：如果在把物体根据重量进行分类之后，我抽离出重量的差异，那么我要考虑的就只剩下物体本身而不用考虑它们之间的差异（$\rightarrow$）。

3. 一般恒等是关系的缺失，而特殊恒等就是和其他群集中特殊恒等类似的结合性。

Ⅱ. 多重连接　如果我们现在要从一般组合过渡到基础关系之间乘法的细节，那么我们就像对群集Ⅶ那样开始着手，但因为双单义乘法模式而简化很多。

假设两个项 x 和 y（在图16中选择，例如 A_1A 和 $C'A_1$）它们之间根据差异（$x\rightarrow y$）有不同重量。和在群集Ⅴ中一样，关系 $\xrightarrow{c_2}$ 产生于差异的加法：$\xrightarrow{a_1}+\xrightarrow{a_1'}+\xrightarrow{b_1'}\ \xrightarrow{b_1}$。此外，

假设两个项 y 和 z 重量相等，但体积有关系 $\downarrow^{a_2}$ 的差别（例如 C'_1A_2 和 $C'_1A'_2$）。那么我们可以根据乘法关系来组合这两种关系：

(77) $$(x \overset{a_1}{\rightarrow} y)\times(y \downarrow^{a_2} z)=(x \overset{a_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2} z)$$

“如果 x 比 y 轻（重量值降低 $\rightarrow$）同时体积相同，且 y 与 z 重量相同，但体积更小（体积值减小 $\downarrow^{a_2}$），那么 z 比 x 更重且体积更大（根据竞争关系 $\rightarrow$ 和 $\downarrow$）”。

这个运算(77)的意义就是，可以从重量和体积差异的双重角度把双项表中的任意元素与另一个元素进行比较。那么可以组合两个产物：

(78) $$(x \overset{a_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2} y)\times(y \overset{a'_1}{\rightarrow} \downarrow^{a'_2} z)=(x \overset{a_1+a'_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2+a'_2} z)$$

和

(78 乙) $$(x \overset{a_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2} y)\times(y \overset{a'_1}{\leftarrow} \uparrow^{a'_2} z)=(x \overset{a_1-a'_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2-a'_2} z)$$

例：假设 x（$=A_1A_2$，图16）比 y（$=B'_1A'_2$）更轻且体积更小，差异为 $\overset{a}{\rightarrow}\downarrow^{a}$，且 y（$=B'_1A'_2$）比 z（$=C'_1B'_2$）更轻且体积更小，差异为 $\overset{a'}{\rightarrow}\downarrow^{a'}$，那么根据差异 $\overset{a+a'}{\rightarrow}\downarrow^{a+a'}$，$z$ 比 x 更重且体积更大。

不对称关系（简单链式连接或系列化：群集Ⅴ）的加法不是可交换的，正如我们在§18中所见，它并不比同单义乘法更多。相反，双单义乘法表示了一种事实的传递性，因为不同的关系经过不同但对应的路线时，最后的终点是一致的。在图16中，项 A_1A_2 与项 $C'_1C'_2$ 通过两种等价关系（经过 C'_1A_2）或（经过 $A_1C'_2$）联系起来。那么以一般方式来说，就有：

(79) $$(x \downarrow^{a_2} \overset{a_1}{\rightarrow} y)=(x \overset{a_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2} y) \quad 和 \quad (x \downarrow^{a_2} \overset{a_1}{\rightarrow} y)=(x \overset{a_1}{\rightarrow} \downarrow^{a_2} y)$$

或者 $$(x \downarrow^{a_2} \overset{a_1}{\leftarrow} y)=(x \overset{a_1}{\leftarrow} \downarrow^{a_2} y)$$

比起群集Ⅶ的组合来说，这条变形法则(79)显著简化了当前群集的组合。

Ⅲ．双单义对应和乘法等价——群集最一般性的意义是，与群集Ⅳ一样，建立了这种运算的心理本质，即双单义和相互对应。

在一个双项表中，每一行都双单义地对应下一行且每一列也对应下一列。事实上，从被考虑的关系中之一的角度来看，每个项都等于它的对应项（从 A_1 的角度来看，A_1A_2 等于 $A_1A'_2$，也就是它们有相等的重量 $\leftrightarrow$）：如果不是这样的话，就没有这个双项表了，因为从同一个属性的角度来看，所有不同的项都会构成独一无二的系列，而我们不能把这样构建的两个系列相乘。那么，在建构不对称关系之间的乘法集合，并且这些不对称关系是两种或多种不同差异（例如重量和体积）特征的同时，现在的群集也必然表示了一组乘法，在已知差异的不对称关系和双单义和相互对应的对称关系之间，也就是

等价关系；但是这些差异和等价只能建立于同一个属性基础之上。假设 $\overset{a}{\rightarrow}$、$\overset{a'}{\rightarrow}$、$\overset{b'}{\rightarrow}$ 等是图 16 中的物体 AA_1、AA_1'、AB 等之间的重量差异，这些差异也存在于物体 $A'A_1$、$A'A_1'$、$A'B'$ 等之间，那么在对应物体（AA_1 和 $A'A_1$，等等）之间存在着双单义和相互对应所阐释的等价关系；这些等价本身表示重量的相等 $\overset{o}{\leftrightarrow}$（初始的相等）、$\overset{a}{\leftrightarrow}$（初始价值和更高价值之间的相等）、$\overset{b}{\leftrightarrow}$（更高价值与其之前价值之间的相等，等等）：

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "a"] \arrow[d, leftrightarrow, "o"] & \cdot \arrow[r, "a'"] \arrow[d, leftrightarrow, "a"] & \cdot \arrow[r, "b'"] \arrow[d, leftrightarrow, "b"] & \cdot \arrow[r, "c"] \arrow[d, leftrightarrow, "c"] & \cdot \arrow[d, leftrightarrow, "d"] \\
\cdot \arrow[r, "a"] & \cdot \arrow[r, "a'"] & \cdot \arrow[r, "b'"] & \cdot \arrow[r, "c'"] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

以通常方式来说，我们可以把双单义和相互对应看作一种差异序列和等价序列之间的逻辑乘法。相关差异可以通过相异性（见群集Ⅵ）或是通过有序差异（但是在第一种情况中，相异性取决于类别的包含，也就是部分有序不对称关系的包含）来表示。在这两种情况中，对应构成了心理上最原始的运算之一。例如，当一个孩子临摹一张脸时，他得让他画上的类似部分对应模型的每一部分（那么就有类别之间的对应，建立在群集Ⅳ上：鼻子对应鼻子，额头对应额头，等等）；当他临摹一个序列，比如一圈高度递减的连接点，那么他就建立了一种在当前群集之上的对应。

那么对于对应的逻辑理论来说，需要明白群集Ⅳ和Ⅷ（作为另类的Ⅲ和Ⅶ）的运算本身不蕴涵数量运算或等幂运算[1]。这两种结构之间的差异在于元素对应的方式。在逻辑对应的情况中，对应项之间的等价只建立在从部分到整体的关系上。在群集Ⅳ的情况中，两个项是彼此对应的，因为它们建构了同一个有效类别（例如鸟类的翅膀对应哺乳动物的前肢和肩胛带，因为它们属于同一个类别，但它们不对应后肢，因为两者没有相同的性质特征）。在群集Ⅷ的情况中，对应建立在属性等价的基础上，部分在整体内（部分的类别在总类别内，或者与 $\overset{a}{\rightarrow}$、$\overset{b}{\rightarrow}$ 等相比的关系 $\overset{o}{\leftrightarrow}$、$\overset{a}{\leftrightarrow}$、$\overset{b}{\leftrightarrow}$ 等）。相反，两个集合之间的双单义对应保证了它们的等效（或数字相等），同时把一个任意元素对应到另一个任意元素上，不论任何属性，这就把这些元素变成了“单元”同时没有通过整体就把部分联系在了一起。

只从逻辑（强度）的角度来看，还应当区分我们直至目前为止遇到的两种等价：简单等价或叫加法等价，和对应等价或叫乘法等价。

与数字等价或等效相反，逻辑等价除非在同一的情况下，只是一种受限并从属于某种观点的相等。因此，简单或加法等价只表示（见§8 和定义 16.2）两个有效项（个体

1　皮亚杰用“幂”指数的概念来描述运算的形式化水平，从动作到符号，一直到格式的建立，是运算的幂指数不断提升的过程，当两个运算是“等幂运算”时，表明两个运算的操作水平是一样的。——译者注

或类）之间可能的置换，但是只从被考虑属性的角度来看。那么，简单逻辑等价通过其自身性质构建了一种共同隶属或是共同包含：

$$x_1\overset{a}{\leftrightarrow}x_2,x_1\overset{b}{\leftrightarrow}x_3,\text{等等}\quad\text{或}\quad A\overset{B}{\leftrightarrow}A',B\overset{C}{\leftrightarrow}B',\text{等等}$$

但是，如果写 $B\overset{b}{\leftrightarrow}B'$ 可能是矛盾的，因为类别 B 和 B' 只从 B 的角度来看并不相等，因为 B' 不包含于 B。同样的，写 $A\leftrightarrow B$ 或 $B\overset{I}{\leftrightarrow}C$ 也是荒谬的，因为 A 包含于 B 且 B 包含于 C；事实上，在一个嵌套于另一个的类别之间没有等价，因为联系它们的关系是一种包含的不对称关系。相反，有 $A\leftrightarrow B'$ 或 $A\overset{D}{\leftrightarrow}C'$ 等等。

加法等价的准则就是替代（见§13）。这就是为什么两种基础不对称关系，比如 $\overset{a}{\rightarrow}$ 和 $\overset{a'}{\rightarrow}$，即使有 $\overset{a}{\rightarrow}+\overset{a'}{\rightarrow}=\overset{b}{\rightarrow}$ 也不能看成是相等的。事实上，我们不能根据替换运算来对调这两种关系，缺少精确的对称性。相反，如果加法等价或其包含在不对称关系的领域内没有任何意义，那么其中的恒等或自我等价应该这样表示：

(80) $$(\overset{a}{\rightarrow})\overset{a}{\leftrightarrow}(\overset{a}{\rightarrow})\text{或}\overset{a}{\rightarrow}=\overset{a}{\rightarrow}\quad\text{和}\quad(\overset{a}{\rightarrow}+\overset{a'}{\rightarrow})\overset{a}{\leftrightarrow}(\overset{b}{\rightarrow})$$

也就是

$$(\rightarrow\quad\rightarrow)\quad(\rightarrow)$$

因为无差异又重新是对称的了。

我们再回想一下，加法等价（$\leftrightarrow$）的反面不是不对称差异，而是相异性 $\leftrightarrow$（极限是 $\overset{0}{\leftrightarrow}$），也就是说非等价或是相互差异（定义 25 和 27）对应一种间隔的对称关系，有不对应有序或定向差异（$\overset{a}{\rightarrow}$）。

至于强度双单义对应或乘法逻辑等价，两种差异把它们与简单或加法等价对应起来。首先类别 A_1 对应了类别 A'_1，假设 A_1 分布为：

$$A_1A_2+A_1A'_2+A_1B'_2+\cdots$$

A'_1 同样分布为：

$$A'_1A_2+A'_1A'_2+A'_1B'_2+\cdots$$

（两栖类动物 A 器官的种类 A、A' 和 B' 符合爬行动物 A' 器官的种类 A、A' 和 B'）。那么这种对应建立在一种 A 和 A' 在 B C 的共同包含上（通过 $A+A'+B'$ 在总产物 A_1+A' 中），但是这种共同包含表示了一种特殊结构，可以称为一种共同分配。其实，根据属于乘法的分配律，有：

(81) $$(A_1+A'_1)\times C_2=A_1C_2+A'_1C_2$$

因此，

$$A_1C_2 \overset{B_1C_2}{\ll\!-\!\gg} A_1'C_2$$①

通过对应，等价构成了一种等分布。

第二，并且尤其是，我们见到了不同列的两个初级类别，例如 A 和 B，在 B 和 C 中都不相等，因为 A 包含于 B（包含的不对称关系）。然而乘法等价或逻辑对应的重大价值是总乘法类别 B_1C_2 的部分 A_1C_2 对应了整体。例如，两栖类动物器官的类和鱼类、爬行动物等器官的类别性对应，因此通常也对应脊椎动物的共同器官，即便两栖动物的器官只构成脊椎动物器官的一个亚类（E_1C_2）：

(82) $$A_1C_2 \overset{E_1C_2}{\ll\!-\!\gg} E_1C_2$$

两种等价之间存在这种差异的原因很清楚。在加法等价或共同包含的情况下，同一序阶的类别之间不存在等价，因为低级序阶的类别在高级序阶的类别中消失了：那么加法把部分结合到了整体上，同时忽视了属于部分的差异，假设我们用替换或共同包含来定义等价的话，这就排除了吸收的整体与被吸收的部分之间的所有等价关系。相反，在乘法关系中，低级序阶的类别同化了高级序阶的类别，那么乘法就让部分具备了整体的属性：在这种情况下，部分必须对应于整体，因为乘法（同化的）表示了它们的共同属性。

此外，我们可以以乘法等价的形式表示所有加法等价：

(83) $$(A \overset{B}{\leftrightarrow} A') = AB \overset{B}{\ll\!-\!\gg} A'B$$

但是根据前文，逆命题只有对同一序阶的对应类别才为真。

最后，除了个体和类别之间的对应，还可以区分这种关系之间的对应。这种对应，一般叫作相似性（逻辑的、相对于几何的，等等），它是一种等分配形式，但是在不对称关系的情况中，它表示这种能够保存顺序的特征。得到，例如（如果参考图 16，第 1236 页）：

(84) $$[(A_1A_2) \xrightarrow{a_1} (A_1'A_2)] \overset{a_2}{\ll\!-\!\gg} [(A_1A_2') \xrightarrow{a_1} (A_1'A_2')]$$

因为

$$(A_1A_2 \xrightarrow{a_1} A_1'A_2) \times (A_1'A_2 \downarrow A_1'A_2') = (A_1A_2 \downarrow A_1A_2') \times (A_1A_2' \xrightarrow{a_1} A_1'A_2')$$

一般来说，有：

(85) $$(x_1 \xrightarrow{r_1} y_1) \ll\!-\!\gg (x_2 \xrightarrow{r_2} y_2)\text{假设}(x_1 \xrightarrow{r_1} y_1) = (x_1 \downarrow r' \xrightarrow{r_2} \uparrow r' y_1)$$

这构成了相似性的经典逻辑形式（见图 17）②。

---

① ↔表示了一种加法等价而≪－≫表示一种乘法等价。

② 参见罗素（Russell），1928 年重新出版，第 71 页和怀特海-罗素，1925—1927 年，第 1.1 页。

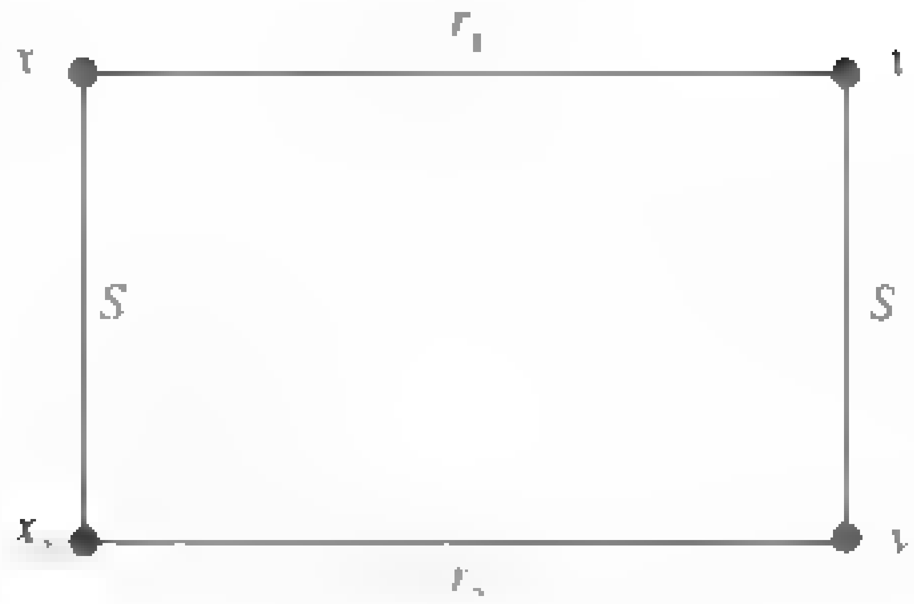


图 17

总之，不论关系的同单义乘法的群集多么少，这个群集作为双单义对应或乘法等价的基础都具有重要的理论意义。

§22 小结：等价和差异；唯一群集的问题

有八个类别的和关系的可能性群集，整体上形成了一个简单且严密的体系，总的来说可以更加清晰明了地阐述这些运算。

我们已经见过（§11）这个数字 8 是源于一种三重二分法：类别群集和关系群集（2），加法群集和乘法群集（2），初级群集和二级群集（2），即 2×2×2＝8。但是在仔细分析它们的细节之前，我们无法理解次级类别和关系的基本作用，而它们在群集Ⅱ，Ⅲ，Ⅵ，Ⅶ中都很明显。现在其中的关系是很明显的：其实存在两种基础性结构，它们共同分享命题内群集的集合：一种建立在线性嵌套和系统化基础上，也就是完全有序的（Ⅰ和Ⅴ），同时还建立在它们的乘法上，这是双单义的（Ⅳ和Ⅷ）；另一种建立在等级体系上，也就是同单义的（Ⅱ和Ⅲ，Ⅵ和Ⅶ）。也就是后者涉及了类别的组合或次级关系之间的组合，以替代（Ⅱ）或对称（Ⅲ）的形式出现，尤其是"一对多"的对应（Ⅲ和Ⅶ）形式。

研究群集的另一结果就是可以仔细分析不同的等价形式和差异形式，这是强度逻辑的基础。事实上，所有类别和关系的逻辑都建构了相似性和差异性的一种理论，不管是对分类，也就是等级化相似性的体系来说，还是对关系连接，也就是对称关系和不对称差异来说。那么，通过确定等价和差异之间的关系就能给这一章画上句号了。

首先，我们刚才描述过不同加法和乘法种类的质的等价，它表示了包含梯级的基础特征。我们不这样影射等价的数学化形式，对此我们之后再探讨（第四章），我们影射的是这个基础事实，这决定了类别和不对称关系群集的建立：同一性或无差异的关系只是等价形式的最大限制，等价的不同等级一直排列到最小等价，彼此之间把最一般化类别的元素连接到了被看成是 U 的体系上。举个例子，类别 A（人类）包含于一个序列，类别 B（哺乳动物），C（脊椎动物），D（动物），E（生物）……直至 U。那么在人类之间存

在一种普遍性的等价 $\overset{\hat{a}}{\leftrightarrow}$，这个等价是被它们的所有共同特征的群集[1]所定义的，比哺乳动物之间的已知普遍性等价 $\overset{\hat{b}}{\leftrightarrow}$ 更大；事实上，它们在表示把它们作为哺乳动物 $\overset{b}{\leftrightarrow}$ 变得相等的共同属性时，它们作为人类的差别是很大的，因为它们缺少类别 A 的特有属性，也就是 $\overset{a}{\leftrightarrow}$。脊椎动物 $\overset{\hat{c}}{\leftrightarrow}$ 之间的已知等价更弱，并一直排序至最弱的等价，后者通过一般性的 $\overset{u}{\leftrightarrow}$ 把生物们连接在一起。

随着被嵌套类别的延伸，这些类别的元素之间的等价效应逐渐变弱，这种减弱只是观念内涵和其外延之间成反比的传统规律；事实上，如果在"弱结构化类别"的情况中应用了这一规律（如我们在§6中所见），外延就只是类别本身，而内涵确切地说是通过作为这个类别特征的质性等价而建构起来的。

然而，如果说等价是分程度的，且等价随着嵌套类别的外延尺度扩张而渐渐减弱，那就等于说，差异度在对应地增长。除了在同一的情况（$\leftrightarrow$）中，类别 A 的个体之间的差异更大（即 $\overset{\hat{a}}{\leftrightarrow}$），而类别 B 的个体之间的差异又更大（即 $\overset{\hat{b}}{\leftrightarrow}$），这样一直排列到（$\overset{\hat{t}}{\leftrightarrow}$）。这些递减的等价 $\overset{\hat{a}}{\leftrightarrow}$，$\overset{\hat{b}}{\leftrightarrow}$，$\overset{\hat{t}}{\leftrightarrow}$ 也同时构成了递增差异的关系。但是从群集结构的角度来看，这些关系包括什么呢？

只存在三种属性差异的形式：①"相异性"（定义26）：例如，假设 $A' = B - A$，那么 $\overset{a'}{\leftrightarrow}$ 表示符合类别 A 和 A' 的内涵之间的差异；假设 $B' = C - B$，那么 $\overset{b'}{\leftrightarrow}$ 表示符合类别 B 和 B' 的内涵之间的差异，等等，一直到符合 Y 和 U（系统的总类别）内涵之间差异的 $\overset{y'}{\leftrightarrow}$；②不对称差异：

$$O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a'} B \xrightarrow{b'} C \xrightarrow{c'} \cdots，等等$$

属于系列化；③间隔的对称差异：

$$O \leftrightarrow | A，\quad A \leftrightarrow | B，\quad B \leftrightarrow | C，等等$$

表示在系列里，O 和 A 之间和 A 和 O 之间，A 和 B 之间和 B 和 A 之间的存在的间距都是相同的。

关于这些差异中最开始的那些差异，$\overset{a}{\leftrightarrow}$ 或 $\overset{b}{\leftrightarrow}$ 等作为类别 A 或 B 特点的属性，存在于关系的项的其中之一，而不存在于另一个项，但是在这两个项上都存在高级序阶中类别的属性（B 对于 A，C 对于 B，等等）。因此：

$$\overset{a'}{\leftrightarrow} = (\overset{b}{\leftrightarrow} + \overset{\bar{a}}{\leftrightarrow})，\quad \overset{b'}{\leftrightarrow} = (\overset{c}{\leftrightarrow} + \overset{\bar{b}}{\leftrightarrow})，等等$$

[1] 这里我们进行一下区分，符号 $x \overset{\hat{a}}{\leftrightarrow} y$ 表示 x 和 y 之间的等价集合，符号 $x \overset{a}{\leftrightarrow} y$，表示属于类别 A 并被这个类别特有特征的共同隶属所定义的微分差异，即 a。

例如，假设 A = 人类，B = 哺乳动物，C = 脊椎动物，等等，那么 $\overset{a'}{\leftrightarrow}$ = 人类和其他哺乳动物之间的差异；$\overset{b'}{\leftrightarrow}$ = 哺乳动物和其他脊椎动物之间的差异，等等。很容易就能看出，由任意属性 $\overset{x}{\leftrightarrow}$ 或 $\overset{x'}{\leftrightarrow}$ 出现与否而产生的所有差异的种类都可以归结于前面的种类。因此关系 $\overset{\bar{a}}{\leftrightarrow}$ 表示两个相对比的个体不属于同一个类别 A；那么如果它们都属于类别 B，则它们是通过关系 $\overset{a'}{\leftrightarrow}$ 联系起来的；如果它们都属于类别 C，则它们是通过关系 $\overset{b'}{\leftrightarrow}$ 联系起来的，等等。如果它们没有任何共同点，除了一个属于 A 而另一个属于 U，那么关系 $\overset{\bar{a}}{\leftrightarrow}$ 只表示第二个个体属于 $U-A$；那么它就是不确定的，但一定是 $\overset{a'}{\leftrightarrow}$ 或 $\overset{b'}{\leftrightarrow}$ 或 $\overset{c'}{\leftrightarrow}$ …… 或 $\overset{x'}{\leftrightarrow}$。那么，负等价 $\overset{\bar{a}}{\leftrightarrow}$ 就是一般相异性的一种特殊情况。

② 至于不对称关系 $\overset{a'}{\to}$、$\overset{b'}{\to}$、$\overset{c'}{\to}$，等等，它们表示最大程度和最小程度，或者一价差异（见§17）。使传递不对称关系以最专业的方式阐释了一般的差异。尤其，在被嵌套类别 A、B、C、…的情况中，每个类别的特点都是一种不同的差异 $\overset{a'}{\leftrightarrow}$，$\overset{b'}{\leftrightarrow}$，$\overset{c'}{\leftrightarrow}$，包含把这些类别连在了一起，也就是 $A\subset B$，$B\subset C$，$C\subset D$，等等，建构了一种传递不对称关系（见§18）。那么，如何构想不对称关系之间的关系和所谓的对称差异呢，也就是说，一方面是相异性，而另一方面是这种差异元素，就像我们在前文中所见，它是以递增的方式在一般等价 $\overset{abc\cdots}{\leftrightarrow}$，$\overset{bc\cdots}{\leftrightarrow}$，$\overset{c\cdots}{\leftrightarrow}$ 等的弱化中出现的？

③ 这里出现的是我们还没讨论过（除了在§17中关于不确定差异关系的对称特点）的间隔差异。这些间隔差异总是建立于一种不对称关系的系统化之上。例如，假设有系列：

$$O \overset{a}{\to} A \overset{a'}{\to} B \overset{b'}{\to} C \overset{c'}{\to} \cdots$$

表示一种有序差异的序列（越来越重），我们可以立刻从中得出，有"同样的差异"存在于 A 和 O 之间及 O 和 A 之间；B 和 A 之间及 A 和 B 之间等等。然而，"同样的差异"是一种对称关系（$\leftrightarrow$）因为它没有定向，与从少到多或从多到少的有序不对称差异（$\to$）是相反的。那么它是相对的，不是相对于传播过程，而是相对于间隔，也就是相对于起点和终点或终点和起点"之间"的已知内容；换言之，它表示顶端之间的间隔在两个方向都是相同的。

然而，这些差异"之间"或间隔关系的存在属于两种组合，这两种组合能够让初级形式的关系与递减等价的相关递增差异进行对比，同时让二级形式的关系与相异性进行对比。事实上，它们的初级形式可能是根据命题的同单义乘法模式产生的，同时在系列的项"之间"插入了

$$O \overset{a}{\to} A \overset{a'}{\to} B \overset{b'}{\to} C \overset{c'}{\to} \cdots$$

一个新可能项的集合。那么我们定义关系 $O_1 \overset{a}{\to} A$ 用的是顺序关系："O_1 出现于 A 之

前"；定义关系 $A\overset{a}{\leftarrow}O_A$ 用的是："A 出现于 O_A 之后"（O_A 表示 O 和 A 之间包含的任意项，也就是不包括 O 和包括 A 之间）。同样 $O_B\overset{b}{\rightarrow}B$ 意味着："O_B 出现于 B 之前"还有 $B\overset{b}{\leftarrow}O_B$："B 出现于 O_B 之后"（O_B 代表不包括 O 和 B、即包括 B 之间包含的项），等等。因此有乘法"之前"×"之后"="之间"：

$$
(86)\quad
\begin{cases}
(O_A \overset{a}{\rightarrow} A)\times(A \overset{a}{\leftarrow} O_A)=(O \overset{a}{\rightarrow}|A),\\
(O_B \overset{b}{\rightarrow} B)\times(B \overset{b}{\leftarrow} O_B)=(O \overset{b}{\rightarrow}|B),\\
(O_C \overset{c}{\rightarrow} C)\times(C \overset{c}{\leftarrow} O_C)=(O \overset{c}{\rightarrow}|C),\text{等等。}
\end{cases}
$$

但是被等价 $\overset{a}{\leftrightarrow}$，$\overset{b}{\leftrightarrow}$，$\overset{c}{\leftrightarrow}$ 等确定的、被嵌套的初级类别的序列 $A\subset B\subset C\subset\cdots$ 本身构成了一种包含的系列化，根据的是它们各自的外延：$O\overset{a}{\rightarrow}A$、$A\overset{a'}{\rightarrow}B$、$B\overset{b'}{\rightarrow}C$ 等（见§18）。那么很清楚，这些类别 O、A、B、C 等的外延也属于命题(86)。在这种情况中，间距 $(O\overset{a}{\leftrightarrow}A)$ 包括所有分布于 O 和类别 A 本身（不包括）之间的所有项和项的集合；间距 $(O\overset{b}{\leftrightarrow}B)$ 代表 O 和类别 B（类别 A 和 A′）不包括自身之间的所有项，等等。然而，这些越来越大的间隔，它们符合在彼此包含的两个项之间的递增差异。对于每个间隔 $\overset{a}{\leftrightarrow}$，$\overset{b}{\leftrightarrow}$，$\overset{c}{\leftrightarrow}$ 等，我们可以在外延上让等价 $\overset{a}{\leftrightarrow}$，$\overset{b}{\leftrightarrow}$，$\overset{c}{\leftrightarrow}$ 等与其对应。这些等价存在于分别包含于这些间隔的项之间，要记得这些等价的意义是递减的相似性：$\overset{a}{\leftrightarrow}$，$\overset{b}{\leftrightarrow}$，$\overset{c}{\leftrightarrow}$。

尽管有这些分离了被嵌套的初级类别的系统和有序项的序列，我们可以把递增间距的初级关系与这些类别扩展的外延进行比较，因为在每个间隔内，我们都没考虑顺序一个于间隔的二级关系，可以对比它们的结构和差异性的结构。在对间隔和群集Ⅶ采用同一术语的时候，我们可以把 O 和 A、A 和 B、B 和 C 等之间的基础间隔称为 $\overset{a}{\leftrightarrow}$（见图18）；把位于间隔 $\overset{a}{\leftrightarrow}$ 中的项和包含于相邻间隔的项（也属于列 $\overset{a}{\leftrightarrow}$）之间的间隔称为 $\overset{a'}{\leftrightarrow}$；把位于间隔 $\overset{a}{\leftrightarrow}$ 的项和位于 $\overset{a'}{\leftrightarrow}$ 旁边的间隔中的项之间的间隔称为 $\overset{a''}{\leftrightarrow}$，等等。这种表达模式能让属于线性或双单义结构的间隔关系和等级结构或同单义结构的关系形成了对照，因而我们注意到某些组合是共同属于两个结构的，例如有：

$$
\overset{a}{\leftrightarrow}+\overset{a'}{\leftrightarrow}=\overset{a'}{\leftrightarrow},\quad \overset{a'}{\leftrightarrow}+\overset{a'}{\leftrightarrow}=\overset{b}{\leftrightarrow},
$$

$$
\overset{b}{\leftrightarrow}+\overset{b'}{\leftrightarrow}=\overset{b'}{\leftrightarrow},\quad \overset{b'}{\leftrightarrow}+\overset{b'}{\leftrightarrow}=\leftrightarrow,\text{等等。}
$$

此时这些相关间隔部分彼此覆盖。例如假设 x_1 位于"O 和 A 之间"，x_2 也如此，且 x_3 位于"A 和 B 之间"，那么：

$$
(x_1 \overset{a}{\leftrightarrow} x_2)+(x_2 \overset{a'}{\leftrightarrow} x_3)=(x_1 \overset{a'}{\leftrightarrow} x_3),\text{等等。}
$$

相反，如果被组合的间隔没有彼此覆盖，那么就没有重言化或是替代的加法了，而是有简单加法 $a'+a'=b'$，$b'+a'=c'$，等等，它们源自群集Ⅶ的普通组合，并表现了两种结

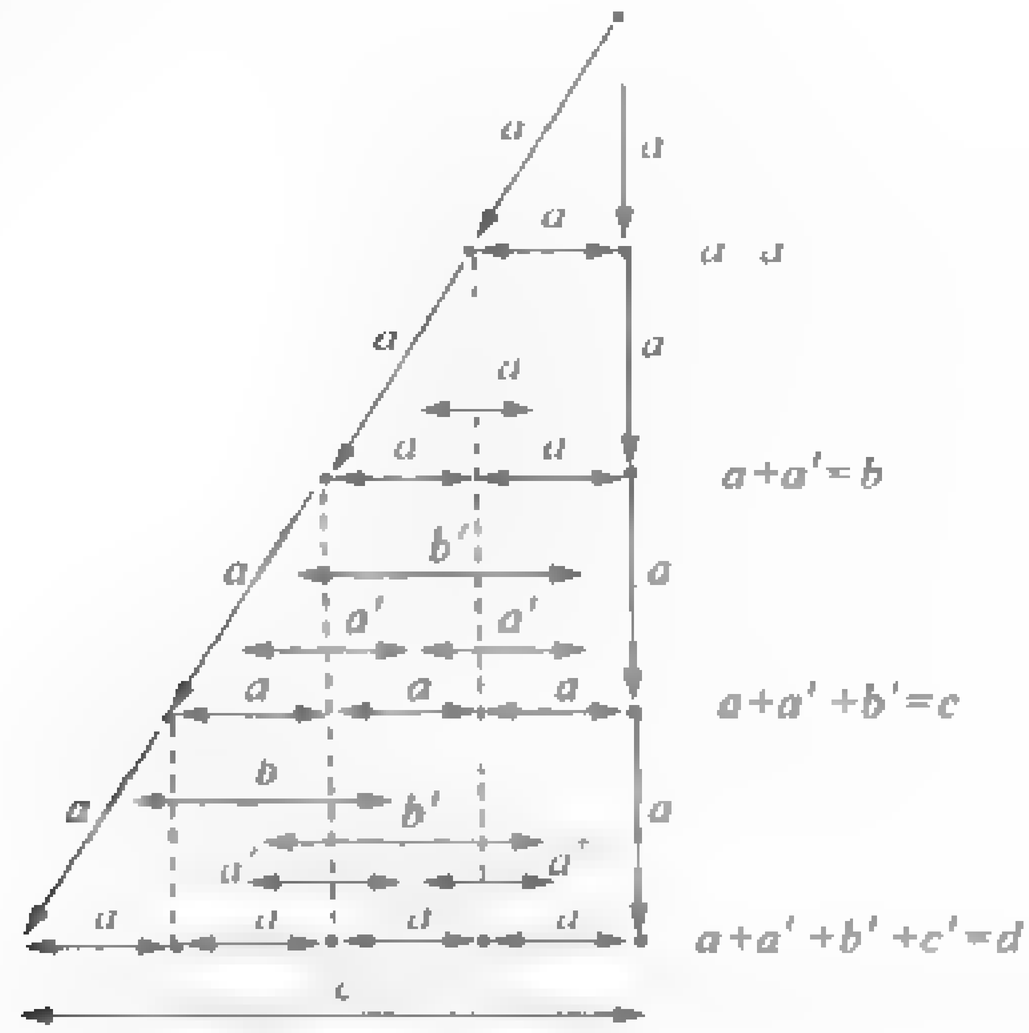


图 18

构之间的差异，尽管我们没有考虑每个区间内的顺序。

总之，尽管有这些对比，仍然存在着两种差异的主要形式，符合两种等级和线性结构（也就是完全有序的结构）：差异性（对称），表示了不同属性（一价差异）和共同属性的同时存在；和表示一种共同属性不同程度（二价或多价）的不对称关系。但是，这两种差异都符合间隔的差异，后者简单说明了对比项之间较大（且对称）的差别。那么我们可以用类似的方式组合属于完全有序结构的间隔关系（但不考虑每个间隔内的顺序）和属于等级结构（或者部分有序）的间隔关系。这样的组合减弱了差异性和不对称差异之间的对立，把前者还原为了间隔的次级关系并且让间隔的初级关系符合后者；因而间隔关系不再作为差异之外的种类出现，而是作为两个主要种类共同的元素。不过，它们仍然保持着它们的二元性。

因此，我们看到的多样化之间存在着统一性，这是八个类别和关系的群集的体系的特征。然而是否可以把它们简化为一个呢？在命题内的层面上，仍然存在着两种对比，让这种简化无法实现。一方面，我们刚才发现了完全有序或双单义结构（集合Ⅰ、Ⅴ、Ⅳ和Ⅷ）和等级结构（群集Ⅱ、Ⅵ、Ⅲ和Ⅶ）的二元性；另一方面，类别加法群集的逆运算建立在互补性上，而关系加法群集的逆运算建立在相互性上。但是我们看见（§15）类Ⅰ到Ⅲ的群集可以看作是比它们更常见的群集Ⅳ的分化。同样，我们可以把关系的群集Ⅴ至Ⅶ看成是由群集Ⅷ产生的，通过连续专门化。至于群集Ⅳ和Ⅷ，它们的同构性可以让它们被看成同一个整体结构的两个方面，一个是外延上的，另一个是内涵上的。只是，为了让这种变成唯一体系的结合有效并且由简单对应组成，那么有必要从命题内的层面或具体的层面，转变为命题间的层面，后者包含一种高级形式化的程度，并且其特征为关于前面运算的第二级幂（la seconde puissance）运算。这将是我们在第Ⅴ和Ⅵ章中看到的内容。

第四章 集合的逻辑以及命题间运算和数字之间的关系

集合的逻辑构成了算术的基础，它通过逐渐从特征为部分在整体中的简单嵌套的结构，发展成各个部分之间的联结关系，这种联结的形式十分多样且有差异。因为逻辑始终是这两个种类中第一个种类的结构，而第二种是属于数学特有的，所以集合的理论给人感觉可以实现这两个学科的完全融合：因此在弗雷格之后，罗素也承认，从基数词到类别的逻辑概念的简化，在康托尔关于集合的发现中，展示了人类精神上的伟大征服之一。这就是为什么，即使有庞加莱、布伦茨威格、布特鲁(P. Boutroux)、阿诺德·雷蒙、维特根斯坦本人以及许多其他作者，都揭露了在某些过于轻率的还原之下，被掩盖的含混与循环论证，实现足够的一般化的趋势将数理逻辑或简单逻辑与关于集合的数学理论融合为一个单一整体；因此我们有可能看起来落后于或是对立于"科学逻辑"，这是为了揭开覆盖在纯逻辑和数学之间关系上的面纱。

然而，为了尽快解决这个中心问题，我们放弃了一场现代逻辑学中极有意义的讨论。最重要的问题自然不是要知道逻辑学是否应该被看作数学的一部分，又或者是否数学反过来被"当作一种"逻辑学的广义的延伸"。真正的问题是确定逻辑学的局限：它是所有科学演绎法的起源吗？还是它只起到规范作用？如果逻辑学本身是受限的，那么它的边界是否是不可逾越的，又或者现在的逻辑学是一个还会继续发展的建构过程中的一个阶段？在这一点上，这些是教条式的应对方法，事实上它们是保守且无效的。相反，所有关于对逻辑学和数学的界定性研究都只能惠及其中的一方面或另一方面。

§ 23 集合和类别：问题的定位

关于类别和关系逻辑与数学逻辑之间的联系，形成第一个问题是确定类别和集合的世系等级。然而，这里有一个地方要注意：要确定是否这两个领域中使用了某些类似的表达来表示的是完全相同的意义。

其实，如果什么都没预设的逻辑需要从基础出发，那么数学为了同时重建数学的公理和逻辑的公理，将重新回到尽可能最一般性的概念。然而，基础，也就是最简单的东西，不一定就是最一般性的东西。因此，被我们看作逻辑结构特征的从部分到整体的联

系，并不会优先被看成是最一般性的（至少问题一下子明确了），我们需要了解是否定义“集合”的也是这同一种联系。

“布尔巴基写到，一个集合是由元素组成的，这些元素可以有某些特性，并且它们之间或者它们和其他集合的元素之间有某些关系。①”要选择一个一般性概念，以此为一本数学论著和一本高度代表逻辑形式主义的当代精神的论著作为出发点，这似乎是很困难的，然而没有什么比这个一般性概念更“基础”的概念了。首先，我们得要思考这些“特性”和“关系”的表达有什么含义，以及我们是使用什么标准来区分它们的。但是，这个“谓词”和“关系”之间的问题不是数学特有的，我们已经从逻辑的角度探讨过很多，在此不再赘述。相反，第一个必然会出现的问题是，并且从逻辑和数学之间界限的角度来看，这个问题是最为重要的：对于集合的元素来说，“和其他集合的元素有关系”的能力是什么意思？

说一个集合的元素可以拥有某些特性以及它们彼此之间有某些关系当然没有超过类别逻辑和“强度”关系的领域。因此人类的类别可以被看作一个拥有某些特性的元素组成的“集合”（我们把它们看成共同人性的对称关系），并且这些元素彼此之间有某些关系（高或矮，大或小，头骨的宽或窄，聪明或不太聪明，等等）。那么，就像我们看到的，这些特性和关系都可被还原为从部分到整体的关系：整体是定性差异或者与有关类别相关的定性等价，部分则是通过部分差异或亚类与其自己的等价构成的。于是我们假定所有数学集合都是这样，然而情况并不全是如此，我们之后再来讨论。但是某些数学集合是这样，现在我们不坚持其他数学集合是这样。相反，集合元素和其他集合元素的关系是什么呢？

在逻辑类别的情况下，这些关系可能只有三种：(1) 人类的类别(A)可以联系上哺乳动物(B)，脊椎动物(C)，等等，因此人类 x_1 不只和其他人类有关系（$x_1 \leftrightarrow x_1'$），而是和哺乳动物（$x_1 \leftrightarrow y_1$），脊椎动物（$x_1 \leftrightarrow z_1$）等都有关系。只是不论是包含，或共同属于得到的等价，或共同包含，这些都仍然是从部分到整体的关系。(2) 另一方面来说，人类可以通过定性不对称关系的方式和任何其他事物进行比较：那么人可以看成比猴子（x_1）更聪明，即 $x_1 \rightarrow x_1$；比蚂蚁更大，等等。只是这些不对称关系只有作为集合系列化中的部分关系时才有意义，它们又重新建立了部分（更小的差异）在整体（更大的差异）中的嵌套上。(3) 最后，逻辑关系的成立可能是由类别或关系的乘法构成的，也就是由双单义或同单义对应构成的。但是这些联系也是为了把类别 A_1 嵌套在乘法类别 A_1A_2 或 K_1K_2 中（群集Ⅲ或Ⅳ），或者关系群集的乘法体系中（群集Ⅶ或Ⅷ），因此规则又成了部分在整体中的嵌套。因此，根据这些嵌套的不同种类，逻辑忽视了除它们之外的其他所有结构。

① 布尔巴基，1939，第一卷，第2页。

相反，把一个数学集合 E 的元素和另一个集合 F 的元素联系在一起，就是想象一个从 E 到 F 的“实现”(applications)集合，这种实现关系绝不会服从于限定条件。其主要原因是，数学家不像逻辑学家那样把一个集合的元素只看成关于定性的或区分性的嵌套或关系，数学家总是会说任意元素，准确地说就是取决于这些不同的嵌套。

最明显的例子就是双映射(bijection)。但是我们会在后文中再来讨论这种运算(§25)。现在我们仅考察另一个例子：“多个集合的产物”。假设有 E 和 F 两个不同或相同的集合。那么就有二元组(x, y)，第一个元素 x 是 E 中的任意元素，而第二个元素 y 是 F 中的任意元素，这些二元组是一个新集合的元素，我们将这个新集合称为通过 F 产生的 E 的集合，记为 $E \times F$。我们马上看见了这一运算与逻辑的双单义乘法(群集Ⅳ和Ⅷ)之间的相似性。然而它们并不是同一个运算，因为二元组 x, y 是由“任意”元素形成的，而不只是根据 x 和 y 之间的相似或差异而形成。假设有由两个对象 x_1 和 x_2 形成的集合 E 和由三个对象 y_1、y_2 和 y_3 形成的集合 F，这两个集合的产物就有六种组合：x_1y_1、x_1y_2、x_1y_3、x_2y_1、x_2y_2 和 x_2y_3。同样，类别 B_1 是由两个单称类别 A 和 A' 形成的，类别 C 是由三个单称类别 A_2、A_2' 和 B_2' 形成的，那么这两个类别会得到一个由六种组合形成的产物：A_1A_2、A_1A_2'、A_1B_2'、$A_1'A_2$、$A_1'A_2'$ 和 $A_1'B_2'$。然而，尽管这两种运算如我们看到的那样有一些相似的形式结构，但它们是完全不一样的。在两个集合的产物 $E \times F$ 的情况中，每个二元组其实都是与其他二元组相等的，因为它们都是由“任意”元素构成的。相反，两个类别比如 B 和 C 之间的乘法，只有在它把某些不同的品质赋予每个类别 A_1A_2、A_1A_2' 等的时候才有意义。因此任何基础性的乘法类别都不等于其他类别，除非是作为整体类别 B_1C 的一部分。只要我们这样将图 9 的双项表和它的六个定性不同的格子比作数学乘法 $2 \times 3 = 6$，那么我们马上就能发现这两种运算的差异。

所以(这只是第一个例子)在逻辑(强度)类别和数学集合之间，存在着很大的差异，这种差异将通过相邻嵌套得到的完全定性(见第一章§1)与或多或少的定性或任意性区分开来：那么数学运算首先是被看成了一种对应逻辑运算的一般化运算。但这只是第一步，因为我们可以有理由说这种差异只是程度上的，它主要是和运算的内容有关，而和非运算的形式结构有关，然而，实际上这种一般化假设了一种结构本身的改变。集合的元素在变成“任意”的同时，也就是失去个体属性的同时，它变成了其他元素之间的一个简单“单元”：这就是为什么集合 E“任意”元素 x 和集合 F“任意”元素 y 之间的乘法组合构成了一种元素到元素，或是一元部分到一元部分的直接关系，而属于逻辑乘法的二元组 A_1A_2 不是一种部分到部分的直接关系，而是一种通过了整体 B_1C 中介和其次级嵌套 A_1 和 A_2 的非直接关系。所以“两个集合的产物”已经是一种运算，这个运算摆脱了部分到整体的关系并进入了部分之间关系的方向。

① 见图 9 的具体举例(§15)。

§24　“抽象集合”与“差异”的概念

在§23中讨论的集合的概念，可以说是“具体的”，因为集合的元素具有一些“特性”。那么我们可以把这些特性比作决定逻辑结构类别、亚类和个体元素的品质（这些类别被我们称为“弱结构化”和“非结构化”类别；见定义11和12）。但关于这点最好回到维持同一个集合元素的关系的问题上来，因为这些关系可以是由部分到整体的关系组成，就像逻辑关系那样，或者是（在“结构化类别”定义13的情况中）由部分本身之间的直接关系组成。比如整数或对数这样的集合，有理数的集合，或是直线和半圆上的点这样的不可数集合，元素的特性和元素之间的关系是被建构法则（数字的序列，线性内容，等等）所决定的，这种法则能够不通过部分到整体的关系就将一个元素与另一个元素联系起来。

但是对具体集合而言，其元素具有特性，它们不构成集合理论的最一般性的结构。为了把数学的“一般性”比作逻辑的“基础性”并且为了证实猜想，根据这个猜想，即两个概念之间的差异确实在于部分到整体的关系（强度的量）和部分之间的关系（外延的和数字的量）的二元性，那么我们首先应该讨论的就是最一般性的集合，随后再来讨论属于具体集合的运算。

然而，最一般性的结构是被我们所说的“抽象集合”所建构的：(1)“抽象”集合是元素被剥夺了特性的集合；(2)在抽象集合的元素之间，除了区分两个不同元素的关系（$x \neq y$）和把一个元素与其本身视为相同的关系（$x=x$）之外不存在其他关系；(3)在抽象集合E的元素和这个元素之间只存在属于关系（$x \in E$）

那么问题就可以明确提出了：一个抽象集合是否可以被简化为逻辑类别，否则差异是如何构成的呢？

这四个建构特点中的两个都存在于逻辑类别中：同一和属于。第二个特点是我们在上一段中讨论过的，抽象集合的元素没有特性，更不用说个体品质：这个特点只构成了“任意”的一般化。至于第四个特点，它有可能区分两个任意元素（$x \neq y$），我们可以说它像前两个特点一样也存在于逻辑类别的领域中：在人的类别中，皮埃尔总是可以与保尔区分开来的。抽象集合和逻辑类别的唯一差异就在于一般化的问题，也就是程度的问题？

但是这样的同化带来了以下困难。

一个逻辑类别的不同元素，比如皮埃尔和保尔，只是根据质的嵌套的复杂体系来区分的，这个体系最终会得到单称类别；后者事实上只是以一个或多个不同的品质作为特征的，也就是通过“相异性”或是被限定不对称关系的规则。然而，在抽象集合中，元素是“失去特性的”(1)。那么在这种情况下，元素要怎么被看作“有差异”呢(2)？

顺便在这里我们看到了区分"普遍"和"基础"的意义差异。数学家们只对"一般化"概念感兴趣，他们对这些概念分析得很透彻。相反，有一些"基础"概念在数学中经常使用，但人们却没有想到要继续分析它们。比如说，"差异"的概念，这个概念是十分重要的，因为整个逻辑学在一定意义上就是一种等价和差异的理论。

很明显，如果一个抽象群集的元素没有特性，它们就不能彼此区分，因此即使没有任何差异品质也把它们看成有差异的话，我们自然就可以引入一种能够区分它们的运算。逻辑学家的任务就是确定这个运算是如何构成的。关于项根据特性表现得差异，我们已经知道这种差异关系可能有三种：因为有或没有一种品质("相异性"：定义26—27)而产生的关系，不对称关系决定的差异和表示了"间距"对称差异的关系，这第三种差异的形式同时也是可以简化为其他两种的(见§22)。但是，如果没有任何特性的话，如何理解差异的运算呢？

当然，数学家总是可以从公设入手。如果我们问数学家，抽象集合中的两个元素 x 和 y 的不同特征是如何被辨认的，他只会回答这是它自己设定的。又或者他会回答，在具体集合中元素是通过其特性而进行区分的，而抽象群集只不过是忽略了这些特性的具体群集，是为了只考虑元素的多样性和差异。但是这第二个回答肯定就构成了一种脱困的办法，因为想要通过特意忽视的特性来证实元素的差异，我们就还要暗地里参考它们在抽象群集里的情况。如果同时具有特性的差异又没有特性，那么我们就还要证明这两个公设在逻辑上是如何兼容的。

于是我们想提出一个非常幼稚的问题，就像我们想回到基础时那样：通过哪种运算方式来区分抽象集合中的任意两个元素呢，换言之，我们怎么知道，在缺少元素的所有不同特性时，抽象集合不能被还原为唯一的一个元素呢？

当然，我们可以提出$(\exists x)(\exists y)(x\in E, y\in E, x\neq y)$。但是如果这样的一个公设可以用于建立一套形式体系，那么它完全不能解释进行的智慧运算是什么，也不能说明 x 是通过什么区别于 y。然而，如果 E 的元素确实不是通过它们自己的属性来区分的话，那还可以区分它们的唯一方法就只剩下在它们之间引入一种顺序。当然是去除了所有性质内容的顺序，也就是说这种顺序不参照这种元素的性质，而是以连续顺序的名义从外部引入了一种联系。事实上，列举的顺序是最后一种差异形式，它存在于我们不知道特性因此无法多言的元素之中，除非元素不同。

确实，给任意集合安排顺序的这种可能性需要选择的公理。尽管如此，至少所有有限的集合都可以定顺序，在参照这种可能的列举顺序的同时，就可以把任意元素都设想为不同的，并把集合设想为不可以被还原为唯一元素。

在有限的亚类中，区分就在于引入可能编号的任意顺序或是简单顺序列举。

但是这点很重要，所有列举的可能顺序都是彼此相似的，因为元素本身并没有不同属性：不论从 x、y、z 或 z、y、x 的顺序能得到什么，总是会有第一个元素在和第二个元素比较之后被放在一边，为了把它和第二个元素区分开，而在此期间，第二个元素已经

和第二个元素联系起来。因而不同的可能顺序间有普遍相似性。

所以，很明显地，我们看到抽象集合不是逻辑类别。没有特性的集合元素从属性的角度来看都是相等的，因为任何品质都不能再区分它们。然而，它们因为至少可以通过亚集合排列顺序而各不相同，即使我们用相同的非定性元素建构的有序序列都彼此相似。然而，强度逻辑领域只承认定性的等价或差异，没有可以针对既相等又有序元素的运算。所以，强度逻辑不认为相同元素建构的所有可能顺序都具有普遍相似性：列举序列"皮埃尔、保尔和计"在质量上和序列"保尔、计和皮埃尔"是不一样的，因此，一般化序列(第一)→(第二)→(第三)→等等超越了强度逻辑，它从可能的不同定性顺序中提取出了一种适应于所有定性顺序的共同顺序相似性。

总之，即使缺少不同的特性还是把抽象集合的元素看成全部不同的方式，可以通过超越了整体逻辑和部分逻辑运算的那些运算，把元素作为即相等又可系列化的样貌直接相互连接起来。事实上，所有属性的消除和不同可能列举顺序的一般化相似性将元素从前面的嵌套中抽离出来了，也就是从具体或定性的类别和关系中抽离出来，以便把它们作为同质元素直接联系起来。因此关于元素彼此的内在关系，抽象集合的概念证实了我们已经举出的关于多个集合元素之间的外部关系的例子：集合理论通过元素或部分之间的直接联系区别于逻辑学，与部分到整体的关系是相违背的，后者在集合理论中同样被承认，但是仅作用于强度逻辑的领域内。

§25　任意双单义对应，强度逻辑和数字之间的联系与等效关系

作为关于部分关系和整体关系的逻辑学的开端，集合理论如我们所见地立刻要开始涉及这些简单的包含和属于关系。甚至在集合内部集合理论也超越了这些关系，通过考虑任意元素但不非要给它们定性。尤其在集合之间关系上，集合理论更是超越了这些关系。

从这个双重角度来看，则出现了一个在逻辑的历史中起到重要作用的问题：类别的概念和基数概念之间，以及不对称关系概念和序数概念之间的关系问题。

我们把对于集合 E 中的所有元素 x 都联系着有且只有一个集合 F 中的元素 y 的对应称为函数(fonction)或映射(application)。

在这方面，逻辑学也承认这种实现或函数，因为逻辑可以把两个类别相乘，但是我们已经见到过(§15)这些纯逻辑的映射是怎样保持隶属于部分在全体性中的嵌套。相反，集合理论使用的函数或隐射可以建构元素到元素的直接关系，因为集合理论处理的是任意元素。

这种从部分至整体关系到部分之间(或者是这样的元素)关系的过渡在这些主要函

数的领域中是尤其清晰的，在集合理论中使用的双映射就是这些函数，它们同时建构了整数。

定义 31　如果 E 的两个不同元素 x 和 x' 上对应着 F 的两个不同元素 y 和 y'，那么映射 $f:E\to F$ 就是单射的。如果对于所有 $y\in F$，存在(至少)一个 $x\in E$ 如 $f:x\to y$，那么这个映射就是上射(surjective)的。一个既是上射也是单射的映射是双映射或双单义对应。

如果在两个集合 E 和 F 之间存在着一个双映射，那么我们说 E 和 F 是等效的或它们有相同幂，记作 $|E|=|F|$。

假设 $F'\subset F$(F' 是属于 F 的一部分)且存在双映射 $f:E\to F'$，那么我们说 E 的幂比 F 的幂小，记作 $|E|<|F|$。

集合 E 的部分的集合，即 $\mathcal{P}(E)$，是 E 的全部亚集合的集合，其中包括空集合 $\varnothing$ 和 E 本身。

提出这些概念之后，我们马上发现了在运算机制上的一种差异，它区分了集合理论使用的双单义对应和我们见到在强度逻辑"群集"中使用的对应。我们还发现了集合"幂"概念和逻辑类别"外延"之间的对立。

为了从后者出发，接下来关于这一点的讨论都是必要的，其对立是由以下内容构成的：1° 任意两个集合或同一个集合的任意两个部分总是可以从幂的角度进行直接比较，因此集合 E 可以被认为与 F 幂相等或是比 F 幂低或高，或者 E 的部分 X 的幂可以比作 E 的部分 Y 的幂，不受任何限制。2° 相反，类别 A 的"外延"只有在 A 或 B 是彼此的一部分(通过包含)时才能被比作类别 B 的外延。例如，我们知道鱼类的外延比脊椎动物类的外延小，因为前者是属于后者的；"动物"的类别和"非植物生物"的类别外延相等，因为这两个类别是相同的，也就是它们彼此包含，但是我们不可能知道鱼类的外延比软体动物类的外延大或小还是两者相等，因为它们之间没有包含关系(除非清点它们的数量或者把元素和元素对应起来，但是准确地说问题是要知道非强度运算是否还能返回到逻辑运算)。同样，我们也不知道两个同时包含于相同类别 B 的类别 A 和 A' 它们的外延是否相等，因为它们之间也没有包含关系：如果 B＝动物，即使我们知道 $A\subset B$ 且 $A'\subset B$，脊椎动物(A)和非脊椎动物(A')的外延也没有办法进行比较。

这种逻辑"外延"和集合"幂"之间的差异凸显了只使用在强度逻辑上部分到整体的排他关系和属于集合逻辑的部分之间或全体性之间联系的对立。

因此，我们得到集合对比中的双单义对应(定义 31)和类别逻辑与关系逻辑的乘法(群集Ⅳ和Ⅷ)里双单义对应之间的主要差异：后者是必须定性的，也就是说只有在两个项表示同一种属性(把它们归于同一类别)或者支撑着同一种关系(内涵上)时才把它们对应起来；相反，集合理论的双单义对应是任意的，也就是说它能将集合 E 的任意一个项联系到集合 F 的任意一个项上，只要这两个项符合"一对一"的关系。于是，差异就在于，逻辑对应是部分在全体性中的嵌套关系，而数学对应是元素到元素或部分到部分

的一种直接关系。

但是全部问题就是要知道这是都是表面差异还是真实的对立：我们还需要思考，作为集合间"任意"双单义对应的产物，整数是否可以被还原为类别和逻辑关系，或者逻辑结构的运算改变对于把逻辑结构一般化为数学结构是否必要。

其实，集合之间的（任意）双单义对应能够建构起整数。两个有限的集合有相同的幂就意味着它们包含相同数量的元素。还有正整数的"集合"N可以看成是无限集合的有限部分的幂的集合，N中的顺序关系 $x<y$ 只不过是决定这个幂集合顺序的关系；两个正整数的和是两个"集合幂"的和或没有共同元素的部分之间的和的恒等函数[1]。

然而，两个有限集合等效到集合元素数字相等的过渡，或者从通常方式来看是从"幂"到基数的过渡，自然引导了逻辑学家，如弗雷格和罗素，通过区别逻辑类别和集合，从而把整基数看作是可以被还原为类别的外延了。其实，我们可以让两个集合成为双单义对应，并根据不同的幂而抽取等价的类别的对应，那么每个整数看起来都像一个限定类别：所有通过项的双单义对应彼此相等的类别。那么数字0就是空类的类别，数字1是单称类的类别，数字2是双项类的类别，诸如此类。根据一个著名的例子，我们只需要把星座、基督的弟子、拿破仑的元帅等等组成双单义对应，就能得到数字12。因此算术和逻辑之间的所有区别都没有了：逻辑可以不经过对数字的预设来处理简单类别，而算术可以快速地起源于类别的逻辑，因为建构了"等价类的类别"："皮尔这样说过，在某个时刻，这个数字的概念自己成立了，但是为了给它下定义，没有任何必要重新讨论这是什么；严格来说，算术是逻辑的一个简单分支[2]"。

同样，基数只是类似系列关系的类别。那么 n 个对象可以用不同的方式排序，我们总是可以（在有限中）从这些传递不对称关系中抽取彼此类似的顺序关系：0→第一个对象→第二个对象→……所以基数只是和所有这些可能顺序共有的顺序，事实上也就是彼此类似的系列关系的类别。

然而，如果从集合的幂出发建构基数是无懈可击的，那么将数字还原为逻辑类别的外延就是完全不同的工作。庞加莱、布伦茨威格、阿诺德·雷蒙还有很多人都碰到了这些困难。从这本书中我们所处的集合结构分析的角度来说，很明显分析也建立在循环论证上，因为分析是为了提取出逻辑类别的数字，同时事先在逻辑类别上实施一种不属于类别群集的、并且在其中只引入了数字的运算：任意单元之间的双单义对应，对立于定性对应。

其实，这完全证实了我们到目前为止所见到的类别和集合的差异，在不考虑决定类

---

① 布尔巴基，1939，第一卷，第39—40页。

② 皮尔，1918，第122页。这位作家如此实在以至于他批评数学家把数字建立在幂的相等之上："这是一种有争议的态度。相反他似乎很自然地把数字 n 定义成了一个我们只知道幂为 n 的集合"（第111—112页）。换言之，在一个苹果篮中，数字不是在这些苹果和其他集合的对应中：它就在这个篮子里！

别并区分元素的属性时，把两个逻辑类别的元素组合成双单义对应，刚好把元素转化成了简单单元并把类别转化为了单元集合：把数字简化为类别，同时在类别中引入列举的先决条件，同时并不是只有类别才包含这些条件。

更简单的是要证明，如我们所见，存在着一种实现双单义对应的逻辑运算：那么为了阐明属于还原论的循环论证，我们只需要确定这个运算和定义集合等效的运算之间的差异。例如，假设有定性类别的体系 K_1，在这些类别中以单称类别的形式分布着脸的不同部分：A_1 = 鼻子，A'_1 = 额头（得到 B_1 = 鼻子和额头），B'_1 = 左眼，等等，再假设 B_2 是两个单称类别构成的体系，其中 A_2 = 皮埃尔脸上的部分，A'_2 = 保尔脸上的部分。把 B_2 乘以 K_1，我们就得到了一种 A_1A_2，A'_1A_2，B'_1A_2 等和 $A_1A'_2$，$A'_1A'_2$，$B'_1A'_2$ 之间的定性双单义对应，也就是说皮埃尔的鼻子对应保尔的鼻子，皮埃尔的额头对应保尔的额头，等等。但是这种运算完全不是为了把皮埃尔的鼻子对应保尔的右耳，这从刻画逻辑类别的质性等价（对立于刻画数字的单元之间的等价）的角度来看，不比建构一个由海星和袋鼠组成的动物类别更有意义。事实上，如果项 A_1A_2 和 $A_1A'_2$，A'_1A_2 和 $A'_1A'_2$ 两两对应，是因为它们都包含于相同的类别 A_1，A'_1，B'_1，等等，其中的每一个都是被表示共同拥有某些属性（一个鼻子，等等）的等价所定义的。除了这些共同嵌套之外，双单义对应完全失去了它在类别的强度逻辑（也就是我们通常所说的类别逻辑）中的意义。然而，罗素把星座、拿破仑的元帅还有耶稣的弟子对应起来从中提取出数字 12 时，他完全不是通过逻辑类别的运算，也就是建立在质性等价上的运算进行的：即使在巨蟹座、内伊元帅和圣彼得之间没有共同属性，他还是通过一种直接对应把它们连接起来了，因为所有的质性等价使他不考虑同样类别中的任何其他元素。但是，这样的话，他就没有把它们当作逻辑元素了：他在对应项之间引入的等价变成了一种单位和单位之间的简单等价：那么巨蟹座、内伊元帅和圣彼得就变成了简单的算术单位，等效集合的任意（未定性）元素。因此，自然可以说，基数到逻辑类别的简化只是在于把数字引入类别，因为消除了所有属性（也就是说消除了所有内涵的性质等价），也是因为元素被转化成了同质单位，这已经构成了一种潜在的计数。

至于序数间到"类似"不对称关系的转化，也是完全一样的。以任何方式给元素分类并把这些分类看成彼此"类似"［把命题(87)看作相似性］，就是去掉系列关系的所有属性，把它变成一种任意"相继序列"：那么就是把元素看成简单的顺序号码，把联系元素的关系看成了纯顺序的接续。过程也是一样的：在分开所有属性的同时，以和逻辑类别被基数化相同的方式把相继关系算术化，在这两种情况中，我们离开了强度逻辑领域而进入了外延逻辑或集合逻辑的领域。

我们刚刚提出的关于罗素式用謬法的反对意见是很容易通过检验公式来证实的。假设有类别 L 和类别 L'（得到 $L+L'=M$）都与类别 X 相乘。那么从 X 的角度来看就会存在一种 L 和 L' 之间的定性双单义对应，即 $L \overset{X}{\longleftrightarrow} L'$。但是如果 LX 的部分类别因此对应了 $L'X$ 的部分类别（根据有关皮埃尔和保尔的脸的格式），因此在 L（或 L'）和

整体($L+L'=M$)之间会存在一种定性双单义对应。即：

(87) $L \overset{x}{\ll\!-\!\gg} L'$ 因此 $L \overset{x}{\ll\!-\!\gg} (L+L')$ 即 $L \overset{x}{\ll\!-\!\gg} M$

例如，鱼类骨骼的主要种类对应了两栖动物的骨骼，然后是爬行动物、鸟类，最后是哺乳动物的骨骼；通常来说这些种类也会对应脊椎动物的骨骼。

相反，假设两个有限集合 E 和 F 是等效的，那么这种等效不会延伸至它们的合并集 $E+F$。假设 E 和 F 都有 20 个元素，那么 20 不能对应于 40。所以：

(88) $|E|+|F|$ 那么通常来说 $|E| \neq |E+F|$

定性双单义对应和"任意"双单义对应之间的第一种对比就表现在这两种运算的结构中，有一个很有意思的特点：定性双单义对应有一种叫作"反映性"(reflejectivite)的特性，也就是说部分(乘法亚类 LX 或 $L'X$)对应了整体(乘法总类 MX)。相反，在有限集合的情况中，等效没有反映性。但是，这就是这种对比的有趣之处，无限集合恰好表示了反映性。例如，偶数集合只构成整数集合的一部分，它双单义地对应了整数集合，因为只需要把每个整数乘以 2 就能得到偶数序列：

1 2 3 4 5 …

2 4 6 8 10 …

但是在无限集合和类别与关系的双单义乘法中，部分在乘法上对应于整体并不意味着因为逻辑类别的数量仍然不确定那么它就是无限的。相反，这构成了逻辑和集合理论之间的第二种基本差异，有限和无限的差别在精确的逻辑意义上并没有任何意义，因为逻辑数量仍然是强度的。任意双单义对应，(通过元素之间的直接联系)构成了一种外延的，甚至是数字的量化，所以这种对应是唯一一种通过不断扩大可以发展为无穷大的不同种类。另一方面，如果说超限数是反射的，是因为(如我们在下一段中所见)它把数字的两个基本运算元素区分开了，也就是基数化和序数化，这两者在无限中仍然是不可分割的。

第三个很明显的困难就是，总是会有：

(89) $$A \cup A = A$$

不论 A 是类别或者等效类的类别，也就是数字。我们知道，为了避开这个困难，罗素借助了一种合适的方式，就是用等效但不相交的类别分别代替组合(89)中的两个项[①]。

罗素论题中的这第三个难点在加法的领域中完全对应了乘法领域中的第一个难点。事实上，假如有限数字不重复，那么在有限中和在无限中一样也可能有反映性。因为情况并不如此，应该得要在数字本源的运算机制中为这种重复找到一个解释；然而，罗素的理论必须把数字重复和数字的构成法则分离开，用类的等价来解释数字的形成，这些类又集合为一个类别的类，而解释数字的重复不是用类的类别逻辑加法，而是基础类别的逻辑加法。这里就有一种基础的含混，不可避免地存在于从数字到逻辑类别外

① 罗素，1925—1927，第 54 页。

延的简化中。集合理论没有这个问题，因为两种幂的加法建立在没有共同元素的集合的组合上。但是性质（或者强度）类别的逻辑只建立在部分到整体的关系上，不再可能导致这样一种还原，也不会不落入循环论证的误区，如我们刚刚发现的含混一样。

§ 26　类别和关系的“群集”到运算“群”的过渡

尽管弗雷格和罗素论文中的难点不能证实一个完全二元论的立场，就像被庞加莱采用并被布劳威尔再次采用的观点那样，如果根据这种观点来看，整数可能是来源于一种特殊的直觉，与逻辑毫无关系——算术和强度逻辑之间，还有集合理论和“弱结构化”类别逻辑之间虽然存在着基本差异，但仍然有可能实现从类别和关系到集合和数字的一般化。但是要分析这样的一般化是由什么构成，不能以提取数字的借口把数字投射到类别中，也不能为了方便简化而提前把类别和集合看成是相同的。

那么问题就在于接下来的项中——所有逻辑（我们已经看过的关于命题内运算的逻辑和将会重新在命题间运算里发现的逻辑）都建立在部分到整体的嵌套关系上：“所有”“几个”“一个”（在同一的含义上）和“没有任何”是强度量化只承认的几个属性。数学在这些也涵盖它自身的关系上加上了外延数量，后者源自关系之间或全体性之间的联系。集合理论的“几乎全部”的概念（——除了有限数量的全部或者除了一个“弱”）就是逻辑忽视了的数学专有概念。“任意”双单义对应把一个集合的元素联系在另一个集合的元素上，同时因为引入了可重复单位和幂等级，还让外延数量有了一种数字特点——强度数量或部分和整体的关系到外延或数字数量，也就是部分之间关系的过渡是如何进行的呢？这就是问题所在。

强度嵌套的专有结构是通过“群集”建构的，群集是和群一样的组合可逆的集合结构，但这些组合是相邻的，也就是只建立在包含和互补的关系上。

一般化的问题把逻辑存在导向论数学存在，也就是将解释从强度群集引导向数字群的过渡。

有一种直接方式可能是通过简单地消除群集的冗余性和吸收运算，如 $A+A=A$ 和若 $B=A+A'$ 则 $A+B=B$。但是要明白，如此快速的过渡只是表面上简单，实际上它包含群集布局的三种主要变化，为了提取出逻辑机制，我们先来阐述清楚这些变化，而不是只是简单地引入它们。① 第一个问题是要理解基础类别 A，B'，C'，等等，如何可以通过彼此之间直接组合的方式，从它们所属的全体性中脱离出来。事实上，类别逻辑只构想了一个与其嵌套相关的亚类，并且只通过属和种差来下定义。② 第二个问题是要知道这样分离的两个亚类是因为什么原则而被看成是等价单元：这里又出现了“任意”双单义对应，并且要建立与定性对应的关系。③ 最后，必须证明，如果在基础类别 A，A'，B'，C'等之间引入一种等价关系，那么我们可以用重复 $1+1=2$，即 $A+A=2A$

来代替冗余性 $A+A=A$（因为 $A+A'=B'$等）。其实，我们很清楚两个不相交的部分完全不冗余；但是如果我们同时把它们看成是等价的，也就是看成在所有组合中都是可以彼此替代的（所有 $A'=A$，等等），那么哪一个准则可以让我们放弃逻辑冗余性呢？

我们还需要解释从类别的强度逻辑到集合与数字外延逻辑的过渡。真正的办法不是放弃逻辑集合的某些运算（冗余性），而另外增加一些不属于其中的运算（等效），并这样直接返回到数字；真正的办法是从部分在整体中嵌套的初始限制范围出发，通过部分之间关系的连续外延来形成逻辑群集的一般化运算。

然而，假设我们从类别加法群集出发（Ⅰ），可以实现一般化的运算就是替代，也就是类别的构成等价；事实上，类别 A 和 A'在 B（假设 $B=A+A'$）和 C（假设 $C=A+A'+B'$）等等之下是相等的，但在 A 和 A'下不相等；类别 B 和 B'在 C 下是相等的，但在 B，B'，A'或 A 等等之下不相等。至于这些等价的一般化，是以牺牲逻辑类别的特点而得到的，并且显然没有考虑它们的数量；同样还有质性。其实，一组单元从定义上来说是同质的，也就是说一个单元与另一个单元之间没有性质的差异，而即使是单称基础类别的集合也是通过不同属性的集合来刻画的，这些属性限定了等价和替代。第一种要引入群集并将其变为数字群的改变就是等价或替代的一般化，就是不考虑这些属性。那么我们提出一系列单称基础类别 A，A'，B'，C'，等等，并看看群集Ⅰ的规律会变成什么：

$$A+A'=B,\quad B+B'=C,\quad C+C'=D,\text{等等。}$$

如果在分离限定替代的不同属性时，我们因此在基础类别 A、A'、B'、C'等之间引入一种一般等价，也就是反过来说 A 和 A'在 A 和 A'下是相等的，而只在 B 下不相等；B'在 A、A'和 B'下等于 A 和 A'，而只在 C 下不如此，等等。因此，最初只是由 A 和 A'构成的类别 B，也可以通过用基础类别 B'和 C'替代 A 和 A'来变成由 B'和 C'构成；最初由 A、A'和 B'构成的类别 C，也可以通过用基础类别 L'、M'和 N'替代前面的类别来变成由 L'、M'和 N'构成，等等。那么通过逐步一般化的替代，我们得到了下面的等价：

(90)
$$A=A'=B'=C'=\text{等等}$$
$$B=(A+A')=(B'+C')=(D'+E')=\text{等等}$$
$$C=(A+A'+B')=(C'+D'+E')=(F'+G'+H')=\text{等等}$$

等等。

然而，如果我们仍然坚持群集的法则，那么显然让 A 和 A'之间的等价不仅存在于类别 B 下（即 $A\overset{B}{\leftrightarrow}A'$），而且存在于 A 下（即 $A\overset{A}{\leftrightarrow}A'$）也就是把 A 和 A'视为相同，意味着我们应该有 $A+A'=A+A'$而不是 $A+A'=B$；因此前面的同一性应该会得到一种一般冗余性：$A=B=C=\cdots=A$。怎样避免这种情况呢？

这个问题，表面看来似乎即使不是虚假的也可以说完全是形式上的，但实际上全然相反，这个问题是很真实的：它实际上是，假如我们把个体转化为等价单元，我们如何能对它们进行区分呢？从设想看来，不会是通过不同属性，就像我们清点不同物品那样，要不就是通过物品的特性，要不就是通过物品在空间或时间中的位置；其实，我们已经

通过与替代运算相同的一般化而区分了所有属性。那么差别的原则是什么呢？

然而，我们看到（§ 21）一个抽象集合中失去特性的元素的不同特征不止包括顺序关系，只要我们不把集合只限定在一对不同的元素上：那么"不同"就意味着"逐步被区别"。

在这里我们接触到了从类别和逻辑关系到数字的过渡中最重要的一点：事实上，数字假设存在一种类别和不对称关系的运算概括。如罗素所想，单独考虑从基数到类别的简化是不可能的，另一方面单独考虑从序数到不对称关系的简化也是行不通的，因为在有限中，基数化与序数化是不可分割的。为了解释从逻辑到数字的过渡，我们需要融合类别的加法和不对称关系的加法。只有这种融合才能够解释为什么属性特有的单元是不同的：因此只有这种融合才能拒绝重言式 $A+A'=A$（设 $A'=A$）而偏向迭代 $1+1=2$，或 $A+A=2A$），这同时也保证了从数字到无限的发展。

其实，如果单称类别 A、A'、B'、等等，虽然因为消除所有属性变得相等，但是它们不冗余，是因为一旦离开了属性，它们必然重新出现以任意列举顺序形式出现的顺序。只要这些单称类别仍然是定性的，它们没有一般顺序，那么就是说我们可以以不同的特殊方式列举它们：类别（包括基础类别 A、A' 和 B'，我们可以让它们就以这种顺序排列或者排成 B'、A、A'，等等。但只要这些类别是定性的，这有一种排列顺序就能与其他顺序区别开：皮埃尔和保尔构成了一种与保尔和皮埃尔不同的列举顺序。这就是为什么在群集 I 中基础类别与顺序无关，因为它们不包含任何必要的顺序。相反，一旦单称类别失去了属性并转变成单元，即使我们交换两个 A，那么顺序 $A+A$ 还是和 $A+A$ 类似：其实除了排列它们的可能之外，这两个顺序仍然是无差别的。这就说明所有可能的顺序都变得类似了，并且此后有一种必要顺序是通过所有这些可能顺序的共同顺序建构起来的，换言之，不论序列 $A+A+A+\cdots$ 中的排列如何，总是有一个没有前一个类别的 A（=第一个），一个跟在第一个之后的 A（=第二个），等等。

那么我们发现：在分类的基础类别通过类别的建构中已经涉及的替代运算的一般化而变为全部相等时，已经出现在逻辑列举顺序中的不对称关系通过类似的一般化而变得全部类似，但是这次针对的是相继序列。初始系列是：

$$O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a'} A' \xrightarrow{b'} B' \xrightarrow{c'} C' \xrightarrow{d'} \cdots$$

但是，如果可能替代已变得相等的 A、A'、B'、等等，也同样可能置换所有的相继的基础关系，得到它们的等价：

(91) $$\xrightarrow{a} = \xrightarrow{a'} = \xrightarrow{b'} = \cdots$$

所以

(92) $$O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} \cdots$$

只是，因为所有的顺序得益于这种一般化的"相似性"都变得类似，那么就构成了一种独特的顺序，如：

(93)
$$O \xrightarrow{a} A = \xrightarrow{a}$$
$$O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} A = \xrightarrow{b}$$
$$O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} A = \xrightarrow{c}$$

在这其中，关系 $\xrightarrow{a}$、$\xrightarrow{b}$、$\xrightarrow{c}$ 等的意义是非定性的纯粹相继序列，这种意义介入了数字单位的序数化。

因此，通过对类别的等价和不对称关系相继序列的不可分割和彼此关联的双重一般化，我们可以用一个简单的运算 +1，融合类别加法和有序差异或传递不对称关系的加法，从而实现从逻辑发展到数字的过渡。

(94)
$$(+O = O \xrightarrow{a} O) = +0$$
$$(+A = O \xrightarrow{a} A) = +1$$
$$(+B = A + A = O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} A) = +2$$
$$(+C = A + A + A = O \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} A \xrightarrow{a} A) = +3$$
等等

所以，我们得到了整数加法集的组合：$+A = +1$ 和迭代 $A + A = A \xrightarrow{a} A = B$，也就是 $1+1=2$ 而不再是 $A + A = A$。一个正的、分数的乘法集，通过排除 0 且其相等运算是 $\times 1$，那么我们会以同样的方式把群集Ⅳ和Ⅷ融合在一个体系中，得到如：

(95)
$$A \times A = 1$$
$$B \times A = (A \xrightarrow{a} A) \times (\downarrow^{a} A) = 2$$
$$B \times B = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & A \\ \downarrow^{a} & & \downarrow^{a} \\ A & \xrightarrow{a} & A \end{array} = 4，等等。$$

从前面展开讨论的主题中，我们可以得到一个结论。

第一，在这样阐述从类别和关系的逻辑到数字体系的过渡时，我们没有把数字简化成强度逻辑，而只是简单地指出了连接它们的转变的连续性。我们证明了，在通过对类别和不对称关系的建构运算的一般化，我们得到了整数，但这种一般化本身却使数字脱离了强度逻辑的范围。事实上，整数是类别和不对称关系的一种综合：它是既可替代又可系列化的单元的一种组合。然而，只要出现了刻画非数学逻辑的属性，那么相关因素或是可替代的（类别和等价关系），或是可系列化的（不对称关系），但不可能同时是这两种情况。那么整数既不可被简化为强度逻辑，也不是完全不同的：整数在一定意义上构成了完善，然而是通过一种运算的新运算综合，这种综合必然是逻辑上可分离的。

第二，从强度逻辑到数字的过渡的本质方式是，将逻辑只应用于部分到整体关系的运算，一般化为部分之间或元素之间的关系。事实上，整数的加法群中类别的加法和不

对称关系加法的群集转变满足了以下三个条件，这三个条件都表示了部分或元素之间的联系，而没有再通过整体：① 取消了相邻带来的限制，也就是类别之间的互补关系（B下的A和A'，C下的B和B'，等等）带来的限制，这意味着基础类别之间的一种直接联系；因此数字拆分了单位，赋予了它们一种完整的运算流动性，而逻辑仍然让它们嵌套在类别或关系的个体性内，在这之外它们没有任何意义。② 等价和相似性的一般化，意味着在任何元素之间都可能有重新独立于嵌套的替代。③ 为了重复取消了冗余性（通过融合加法 $A+A$ 和加法 $\rightarrow$），这让所有元素都可能和另一个元素直接组合。因此逻辑群集和数学群集的三个主要差异就是把元素或部分才能够嵌套它们的个体性中释放出来并把它们直接联系起来。

第二，如果把基础类别从嵌套它们的初级类别中拆分出来（我们刚刚替代了拆分的一种主要形式），就把它们变成了不相交的部分。需要注意，从强度逻辑到集合理论，也就是到数学最一般性部分的过渡，完全不受限于前面的内容。除了数字的建构，可能还要考虑从强度数量到非数字外延数量的整体过渡。在不可数无限集合的情况中，就像趋向限制点的被嵌套间隔体系，达成了一系列“几乎所有”的关系，这些关系属于超越了强度逻辑的外延量化，并且没有因此蕴涵一系列单位。如果我们从群集Ⅰ和Ⅴ出发，那么就只有部分或差异之间的直接联系，例如以下形式：

(96) $$A'>B'>C'>\cdots$$

或者

(97) $$\overset{a}{\rightarrow}>\overset{b}{\rightarrow}>\overset{c}{\rightarrow}>\cdots$$

那么在这种情况下有外延量化，因为有部分的有序对比，但这种联系没有达到类别和不对称关系的融合，因此不像有限整数那样有迭代运算

第二部分　命题间的运算

第五章　命题计算

本章旨在阐明命题计算的元素并陈述决定这类运算组合与可逆性的基本规律。事实也是如此，任何命题间运算的结构都受三种不同的可逆关系的制约：否定（或称简单的互补）；互反（或互逆）（我们将发现它是通过等价关系构成的互补）；最后是所谓对射（即"或"与"和"的排列）。我们的任务是——与其他学人通常所做的工作有所不同——把这三方面的关系置于显著的地位，并求三者之间存在的联系，因为可逆性驾驭着所有命题逻辑，如同它驾驭着分类和关系逻辑的功能一样。

§27　命题间的(interpropositionnelle)运算：问题的立场

命题内的(infrapropositionnelle)运算（定义3）[1]是由一个命题被分解为一些元素而被重新组合所形成，而命题间的运算则令一些命题不受到分析，如 $p \cdot q$，等等，而只考虑其"真"与"伪"，并把它们作为一个新的系统加以组合。命题逻辑就形成着一种自主的运算，它仅依赖命题间组合的形式（定义4）[2]，并且完全不顾任何组合元素的命题

---

[1] 定义3　所谓"命题内运算"是指这类运算：它可能把一个命题分解为若干元素（这种分解可达于不同的程度）并能通过元素的转换构成新的命题，于是这样生成的命题之"真"和"伪"等值仅由那些元素间的组合所决定。——编者

[2] 一个运算的"内容"是由"现实资料"（张本）所构成，或由某些词所代替，至于"形式"是指在那样的代换中并不发生变化的东西。——编者

内的内容。命题计算就这样遵循着它们特有的规则。

无论从应用的角度还是从纯理论的角度看，命题逻辑的自主性构成了现代逻辑学的主要成就。从理论上讲，命题计算的独立性实际上表明有一个高于类别逻辑和关系逻辑的形式化阶段的存在，所以，就其内容而言，也存在一个形式的新的解放：既然类别和关系的逻辑已经揭示了不依附于其本身内容的形式结构，命题逻辑就可能被认为是建立在一种其内容由低级水平形式构成的形式之上的。命题计算表示一种形式之上的形式，而形成一种第二次幂（或第二阶）运算，或叫作在第一次幂（第一阶）上进行的运算。诚然，从命题内的角度看，所有命题都可归结为类别和关系运算的一个陈述（我们把这称为第一次幂运算）。它们的真与伪取决于这些运算本身的规则；设把这些运算组合成一整体，再在它们上面进行运算，那就构成一个第二次幂的运算系统。

但是，关于两类运算之间的关系问题，大家还有歧义。人们普遍接受的命题计算的自主性（独立性）也提供了两种解释的余地。这种自主性意味着关系的缺乏或是单向的关系。因此，命题逻辑远非构造逻辑大厦的高级阶段，将只是逻辑大厦的基础。这就是人们根据命题逻辑法则演绎而来的类别逻辑和关系逻辑的法则，而逆向演绎是不可能的。但另一种观念也是说得通的，根据这一观念，在关系逻辑和类别逻辑与命题逻辑之间存在着对应。然而，一旦人们把对应的阶段理解为是重叠的而不是并列的，那么这种对应问题以及由此引起的同构关系问题就必然会被提出。如果命题间逻辑整体组合的那些命题确实包含着一定的命题内运算的“形式”，并作为它们各自的逻辑内容，那么，这就是牵涉到我们要讨论的形式化过程的全部意义。

在揭示这方面经常遇到的两个主要问题之前，我们要注意：尽管各有原则上的宣言，大家都或明或暗地承认在两个令人注目的阶段之间存在某种关系。譬如，罗素（B. Russell）和维特根斯坦（L. J. J. Wittgenstein）从“元素的”，甚至是“原子的”命题出发，逐步上升到最为一般的命题，从而，实际上在命题内逻辑和命题的一般性逻辑之间建立起紧密的连续性。如果这一连续性从逻辑原子论的观点看来具有兴趣的话，那么，它对于整体结构论说来是多么更加具有兴趣啊！

于是，由对形式化两个阶段之间关系的研究所引出的两个基本问题，就是运算的整体性问题和数学推理与逻辑之间的关系问题。

从运算整体性方面看来，现代逻辑呈现一种令人困惑不解的景况。众所周知，在建立一个抽象理论中演绎的实际进程须经历许多步骤：首先给严格分类的一些概念下定义，且要建立一个各种关系的系统；然后根据这些定义和系统，构造一座演绎大厦，而它的结构是与类别和关系相互关联着的，因为这些类别和关系恰好被选来去完成考虑中的构造；最后仍要回到出发点，并且进行一个新的步骤，即对整体进行公理化。这个公理化，在一种经过提炼的形式下，保持着原先构造的精华，同时将它们简洁地置于形式组合的某些法则的统辖之下。既然命题逻辑的目的是提供演绎的一般理论，它也当然对某些应用于任何命题组合的规则感兴趣，然而，（古典的——编者）命题逻辑者却深信

仿佛应把那些命题当作孤立的因素来处理，而忽视其他生成法则，例如组合性法则。换言之，人们冒称一个连贯的演绎系统，但没有使之建立在严格分类和系列关系的先存的整体基础上，那么命题就是被从瓮中或逻辑钢琴里一个接一个、一双连一双地提取出来，然后再根据博弈法则加以组合的。人们似乎历来是这样构成一种理论的：运算规则导致了特定形式结果，而命题计算则有条理地列举所有可能的转换，同时把它们还原为一些公理。以上所说都未道出这一真理：庞加莱(H. Poincare)把演绎构造比作一局博弈，称之为"全局的行动"，是与特殊举动相对立的。把逻辑限制在特殊的举动规则内，而把全局的一般行为推给认识论或心理学，这是一种极为狭隘的解释；相反，我们认为，逻辑既应研究整体的结构，也应研究部分的组合，既然我们能在类别和关系的逻辑方面成功地实现这一愿望，那么就应设法在命题逻辑方面也力求达到这一目标。

如果我们从这样一个颇为自然的假设出发：一个命题系统，虽能从其纯粹命题间的机制进行研究，总是包含着已组织好的类和关系体系，那么，尽管当命题间运算为本身形式化时保留完全脱离在其下面的内容作抽象的权利，而探索是否与类和关系(即在把它们作为未分解的元素来探索)的总体结构相对应，也是合理的。因此，人们显然可以推导出从命题间的集合系统的公理与命题内的系统是同构的；站在逻辑的原子论立场上是不可能的；这种对应，相反地，站在运算整体论立场上倒是真实的。尤其是我们将发现，事情的解决涉及尼克德(Nicod)著名的"唯一公理"，它蕴涵着一种"群集"结构，但我们要强调一点，这种关系的调整毫不危及命题逻辑的自主性。从形式观点看来，这一调整不过是简单地表明这种逻辑包含着类别逻辑领域内一种可能的"实现"或"具体模式"；但从自然的前后演变来看，这种模式的构造等于阐明了形式化过程本身和形式化过程中不同阶段的"形式"之间的关系。我们不能否认，其中存在一个使逻辑学感兴趣的问题，而不仅仅是使认识论感兴趣的问题。

§ 28　来自二命题可能组合的十六种联系

假定命题 p 是真(1 值)，或假(0 值)，我们说，命题 p 从集合 1,0 中取得一值。现在，我们来考察一下 f: 1,0 → 1,0 所有的映射，于是得出下表所载各值：

(98)

p	1	2	3	4
1	1	[illegible]	[illegible]	1
0	1	0	1	0

2 1 中的每个映射可被看作是作用于 p 的一个运算，并且我们清楚地看到，可能把第二项映射作为代表 p 的否定，标记为 $\overline{p}$。

现在来考虑一下具有相互独立的两个命题 p 和 q 的情况，每个命题都可取得 1 值或取得 0 值。这意味着整理好的每一对 (p,q) 将从这一集合的乘积 $\{1,0\}\times\{1,0\}=(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)$ 取得它们的值。如果要写出 2^4（=16 种）映射（或函数）$g:\{1,0\}\times\{1,0\}\rightarrow\{1,0\}$，我们便可得出下表：

(98 乙)①

(p,q)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(1,1)	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
(1,0)	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
(0,1)	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
(0,0)	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1

尽管有些烦琐，如果要去考察三个命题（2^{2^3} = 256 个映射）、四个命题（2^{2^4} = 65 536 个映射）等等情况，也是不难的。

目前限于表(98 乙)，可指出的是 16 种映射中的每一项都能够定义一个可用来作解释的运算。这样，第 6 行可解释为“p 和 q”的合取，我们把它标记为 pq（或 $p\cdot q$），把第 3 行解释为非排它的析取“p 或 q”，我们记作 $p\vee q$，等等。

在仔细研究这 16 种映射之前，我们再从另一个侧面做一分析，令 g_i 为表(98 乙)中任何映射中的一项，根据布尔(Georges Boole)的方法写出下式

(99) $g_i(p,q)=g_i(1,1)pq\vee g_i(1,0)p\bar{q}\vee g_i(0,1)\bar{p}q\vee g_i(0,0)\bar{p}\bar{q}$

以 g_7 为例，由于

$$g_7(1,1)=g_7(0,1)=g_7(0,0)=1$$

和

$$g_7(1,0)=0$$

于是

$$g_7(p,q)=(1)pq\vee(0)p\bar{q}\vee(1)\bar{p}q\vee(1)\bar{p}\bar{q}$$

上式可读作：

$g_7(p,q)$ =（真 p 和 q）或（伪 p 和 q）或（真 p 和 q）或（真 p 和 q）

如果不写以“伪”开始的一项并取消括弧中“真”的标记，则得出

$$g_7(p,q)=pq\vee\bar{p}q\vee\overline{pq}$$

这就是第 7 号运算的完全析取的正常形式。

现在重新填写前表得 1 值处用相应的算符代替，得 0 值处用一短横取代：

① 我们在表中列出 16 种映射（函数）的次序，是为了使每一偶数行成为前一奇数行的“否定”。

(100)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
pq	—	pq	—	—	pq	pq	—	pq		pq	—	pq	—	pq	—
pq	—	pq	—	pq		·	pq	$p\bar{q}$	—	—	$p\bar{q}$	$p\bar{q}$	—	—	pq
pq	—	pq	—	pq	—	pq			$\bar{p}q$	—	$\bar{p}q$	—	$\bar{p}q$	$\bar{p}q$	-
pq			pq	pq		pq		pq		pq			pq		pq

为了对这16种映射进行分析，并理清它们各自的意义，现有两个可行的方法。一是绝对地遵循它们的命题间的"形式"。这样人们就可指出第5行，其特征是以pq、$\bar{p}q$和pq等真值(同pq的伪值相对立)，它表现着命题p和命题q的"不相容性"；因为，如果p和q不能同时为真，只能要么一方为真另方为伪，要么双方皆伪，这就得出它们的不相容的结论。另一种方法则从相反的角度来考虑这16种二元排列和它们各自的意义，同时求助于这些命题间排列所包含着的命题内的形式。第二种方法对这样的命题计算来说是新奇的，因为这一计算准确地从整个命题的内容中抽象出来。但作为预备分析，它是完全合理的，而且它保证着命题的逻辑和命题内运算间的联系——这种联系在随后恢复的独立形式下仍然是抽象的。

因为根据它们的真、伪值，p和q二命题的16种可能排列的每一项都包含一个不同逻辑意义，这一论断的必然性毫未获得"先天的"证明。例如，当夏·瑟路斯(Serrus)告诉我们，这16个数目"可能先天地借助组合分析来确定"，而且上面那个表格是"穷尽一切的"①，要使逻辑原则服从于特殊的数学运算是会感到困难的。毫无疑问，这一运算足以证明排列的数目不会超过16，但它也丝毫没有向我们说明为什么这16种可能性中的每一项都蕴涵着不同的逻辑意义。

然而，把表(100)同充当16种排列中每一项内容的命题内的形式进行一次比较，那就可以显示被命题所决定的每项排列，同被与命题p和q相当的类别的嵌套和非嵌套所决定的某一形式之间，存在着一种双向单一映射的对应和互反的对应。

因而，设有一命题函数ax，把它同一个类别结合起来是可能的，只需某些事物的类别满足该函数的条件：$\hat{x}\ ax$便可成立。如果$x_1 \in \hat{x}\ ax$，则ax_1就是一个真命题。同样，它也可能把类别定义为$\hat{x}\ \bar{a}x$，如果使得$x_2 \in \hat{x}\ \bar{a}x$，则命题$ax_2$为伪。现把$P$称为分类中的第一类，把$\bar{P}$称为第二类，它们的"并"定义着论域：$U=P\cup\bar{P}$。然后再考察一下另一个命题函数$bx$，给出两个与之相应的类别$Q$和$\bar{Q}$。由于$Q\cup\bar{Q}=U$，我们可得出：

$$U=(P\cup\bar{P})\cap(Q\cup\bar{Q})=PQ\cup P\bar{Q}\cup\bar{P}Q\cup\bar{P}\bar{Q}$$

尚待做的工作只是建立起对应，如

① 夏·瑟路斯(Ch. Serrus)：《逻辑通论》，1945，第18页。

$$p \leftrightarrow P,\quad \bar{p} \leftrightarrow \bar{P},\quad q \leftrightarrow Q,\quad \bar{q} \leftrightarrow \bar{Q}$$

使得表(100)的16种运算精确地同上面乘积的嵌套所决定的16种排列相对应。这样，这些嵌套的集合就同表(100)中第一行：pq、$\bar{p}q$、$p\bar{q}$、$\bar{p}\bar{q}$相对应；其中前三项①$PQ \cup \bar{P}Q \cup P\bar{Q}$与第3行$pq$、$\bar{p}q$、$p\bar{q}$相对应，余可类推。不管哪些类别的内部结构如何（数学集合或弱结构化类别，及其他）这种对应始终是真的。按集合论的观点，类别或总体外延V将会同考察中的参照集合相对应，至于16种可能的排列（包括零集和全集V本身）组成着相应的"部分的集合"。但需要指出的是，如果用集合的语言来表达P、Q、$\bar{P}$和$\bar{Q}$等类别，那么在这些集合中只求助于包含和互补的关系，即是说，与元素的乘法相反，只求助于总体与部分之间的关系（集合的"乘积"：见§23），或"幂"的关系（参阅定义31）。换句话说，不能超出强度量化的结构，亦即群集结构。

然而，根据后者的观点，两种意见顿时对立起来。一种观点是，如果类别（和关系）的群集必须服从二分法划分（互补性）的原则，那么P和$\bar{P}$或Q和$\bar{Q}$的等类别二分法，以及只有真、伪两值而不顾其他的全部命题的二价逻辑，也是如此，这是与多价逻辑相对立的（对此我们将在第八章中论及）。另种观点则认为，我们刚才提到的类别的乘法系统构成着第四种形式（forme Ⅳ）的"一个群集"，即我们所见到过的所有类别群集的最一般形式的群集。这两种意见使我们觉察到命题内的群集和命题间二价运算的群集之间的同构性。我们将在第六章中还要谈到。

我们即将简单地逐个考察表(100)中的每一行，为了弄清其意义，把它同从P、Q、$\bar{P}$和$\bar{Q}$四个类别的组合中提取出来的"模式"相对应。把命题p和q转译成这些类别的模式，即把"$x \in P$"和"$x \in Q$"（即"x属类别P"，等等）的形式的表述作为命题p和q的"体现"(realisations)：当"$x \in P$"为真，则命题p亦真，当"$x \in \bar{P}$"为真，则p为假。此外，我们每次将以"弱结构化"（定义11）②的类别中取出的一个模式为例，以使理解那些最基本的可能的模式也足以构成命题计算的一种完整的体现。

例：我们假设类别P为海生动物，类别Q为脊椎动物，那么$P \cup Q$表示海生动物和脊椎动物的并，类别PQ为海生脊椎动物。这样，如果p表示命题$x \in P$，q为命题$x \in Q$，那么$p \vee q$就是命题"p或q"，pq为命题"p和q"。

Ⅰ．完全肯定：$(p * q)$

我们一般用"重言式"一词来表示第一种排列（pq、$\bar{p}q$、$p\bar{q}$、$\bar{p}\bar{q}$），这一排列对应了四对可能的同时肯定。鉴于许多明显不同的含义都被归属于赘余这一名词下，我们宁可把这一运算称为"完全肯定"。此外，这种排列一般不用特殊符号（除了在更广义上）来

① $\bar{P}\bar{Q}$项为空集。

② 定义11 许多类别之一（例如类别B）中那些个体只被它们的共性(b)所联系着，而不容许b同B所属的类别C之共性c，或B所包含的类别A之共性a作任何运算，那么，这些类别就叫作弱结构化的类别。——编者

表示。我们却采用了一个明显的符号(*)来表示运算的完全肯定，因为这在下述工作中是必不可少的：$(p*q)$式以后就意味着 p 和 q 的 pq，$p\bar{q}$，$\bar{p}q$ 和 $\bar{p}\bar{q}$ 并拢起来的四种组合受到了肯定。

从类别之间的关系看，完全肯定$(p*q)$对应于双向单一映射乘法：

$$(P\cup\bar{P})\cap(Q\cup\bar{Q})=PQ\cup P\bar{Q}\cup\bar{P}Q\cup\bar{P}\bar{Q}$$

(见图19)。用命题的术语来表达，完全肯定就被写成：

(101) $$(p*q)=\mathrm{d}f(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$$

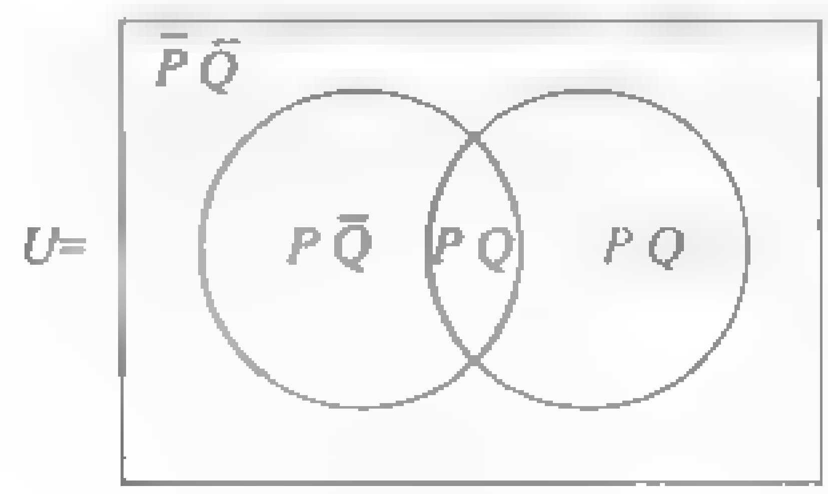


图 19　完全肯定

(自图19起至图31止，左边的圆代表类别 P，右边的圆代表类别 Q)

它的真值[见表(98乙)]将是：(1 1 1 1)。

例：如果 p ＝“x 是一种脊椎动物(P)”而 q ＝“x 是有肺的(Q)”，那么，下述四种组合都是真的：$p\cdot q$(＝“x 是用肺呼吸的脊椎动物”)；$p\cdot\bar{q}$(＝“x 是不用肺呼吸的脊椎动物”)；$\bar{p}q$(＝“x 不是脊椎动物，但靠肺呼吸”)；$\bar{p}\bar{q}$(＝x 既不是脊椎动物，也不靠肺呼吸”)。

Ⅱ．完全否定：(o)

完全肯定的互补运算，也就是对完全肯定的否定，即“完全否定”，使得四种组合 $p\cdot q$，$p\cdot\bar{q}$，$\bar{p}\cdot q$ 和 $\bar{p}\cdot\bar{q}$ 的每一运算为伪，因此完全否定相当于一个四重空集的个排列，我们用符号(o)表示：

(102) $$(o)=\mathrm{d}f(o)\vee(o)\vee(o)\vee(o)$$

人们往往用“矛盾”来表示这一排列，但我们不沿用这个词。理由有二，首先，这种排列也是一种真实的运算，它不表达作为状态的矛盾，而是表达一种运算否定另一运算这一事实(参见：顺运算及其逆运算)①。关于一个运算的最好证明就是完全否定构成着完全肯定的否定(式中集合上的横线表示它的否定)。

(103) $$\overline{(p*q)}=\mathrm{d}f\,\overline{(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})}=(o)$$

其真值[见(98乙)]为：(0 0 0 0)。

另一理由是，人们流行叫作“矛盾”的东西，一般不是由上述关系构成，譬如，现有两个命题“x 是一种软体动物”和“x 是一种脊椎动物”，严格地说它们并不是矛盾的，而

① 至于完全否定所起的“同一性运算的作用”，请参阅§39。

是不相容的(见Ⅴ)。大部分人所谓的矛盾就是互逆的排斥和不相容性。特别显著的例子就是通常用来表达非矛盾原则的 $p \cdot \bar{p}$，竟被认为是 p 和 $\bar{p}$ 的相互排斥(见Ⅶ)!

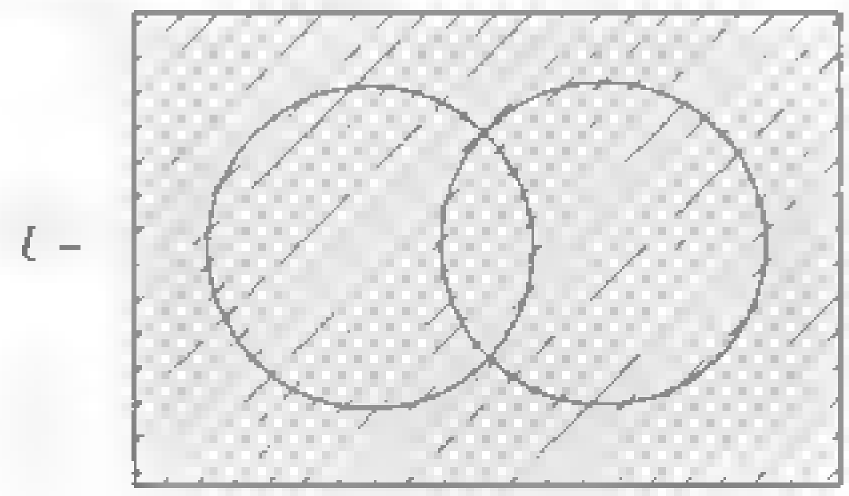


图 20　完全否定

Ⅲ. 非排斥性析取[①]或三肢式析取：$(p \vee q)$

现在令 $p \cdot q$、$p \cdot \bar{q}$ 和 $\bar{p} \cdot q$ 等组合是真，但 $\bar{p} \cdot \bar{q}$ 为伪，那么，在 p 和 q 间构成的排列为一个具有三肢交替性质的，即三肢式的选言推理：或 p 为真，或 q 为真或二者都为真，但这二种之一为伪的情况是被排斥的。用集合的语言来表示，交替命题是与部分地析取的两个类别的结合相对应的：$P\bar{Q} \cup PQ \cup \bar{P}Q$，仅仅排除了 $\bar{P}\bar{Q}$。用命题语言表示，于是得出：

$$(101)\qquad (p \vee q) = df\ (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$$

其真值排列：(1 1 1 0)。

例：(见图 21)如果 P = 肺管呼吸的脊椎动物，Q = 以鳃管呼吸的脊椎动物，就有无鳃以肺呼吸的脊椎动物($P\bar{Q}$)、无肺以鳃呼吸的脊椎动物($\bar{P}Q$)以及同时属于这两类的脊椎动物(PQ)，但不存在既无鳃也无肺的脊椎动物。如果 $p = x \in P$，$q = x \in Q$(而且 $U = P + Q$)，那我们就得出 $p \vee q$ 即 $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$

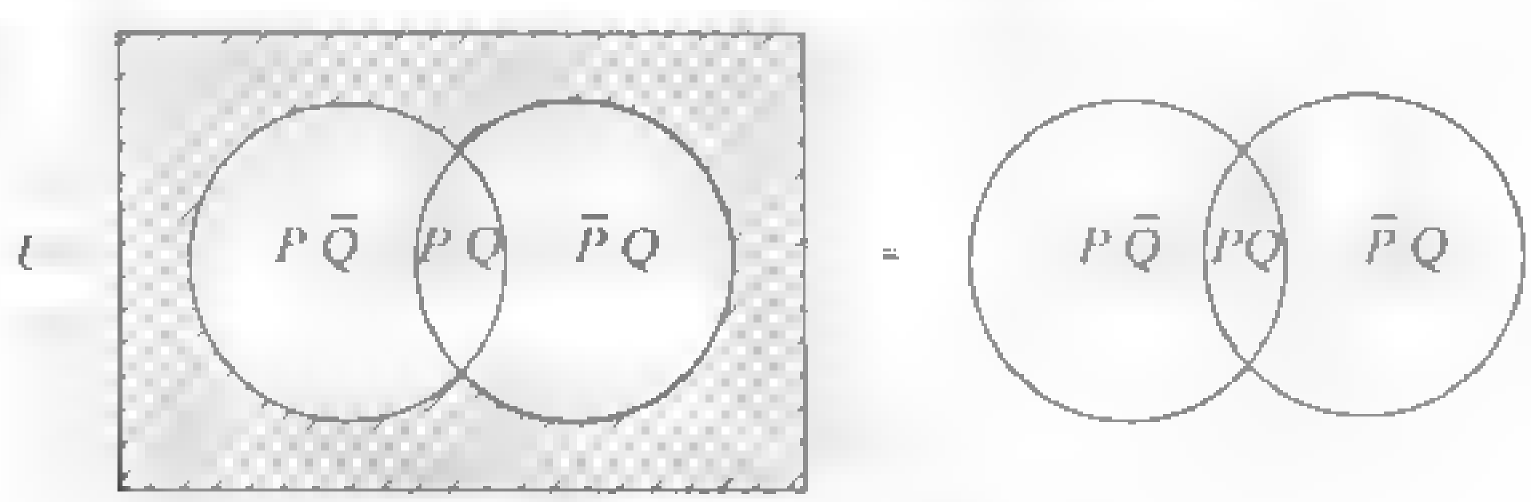


图 21　非排斥的析取

Ⅳ. 合取否定：$(\bar{p} \cdot \bar{q})$

三肢式运算的互补运算(即它的否定)是由 $\bar{p} \cdot \bar{q}$ 的肯定所构成，因为这一结合是在运算Ⅲ中被排斥了的。$\bar{p} \cdot \bar{q}$ 的肯定(排除其他三种可能性)是通过“非 p、非 q”来表示的，以类的语词表达的话，它就同($P\bar{Q} \cup PQ \cup \bar{P}Q$)的补对应，即同($\bar{P}\bar{Q}$)相对应：

例：如果 P = 多细胞无脊椎动物，Q = 脊椎动物，$\bar{P}\bar{Q}$ 的结果将由“非 P 非 Q”的原生动物所构成。如果 $p = x \in P$，$q = x \in Q$，我们就为原生动物给出 $\bar{p} \cdot \bar{q}$ 的真值。

---

① 通常简单地用“析取”一词来表示这种运算，但这是为了与“合取”(Ⅺ)相对照。

合取否定可以下式表示为交替运算的否定：

(105) $$(\bar{p} \cdot \bar{q}) = \mathrm{d}f\,(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

其真值排列：(0 0 0 1)。

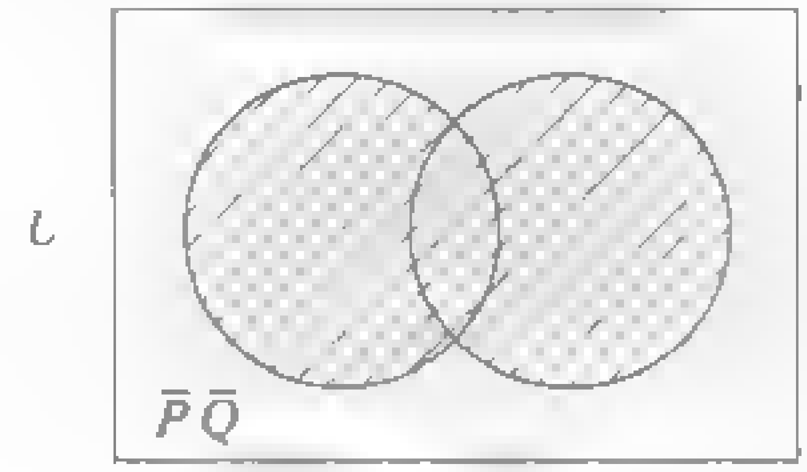


图 22　合取否定

Ⅴ. 不相容：$(p|q)$

现在我们假定第一种组合$(p \cdot q)$欠缺：这意味着 p 和 q 二者互不兼容，即两个命题之一只有在另一欠缺的情况下才存在：

(106) $$(p|q) = \mathrm{d}f(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

其真值排列：(0 1 1 1)。

例：如果 p＝“x 为脊椎动物(P)”，q＝“x 为昆虫(Q)”，则类别 PQ 为空集，而所有的 P 都是 PQ，所有的 Q 都是 PQ，并且存在类别 PQ。如果所有 PQ 亦不存在，即是说，倘若一切的动物 U 都只是脊椎动物或昆虫的话，那就不仅只有不相容，还有“互反排斥”(见Ⅷ)。

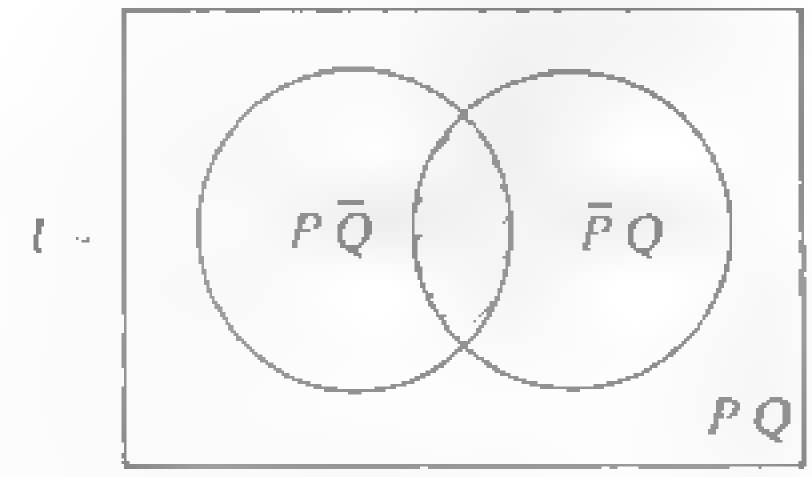


图 23　不相容

Ⅵ. 合取：$(p \cdot q)$

不兼容的否定(补运算)是对$(p \cdot q)$的肯定，由于只有这一结合才会被$(p|q)$所否定：

(107) $$(p \cdot q) = \mathrm{d}f\,\overline{(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})}$$

根据定义，合取$(p \cdot q)$是对两个命题(p 和 q)一起的同时肯定。

其真值排列：(1 0 0 0)。

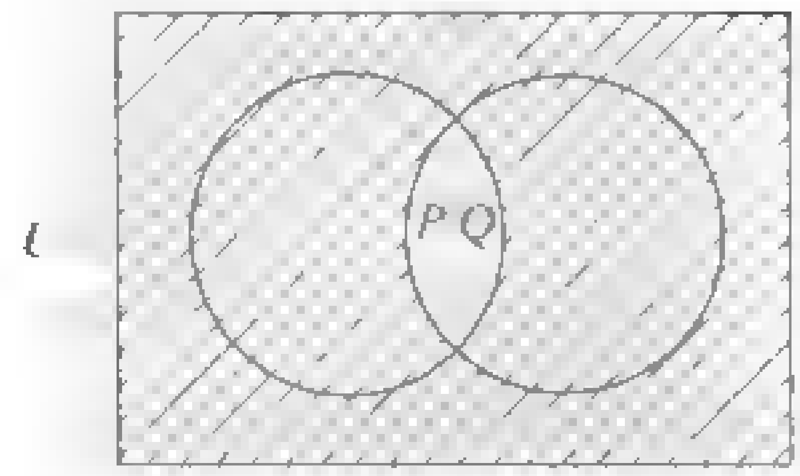


图 24　合取

例：如果 p “x 是水栖动物(P)”，q “x 是哺乳动物(Q)”，合取($p\cdot q$)表示的鲸类是真的，并且，与唯一的类别 PQ 相对应。

Ⅶ. 条件性的：($p\supset q$)

如果这些合取(pq)、(pq)和(pq)是真的，而 pq 为伪，人们就可给出命题“如果 p 为真则 q 亦真”①：

(108)　$$(p\supset q)=df(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$$

其真值排列：(1 0 1 1)。(见图 25)

例如：如 p “x 是哺乳动物(P)”，q “x 是脊椎动物(Q)”，我们仅仅得出 种情况是真的：PQ(都是有脊椎的哺乳动物)，PQ(非哺乳的脊椎动物)和 PQ(非脊椎的、也非哺乳的动物)，但类别 PQ 为空集，因为不存在无脊椎的哺乳动物。

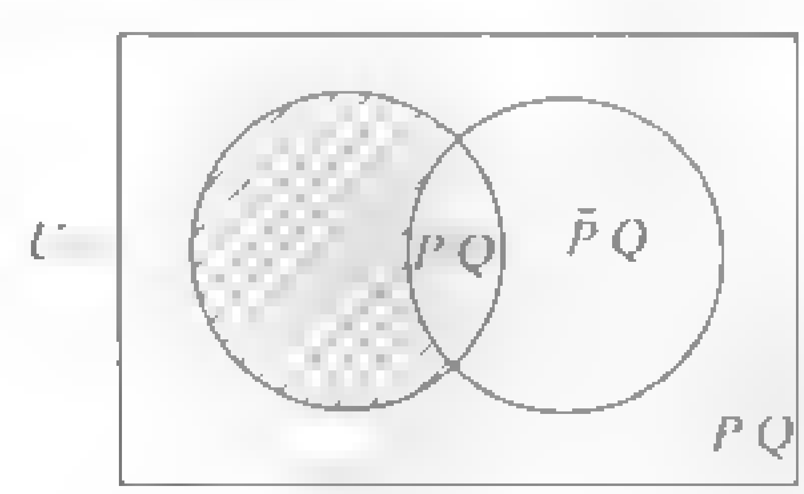


图 25　条件性的

Ⅷ. 非条件性的：($p\cdot\bar{q}$)或($p\supset q$)

条件性的否定是 $p\supset q$ 的补运算 $p\cdot q$，因为只有这种合取 $p\cdot q$ 被条件性运算所排斥：

(109)　$$p\cdot\bar{q}=df(\overline{p\supset q})=df(p\cdot q)\vee\overline{(\bar{p}\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})}$$

其真值排列：(0 1 0 0)。根据类别之间的关系看来，“非条件性的”是与类别 PQ 相对应。

---

① 通常逻辑书上把($p\supset q$)所给出的这 命题称为“蕴涵”。——编者

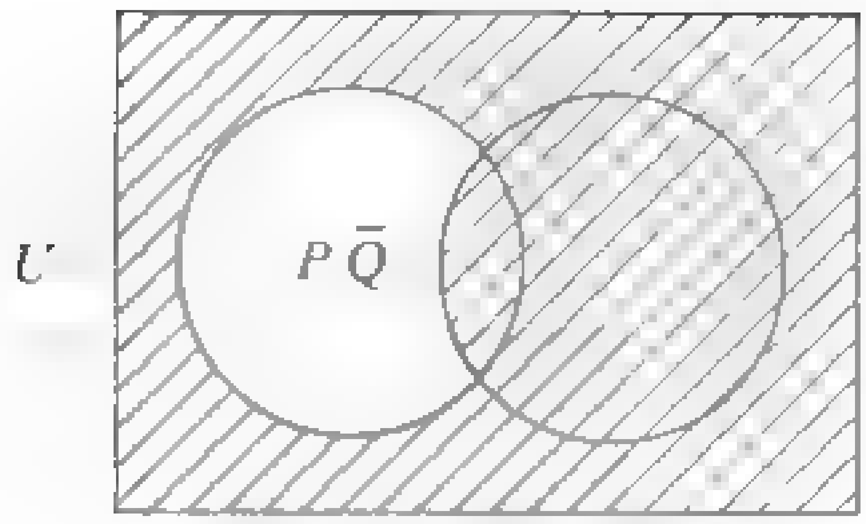


图 26 非条件性的

Ⅸ. 反条件性的：$p \subset q$ 或 $q \supset p$

条件性的运算是一种非交换性的运算，$p \supset q$ 并不和 $q \supset p$ 相等，我们称运算 $q \supset p$ 为“反条件性的”。其真值排列：(1 1 0 1)。我们还要注意，这里所说的是互反意义上的逆运算，而不是简单相补的或否定的逆运算(因为 $q \supset p$ 同 $p \supset q$ 是能相容的，尽管其中之一式并不必然地导出另一式同样的结论，但在相补或否定的意义上说来，那两种逆运算便是一者对另一者的完全否定)：(见图 27)

(110) $$(p \subset q) = df(q \supset p) = df(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

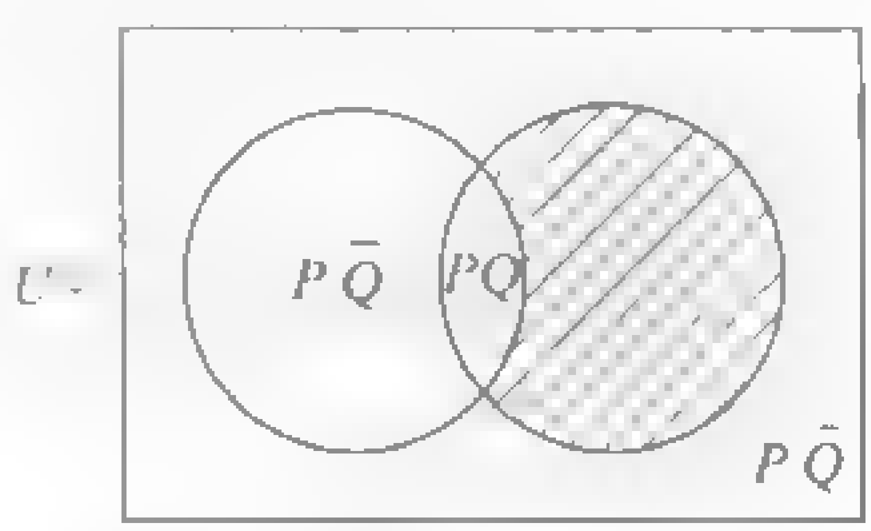


图 27 反条件性的

Ⅹ. 反非条件性的：$(\overline{q \supset p})$ 或 $(\bar{p} \cdot q)$

这是Ⅸ式的相补运算(对Ⅸ式的否定)。即：

(111) $$(\overline{q \supset p}) = df\,\overline{(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})} = (\bar{p} \cdot q)$$

人们可以确认，这个运算正好构成Ⅲ式的互反 $p \cdot q$，并且恰与类别 $\bar{P}Q$ (见图 28)相对应。

其真值排列：(0 0 1 0)。

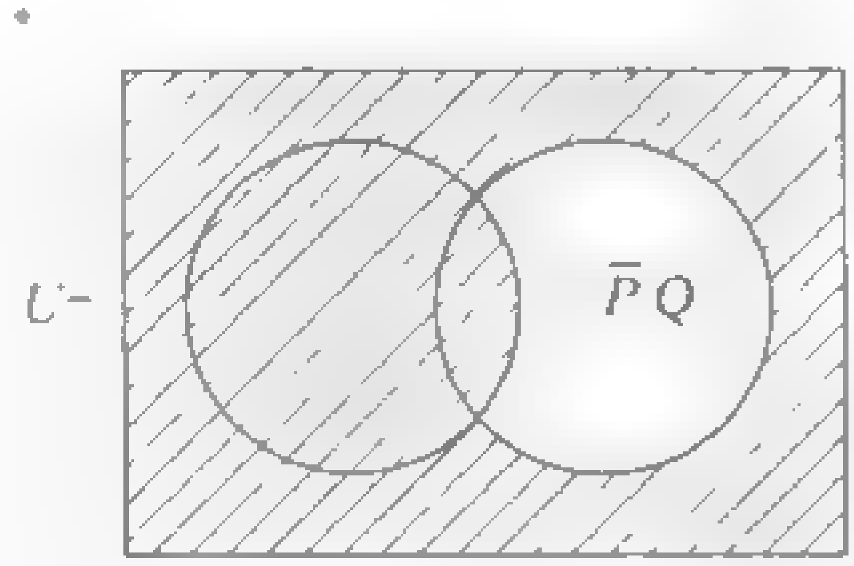


图 28 反非条件性的

XI. 双重条件性的：$(p\equiv q)$[1]

现在我们假定只有 $p\cdot q$ 和 $p\cdot q$ 两合取为真，至于 $p\cdot q$ 和 $p\cdot q$ 二者则为伪。这意味着 p 和 q 既可共同为真，也可共同为伪。我们可以这样列式：

(112)　　$p\equiv q=df(p\supset q)\cdot(q\supset p)$　即　$(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$

其真值排列：(1 0 0 1)。

我们给出具有相同元素的某些类别来作为此种类别的模型。

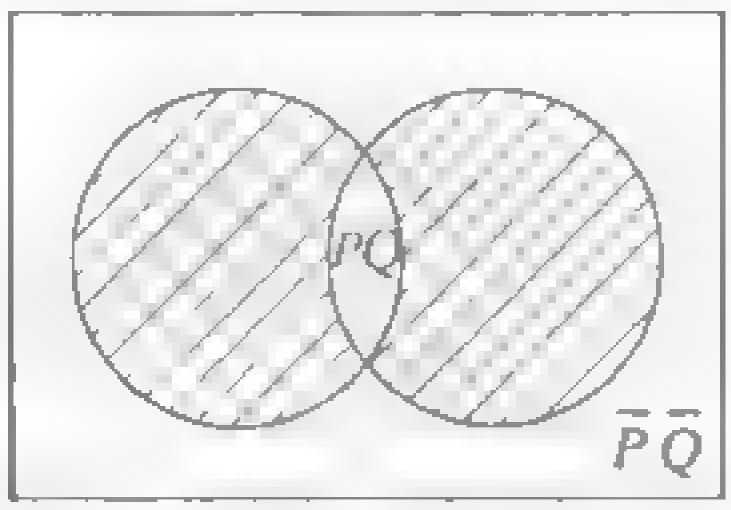


图 29　双重条件性的

例：P = 原生动物，Q = 非多细胞的无脊椎动物，由此，如果 $p=x\in P$，$q=x\in Q$，则得出等价 $(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$，因为分类 PQ 和 PQ 是空集。

XII. 非斥性析取或互反排斥：$(p\,\mathrm{W}\,q)$

双重条件性的否定（即双重条件性的互补运算）是肯定 $p\cdot q$ 和 $p\cdot q$ 运算为真而否定 $p\cdot q$ 和 $p\cdot q$ 为真。那么，仅仅肯定 $p\cdot q$ 和 $p\cdot q$ 的真，这就表明 p 和 q 的互相排斥：要么 p 为真，q 为伪；要么反之。那就同三肢式运算相反（见 III）。互反排斥是一种双肢式(dilemma)推理。所以，区别"或……或"（第三者从中排除去了）不同于"或……或……或三者"（三肢式），我们以一个特殊符号 W 与 V 相对立，并用它来表示双肢式是必要的。既然互反排斥是一种等价否定，三肢式是一种简单的部分析取（包括 $p\cdot q$ 的结合）：这是两种不同的运算。因此，排斥（W）就对应于类别的析取加法（图 3），而双肢式（V）则对应于非析取的加法。

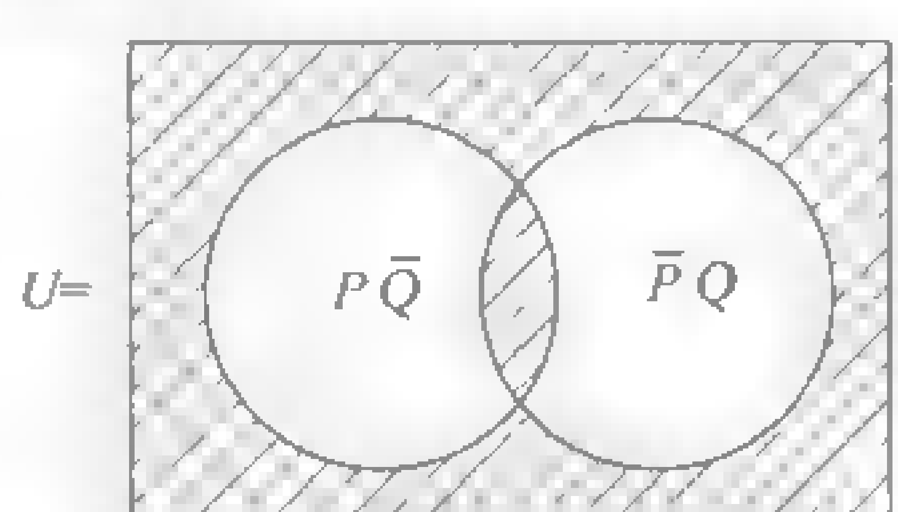


图 30　互反排斥

例：如果 P = 脊椎动物，Q = 无脊椎动物，总类 U 是动物，则给出 $P\bar{Q}$ 和 $\bar{P}Q$，而既无 PQ，也无 PQ，如果 $p=x\in P$ 和 $q=x\in Q$，互反排斥的公式为：

(113)　　$(p\,\mathrm{W}\,q)=df(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$

---

[1] $p\equiv q$ 也名"等价"（运算）。——编者

此式"完全否定"了等值式$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$。

其真值排列：(0 1 1 0)。

XIII. p 的肯定：符号为 $p[q]$

现在我们只承认$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$这两个结合为真，在这一简单情况下，只存在 p 与 q 或与 $\bar{q}$ 的合取，于是：

$$(114) \qquad p[q] = (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$$

其真值排列：(1 1 0 0)。

例：假定有这样一个类别 P 而其 P 为空集；例如 P＝有呼吸的动物（没有其他动物），且令 Q＝有肺动物，我们就给出 $PQ \cup PQ$，但既无 PQ，也无 PQ（总类 U＝所有动物）。由此，如果 $p = x \in P$ 和 $q = x \in Q$，p 的肯定 $p \llcorner q = (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$。

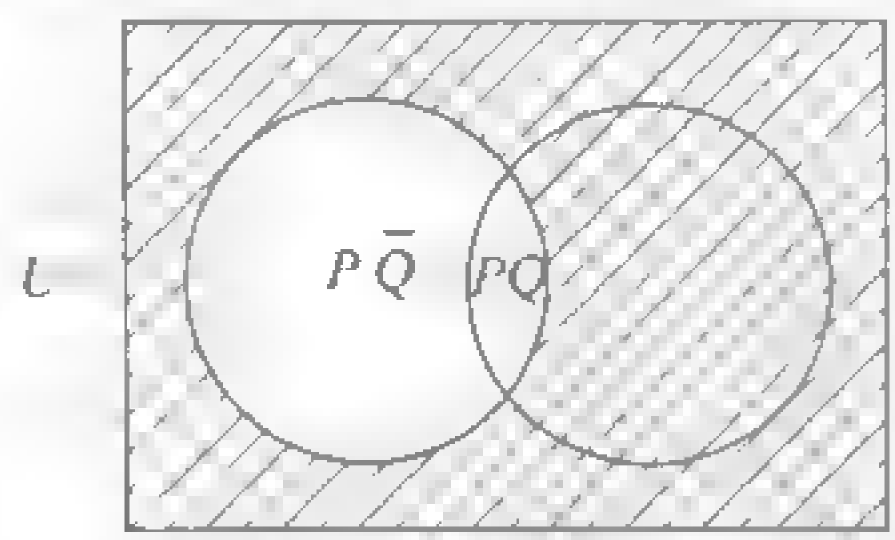


图 31 p 的肯定

和惯例相反，我们使用了一个特殊的符号表示这一运算：$p \llcorner q$，因为我们将在下文中还需要用到它。

XIV. p 的否定：符号为 $\bar{p}[q]$

同前者相反，如果只有$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$为真，且与"$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$"相反，这一运算等于说否定 p 而同时肯定 q 或 $\bar{q}$：

$$(115) \qquad \bar{p}[q] = (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

其真值排列：(0 0 1 1)。

例：P＝水生者，Q＝脊椎动物，而 Q＝无脊椎动物，总类 U 为动物，于是，只有 PQ 和 PQ 为非空集（图 32）。由此可知，如果 $p = x \in P$ 和 $q = x \in Q$，则得出公式(115)。

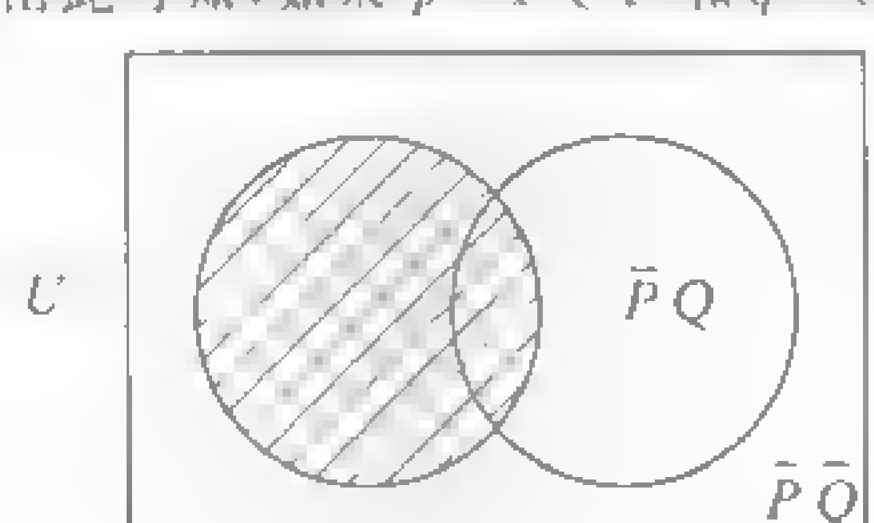


图 32 p 的否定

XV. q 的肯定：符号为 $q[p]$

现在如果$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$为真，而排除$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$，这就肯定 q 与 p 或与 p 构成的合取。这就是 XIII 的对称运算。由此得出：

(116) $$q[p]=(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)$$

其真值排列：(1 0 1 0)。

类别的对应模式是 $PQ\cup\bar{P}Q$。

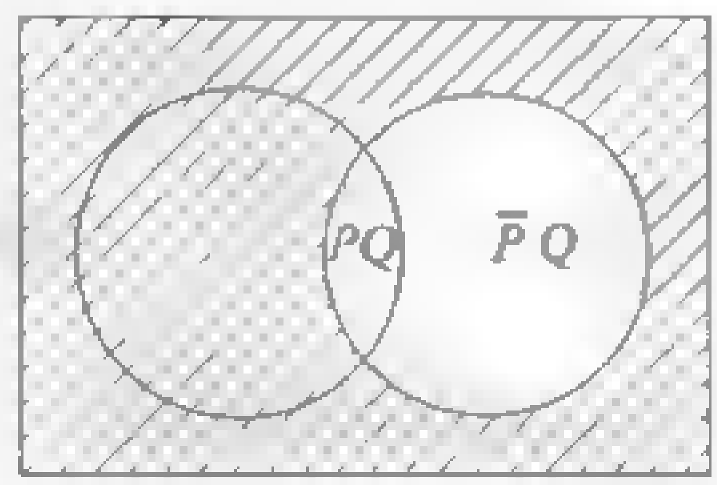


图 33 q 的肯定

XVI. q 的否定：符号为 $\bar{q}[p]$。

最后，如果 $(p\cdot\bar{q})$ 和 $(\bar{p}\cdot\bar{q})$ 为真，而排除 $(p\cdot q)$ 和 $(\bar{p}\cdot q)$，这就是 q 的否定，由此得出：

(117) $$\bar{q}[p]=(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$$

其真值排列：(0 1 0 1)。

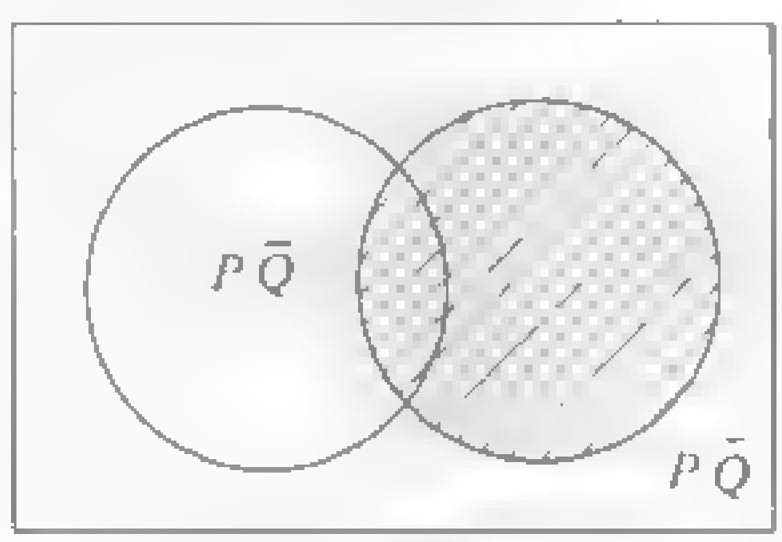


图 34 q 的否定

总之，我们证实借助命题 p 和 q 并依据其真、伪等值而得出的 16 种可能的排列，各自都与一个不同的命题间的运算相对应，而且其意义规定得十分明晰。我们还证实这些运算中的每一个，都包含着一个从类别逻辑中所提取的一个模型的体现，并且在一种隶属关系的表达形式（甚至隶属于"弱结构化类别"，正如我们举出的那些例子所证明的）下表明 p 和 q 的命题。这种对应是双向单一映射的（bi univoque）；此外，它还具有互反性质，因为从类别的乘积中提取的所有排列

$$(P\cup\bar{P})\cap(Q\cup\bar{Q})=PQ\cup P\bar{Q}\cup\bar{P}Q\cup\bar{P}\bar{Q}$$

的总数同样是 16 种，而且（$\vee$）和（$\cdot$）的运算也是与（$\cup$）和（$\cap$）的运算相对应的。正是这种对应保证着 16 种命题间运算的具体意义。

要点意见：正如我们已经知道的，条件性的 $p\supset q$ 和双重条件性的 $p\equiv q$，同合取 $p\cdot q$ 或析取 $p\vee q$ 一样，都是些命题。那意味着符号 $\supset$，$\equiv$，$\cdot$，$\vee$ 都是一些算符。然而，一个算符，比如说 $\supset$，它能够生成一种关系。例如，我们考虑两个命题 pq 和 p，并使之构成条件性的运算 $pq\supset p$。这个新命题的真值表是极易计算的。实际上，我们已经看到，条件性列表（VII）的真值排列是（1 0 1 1），这意味人们是这样应用的：

(1,1)	1
(1,0)	0
(0,1)	1
(0,0)	1

但我们知道 pq 的真值排列是(1 0 0 0)，p 的真值表排列是(1 1 0 0)(参阅Ⅵ和Ⅷ)。于是，就得出：

pq	p	对偶	$pq\supset p$
1	1	(1,1)	1
0	1	(0,1)	1
0	0	(0,0)	1
0	0	(0,0)	1

因此命题 $pq\supset p$ 是"完全肯定"而并无别意，可以如下标记表示：$\vdash pq\supset p$。

复合命题 $pq\supset p$ 总是为真，不是由于前件 pq 和后件 p 任意凑合的，而是由于它们之间存在着某种关系这一事实。我们所要指出的是，在 pq 和 p 之间存有一种缊涵关系。

根据一般的方式，令 p 和 q 为两个简单的组成复合的命题。我们说 p 缊涵 q，并把它标记成 $p\rightarrow q$，如果条件性的 $p\supset q$ 是完全肯定的话。显然，很容易认出缊涵关系 $\rightarrow$ 是一种次序的关系。

同样，如果 p 和 q 是这样两个命题，使得双重条件性的运算 $p\equiv q$ 为完全肯定，我们就说，p 与 q 等价，并标记为 $p\leftrightarrow q$。很清楚，这一关系 $\leftrightarrow$ 正是一种等价的关系，也就是说它是一种反射的，对称的和传递的关系①。

§29 一个命题与其本身的四种关系 256 种三元关系和高级联系的问题

我们之所以以研究 p 和 q 这两个命题间可能的 16 种运算开场，无论从心理学还是从逻辑上来说，是因为从来都不存在孤立状态的命题，然而，目前没有任何东西能够阻止人们做出 q 和 p 是同一命题的假设。那么，与 pq、pq、pq、pq，四种合取相对应的就是

① 依照习俗的然而很普遍的用法，我们有时称条件性的运算为缊涵，称双重条件性的运算为等值(equivalence)。

(118) $pp \leftrightarrow p$,命题 pp 永远是伪,命题 pp 永远是伪,以及 $pp \leftrightarrow p$

我们还可得出:

(119) $\bar{\bar{p}} \leftrightarrow p$, $\bar{\bar{\bar{p}}} \leftrightarrow \bar{p}$,等等

至于 16 种运算,则演变如下:

(120) $(p * p) \leftrightarrow (p \vee p)$ $(p | p) \leftrightarrow p$ $(p \subset p) \leftrightarrow p$ $p[p] \leftrightarrow p$

$o \leftrightarrow p \cdot \bar{p}$ $(p \cdot p) \leftrightarrow p$ $(\bar{p} \cdot p) \leftrightarrow o$ $p[p] \leftrightarrow p$

$(p \vee p) \leftrightarrow p$ $(p \supset p) \leftrightarrow p$ $(p \equiv p) \leftrightarrow p \vee p$ $p[p] \leftrightarrow p$

$(\bar{p} \cdot \bar{p}) \leftrightarrow \bar{p}$ $(p \cdot \bar{p}) \leftrightarrow o$ $(p \mathbin{W} p) \leftrightarrow o$ $p[p] \leftrightarrow p$

运算 $(p \mathbin{W} p)$ 得出 o 是因为它等值于一种排斥,就类别的语词来说,一些非共有的部分相加必然会是些空集。

既然如此,三个命题:p、q 和 r 之间会有什么联系呢?那将会存在 256 种联系,并与"一些部分的集合",即与由 P、Q 和 R 及其相应的补所构成的八个子集相对应。这 256 种联系同样可与从下列类别中提取的所有排列相对应:

$$(P \cup \bar{P}) \cap (Q \cup \bar{Q}) \cap (R \cup \bar{R})$$

但是,如果继续对列举 256 种三元联系感兴趣,那么,就列举本身说来,既不必要,也不会是完备的,因为在四、五、六个,或者更多的命题间所形成的联系,将会迅速地达于一些天文学的数字。

然而,没有任何东西比对此作考虑更适合于觉察逻辑原子论的不足之处了[1]。事实也是如此,没有任何演绎是通过五个命题预先列举出 4 294 967 296 种可能的排列去导出所追求的联系的。但尼克德曾指出人们可能建立命题逻辑于其上的唯一公理,(见§ 57)却正是利用了五个命题。这里就存在一个问题,夏·瑟路斯(Serrus)说,"逻辑学家们完全有理由对此持有疑虑。逻辑学需要完全列举,只有在这个条件下,才会有形式逻辑。"[2] 但夏·瑟路斯随即又承认逻辑学家"由于组合的过分庞杂而止步不前。但我们至少知道完全列举是可能的,在一定意义上,这就令人满足了"[3]。人们不能干脆地承认这种"完全列举"是无用的,那么它的意义何在呢?

在三元联系的情况中,也即在借助两种关系合成的三种命题系统的情况中,人们立即可看出特征化"完全肯定"的真、伪等值的组合数目不再像二元组合那样是四个,而是八个,因为每一对,$(p \cdot q)$、$(p \cdot \bar{q})$、$(\bar{p} \cdot q)$、$(\bar{p} \cdot \bar{q})$ 不是和 r,就是和 $\bar{r}$ 相组合。由此得出:

(121) $(p * q * r) = (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r})$

$\vee (\bar{p} \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r})$

---

① 参阅皮亚杰:《论逻辑运算的转换》,PUF,Paris,1952。

② 参阅皮亚杰:《论逻辑运算的转换》,第 46 页。

③ 参阅皮亚杰:《论逻辑运算的转换》,第 47 页。

然而，在这种情形中，或同在三元重言式(tautologie)中一样，有关的结合和类别乘法组合相对应。因为，乘法的积

$$(P\cup P)\cap(Q\cup\bar{Q})\cap(R\cup R)$$

可形成八个类别：

$$(PQR)\cup(PQR)\cup(PQR)\cup(PQR)\cup(PQR)\cup(PQR)\cup(PQR)\cup(PQR)$$

其中每一项与被命题所规定的结合(121)相对应(见图35)

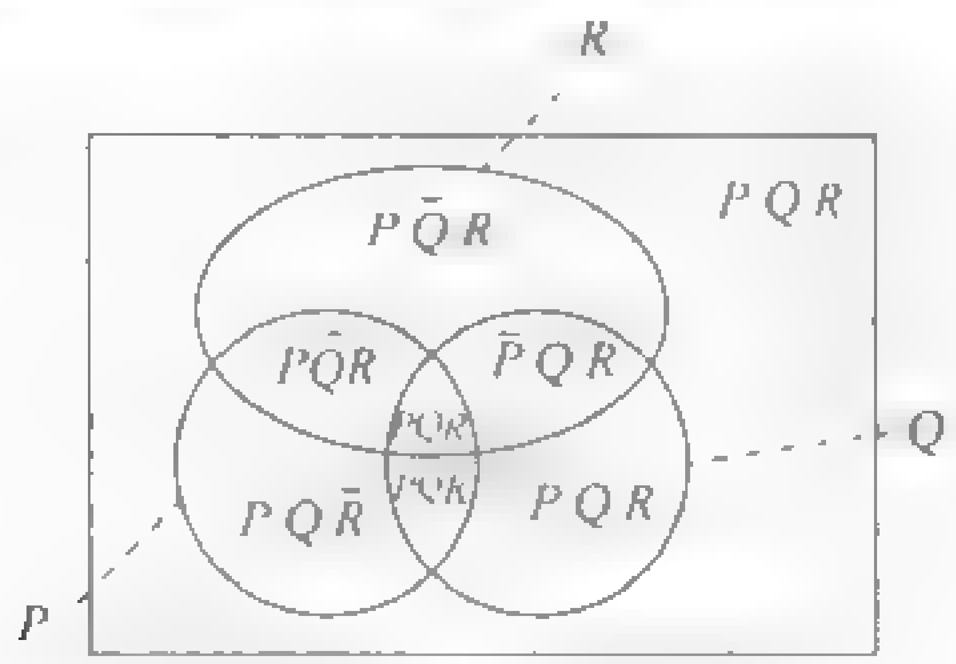


图 35

于是，我们得到 $2^8=256$ 种三元集合，它们被分剖成：一种有八个真值结合的排列，即(121)命题的完全肯定，与图35的8种类别相对应；8种有7个真值结合的排列(与图35的任何7个类别相对)，28种有6个真值结合的排列(与图35的任何6个类别相对应)，56种有5个真值结合的排列，70种有4个真值结合的排列，56种有3个真值结合的排列，28种有2个真值结合的排列，8种有1个真值结合的排列(与图35的任一个类别相对)以及1种无真值结合的排列("完全否定")。

关于四个命题(p，q，r 和 s)的联系，在把命题(121)的每个合取同 s 或 $\bar{s}$ 相结合的同时，可得到它们，于是得出16种基本结合，它们重新同类别的"交"相对应：

$$(P\cup\bar{P})\cap(Q\cup\bar{Q})\cap(R\cup\bar{R})\cap(S\cup\bar{S})$$

用类别的语词来表达与用命题的语词来表达一样，可能的排列是65536项。

关于这些三元和四元排列的某些知识是必不可少的①，尤其是传递序列，以及结合性 $(p\vee q)\vee r\leftrightarrow p\vee(q\vee r)$ 或分配性等等的法则。但有关"完全列举"的问题，有两个要点意见容许以另一种理想来替代那种原子论的理想，这另一种理想追求的是，认为系统封闭于它的整体结构内，绝不封闭于它的元素的列举中。事实上，列举也是不可能的。

第一点是，一个人即使把自身置于纯粹组合论的观点，最好还得记住，那些组合不是独立于它们得以产生的各种运算之外而存在的，运算本身却永远还是运算。如果人们比较那些对应于一个命题($p\cdot p$)的，对应于两个命题

$$(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)，$$

或对应于三个命题〔见命题(121)〕的，或对应于四个命题的"完全肯定"，及其他等等的

① 有关三元转换机制的内容，见《运算逻辑试论》§39分节E。

情况，人们就会确认，正在起作用的那些仅有的运算就是同析取（V）、合取（•）相组合的肯定与否定，所有其他运算都是由这些"完全肯定"的一些转换所组成。这就很明显，命题排列的数目一点也不会改变运算本身。形式逻辑的问题因此不会像事关动物学的种属（这在动物学中是令人深感兴趣的）一样，去建立一个包括数十亿种可能排列的穷尽一切的目录；问题是要还原（归结）彼此间的各种联系，并分析它们实际存在的那些转换，因此问题的中心是一个运算总体性的问题，而不再是原子论的列举。

第二点是，如果人们能把三元及更多元形式还原（归结）为二元的联系，并把这些联系改建为那些联系，那么基本问题就是要去确定这样构成的整体系统的结构，不管这个结构是格的、群的，还是群集的。类别和关系的逻辑既然为我们提供了可接受的模型；试问，它们在命题领域中还有价值吗？为解决这样的一个问题，首先就要考察16种二元运算如何能被归结为几种基本运算；然后，我们要研究这些基本的运算，当新的命题引进时，是否还具有概括化的可能性，并根据这一事实是否可以生成一些连贯一致的结构，既具有无限的扩张性，又不需乞援于像所有可能的排列那样的列举。

§30　二元联系的转换

如果不尝试去断定，是否一个演绎的理论构成了关于一种唯一的运算系统的连续转换的成果，它们势将不能满足于现存的16种不同的运算。此外，我们在对它们的表述进程中已确认过，运算Ⅱ、Ⅳ、Ⅵ、…是运算Ⅰ、Ⅲ、Ⅴ、…的补，也就是否定意义上的逆运算。这就立即指出，可逆性在这个体系构成中的作用。那也就应该存在着其他可能的转换。问题就在于某些运算相互间可还原为另一些运算，这就是所有作者所要揭示的。在导出从一种联系到另一种联系的转换规律的同时，人们已经以明显的方式实现了这种还原（reduction）。当人们为了精简的理由把公式归结为能够同时表达数种联系的几个符号时，人们则是以含蓄的方式已同样实现了这种还原。但是，如果存在如此可能的还原（或归结），那么重要的是要掌握它自身具有哪些限制，也就是说，甚至在用一个符号写出所有运算的同时，正如薛弗尔（H. M. Sheffer）凭借不相容性（/）这一符号所达成的那样，还存在一种许多运算函数的多样性：正演的、反演的、互反的、对射的、同一性的。从整体性逻辑的角度来看，重要的既不是多样性，也不是归结为单一的符号本身，重要的倒是那些如实存在的转换和它们为自身构成的那个系统。

1. 完全肯定（重言式）：($p*q$)

大家一定都记得命题(101)关于完全肯定的表述：

$$p*q \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

然而，我们考虑到，在我们能采用一种特殊的记号($p*q$)将这一运算符号化的同时，其完整的表述由合取（•）、析取（V）、肯定和否定组成。这一情况对于完全肯定并

不特殊，因为在§28中，我们已经用同样的术语说明过16种二元运算中的每一个运算。

人们可能赋予另外15种二元运算连同赋予完全肯定一样的析取形式(合取的析取)，它被称为"析取的规范形式"。把所有的运算归结于"规范形式"，即同族的、能比较的形式这一思想，自施累德(E. Schroeder)开始，此后被广泛地采用。在公理体系或当涉及检验论证时，其应用的成果就更丰富了。因为，把所有运算置于析取和合取的形式下，很容易检证正在进行的争论是否包含着一些矛盾或一些重言。希尔伯特(D. Hilbert)曾着重指出，当任何表达被置于析取 $p \vee \bar{p} \vee q \vee r \cdots$ 形式下，其中的两项(这里是 p 和 $\bar{p}$)带有相反的符号，它就是重言式的[1]。

但是，并不存在仅仅一种析取的规范形式，还存在"第二种"规范形式，或"合取的规范形式"，它是通过合取同析取联系起来所组成的：$(p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee q)$，(其他)。关于析取(Ⅲ)，我们将看到，它同析取形式的一般关系究竟是些什么。在完全肯定的情况中，这种合取的规范形式是零，因为完全肯定($p * q$)表达着可能组合的总体(或总数)，它所集成的交替的共同部分(·)只能是零[2]。

2. 完全否定(矛盾)：(o)

这一运算的规范析取形式是(o)，至于它的合取形式如下：

(122) $$o \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$$

为了弄清问题，我们再提一下曾在§28Ⅰ中给出的关于完全肯定的例子：p＝"x是脊椎动物(P)"而q＝"x是肺管呼吸的动物(Q)"。于是很明显，一个元素将会同时是(·)脊椎动物或(∨)肺管呼吸动物、脊椎动物或非肺管呼吸动物、非脊椎动物或肺管呼吸动物、非脊椎动物或非肺管呼吸动物是不存在的，因此，命题(122)很好地表达了所谓矛盾的完全否定。此外，类别的对应运算同样也给出(o)，因为

$$(P \cup Q) \cap (P \cup \bar{Q}) \cap (\bar{P} \cup Q) \cap (\bar{P} \cup \bar{Q}) = o$$

3. 非排斥的析取或三肢式：$(p \vee q)$

伴同三肢式交替的$(p \vee q)$，我们面临着令人瞩目的、富有运算效果的一种联系，它是在已知其他的交换的和完全的特性的条件下形成的。正是基于这个理由，同合取相协作的析取得以形成二元联系(以及三元联系等等)的集合的规范形式。它本身的析取和合取的规范形式是[3]：

(参见命题104) $(p \vee q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$

[1] 因为在命题逻辑中，人们认为，当一个表达式能代表基本组合($p \cdot q$，等等)的任何值的时候，它就是重言式的。例如尼克德的唯一公理(§37)在这个意义上就是重言式的。

[2] 夏·瑟路斯(Serrus)给出表达$(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$，作为重言式的规范合取形式，但这是一个令人遗憾的错误，它确实涉及完全否定或矛盾(见Ⅱ)的规范形式。除了我们编号为Ⅶ—Ⅻ的运算以外，同夏·瑟路斯提供的规范合取形式表(原版第6页)是相反的。

[3] 参阅§28Ⅲ的例子。

(123) $(p\vee q)$

因此，就析取而言，对规范形式的一般范围作一简明的阐述是适当的，其中贯穿于二价逻辑的全部肯定的两极，是与0等值的 $p\cdot\bar{p}$（非矛盾原则）和与1完全等值的 $p\vee\bar{p}$（或称"永真"，排中原则）；它们就是一个合取和一个析取。结果，人们试图以同样的形式表示所有命题间的运算，这一企图迄今已获得完满的成功，而且，除开实用效益（简便而好验证）外，规范形式的构造表现出一种二重性的理论兴趣。首先，它指明所有二元联系是如何从"完全肯定"$(p*q)$分解形成的；我们又将返回到这一基本事实上来，这就会立即显示这个体系的运算统一性。其次，把所有的运算归结为组合起来的析取与合取。如同我们已经强调过的那样，这证实了运算彼此间进行转换的能力，但，这要在通过（$\vee$ 和 $\cdot$）同肯定和否定的组合，在遵守正、反运算的两极性的条件下才能实现。

最后，那就是规范形式理论的第三个基本要点，对偶论表明运算可逆性原则的存在；我们认定它是一种合理性的原则并且我们还将发现它是命题间运算的特殊"群集"的基本机制。"规范形式"特具的可逆性是按照一条规律表示的，类别理论在其固有的领域内已经清楚阐明过，随后人们又把它应用于命题逻辑：这条规律即对偶规律。

对偶法则：规范形式的否定之成立在于用否定代替肯定，与反亦然，同样用合取代替析取，反之亦然。

因此，对偶性法则提供一种进行运算的直接逆转的方法，这一重要结果恰恰迎合着依照各自的补的性能的那些运算的分配，正如§28中所阐述的那样。为了阐明清楚，我们从析取本身的合取的规范形式，即 $p\vee q$ 着手进行。如果我们运用对偶法则，我们就得出 $\bar{p}\cdot\bar{q}$，即合取的否定，它正好（见§28Ⅳ）是 $(p\vee q)$ 的补运算，因而是它的反演：因为 $\bar{p}\cdot\bar{q}$ 是四种基本结合 $(p\cdot q)$、$(p\cdot\bar{q})$、$(\bar{p}\cdot q)$、$(\bar{p}\cdot\bar{q})$ 之一，而在析取的析取规范形式上是欠缺了的，即如 $(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)$，我们因此这样写出：

(124) $\overline{(p\vee q)}\leftrightarrow\bar{p}\cdot\bar{q}$ 和 $\overline{(\bar{p}\cdot\bar{q})}\leftrightarrow(p\vee q)$

例：如果我否定"或陆生，或水生，或水陆两栖"的替换，我就得到"非陆生，非水生（结果也不是水陆两栖的）"。相反，"一个生物是非陆生，又非水生的"命题是被排斥的，它要么是陆生，要么是水生，要么是水陆两栖。

同样，如果我们把对偶法则应用于三肢式的析取规范形式 $(p\vee q)$，我们就得出：

(125) $\overline{(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)}\leftrightarrow(\bar{p}\vee\bar{q})\cdot(\bar{p}\vee q)\cdot(p\vee\bar{q})\leftrightarrow(\bar{p}\cdot\bar{q})$

因此，表达式 $(\bar{p}\vee\bar{q})\cdot(\bar{p}\vee q)\cdot(p\vee\bar{q})$ 是合取否定 $(\bar{p}\cdot\bar{q})$ 的合取规范形式。

我们从同一个例子着手：$(p\vee q)$ ＝陆生的或水生的，于是就有：如果我否定三肢式"或 $p\cdot\bar{q}$（陆生而非水生）或 $\bar{p}\cdot q$（水生而非陆生）或 $p\cdot q$（两栖）"，我就可得出 $\bar{p}\cdot\bar{q}$（即非陆生亦非水生）"。这是通过"同时有 $\bar{p}\vee\bar{q}$（非陆生或非水生）和 $\bar{p}\vee q$（非陆生或水生）和 $p\vee\bar{q}$（陆生或非水生）"作为中介而得出的。因为这三个两肢式（二难推理）的共同部分就是 $\bar{p}\cdot\bar{q}$。

对偶法则的另一个应用实例是它把完全否定与完全肯定的公式〔(101)与(122)〕联

系起来了：

(126) $\overline{(p\cdot q)\lor(p\cdot \bar{q})\lor(\bar{p}\cdot q)\lor(\bar{p}\cdot\bar{q})}\leftrightarrow(p\lor q)\cdot(p\lor \bar{q})\cdot(\bar{p}\lor q)\cdot(\bar{p}\lor \bar{q})$

这个等式的右方是同表达式(122)完全同一，即是说实际上等于(o)，也就是$(p*q)$的补。

至于析取本身的性质，值得强调的还有：

(127) $$(p\lor q)\leftrightarrow(q\lor p)$$

(128) $$(p\lor q)\lor r\leftrightarrow p\lor(q\lor r)\leftrightarrow(p\lor q)\lor(p\lor r)\leftrightarrow(p\lor q\lor r)$$

(129) $$p\cdot(q\lor r)\leftrightarrow(p\cdot q)\lor(p\cdot r)$$

例，就(127)式而言，“x是陆生的或水生的”＝“x是水生的或陆生的”。就(128)式而言，如果p＝“x是一种陆生动物”，q＝“x是一种水生动物”，而r＝“x是一种淡水动物”，那么，“或”这个词的不同分配显然是等值的。就(129)而言，p、q和r的相同含义给出：“x同时是陆生的和生活在海里或生活在淡水中”同“x同时是陆生和海生的或同时是陆生和淡水生的”等值。

最后，析取和其他运算的关系特别包含着下列一些重要转换：

(130) $$(p\lor q)\leftrightarrow(\bar{p}|\bar{q})$$

由于已知$(p\lor q)$为$\bar{p}\cdot\bar{q}$的否定，所以$p\lor q\leftrightarrow\bar{p}|\bar{q}$，因为不相容(|)是合取(·)的否定。

例：如果某类动物必须具有肺或鳃$(p\lor q)$，缺肺$(\bar{p})$并伴随着缺鳃$(\bar{q})$，对这个类而言，是不能相容的，从而得出$\bar{p}|\bar{q}$：

(131) $$\bar{p}\lor\bar{q}\leftrightarrow p|q$$

因此，根据(104)，得出：

$$\bar{p}\lor\bar{q}\leftrightarrow(\bar{p}\cdot\bar{q})\lor(\bar{p}\cdot\bar{\bar{q}})\lor(\bar{\bar{p}}\cdot\bar{q})$$

即$(\bar{p}\cdot\bar{q})\lor(\bar{p}\cdot q)\lor(p\cdot\bar{q})$，这就是不兼容$(p|q)$的公式。

例：“一种生物或者不是脊椎动物$(\bar{p})$，或者不是无脊椎动物$(\bar{q})$，或不是前者也不是后者”。这等于说，“脊椎的同无脊椎的是不相容的”

(132) $$(p\lor q)\leftrightarrow(\bar{p}\supset q)\leftrightarrow(\bar{q}\supset p)$$

例：“x是肺或鳃的携带者，抑或二者兼而有之”。这意味着就x而言，无肺则有鳃，无鳃则有肺。

(133) $$(\bar{p}\lor q)\leftrightarrow(p|\bar{q})\leftrightarrow(p\supset q)$$

例：“或非哺乳的$(\bar{p})$或有脊椎的(q)”同“哺乳的(p)和非脊椎的$(\bar{q})$不相容”等值，也同“哺乳的蕴涵着有脊椎”等值。

(134) $$(p\lor\bar{q})\leftrightarrow(\bar{p}|q)\leftrightarrow(q\supset p)$$

同上例，颠倒p和q的含义。

4. 合取否定：$(\bar{p}\cdot\bar{q})$

合取否定的析取规范形式可简单表述为$\bar{p}\cdot\bar{q}$，至于其合取的形式则是：

(135) $$p \cdot q \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (p \vee q) \cdot (p \vee q)$$

人们从(125)式已看出这一命题(135)是怎样被释明的。

这两个规范形式的否定还原于析取，因为合取的否定是析取的反演，而且反演的反演就是顺运算：

(136) $$\overline{(p \vee \overline{q})} \cdot (p \vee q) \cdot (p \vee q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow (p \vee q)$$

和

$$\overline{\overline{p \vee q}} \leftrightarrow p \vee q$$

[例见反演的命题(124)和(125)]。

5. 不相容：$(p|q)$

不相容性的析取和合取的两种规范形式通过命题(106)和(131)为我们做出了说明：

$$p|q \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

$$p|q \leftrightarrow p \vee q$$

[例见命题(106)和(131)]。

值得注意的是，构成等值 $p \vee q \leftrightarrow p|q$［命题(130)］的互反的这一等值 $p|q \leftrightarrow p \vee q$，针对其析取，授予不相容性以我们在后文中所谓的"互反性"(reciprocite)这一非常确定的作用。因此，$(p|q)$ 即 $(p \vee q)$，它不是 $(p \vee q)$ 的反演，因为它的反演是 $p \cdot q$，这同 $(p \vee q)$ 是同样的运算，但是在两个被否定的命题（p 和 $\bar{q}$）之间的运算。因而，应该很好区别 $\overline{p \vee q} \leftrightarrow p \cdot \bar{q}$ 和 $p \vee \bar{q} \leftrightarrow p|q$［命题(124)和(131)］。

例：如果 $(p \vee q)$ 表示"x 有肺或有鳃（或二者都有）"，否定 $(p \vee q)$ 表示"无肺也无鳃"（因而通过皮肤呼吸），而 $(p \vee q)$ 表示"或无肺或无鳃"（因此，肺的存在同鳃的存在不相兼容，而且二者也可能皆无）。

另方面，不相容 $(p|q)$ 同下式等值：

(137) $$(p|q) \leftrightarrow (p \supset q) \leftrightarrow (q \supset p)$$

例："植物同动物不相容"，意即"x 是植物"缊涵着"x 是非动物"和"x 是动物"缊涵着"x 是非植物"。

因此，缊涵 $(p \supset q)$ 根据命题(108)（见§28Ⅷ）同

(138) $$(p \supset \bar{q}) \leftrightarrow (p \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot \bar{q})$$

相等值。

例："植物缊涵非动物"缊涵"x 可能是植物和非动物或非植物亦非动物或非植物和非非动物"。

因此，由于 $\bar{p} \cdot \bar{q} \leftrightarrow \bar{p} \cdot q$，因此这一表达式(138)和

$$p|q \leftrightarrow p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$$

相等值。此外，我们可以用不相容性的术语对表达式 $(p \supset q)$ 再作一番转译。根据这一观点，否定 q 是这个命题 q 同其本身的不相容性，即 $(q \leftrightarrow q|q)$。至于缊涵 $(p \supset q)$，它是

命题 p 同 q 的否定的不相容性，因为非蕴涵($p\supset q$)和($p\cdot q$)等值。蕴涵($p\supset q$)将被用不相容性 $p|(q|q)$的术语写出。结果($p\supset q$)将写成：

(139) $$p\supset q \leftrightarrow [p|(q|q)] \leftrightarrow (p|\bar{q}) \leftrightarrow p|q$$

在上述例子中，这些转换表示：(植物蕴涵着非动物)=(植物同动物否定的否定不相容)=(植物同动物不相兼容)。

这就导致我们达于公式(137)。

因为，不相容性的宏大旨趣，正如薛弗尔早已揭示的①，是构成一种运算形式，使得任何其他形式都能形式上还原于它。这样，否定得以成立，正同我们刚刚所确认的那样，是通过与一个命题本身的肯定的不相容性来实现的，由此又导出，肯定将是与同一个命题的否定不相容：

(140) $$\bar{p} \leftrightarrow (p|p) \quad 和 \quad p \leftrightarrow [(p|p)|(p|p)]$$

蕴涵($p\supset q$)将是命题 p 同 q 的否定的不相容性，其式如下：

(141) $$(p\supset q) \leftrightarrow [p|(q|q)](\leftrightarrow p|\bar{q})$$

例：昆虫蕴涵非脊椎动物=昆虫同非无脊椎动物不相容。

在三元关系的情况下，如 $p\supset(q\cdot r)$，我们写出

(142) $$p\supset(q\cdot r) \leftrightarrow p|(q|r)$$

因为不相容性($q|r$)是($q\cdot r$)的否定。

例：大象(p)蕴涵着既是哺乳的(q)和又是脊椎的(r)="x 是大象"是同哺乳动物和脊椎动物的不相容性不相容的。

作为互反蕴涵的等值来源于命题(141)及其同一性将是命题本身的蕴涵：

(143) $$(p\supset p) \leftrightarrow [p|(p|p)](\leftrightarrow p|q)$$

合取($p\cdot q$)等值于不相容性($p|q$)的否定：

(144) $$(p\cdot q) \leftrightarrow [(p|q)|(p|q)]$$

关于这一点，我们要指出，一个命题和其本身的合取($p\cdot p$)将给出($p|p$)|($p|p$)，这又归结于公式(140)，因为($p\cdot p$)$\leftrightarrow p$。

交替式($p\vee q$)是 $\bar{p}$ 和 q(见 130)的不相容性：

(145) $$(p\vee q) \leftrightarrow [(p|p)|(q|q)]$$

互反排斥($p\,W\,q$)将是蕴涵($p\supset q$)和反蕴涵($q\supset p$)的不相容性：

(146) $$(p\,W\,q) \leftrightarrow [p|(q|q)]|[q|(p|p)]$$

至于完全肯定本身，它是由 p、q、$\bar{p}$ 和 $\bar{q}$ 间形成的所有不相容性的不相容性：

(147) $$(p*q) \leftrightarrow [p|q]|[(p|q)|(q|p)]$$

简言之，任何单元的和二元的联系都是可以用不相容性的术语来表述的，三元等的联系也是如此，但，自然有逐步增长的复杂性。显然，像这样归结为一个单一符号绝不

① H. M. Sheffer, Trans. Amer. Math. Soci, 1913, 14, pp. 481-488.

蕴涵所有运算的单一性。因为，尽管它们的符号系统可被颠倒，顺、逆运算间的基本对偶论，仍然特别地存在：p 被写作（p　p），而 p 或 p 被写作（p　p）（p　p）。同样，如果不相容性其本身是一个否定，被写作 p　q，那么蕴涵其本身就是肯定，它就可被写成 p（q　q），即 p　q　但除了这种符号书写上的颠倒以外，用不相容性术语对所有运算的转译都保持着它们的功能多样性，这样的转译丝毫没表现出清楚说明 16 种二元运算中的任何一项同另一项可能替换的重大优点。

作为结束，我们要注意，不相容性的基本性质是交换性：

(148)　$$(p|q) \leftrightarrow (q|p)$$

由此导出命题的双重蕴涵(137)。相反地，p　q 同 p　q 毫不等值则是很自然的，因为：

(149)　$$p|q \leftrightarrow p \supset q \quad 而 \quad p|q \leftrightarrow q \supset p$$

关于 p　q 的例子，见公式(141)。至于（p　q），如果非单细胞（p）同原生动物（q）是不兼容的，那么，原生动物蕴涵着单细胞。

6. 合取：($p \cdot q$)

合取是不相容的反演，或者说，是以不相容为其否定的肯定运算。析取的规范形式为 $p \cdot q$，而合取的规范形式为：

(150)　$$(p \cdot q) \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (p \vee q) \cdot (p \vee q)$$

例：如果 p＝"x 为哺乳的"，而 q＝"x 是水生的"，那么，$p \cdot q$＝"x 兼有哺乳的和水生的"。在此情况下，如果 x 同时有"哺乳或水生的或二者皆有（$p \vee q$）"和"哺乳的或非水生的或二者皆有（$p \vee q$）"和"非哺乳的或水生的或二者皆有（$p \vee q$）"，则不可能同时是"哺乳的和水生的（$p \cdot q$）"。

现在，如果我们来用对偶法则，否定(150)的（$p \cdot q$）或第二栏，我们又看到作为反演的不相容性：

(151)　$$(\overline{p \cdot q}) \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \leftrightarrow (p|q) \quad [见命题(131)]$$

和

(152)　$$(p \vee q) \cdot (p \vee q) \cdot (p \vee q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow (p \quad q)$$

[见命题(106)]。

例：如果 x 不同时是哺乳的和水生的，那它是其中之一而非另一，或者两者都不是。

相反，如果以（$p \cdot q$）的形式否定合取（$p \cdot q$）的两个命题，就会发现一个合取上的错误，如果以（$\bar{p} \cdot \bar{q}$）的形式否定这个否定，就会得到合取（$p \cdot q$）　因此，应该区分（$p \cdot q$）和（$p \cdot q$）［命题(151)］：（$p \cdot q$）在它的否定意义上是（$p \cdot q$）的反演，（$p \cdot q$）在一般意义上则是它的互反（关于这一点在§31 中还要谈到）。至于（$p \cdot q$）的否定即（$\overline{\bar{p} \cdot q}$），我们会再发现（$\overline{\bar{p} \cdot q}$）$\leftrightarrow$（$p \vee q$）［见命题(121)］。

合取（$p \cdot q$）既是不相容的否定，其结果是不相容的否定还原为一个合取：

(153) $$(\overline{p|q}) \leftrightarrow (\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}) \leftrightarrow (p \cdot q)$$

例："x 是哺乳的不是不相容"于"x 是水生的"，等值于"x 或是非哺乳的或是非水生的为伪"，因而等值于"x 同时为哺乳的和水生的"。

合取同蕴涵的关系如下：

(154) $$(p \cdot q) \leftrightarrow \overline{p \supset \overline{q}} \leftrightarrow \overline{q \supset \overline{p}}$$

因为 $(p \supset \overline{q}) \leftrightarrow (\overline{p} \cdot \overline{q}) \leftrightarrow (p \cdot q)$ 依据命题(108)和(109)，$(q \supset \overline{p}) \leftrightarrow (\overline{p} \cdot q) \leftrightarrow (p \cdot q)$ 依据命题(110)和(111)。

例："如果 x 同时为哺乳的和水生的"，那么哺乳蕴涵非水生和水生蕴涵非哺乳就都为伪。

反之，得出：

(155) $$(\overline{p \cdot \overline{q}}) \leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \leftrightarrow (p \supset q)$$ [参见命题(133)]

我们以和命题(133)相同的例子来说明："如果 x 同时为哺乳的(p)和非脊椎的($\overline{q}$)是伪，"那么，它"或为非哺乳的($\overline{p}$)或为脊椎动物(q)"，因此，"x 是哺乳动物"蕴涵着"x 是脊椎动物"。

从 $(p \cdot \overline{q})$ 转换为 $(\overline{p} \vee q)$ 的是由对偶法则给出的。

最后，我们还得指出，合取是可换的：

(156) $$(p \cdot q) \leftrightarrow (q \cdot p), \quad (\overline{p} \cdot q) \leftrightarrow (q \cdot \overline{p})$$，等等。

就析取[命题(129)]和其本身而言，合取是可分配的：

(157) $$[p \cdot (q \cdot r)] \leftrightarrow [(p \cdot q) \cdot (p \cdot r)]$$

此外得出：

(158) $$[p \cdot (q \supset r)] \leftrightarrow [(p \cdot q) \supset (p \cdot r)]$$

无须再谈及它在对偶法则上所起的作用。

7. 条件式：$(p \supset q)$

条件式的两种规范形式是：[参见命题(108)]

(159) $$p \supset q \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot \overline{q})$$

$$p \supset q \leftrightarrow \overline{p} \vee q$$

见命题(108)的举例。关于命题(159)，它给出"或者 x 是非哺乳动物，或者是脊椎动物"。

从这些形式中，我们通过否定换位法(Contraposition)取得：

(160) $$p \supset q \leftrightarrow \overline{q} \supset \overline{p} \leftrightarrow q \vee \overline{p}$$

因为，如果哺乳动物(p)蕴涵脊椎动物(q)，那么"如果 x 是非脊椎动物，它就是非哺乳动物"，因为非哺乳动物 $\overline{P}$ 包含所有的非脊椎动物($\overline{P}\overline{Q}$)加上非哺乳的脊椎动物($\overline{P}Q$)，因此，$\overline{q} \supset \overline{p}$。从 $\overline{q} \supset \overline{p}$ 我们推导出[根据(159)]$q \vee \overline{p}$，即 $q \vee \overline{p}$ ($\leftrightarrow \overline{p} \vee q$)。

从这一否定变换法 $p \supset q \leftrightarrow \overline{q} \supset \overline{p}$，我们可得出：

(161) $$(\overline{p} \supset q) \leftrightarrow (\overline{q} \supset p) \leftrightarrow (p \vee q)$$

[参见命题(132)]。

因为根据(160) $p\supset q$ 给出 $q\supset p$,即给出 $q\supset p$,这两种缊涵 $p\supset q$ 和 $q\supset p$ 同按命题(159)[见(132)式的举例]的析取等值。

同样,我们从(160)和(159)导出:

(162) $$(p\supset q)\leftrightarrow(q\supset p)\leftrightarrow(p\vee q)\leftrightarrow(p|q)$$

[参考命题(137)]。

[请阅(137)的举例]。

命题(159)容许假定由 $\vdash p\supset q$ 的条件所定义的关系 $p\rightarrow q$ 也能通过 $\vdash p\vee q$ 的条件来定义。因而,只有 p 和 q 的真值才能在这种缊涵的关系,即所谓实质的(materielle)关系中起作用。于是得出:

(163) $$p\rightarrow q \quad 而 \quad q\rightarrow r \quad 则 \quad p\rightarrow r$$

例:腹足动物缊涵着软体动物,软体动物缊涵着非脊椎动物,因此腹足动物缊涵着非脊椎动物。

至于条件与合取之间的关系,我们得出:

(164) $$\overline{p\supset q}\leftrightarrow p\cdot q \quad 而 \quad p\supset q\leftrightarrow\overline{p\cdot q}$$

[见命题(154)和(155)],因为由于对偶法则,$(p\cdot q)\leftrightarrow(p\vee q)$,和$(p\cdot q)$是缊涵(见Ⅷ)的否定。

我们已经阐述了缊涵和不兼容性的关系。

我们再提请读者注意表示缊涵分配的那些三元组合:

(165) $$[p\supset(q\supset r)]\leftarrow[(p\supset q)\supset(q\supset r)]$$

(166) $$[p\supset(q\cdot r)]\rightarrow[(p\supset q)\cdot(p\supset r)]$$

(167) $$[p\supset(q\vee r)]\leftrightarrow[(p\supset q)\vee(p\supset r)]$$

(168) $$[p\supset(q\equiv r)]\leftrightarrow[(p\supset q)\equiv(p\supset r)]$$

(169) $$[p\vee(q\supset r)]\leftrightarrow[(p\vee q)\supset(p\vee r)]$$

如上特征化了的缊涵提出一个奇特的问题,或者宁可说站在逻辑原子论立场上是人们奇怪地将它复杂化了的一个问题,至于站在运算的整体结构的立场上则是不难找到简单的解决办法的。缊涵 $p\rightarrow q$ 意味着

$$(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$$

的真,因为这与解释为什么能同时兼有 $p\cdot q$ 和 $p\cdot q$,而不能同时兼有 $p\cdot q$ 和 $p\cdot q$ 有关。一般讲来,人们用"真缊涵着伪"来解释事情,并通过确认"甚至当 p 为伪时缊涵 $p\rightarrow q$仍持续为真"来证实这一奇特的公式。然而,难道真的需要解释合取 $p\cdot q$ 好像它$(p\cdot q)$同 $p\supset q$(由于 $p\supset q\leftrightarrow p\vee q$,$p\supset q$ 同 $p\supset q$ 不相容)等值一样,还是好像逻辑应该考虑除开真的缊涵如"脊椎动物(p)缊涵动物(q)"和伪的缊涵如"卵石(p)缊涵动物(q)"外,还得考虑要以所有可能在 $p\cdot q$ 之外同 q 相结合的谬误(p)来充实命题 q 吗?在这种情况下,为什么又承认 $p\cdot q$ 和 $p\cdot q$ 的同时皆真?这反而明显地意味着不是所

有 p 都和 q 相结合的。那么，在一些谬误 p（有的蕴涵 q，有的则不然）之间可随意做出选择么，还是 $p \cdot q$ 和 $p \cdot q$ 的分划本身就是富有连贯性的公式化的结果？

实际上，$p \cdot q$ 和 $p \cdot q$ 的同时为真是直接来源于蕴涵的非互反本性，这一本质构成同等值 $p \leftrightarrow q$ 相反的一个不对称的联系：如果我们得出 $p \to q$，却没有 $q \to p$，那就没有 $p \leftrightarrow q$。于是通过定义本身（$p \supset q \leftrightarrow p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$ 同 $p \quad q \leftrightarrow p \cdot q \vee p \cdot q$ 相对立），命题 p 并不仅只蕴涵 q，而其他某些蕴涵 p 的命题也将蕴涵 q；但所有蕴涵 p 的命题将不尽皆蕴涵 q。这正表明，这又一次并且经常是事关真理的问题，它与那种缺乏意义的假规则无关，按照那条规则，伪将会蕴涵着真。把蕴涵转译为一种类别的包含模式，看来是很明显的：如果 P 有脊椎的和 Q 动物，则 PQ 脊椎动物，PQ 无脊椎动物。于是，如果 $p = x \in P$，$q = x \in Q$，就可得出 $p \cdot q$ 和 $p \cdot q$ 为真，而接受 $p \cdot q$ 却无须通过"伪蕴涵真"这一虚假法则了。

这种诘难的最后一个理由，就是蕴涵的不对称联系停留于它的形式总归是不完全的：它没有表明它本身蕴涵的一切，即是说它没有使它所默认的，然而是必要的某些关系公式化。在人们能通过条件 $\vdash p \quad q$ 定义的不相容性（或兼容性）的关系上，或在人们能通过条件 $\vdash p \vee q$ 定义的次级反演的下反对（subcontraire）关系上，命题 p 是唯一被给出与 q 发生关系（ ）或（$\vee$）的。没有任何东西指示着，甚至在该联系的表达式中有其他的命题以含蓄的状态参入进来，并从（$p \quad q$）或从（$p \vee q$）也不能演绎出同 p（和 p）或同 q（和 q）有别的第三种命题的存在。相反，联系（$p \supset q$）蕴涵两种对 p 的可能情况的区别，即 p 蕴涵 q 的情况和 p 不蕴涵 q 的情况。人们认为这与简单合取有关：$p \cdot q$ 和 $p \cdot q$。但，还有一层，如果同时没有（$q \to p$），（$p \to q$）就意味着 p 不是唯一去蕴涵 q 的。至少还存在这样一种命题 p'，以致（$p' \leftrightarrow \bar{p} \cdot q$）和（$p' \to q$）。

没有任何东西说明命题 p' 的存在比依据命题（159）把析取（$p \vee q$）转译为（$p \supset q$）更清楚了。因为以（$p \vee q$）来代换（$p \supset q$），这就表明有三种可供考察的可能性：或 $p \cdot q$，或 $p \cdot q$（即 $p \cdot q$），或 $p \cdot q$。这正是（$p \supset q$）所包含的那些相同的可能性，但表示二肢式的二个分支的算符（$\vee$）在合取 $p \cdot q$ 和 $p \cdot q$ 间却引进了一个非常明确的对称，并将它们置于同一水平上，而与只强调结合（$p \cdot q$）的（$p \supset q$）相反。

总之，提出蕴涵 $p \to q$，同它的等值二肢式 $p \vee q$ 一样，这正是在肯定两种合取性的蕴涵（$p \to q$）和（$p' \to q$）的存在。事实上蕴涵的二元联系仅构成一种简略的表达式，其完整的意义须得参照一种三元的关系：

(170) $(p \to q)$ 应为 $[(p \to q) \cdot (p' \to q)]$ 其中 $p' \leftrightarrow \bar{p} \cdot q$

这一两种蕴涵和一种合取的三元联系，实际上表达着 q 和（$p \vee p'$）之间的等值：

(171) $[(p \to q)$ 和 $(p' \to q)]$ 则 $[q \leftrightarrow (p \vee p')]$

也就是说

(172) $(p \to q)$ 则 $[q \leftrightarrow (p \vee p')]$

例：如 $p =$ "x 是脊椎动物"蕴涵"x 是一种动物"，则"x 是一种动物"这与"x 是一种

脊椎动物或一种非脊椎动物"等值。

我们在此可以发现在命题内运算中产生了一种精确平行运算，当 $A \subset B$ 实际上表示 $B = A \cup A'$ 时。由此我们就预感到命题(170)至(172)对于命题的"群集"的重要意义。

8. 非条件的：$(p \supset q)$ 或 $(p \cdot \bar{q})$

如同我们在§28中见到的，条件的运算构成一个四种运算系统的一部分，这一系统包括条件运算本身及其反演，即非条件的运算 $(p \cdot q)$，它的互反 $(q \supset p)$ 和互反的反演 $(p \cdot q)$。因为 $p \supset q$ 的反演是 $p \cdot q$，这是唯一的被排除于

$$p \supset q \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

外的合取。$p \cdot q$ 的析取规范形式是 $p \cdot q$，而它的合取规范形式是：

(173) $$p \supset q \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$$

命题(173)来源于命题(158)，但是通过对偶法则被否定了的：

(174) $$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \cdot (p \vee q) \cdot (p \vee q)$$

合取 $p \cdot q$ 因而是 $p \supset q$ 的反演。

9. 反条件的：$(p \subset q)$ 或 $(q \supset p)$

这一联系有以下命题作为它的析取和合取的规范形式：[参见命题(110)]

(175) $$q \supset p \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

$$p \subset q (\leftrightarrow q \supset p) \leftrightarrow p \vee q$$

例：如果 p ＝"x 是脊椎动物"，q ＝"x 是鸟类"，则称 p 被 q 缊涵，表示"x 是脊椎动物和鸟类，或脊椎动物和非鸟类，或非脊椎动物也非鸟类"。命题(175)亦意味着"或 x 是动物或不是鸟类"。

从 $p \supset q$，即从 $q \supset p$，我们可导出[依据(160)]：

(176) $$q \supset p \leftrightarrow p \supset q$$

例：鸟类缊涵脊椎动物↔非脊椎动物缊涵非鸟类

因此，顺演条件的 $(p \supset q)$ 和反演条件的 $(q \supset p)$ 之间存在着一种令人瞩目的联系：一方为另方的逆运算，这并非就其否定或其互补的意义而言，而是就其互反(reciprocite)的意义而言。我们也能以此赋予互反这个词以一般性的意义，我们曾经使用它来表征一肢式 $(p \vee q)$ 同不相容的关系 $(p \mid q \leftrightarrow p \vee q)$ 或合取 $(p \cdot q)$ 同合取否定 $(p \cdot q)$ 的关系：一种运算的互反是同样的运算，但它是在一些被否定的命题上进行的。既然 $(p \vee q)$ 的互反是 $(p \vee q \leftrightarrow p \mid q)$，所以 $(p \vee q)$ 的互反是 $(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee q)$。在条件的 $(p \supset q)$ 情况中，互反就是 $(p \supset q)$，完全同 $(q \supset p)$[命题(176)]等值，相反，$(q \supset p)$ 的互反是 $(q \supset p)$，而它又同 $(p \supset q)$ 等值[这是大家已在命题(160)所见到的]。

但是，为什么存在这个"互反"项呢(既然立即会被理解为，当一个运算是真时，它的互反可能为真，也可能为假)？首先让我们回忆一下，所有二元联系都可用条件的形式(同用所有其他形式一样)来表达。譬如，$(p \vee q) \leftrightarrow p \supset q$ 和 $(q \supset p)$；$(p \mid q) \leftrightarrow (p \supset q)$ 和

$(q\supset p)$；$(p\cdot q)\leftrightarrow(p\supset\bar{q})$，等等。然而，在条件性的$(p\supset q)$情况下，其互反$(p\supset q)$仅存的联系不过是$(\supset)$而已，但带有置换品性，或者置换项目，如$(q\supset p)$；或者置换算符，如$(p\subset q)$。于是"如果$p$则$q$"的互反就转换为"如果$q$则$p$"，这就恢复"互反"这个词的通常意义了。

还有一层，当条件性的互反同这个条件性运算本身一样为真时，它们的合取就构成一个双重条件性的运算：

(177) $$(p\supset q)\cdot(q\supset p)\leftrightarrow p\equiv q$$

换言之，如果我们转到对应关系的话题上来，一个蕴涵及其互反所组合的乘积给出一个等值，同关系群集（见Ⅲ章）的情形一样，但与类别群集相反，顺的和反的（互反意义上的反的）加法运算的乘积也给出一个等值。我们于是理解从(170)至(172)那些命题在一个蕴涵的群集中所能获得的运算价值，$(p\vee p')$和q之间的等值包含着双重组合$(p\vee p')\supset q$和$q\supset(p\vee p')$的可能性，这就标记着整个群集的可逆性这一特征。

10. 反非条件的：$(\overline{p\subset q})$或$(\bar{p}\cdot q)$

反条件性$(q\supset p)$的否定（即补的意义上的逆运算）是表达式$(\bar{p}\cdot q)$，其析取规范形式是$(\bar{p}\cdot q)$，而合取形式是：

(178) $$(\overline{p\subset q})\leftrightarrow(p\vee q)\cdot(\bar{p}\vee q)\cdot(\bar{p}\vee\bar{q})(\leftrightarrow\bar{p}\cdot q)$$

例：如果p："x是一种软体动物(P)"，q："x是一种昆虫(Q)"，就有$\overline{q\supset p}=\bar{p}\cdot q$

表达式$\bar{p}\cdot q$和命题(178)正好构成互补的意义上的$(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$的否定，于是我们得出（由于对偶法则）：

(179) $$\overline{(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})}\leftrightarrow(\bar{p}\vee\bar{q})\cdot(\bar{p}\vee q)\cdot(p\vee q)$$

此外，$(\bar{p}\cdot q)$是$(p\cdot\bar{q})$的互反（运算Ⅷ），因为

$$\bar{\bar{p}}\cdot\bar{q}\leftrightarrow\bar{p}\cdot q$$

由此导致如下基本事实：如果两种条件的组合给出一种双重条件(177)，那么，两组非条件的组合给出一个否定的双重条件，即一个互反的排斥：

(180) $$(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)\leftrightarrow(p\,\mathrm{W}\,q)$$

从现在起，掌握这两个基本组合的理由是很重要的，如果我们借算符$(\cdot)$（它是命题间"交"的等值号）为工具，把条件性的$(p\supset q)$及其互反$(q\supset p)$的两个析取规范形式联系起来，我们就得到：

(181)
$$\begin{array}{c}(p\supset q)\leftrightarrow(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})\\(\cdot)(q\supset p)\leftrightarrow(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})\\\hline(p\equiv q)\leftrightarrow(p\cdot q)\vee(o)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})\end{array}$$

因为两种合取$(\bar{p}\cdot q)$和$(p\cdot\bar{q})$之间是矛盾的，由于$(p\cdot\bar{q})=o$，$(q\cdot\bar{p})=o$。且除此以外，它们另有矛盾。前者同$(q\supset p)$有矛盾，因为$\bar{p}\cdot q$是一种反非条件性的；后者同$(p\supset q)$有矛盾，因为$p\cdot\bar{q}$是一种（顺演的）非条件性的。

相反，如果以算符$(\vee)$为工具，再把合取$(\bar{p}\cdot q)$和$(p\cdot\bar{q})$二者相互联系起来，这两

种非条件的"并合"就同我们在命题(180)见到的那样,给出了互反排斥$(p \mathbin{W} q)$

(182) $$[(p\cdot\bar{q})\vee(p\cdot q)]\leftrightarrow[(p=q)\vee(q=p)](\leftrightarrow p \mathbin{W} q)$$

因此,一方面是两种条件性的运算 $p\supset q$ 和 $q\supset p$,另一方面是两种非条件性的运算 $p\cdot q$ 和 $p\cdot q$,构成一个自然的系统,它是通过双重条件性的 $p\ \ q$(即两个前者的合取结果)和互反排斥$(p \mathbin{W} q)$(即两种后者的析取结果)的互补而表达出来的。

11. 双重条件性的:$p=q$

这个运算通过它所生成的等值关系$(p\leftrightarrow q\ \ df\vdash p=q)$,在演绎推理中起着一种基本作用。关系↔实际上保证着代换的运转,而关系→和关系←标志着运算过程的上行的和下行的方向。

双重条件性的析取和合取的规范形式是:

(183) $$(p=q)\leftrightarrow(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$$
$$(p=q)\leftrightarrow(p\vee q)\cdot(p\vee q)$$

12. 互反排斥:$(p \mathbin{W} q)$

运算$(p \mathbin{W} q)$一般是借助于析取$(p\vee q)$来做符号表达的,它反映一种特殊情况,即这种析取是相互排斥的。然而,它表明的不仅是一种很不同的意义(既非双肢式的意义也非二肢式的意义),而且还表现出一些区别很大的形式特征。它的规范形式为:

(184) $$(p \mathbin{W} q)\leftrightarrow(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)$$ [参见命题(113)]

(185) $$(p \mathbin{W} q)\leftrightarrow(p\vee q)\cdot(p\vee q)$$

例:"生物排斥矿物"↔"生物和非矿物或非生物和矿物"↔"同时为(生物或矿物)和(非生物或非矿物)"。

然而,我们立即注意到这两种规范形式构成双重条件性的规范形式的否定(通过对偶法则):

(186) $$(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\leftrightarrow(\bar{p}\vee\bar{q})\cdot(p\vee q)$$

和

(187) $$(p\vee\overline{\bar{q})\cdot(\bar{p}}\vee q)\leftrightarrow(p\cdot q)\vee(p\vee q)$$

相反,非排斥的析取有合取的否定作为它的反演(否定):$(p\vee q)\leftrightarrow(p\cdot q)$。此外,和二肢式相反,互反的排斥是完全对称的。二者都是可互换的:

(188) $$(p \mathbin{W} q)\leftrightarrow(q \mathbin{W} p)$$ [参见命题(127)]

然而,可交换性并不导致关系$(p\vee q)$的完全对称,因为$(p\vee q)$的互反是$(p\vee q)$,即不相容性$(p\ \ q)$,而$(p \mathbin{W} q)$的互反是$(p \mathbin{W} q)$,即重新回到$(p \mathbin{W} q)$:

(189) $$(\bar{p} \mathbin{W} \bar{q})\leftrightarrow(\bar{p}\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})\leftrightarrow(\bar{p}\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\leftrightarrow(p \mathbin{W} q)$$

于是,其完全对称性通过命题间的互反运算的等值被正确地规定出来了。

在互反排斥和非排斥的析取间另一基本差异表现在它们同条件性的关系。关于这个问题,有两点需要注意。首先,二肢式既然可被双重条件性的$(p\vee q)\leftrightarrow(p\supset q)\leftrightarrow(q\supset p)$运算转译出来,无须命题 p 在此情况下等于 q,也无须 q 等于 p,那么,互反排斥

也就能同样给出：

(190) $$(p \mathbin{W} q) \leftrightarrow (\bar{p} \equiv q) \leftrightarrow (\bar{q} \equiv p)$$

因为两种真的独特可能性是$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$。其次，作为命题(190)的结果，双重条件性的$(p \quad q)$是通过$(\bar{p} \mathbin{W} q)$而不是通过$(p \vee q)$[如同后者对条件性的$(p \supset q)$所进行的那样]被转译出来的[参阅命题(155)]。

13. p的肯定：符号$p[q]$

规范形式：[参见命题(114)]

(191) $$p[q] \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

$$p[q] \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (p \vee q)$$

例："x是哺乳的和水生的或哺乳的和非水生的" (191)"x同时是哺乳的或水生的和哺乳的或非水生的"。

因此，这个运算是伴有q或无q的p的简单肯定，所缺的是构成一种反条件性的$(q \supset p)$的结合$(p \cdot \bar{q})$。

鉴于这里涉及的是一种p的简单肯定，所以它的否定起了反演的和互反的双重作用，它的互反$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$同它的反演(运算 W)是同一的。

14. p的否定：符号$\bar{p}[q]$

规范形式：[参见命题(115)]

(192) $$\bar{p}[q] \leftrightarrow (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

和

$$\bar{p}[q] \leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$$

这一运算为前者的反演，因为：

(193) $$\overline{(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$$

和

(194) $$\overline{(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q})} \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$$

$p[q]$的互反等于它的反演$p[q]$。

15. q的肯定：符号$q[p]$

规范形式：[参见命题(116)]

(195) $$q[p] \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

和

$$q[p] \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (p \vee q)$$

要形成一个条件性的$(p \supset q)$，运算$q[p]$中尚缺一项合取$(p \cdot q)$。

16. q的否定：符号$q[p]$

规范形式：[参见命题(117)]

(196) $$q[p] \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

和

$$q[p] \leftrightarrow (p \vee q) \cdot (p \vee q)$$

$q[p]$的规范形式的否定给出这一相同运算$\bar{q}[p]$：

(197) $$\overline{(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (p \vee \bar{q})$$

和

(198) $$\overline{(p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee q)} \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot q)$$

$q[p]$的互反是$q[p]$，因而，这里的互反又同反演是同一的。

§31　二价命题间逻辑的基本运算机理(制)

通过前面16种运算的缕述，现在就可制出一个二价命题间逻辑的基本运算机制表：它概括地规定着命题间的转换。并且，我们可把它们同命题内运算的转换进行比较。

诚然，在未经研究过各大逻辑学者运算的整体结构就选用他们的一些计算符号，看来未免过于武断，例如(　)这一算符采自薛弗尔(Sheffer)和弗雷格(Frege)者有二，即(　和⊃)，采自罗素者有二，即(　和∨)，或采自布伦塔诺(Brentano)①者有二，即(　和·)，等等。但，这样做的结果不仅事关符号的简约(可是要求读者所花的劳力则与之成反比例了)，而且与库蒂拉(Couturat)也称之为运算观念的"宣扬人性"的信仰攸关。按照他的想法，运算实际上可归结为一个简单的关系。确实，自那时起，操作主义的趋势表现为数理逻辑学中的某些思潮。因此，人们将提到16个二元命题的"算符"来强调它们在运算中所展示的能力，并且人们还将经常借用英语中"操作"("manipulation")一词来表示计算。然而，不少学者仍同化运算于一种简单关系。要是用可逆的转换这一基本特性来标志运算的话，那么，一个运算同一个关系的不同就很显而易见了。因为一个关系构成着一个可被转换的现实，而不是转换本身(参阅第§4定义9—10)②。运算机制绝无拟人化的意味，因为，可逆性是理性的最深刻、最普遍的准则，它同旧逻辑的同一性原则不同，因为同一性仅是顺演和反演的产物。

如果大多数逻辑学家仍坚持同一性，反对运算可逆性本身——非矛盾的和其结果为连贯一致性的唯一源泉——，那是因为实际上存在着两种对立形式的真值概念。这种对立的表现，当然既不是由于符号表达本身的不同，也不是由于对细节解释上的差异，而是各自对不同联系的类型的重视程度不同，尤其是对所谓"重言式"的"完全肯定"

① 初译稿译为"布伦塔诺"，第一次修订时，按照惯例译为"布伦塔诺"。——译者注

② 定义9　一种"关系"是指借另一词作中介来特征化一个词。

定义10　我们或者通过"形式"的修改，或者影响其"内容"的代换把一种结构(见定义5)逆转为另种结构称之为"运算"。——编者

的重视程度不同所致。

运算的规范形式一览表

运算	析取规范形式	合取规范形式
1 完全肯定($p * q$)	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$	(o)
2 完全否定(o)	(o)	$(\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (p \vee q)$
3 析取($p \vee q$)	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$	$(p \vee q)$
4 合取否定($p \cdot q$)	$(\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(\bar{p} \vee \bar{q}) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$
5 不相容($p\ q$)	$(\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$	$(p \vee \bar{q})$
6 合取($p \cdot q$)	$(p \cdot q)$	$(p \vee q) \cdot (p \vee q) \cdot (p \vee q)$
7 条件性的($p \supset q$)	$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(\bar{p} \vee q)$
8 非条件性的($\overline{p \supset q}$)	$(p \cdot \bar{q})$	$(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$
9 反条件性的($p \subset q$)	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot q)$	$(p \vee q)$
10 非反条件性的($\overline{q \supset p}$)	$(p \cdot q)$	$(p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$
11 双重条件的($p \equiv q$)	$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$
12 排斥($p\ W\ q$)	$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$	$(p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$
13 肯定 $p[q]$	$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$	$(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q})$
14 否定 $\bar{p}[q]$	$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$	$(p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$
15 肯定 $q[p]$	$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$	$(p \vee q) \cdot (p \vee q)$
16 否定 $\bar{q}[p]$	$(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$	$(p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$

在谈到规范形式理论时，夏·瑟路斯(Ch. Serrus)说道："有价值的表达式往往在重言式中被论及。这就是一个客观事实，从那里引出深义是适当的。重言式不仅仅是永真的组合，而且不管赋予变式……的那些值是什么，这一组合始终是真的。人们应该无条件地承认它为演绎的基本格式……。"然而，"除重言式外，各种关系都由于它排斥了[……]的那些组合给自身带来许多限制。但表面上互不一致的形式(Ⅱ—ⅩⅢ)却在重言式中按序排列，相互给予注释。凭借重言式，系统的思想才进入形式逻辑[……]。所有连合和排斥(其实，这也是一种连合的方式)才在重言式里取得一个意义，而重言式由此就成为全真的象征。"①

如能进行更大胆一点的比较的话，夏·瑟路斯给予重言式的基本作用(它还是相当模糊的，如果没有反演、互反等精确的规律的话)，令人想起菲希特(J. G. Fichte)的方

① 夏·瑟路斯：《逻辑通论》，1945，第79—81页。

式，在他的体系中，"绝对的我"为了发挥作用就不得不将自身一分为二，并依存于预先从它自身实体割裂出来的"非我"！如果说重言式真地表达一切在先，然而，由于人们不满足于一下子搬出"一切"，所以为了讲述一些事情，就不得不在重言式本身上"精雕细凿"出某些特殊的关系来。正是在此时运算才参加进来，即使它带有拟人化的意味，即同动作的主体攸关：它赋予呆板、无生气的重言式以生命和运动，用辩证法取代绝对的肯定。因此遂产生两种可能的逻辑概念：第一种是静态概念，它把任何运算理解为"完全肯定"（运算Ⅰ）的贫乏化，第二种是运算概念，它把重言式理解为主体在它上面加工的形式的物质，而它却保留着以标示一切运算本身的以及所有动的和可逆的转换的系统为"全真"的品性。从第二种观点看来，"完全肯定"成为许多运算中的一种，人们可以从那里出发，但也可回返到那里，或者从其他运算出发重又回到原处，在这两种情况中，转换代表着构造本身。由此看来，"完全肯定"只是人们通过两个命题构造的四种同时为真的合取，但这里说的是以两个命题和它们的否定生成的16个运算中的一个特殊运算。同样，也可用三个命题实现八个可能的合取，但这只是256个可能运算中的一个。四个命题实现的16个合取的情形也是如此，它是65 536种可能运算中的一个。其他依此类推。"完全肯定"($p*q$)是这样一种运算：它容许从4个合取（或由两个合取构成一个命题）过渡到8个，16个，等等[1]，而不是16，256或65 536个可能组合中的许多联系之一。此外，这一特殊运算单独也无法从n，…，16，8个合取返回到4个，2个合取，它还需要一个逆运算才能进行后退的过程[2]。总之，就重言式论者的观念说来，那些不可胜数的可能排列自身是作为预存于完全肯定中许多组合的简单结果，它早就被给出了的，好像有思想有行动的主体为了建立一种演绎理论把他的所有观念尽皆投入选筐中，并加以混合，以便随后从中提取待选的真值集合。相反，就运算的解释说来，在思想里起重要作用的并非那些具有无限数量的排列；只是动作本身容许某些排列过渡到另些排列，并且构成可逆的转换系统。这就是同它的构造功能相配称的形式逻辑研究的唯一目标。

在阐述了二元组合中某些可能转换后，现在让我们探索着分析一下它们的基本运算机理。有几个要点须事先明确一下。我们可从任何一个运算出发，例如，现从($p \vee q$)在它的析取规范形式($p \cdot q$)$\vee$($p \cdot q$)$\vee$($p \cdot q$)下来着手考虑。

举例来讲，假设p＝"x为陆生的"，q＝"x为水栖的"，那么($p \vee q$)则意味着"陆生和非水栖($p \cdot q$)或水栖和非陆生($p \cdot q$)或既是陆生又是水栖的($p \cdot q$＝两栖的)"。

上述问题中的运算可用三种不同的却都是一般性的方式进行转换，这样就得出三

① 参阅§39标题B.（形式Ⅳ）。

② 夏·瑟路斯：《逻辑通论》，1945。

个新的运算：

1° 它的反演：$(\overline{p \vee q}) = \bar{p} \cdot \bar{q}$

合取否定 $p \cdot q$ 在上述例子中意味着既非陆生，亦非水栖，因而也不可能是两栖

定义 32 一个运算（例如 $p \vee q$）的反演就是对完全肯定（$p * q$）的补（充）。

因为，（$p \vee q$）的反演是 $\bar{p} \cdot q$，于是得出：

(199) $$[(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)] \vee [\bar{p} \cdot \bar{q}] \leftrightarrow [p * q]$$

因此，在整个完全肯定式中可把给出的一个运算的反演视作为该运算的否定：

(200) $$(\overline{p \vee q}) \leftrightarrow (p * q) \cdot (\overline{p \vee q}) \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

即：

(200 乙) $$(\overline{p \vee q}) \leftrightarrow [(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})]$$
$$\cdot [(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)] \leftrightarrow (p \cdot q)$$

反演也可同样得出，只需通过对偶法则的应用，也就是说，用否定代替肯定及其相反，同时用（·）代替（∨）及其相反，$p \vee q \leftrightarrow p \cdot q$（参阅§30 III 段）。

2° 它的互反：$\bar{p} \vee \bar{q}(\leftrightarrow p|q)$，即 $(\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$。

运算（$p \vee q$）排除"两栖"（$p \cdot q$），但保留"陆生和非水栖（$p \cdot q$）"或水栖和非陆生（$\bar{p} \cdot q$），以及"既非陆生，也非水栖（$\bar{p} \cdot \bar{q}$）"。

定义 33 一个运算（例如 $p \vee q$）的互反就是同一运算，但是在运算命题上方加上相反的符号（如在 $p \vee q$ 情况中的 $\bar{p} \vee \bar{q}$）。

我们用"互反"一词来表示这一转换，因为，在被置于条件形式下，两种互反运算在被置换的命题间一对一地构成二个条件性的运算：$p \vee q \leftrightarrow \bar{p} \supset q$ 和 $p \vee q \leftrightarrow \bar{q} \supset p$ 的情况就是这样。

3° 它的对射，即（$p \cdot q$）代替（$p \vee q$）（相反的代替亦能成立）。

在前面的例子里，$p \cdot q$ 意味着两栖的动物。

定义 34 我们把一个运算叫作"对射的"运算，由于它的形成是在其相应的规范形式中以（∨）代替（·），或者相反，但不改变命题上的正负符号。

$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$ 的对射运算就会是：

$$(p \vee q) \cdot (p \vee q) \cdot (p \vee q)$$

这一对射运算恰好同（$p \cdot q$）相对应。

每个运算都有一个反演运算（或相补的运算）、一个互反运算及一个对射运算。但只有反演运算始终有异，而互反运算能互为同一或同反演运算同一，对射运算也是如此。

	(1)顺演	(2)(1)的反演	(3)(1)的互反	(4)(1)的对射
Ⅲ	$p \vee q$	$p \cdot q$	$p \mid q$	$p \cdot q$
Ⅴ	$p \mid q$	$p \cdot q$	$p \vee q$	$\bar{p} \cdot q$
Ⅵ	$p \cdot q$	$p\ q$	$p \cdot q$	$p \vee q$
Ⅳ	$\bar{p} \cdot q$	$p \vee q$	$p \cdot q$	$p \mid q$
Ⅶ	$p \supset q$	$p \cdot \bar{q}$	$q \supset p$	$\bar{p} \cdot q$
Ⅸ	$q \supset p$	$\bar{p} \cdot q$	$p \supset q$	$p \cdot \bar{q}$
Ⅷ	$p \cdot \bar{q}$	$p \supset q$	$\bar{p} \cdot q$	$q \supset p$
Ⅹ	$p \cdot q$	$q \supset p$	$p \cdot \bar{q}$	$p \supset q$
Ⅺ	$p = q$	$p \mathrel{W} q$	$p \equiv q$	$p \mathrel{W} q$
Ⅻ	$p \mathrel{W} q$	$p = q$	$p \mathrel{W} q$	$p \equiv q$
Ⅰ	$p * q$	(o)	$p * q$	(o)
Ⅱ	(o)	$p * q$	(o)	$p * q$
XIII	$p[q]$	$p[q]$	$p[q]$	$p[q]$
XIV	$\bar{p}[q]$	$p[q]$	$p[q]$	$\bar{p}[q]$
XV	$q[p]$	$\bar{q}[p]$	$\bar{q}[p]$	$q[p]$
XVI	$\bar{q}[p]$	$q[p]$	$q[p]$	$q[p]$

比较了反演、互反和对射间存在的各种关系后，可得出存在三种可能情况的结论：

首先可得到一个8种运算构成的两个四元模式，每一种四元模式以不同形式表达一个顺演、一个反演、一个互反和一个对射（当然，这些函项也是相对而言，因为每个运算都是它自身的反演的逆运算，互反就是它自身的反演的逆运算，对射就是它自身的反演的逆运算）。①

	(1)顺演	(2)反演	(3)互反	(4)对射
A.	$p \vee q$	$\bar{p} \cdot \bar{q}$	$p \mid q$	$p \cdot q$
B.	$p \supset q$	$p \cdot \bar{q}$	$q \supset p$	$\bar{p} \cdot q$

其次，另有一组运算四元模式，它们的互反同其顺演相同一，它们的对射同其反演相同一。

	(1)顺演	(2)反演	(3)互反	(4)对射
C.	$p = q$	$p \mathrel{W} q$	$p = q$	$p \mathrel{W} q$
	$p * q$	(o)	$p * q$	(o)

最后一组四元运算模式的对射与顺演运算同一，互反与反演运算同一。

① 请参阅命题(124)(131)(136)等式。——编者

	(1)顺演	(2)反演	(3)互反	(4)对射
D	$p[q]$	$p[q]$	$p[q]$	$p[q]$
	$q[p]$	$\bar{q}[p]$	$\bar{q}[p]$	$q[p]$

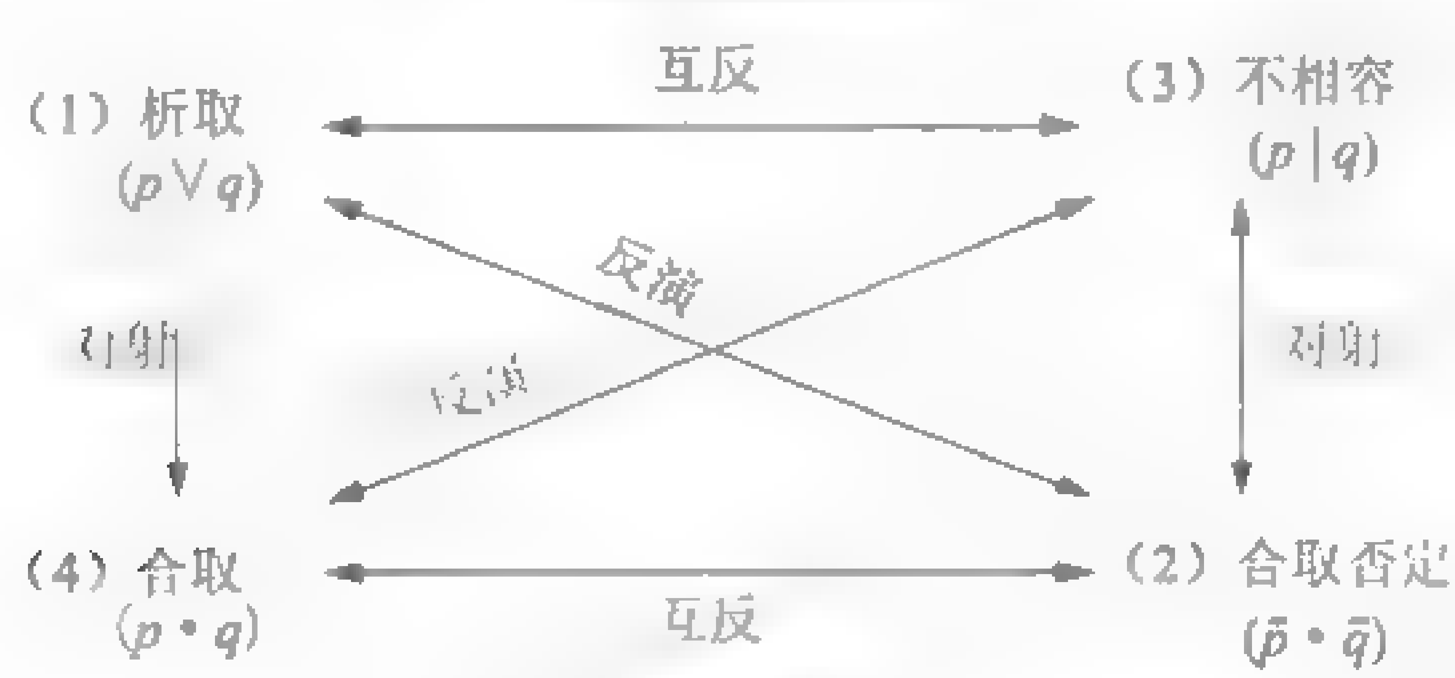
以上四个四元运算模式确定了二价运算的实质结构。第三种模式(C)则由"加法的等值",肯定的为($p \equiv q$),或否定的为(p W q,即 $p \not\equiv q$)和乘法的等值;肯定的为(p * q)或否定的为(o)所组成。最后一个四元运算模式(D)由简单肯定和简单否定运算组成。至于前二种(A与B)四元运算模式,只有它们完全保证着彼此互相区别的顺演,反演,互反和对射等四元的运转,唯有这8个运算在演绎中起着决定性作用(即建设性作用)。为了进一步理解这一点,让我们再深入研究一下由A—B,C,D组成的三种情况:

A—B:具有相互区别的反演,互反和对射等运算。

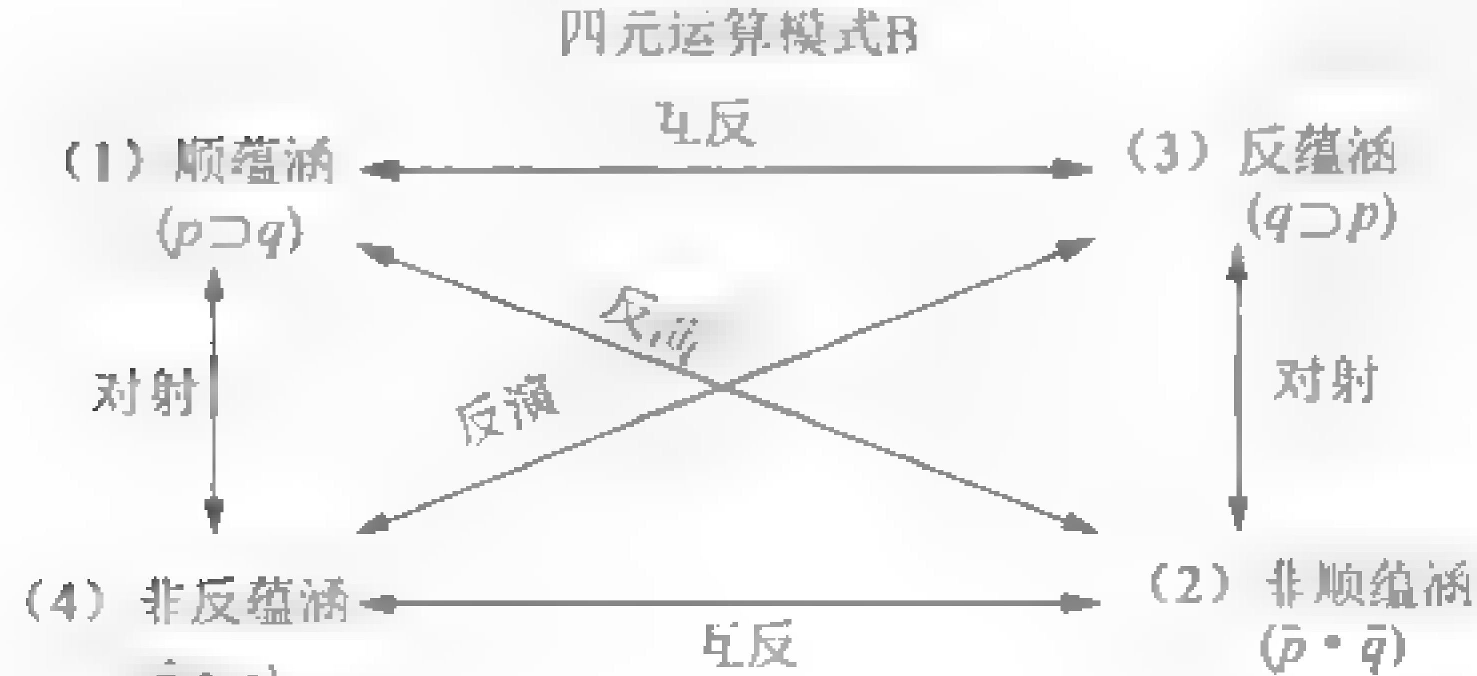
A—B两个四元运算模式由那些非对称的析取规范形式所组成,这些规范形式又由一个或三个合取构成。

于是,其析取规范形式表示着三个合取的那些运算(1)(例如,$p \vee q$ 或 $p \supset q$),作为反运算(2),它就将有一个由一个合取构成的运算(例如 $p \cdot q$ 或 $p \cdot q$),而它们之间是相反的。那些互反运算(3)同样表示着析取规范形式的三个或一个合取,同它们的前者相对应($p \vee q$ 代换 $p \vee q$;$p \cdot q$ 代换 $p \cdot q$,如此等等)。对射(4)就是反演的互反运算,或者叫作互反的反演运算。反运算,互反运算,对射运算间存在着的这种三角关系,可完整地用运算(1),(2),(3)和(4)这四个截然不同的运算定义来表达:

四元运算模式A



四元运算模式B



上示模式即是依据可逆性的各种可能形式转换 8 种不对称二价运算的运算机理(或机制)。

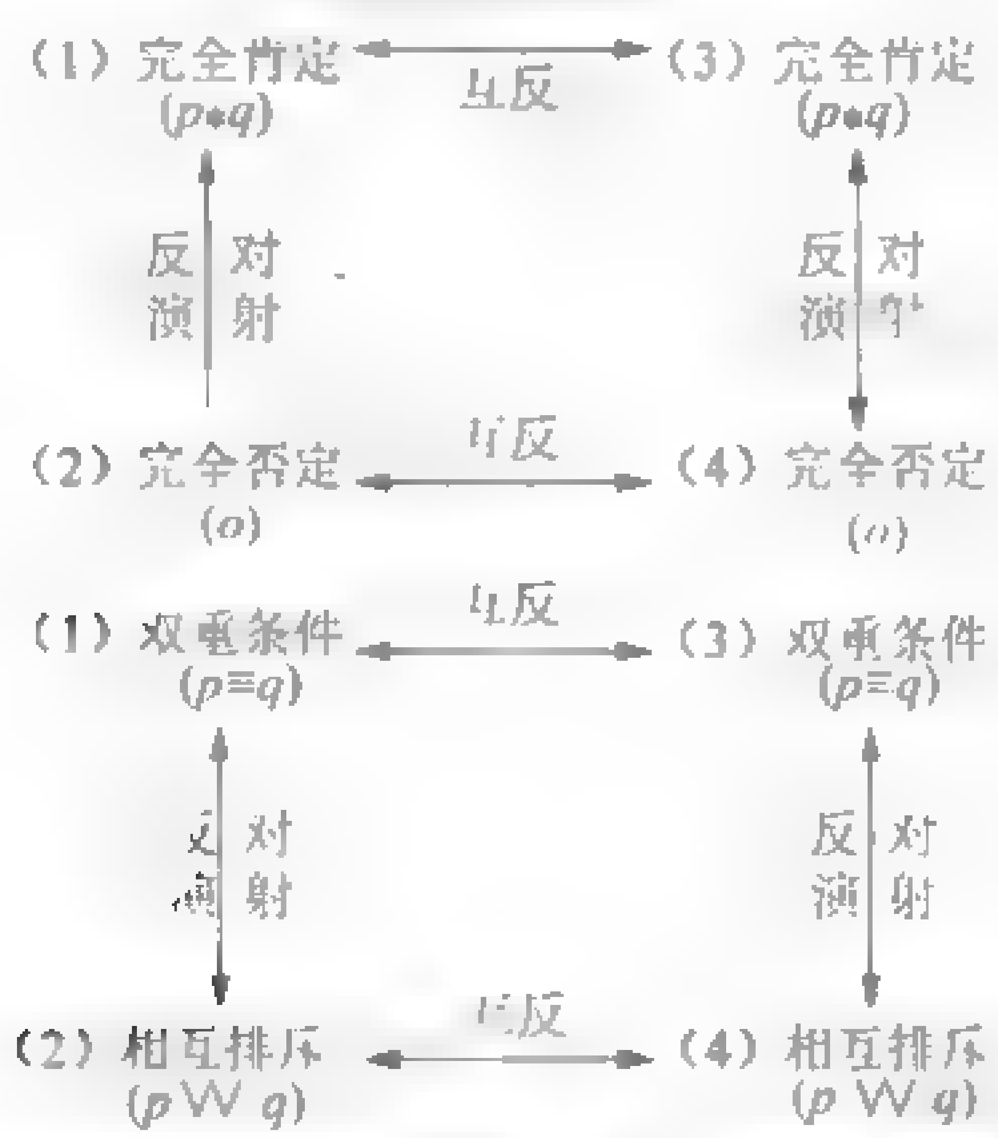
C:反演互异,但互反运算是同一的,而对射运算同反演运算相同一。在其析取规范形式表示 0,2 或 4 对命题(合取)的全部运算中,仍有必要区别出依据合取$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$表示的一种对称性的某些命题,从而得出两个命题为真和两个命题为伪,不同于那些没带有这种对称性的命题,它们就只能转换 p 独立于 q 之外,或者相反。$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$的对称性则导致互反运算间的同一。这种同一表征着正的和负的等值,即$(p \equiv q)$和$(p \vee\!\vee q)$,以及完全肯定和完全否定。因为$(p \equiv q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$的互反是$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$,即是说重新返回到$(p \equiv q)$。而$(p \vee\!\vee q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$的互反是$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$,即是说重新返回到$(p \vee\!\vee q)$,如此类推。至于对射运算则同反演同一。比如:

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow (p * q)$$

的对射运算是:

$$(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q}) \leftrightarrow o$$

四元运算模式C



从模式 C 看来,交叉没有了,因为四个转换中只有两个是互相区别的。相反地,在 A、B 四元运算模式中所标志的关于反演的互反规律可一再获得验证:

运算(1)有一个运算(2)作为它的反演(或补),而运算(2)又是(1)的互反、(3)的反演和(4)的互反。换句话讲,互反运算(1)和(3)自身是同一的,它们有运算(2)和(4)作为它们的反演,而(2)和(4)运算又是互反的(它们也是同一的)。

D:互反运算间是区别分明的,但与反演同一,对射运算间无区别。还有,运算忽视对称性$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$,即是说,转换 p 中是独立于 q 之外的,反之亦然。

四元运算模式D

$$\text{肯定(1)和(4)}\ p[q]\ \text{(对射运算)} \xleftrightarrow[\text{互反}]{\text{反演}} \text{否定(2)和(3)}\ \bar{p}[q]\ \text{(对射运算)}$$

$$\text{肯定(1)和(4)}\ q[p]\ \text{(对射运算)} \xleftrightarrow[\text{互反}]{\text{反演}} \text{否定(2)和(3)}\ \bar{q}[p]\ \text{(对射运算)}$$

这里，反演关系同互反关系相互混淆，因为，上述运算中涉及的是简单肯定和简单否定，随之而来的就是那些对射的同一。因为对射运算 $p[q]=(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$ 的对射就是$(p\vee q)\cdot(p\vee q)$，这就重新回到 $p[q]$；其他照此类推[参阅命题(191)、(192)、(195)和(196)]。然而，前面陈述的有关反演的互反的法则又获得一次验证，运算(1)有它的反演(2)，而这个反演(2)是它本身的互反(3)的反演(4)的互反。换句话说，运算(1)和其互反(3)分别以运算(2)和运算(4)为各自的反演，而运算(2)和运算(4)间它们自身又是同一的。在D情况中，反演和互反在它们之间都是同一的，对射运算之间也是如此，唯有互反各异，因为它们同反演巧合在一起。

至此人们面临着一条命题间逻辑的一般性规律，我们提议把它称为"双重可逆性法则"，并可阐演如下：

假设和定义 令 T 命题的四个合取，如$(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$，即"完全肯定"(或叫重言式)。令(1)为任一运算，从前例中选出由几个不同的合取组成，于是 $n=1$(比如，0或3)。设使一个运算(2)将被叫作(1)的反演(或补)，因为(2)将包含 $T-n$ 个彼此不同的合取，而且同(1)的合取也不同。一个运算(3)将叫作(1)的互反，并且它是来自(1)的一些命题的否定，因此，它的合取数目同(1)一样多，它们彼此有别，而且对(1)的 n 个合取呈双向单一映射的对应，但不是必须都有区别。最后，(2)的正负号反转产生运算(4)，它的合取数同(2)一样，也是 $T-n$ 个，彼此有别，同(2)的 $T-n$ 个合取具有双向单一映射的对应，但两者并不一定要互异。

定理I(双重可逆性法则) 两个互反运算的反演本身是互反的，而且两个反演的互反本身也是反演的。

推论：一个运算的互反的反演与它的反演的互反是同一的。

首先应指出，根据假设，运算(4)是运算(2)的互反，也就是运算(1)反演的，它必然是运算(3)的反演，即是(1)的互反。通过肯定(p或q)和否定(p或q)的简单转换完成了从运算(1)转换为运算(3)、从(2)转换为(4)的道理也是一样。

另方面，运算(1)和(2)固有的合取的重新合并使给出四个不同的合取，其总数等于 T，因为(1)$=n$个合取，而(2)$=T-n$个合取。这四个合取互不相同，因为运算并入(1)和(2)的合取彼此都是各异的，它们的重新的并等值于 T 个初始形式下的"完全否定"。并入运算(3)和(4)的合取情形也是如此，因为在从(1)转换为(3)和(2)转换为(4)时，只

---

* 此处 [illegible] 的对射计算定义同原书定义31略有不同，它成为一个特例。——编者

是(p 和 $\bar{p}$;q 和 $\bar{q}$)的正负号被颠倒而已。运算(3)和(4)的再并,于是同样给出四个各异的合取;这一重新的合并仍然等于 T,因为"完全肯定"的互反依然是"完全肯定"。运算(4)就是(3)的反演,它们在 T 的范围内是互补的。

此外,两个任意运算,当它们的互反为反演时,则它们的互反间彼此也是反演的。由此得出,两个运算(b)和(d)作为两个互反运算(a)和(c)的反演,其自身也必然是互反的,因为包含于(a)和(b)之内的合取的再合并等值于 T,对于包含于(c)和(d)之内的合取来说也是如此。至于 T 的互反仍然是 T 本身:运算(d)将是(b)的互反,(c)将是(a)的互反,因为(d)包括(c)所没有的合取,同样(b)包含(a)所没有的合取。

注意:以上进行的阐明是独立于区别互反和反演的性能之外的,同时也独立于区别互反间的性能之外的(反演间必然是有区别的)互反运算的特点(反运算必然互异)。上面的阐演亦曾仅求助于"完全肯定"的同一和其互反。这种同一是很明显的,因为"完全肯定"依据定义包含着所有可能的合取,并且即使转换所有正负符号,对于总体也不会发生什么变化。

在前面所述中,我们未曾引入"对射"运算的定义,它是被考察的规范形式中以某些(V)代替某些(·)得出的结果(定义 31)。现在就要来证明对射运算(依照定义 31 规定其特征)确实是反演的互反或是互反的反演(其实这是一回事),并且不用改变那些命题上的正负号。

定义:现在让我们引入定义 31:当已被给出的一个运算处于它的析取或合取规范形式下,它的"对射"就是来源于用(V)代替(·)和相反代替的运算,但不改变其所有命题的正负号。

定理Ⅱ——一个运算的"对射"是其反演的互反。当运算的互反与其反演混同时,对射就与顺演本身相同一。当一个运算的互反与它本身同一时,那么,"对射"则与其反演相混同。要是互反同时既与顺演又与反演有别,那么对射就构成第四种区别于其他运算的运算。

因为按照对偶法则,运算(1)的反演(2)是由(V)和(·)的转换以及问题中的那些命题的肯定值和否定值的转换所决定的。另方面,运算(1)的互反(3)是来源于命题的肯定值和否定值的逆转,并不改变运算本身,即不改变一些(V)和一些(·)等算符。"对射"(4)被定义为(V)和(·)的逆转运算,不改变那些命题的肯定值和否定值,是运算(2)的互反,而(2)又是(1)的反演。因此,下列三种情形将是可能的:

a) 互反(3)同反演(2)同一,此时反演的互反就将是反演的反演,即顺演。

b) 互反(3)与顺演(1)同一,这样,反演的互反就将是反演本身。因为,如果问题中命题的肯定值和否定值的某些倒转不改变顺演,那么,它们也不可能改变反演,由于在 T 范围内,反运算是顺演的补,而"完全肯定"T 是同它的互反相同一的。

c) 顺演(1)、反演(2)和互反(3)是彼此区别的:这样,反演的互反就将同前面一个运算有别,因为那些命题的肯定值和否定值的倒转改变着运算[例如(1)和(3)的区别就

可证明这一点]，而且是以互补的形式改变着运算[例如，(2)和(3)的区别就可证明这一点]。

推论Ⅰ——一个运算的互反是该运算的对射的反演：当运算的互反为真时，对射就为伪；当对射为真时，互反就为伪。

例如：如果合取$(p \cdot q)$为真，如有些脊椎动物"既是鳃呼吸又是肺呼吸"，并且它的对射$(p \vee q)$为真("鳃呼吸或肺呼吸，或者两者兼备")的话，则互反$(p \cdot q)$(有些脊椎动物"既非鳃呼吸，又非肺呼吸")就为伪。相反地，如果合取$(p \cdot q)$是真("有些动物有脊柱和脊髓")，它的互反$(p \cdot q)$同样也是真("有些动物既没脊柱也没脊髓")，那么，互反的对射就是伪，"或有脊椎无脊髓，或有脊髓无脊椎或两者都没有"。

同样，如果$(p \supset q)$是真，而$(q \supset p)$是伪，那么，对射$(p \cdot q)$也是真。例如，哺乳动物蕴涵脊椎动物，互反并不为真，那么，"非哺乳动物和脊椎动物"就是正确的。相反，如果$(p \supset q)$和$(q \supset p)$都为真(脊椎动物有脊髓，并且有脊髓亦有脊椎)，那么其对射$(p \cdot q)$就是伪(无脊椎有髓)。

推论Ⅱ——对射只是在由一个或三个合取组成的运算表达式中才能构成第四种有区别的运算。

因为只有由一个或三个合取组成的表达式，才能有一个有区别的互反，和一个有区别的对射同顺演和反演相对应。因为由四个、二个或零的合取的再并所构成的那些表达式只能通过互补，即命题的正负符号的改变和一些$(\cdot)$和$(\vee)$的置换转换成四种有区别的运算。

定理Ⅲ——在一个由三个合取的再合并所形成的运算表达式中，当其中两个表达共同的部分$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$，那么其对射就由表示非共同部分的$(p \cdot q)$或$(p \cdot q)$所构成；反过来说，当问题中的合取之二表示着非共同的部分$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$，那么，其对射将会由表示着共同部分的$(p \cdot q)$或$(p \cdot q)$所构成。

因为当两个合取代表相同的部分$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$时，考虑中的表达式的互反保留着这两个合取(只是把正负号简单地转换成$p \cdot q$和$p \cdot q$)，并且只改变该表达式的第三个合取；已知对射是互反的反演，所以初始的表达式的第三个合取便构成它的对射。举例来说：

$$(p \supset q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

的互反即是

$$(q \supset p) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

$(p \supset q)$的对射将是$(p \cdot q)$。当两个合取表示不相同部分$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$时，表达式的互反同样保留这两个合取(正负符号变换但命题本身并未转换：$p \cdot q$和$p \cdot q$)，仅仅改变表述式的第三个合取，因而这将是第一个合取再次构成对射。举例来说：

$$(p \vee q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

的互反即

$$p\ q \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

$(p \vee q)$的对射就将是$(p \cdot q)$。

推论 一个合取的运算表达式的对射是由三个合取组成的表达式构成。那么，两个新合取将会加于第一个合取之内：如果初始的那个合取代表着非共同的部分，而$(p \cdot q$ 或 $p \cdot q)$，这两个新合取就代表共同的部分$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$；如初始的那个合取代表着共同的部分，则那两个新合取就代表非共同的部分。

例如：$(p \cdot q)$的对射是$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow (q \supset p)$，而$(p \cdot q)$的对射是$(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (p|q)$。

注意：对射之构成在于在某些被考虑的表达式内加入或消去某些肯定等值$(p \cdot q \vee q \cdot p)$或某些否定等值$(p \cdot p \vee q \cdot q)$。于是人们就理解，为什么在运算$(p\ \ q)$，$(p \vee\vee q)$，$(p * q)$或$(o)$的情况中已包含着肯定等值和否定等值（以及加和乘），对射是与反演相同一的，因为对射等于是在消去这些等值或非等值。在运算 $p[q]$，$p[q]$，$q[p$ 和 $q\ p$ 的情况中恰恰相反，它们都是一部分由共同部分$(p \cdot q$ 或 $p \cdot q)$和另一部分由非共同部分$(p \cdot q$ 或 $p \cdot q)$所形成，对射与反演是同一的，因为人们不可能在类似的混同表达式中再加入或消去一个全等值（肯定的或否定的），这类正负等值的命题对偶在被考虑的表达式中彼此间是有区别的。

定理Ⅱ和Ⅲ确定了“对射”的地位。现在让我们再详细地分析一下“互反”。

首先，回顾一下定义 33：一个运算的互反是在被考察的某些命题的否定上所进行的同一运算。

例如，$(p \vee q)$的互反是$(p|q)$，因为

$$(p \vee q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

和

$$\bar{p} \vee \bar{q} (\leftrightarrow p|q) \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$$

以上只有符号的变换，而没有运算的更换。

定义 35 当 p 在无肯定和否定的补偿的情况下改变符号时转换 p 值独立于 q 值（或其反演）之外，这就叫作一个二元运算的互反，但变换正负符号则一些 q 就会发生补偿（或反演）。

举例来说：$p[q] \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$，$p\ q$ 的互反是 $p[q] \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$，$p$ 值无补偿地被这一否定转换了，而 q 值变成 q 时却得到 q 变成 q 值的补偿。

定义 36 同时转换所有 p 值和所有 q 值，而 p 的总体和 q 的总体两者变换其肯定和否定的符号，或两者都不变时，这就叫作一个二值运算的互反。

举例来说，$(p \cdot q)$的互反是$(p \cdot q)$，p 和 q 同时被改变符号，但无补偿。

$$(p\ \ q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

的互反是：

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow (p \equiv q)$$

p 和 q 同时都得到转换，但有补偿。

定理Ⅳ　当一个二元运算的互反转换 p 值而不考虑 q 或反演时，这一互反就同其反演相同一。

因为要是 p（或 q）独自（或独立）变值，那就构成简单的转换（p 变成 p 或相反）。这样，互反就等于反演。

举例来说，$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow p\ q$ 的互反是 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow p[q]$，这个运算同时也是它的反演。

定理Ⅴ　当 p 值和 q 值同时通过一种互反而改变时，则这一互反应受制于以下这些条件：1°一个由单一合取形成的二元表达式的互反，如果命题 p 和 q 的正负号相同，则对一种顺演等值（$p\ \ q$）说来就是它的补，并且如果 p 和 q 命题的正负号相反，则对一种反演等值（$p \mathbin{W} q$，即 $p\ \ q$ 和 $q\ \ p$）来说也是它的补。2°一种二元表达式的互反（其析取的规范形式具有 2 至 1 个合取）是由双向单一映射地对应着的一些合取组成，如果 p 和 q 的正负符号相同，则那些合取中的每一个，对顺向等值（$p\ \ q$）而言，是同对应的那一个相一致性的补，否则，对这等值（$p \mathbin{W} q$）而言，就同对应的那一个相补了。

因为根据定义，$(p \cdot q)$ 的互反为 $(p \cdot q)$，更根据 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$ 的再合并构成一个顺等值（$p\ \ q$），任何正负号相同的命题的二元合取 $(p \cdot q)$ 或 $(p \cdot q)$ 就将有（对顺演等值而言）一个补的合取作为互反：$(p \cdot q)$ 作为 $(p \cdot q)$ 的互反，$(p \cdot q)$ 作为 $(p \cdot q)$ 的互反。如果上面提及的合取正负号相反，$(p \cdot q)$ 或 $(p \cdot q)$ 这两个互反合取就将产生一个排斥或反等值：

$$(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q),\quad 即\quad (p \equiv \bar{q}) 和 (q \equiv \bar{p})$$

如果这种情况又适用于孤立合取的话，那么，它也同样适用于由二、三、四个合取形成的二元规范表达式中的每个合取。举例来说，$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$]的互反为：

$$[(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)]$$

那么，相应的部分合取就得出：

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (p \equiv q)$$

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow (p \mathbin{W} q)$$

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow (p \mathbin{W} q)$$

推论Ⅰ：当 p 和 q 同时变值时，在析取规范形式下包含着四、二个（或零个）合取，一个二元表达式的互反等值于这个表达式本身。

因此，$(p * q)$，$(p\ \ q)$，$(p \mathbin{W} q)$ 和 (o) 的互反分别是 $(p * q)$，$(p\ \ q)$，$(p \mathbin{W} q)$ 和 (o)[1]、这类表达式构成顺等值（$p\ \ q$）或反演 $(p \mathbin{W} q) \leftrightarrow (p\ \ q) \vee (q = p)$，或双等值：$(p * q)$ 既包含 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$ 也包含着 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$，而 (o) 也包括 $(o \mathbin{W} o)$ 或 $(\bar{o} \mathbin{W} o)$。既然 p 和 q 值同时变换的二元表达式的互反是由于遵循顺或反等值的补的

1　完全否定 $(p \vee q) \cdot (p \vee q) \cdot (p \vee q) \cdot (p \vee q)$ 的互反根据定义分别是 $(p \vee q) \cdot (p \vee q) \cdot (p \vee q) \cdot (p \vee q)$，也就是同一的表达式。

合取而形成,那么,$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$的互反就将是$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$,而$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$的互反将是$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$,这就导致这两个转换返回初始的表达式。

推论Ⅱ:在由三个合取形成的(析取)规范二元表达式中,互反表达式保留着两个合取。这两个合取可能组成:(a)顺等值$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$,或(b)反等值$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$。至于第三个合取,在(a)情况中,被反等值的补的合取所代替;在(b)情况下,则被顺等值的补的合取所代替。

因为,要是上面提及的表达式含有三个合取,其中两个构成顺等值或反等值,这两个合取就在表达式中保持不变,因为它们已经互相保有着一个等值(根据推论Ⅰ)。在这种情况下,如果前二个合取共同组成一个顺等值,那么,第三个合取就只能转换成对反等值的补的合取。因为,如果$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$两个合取已包括在前两个合取中,那第三个合取也只能是$(p \cdot q)$或$(p \cdot q)$;反过来讲,如果前两个合取是$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$,那第三个合取也只能是$(p \cdot q)$或$(p \cdot q)$:它的互反就将是对顺等值的补。

因此,互反运算$(p \vee q)$和$(p\ q)$的析取规范形式已包含了两个合取$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$,即反等值。所以互反把$(p \cdot q)$转换成$(p \cdot q)$或其反演。至于蕴涵$p \supset q$和$q \supset p$,它们的析取规范形式也已包含了两个合取$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$,即顺等值;于是互反把$p \cdot q$($q \supset p$中的内容)转换为$\bar{p} \cdot q$($p \supset q$中的内容),或者相反。

推论Ⅲ:当一个二元表达式(其互反同时转换p和q)以肯定的或否定的条件式出现时,那么,它的互反通过被排列的元素间的条件式(反蕴涵,即反演)所构成。在同样都是肯定的命题间的肯定蕴涵$(p \supset q)$的条件下,那么,条件性的及其反演的合取于是给出一个顺演等值式$(p \equiv q)$,或在正负号相反时命题间的否定蕴涵$(p \supset \bar{q})$的条件下,也给出一个反演的等值式($p \vee\!\vee q$,也就是$p \supset q$和$q \supset p$);当上述两个条件一个都不满足时,则情况迥异。

因为条件性的运算诸项的排列来源于互反定义本身,因为$p \supset \bar{q}$有

$$(p \supset \bar{q}) \leftrightarrow (q \supset p)$$

作为它的互反。而$q \supset p$则有$(q \supset p) \leftrightarrow (p \supset q)$作为它的互反。由此引出诸肯定命题$p \supset q$和$q \supset p$间的两个肯定蕴涵的合取给出一个顺演等值,因为

$$(p \supset q) \cdot (q \supset p) \leftrightarrow (p \equiv q)$$

诸命题的正负号相反的两个否定蕴涵也是如此。因为,$p \supset \bar{\bar{q}}$和$\bar{\bar{p}} \supset q$同时加以合取,就意味着:

$$(p \supset q) \cdot (p \supset q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow (p \vee\!\vee q)$$

因为$(p \supset q) \leftrightarrow (p \cdot q)$,而$(p \supset q) \leftrightarrow (p \cdot q)$。除了上述两种情况(以及顺演等值本身)外,任何否定蕴涵和正负号相反的诸命题的任何肯定蕴涵,只能通过合取及其互反给出一个反演等值$(p \vee\!\vee q)$;因为$p \supset q \leftrightarrow p \cdot q$,$q \supset p \leftrightarrow p \cdot q$,两个非蕴涵的合取等值于$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$,即等于反演等值。另一方面,正负号互异的命题间条件性的运算$p \supset q$,$q \supset p$,$p \supset q$和$q \supset p$,只能通过它们的互反的合取正负号混杂的一些组合$p \cdot q$或$p \cdot q$,这就是

说，重新回到反演等值，由此得出后面的互反运算表。

（我们可以）从定理Ⅴ和它的一些推论中导出这一基本事实：互反使得运算中加入了一个特殊的互补性，它与双重条件性运算（$p \quad q$），而不是与完全肯定（$p * q$）相关联，正如一般性的互补性特征化反演运算一样。正是这种同双重条件有关的互补性解释着互反的三个本质特性。

1° 所有运算表达式由它们本身表示了一个顺演等值（$p \quad q$）、反演等值（$p \mathrm{W} q$）或（$p * q$）和（o）的组合式，这些运算表达式都是对称的，因此同它们的互反是同一的。

2° 两个反条件性的合取〔$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$〕构成一个双重条件式。

互反运算表

Ⅰ.被考虑的运算	Ⅱ.（Ⅰ）的互反	Ⅲ.相应于（Ⅰ）的条件式	Ⅳ.相应于（Ⅱ）的条件式	Ⅴ.相应于Ⅲ和Ⅳ的合取的双重条件式
$p \vee q$	$p \vee q(\leftrightarrow p \quad q)$	$p \supset q$	$p \supset \bar{q}$	$(p \supset q) \cdot (p \supset \bar{q}) \leftrightarrow (p \equiv \bar{q})$
		$q \supset p$	$q \supset p$	$(\bar{q} \supset p) \cdot (q \supset p) \leftrightarrow (q \equiv p)$
$p \cdot q$	$p \cdot \bar{q}$	$\overline{p \supset q}$	$\overline{p \supset q}$	$(p \supset \bar{q}) \cdot (\bar{p} \supset q) \leftrightarrow (p \equiv q)$
$p \quad q$	$\bar{p} \supset \bar{q}(\leftrightarrow q \supset p)$	$p \supset q$	$q \supset p$	$(p \supset q) \cdot (q \supset p) \leftrightarrow (p \equiv q)$
$p \cdot q$	$\bar{p} \cdot q$	$\overline{p \supset q}$	$\overline{q \supset p}$	$(\overline{p \supset q}) \cdot (\overline{q \supset p}) \leftrightarrow (p \equiv q) \cdot (q \equiv \bar{p})$
$p \quad q$	$\bar{p} \equiv \bar{q}$	$p \overset{\supset}{\subset} q$	$\bar{p} \overset{\supset}{\subset} \bar{q}$	$(p \overset{\supset}{\subset} q) \cdot (\bar{p} \overset{\supset}{\subset} \bar{q}) \leftrightarrow (p \equiv q)$
$p \wedge q$	$p \wedge q$	$p \quad q$	$q \quad p$	$(p \quad q) \cdot (q \supset p) \leftrightarrow (p \quad q) \cdot (q \quad \bar{p})$
$p * q$	$p * q$	$(p \vee p) \supset (q \vee p)$	$(q \vee q) \supset (p \vee p)$	$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
o	o	$\bar{o} \overset{\supset}{\subset} o$	$o \overset{\supset}{\subset} o$	$(o \equiv \bar{o}) \leftrightarrow (o \mathrm{W} o)$

3° 其互反同时变换着 p 和 q 的那些运算表达式，它们的互反是条件性运算，只要后者一旦被置于条件形式下。正是这第三个特性赋予互反这个词以多种转换，于是我们把这些转换均隶属于互反名称之下。

此外，我们还注意到，为什么运算 $p \quad q$、$p \quad q$、$q \quad p$ 和 $q[p]$ 的互反同它们的反演相同[1]，这是因为它们的构成中都有一个共同的部分（$p \cdot q$ 或 $p \cdot q$）和一个不同部分（$p \cdot q$ 或 $p \cdot q$）。既然由肯定等值式（$p \cdot q \vee p \cdot q$）或否定等值式（$p \cdot q \vee p \cdot q$）一对互补所组成，那么，互反在这种情况下就等于是在反演整个表达式（见定理Ⅸ）。

我们在§31开始部分已揭示了四种四元运算模式的特征，现在人们将会理解它们的运算作用：它们是同某些十分不同的演绎功能相对应的。至于四元运算模式 D（反演同一于互反）仅仅涉及肯定和否定，四元运算模式 C（互反与它们本身同一）包含各种双

[1] 因为 $(p \vee p) \supset (q \vee q)$ 给出 $(p \vee p) \cdot (q \vee q) \vee o \cdot (q \vee q) \vee o \cdot o \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$。

重条件性运算并在演绎中主要地起着调节作用。至于四元运算的 A 模式(肯定和否定的析取和合取)和 B 模式(条件性的和非条件性的)，恰恰相反，它们所扮演的纯粹是一些构造性的运算，它们的不同组合达成顺演等值式和反演等值式。

至于体系的合理性，则完全由反演(inversion)、互反(reciprocie)和对射(correlativite)所构成的可逆转换来保证。反演、互反和对射进行工作的基本机制(机理)，我们还将在命题间运算的"群集"中加以论述。

事实上，反演是以对完全肯定的补为基础的；互反则表示对肯定的或否定的等值的补(见定理Ⅴ)；而对射则是互反的反演(见定理Ⅰ)，并且是在被考虑的表达式中进行增加或消去后由肯定的等值式或否定的等值式(见定理Ⅲ)所组成。肯定的等值式( )和否定的等值式(W)的重新并合，构成了一个"完全肯定"($p*q$)。其结果是反演、互反和对射，连同零转换(或同一性)构成一个单一的系统。这样的一个系统致使前三个转换中的任何两个可给出第三个转换，四个转换中的任意三个可给出第四个转换。由此得出建立在这四种转换集合之上的一个可交换的转换群。

为了阐明这个基本事实，我们将采用下述表达方法。

两种命题 p 和 q 之间 16 个可能的运算中的任一个都能借一种四倍性($abcd$)来描述其特征，在此 $a,b,c,d\in\{1,0\}$[见(98乙)]。我们把 a',b',c',d' 叫作同 a,b,c,d 诸值相反的值，即是说，例如，$a=1$，$a'=0$，如果 $a=0$，$a'=1$。在此条件下，反演可被看作一种转换 N，即：

$$N(abcd)=(a'b'c'd')$$

互反可被视为转换 R，即：

$$R(abcd)=(dcba)$$

对射可被视为转换 C，即：

$$C(abcd)=(d'c'b'a')$$

最后，我们还要引进同一性转换 I，即：

$$I(abcd)=(abcd)$$

在此把前述三条定理重新加以公式化看来是首要而可能的。

定理Ⅰ　设使有两种命题间运算($a_1b_1c_1d_1$)和($a_2b_2c_2d_2$)，如果 $a_1=d_2$，$b_1=c_2$，$c_1=b_2$ 和 $d_1=a_2$，则 $N(a_1b_1c_1d_1)=RN(a_2b_2c_2d_2)$，如果 $a_1=a_2'$，$b_1=b_2'$，$c_1=c_2'$，$d_1=d_2'$，则

$$R(a_1b_1c_1d_1)=NR(a_2b_2c_2d_2)$$

检验　定理的第一部分要求明示 $N(d_2c_2b_2a_2)=RN(a_2b_2c_2d_2)$。但根据 N 的定义，得出：

$$N(a_2b_2c_2d_2)=(a_2'b_2'c_2'd_2')$$

另方面，根据 R 的定义，得出 $R(a_2'b_2'c_2'd_2')=(d_2'c_2'b_2'a_2')$，这同 $N(d_2c_2b_2a_2)$没有什么不同。

同样，定理第二部分指出：

$$R(a_2'b_2'c_2'd_2')=NR(a_2b_2c_2d_2)$$

然而，根据 R 的定义得出

$$R(a_2b_2c_2d_2)=(d_2c_2b_2a_2)$$

根据 N 的定义得出

$$N(d_2c_2b_2a_2)=(d_2'c_2'b_2'a_2')$$

这同 $R(a_2'b_2'c_2'd_2')$ 没有什么不同。

定理Ⅱ——它包含四个部分：

(1) $C(abcd)=RN(abcd)$，因为 $N(abcd)=(a'b'c'd')$ 和 $R(a'b'c'd')=(d'c'b'a')$，这恰好是 $C(abcd)$。

(2) 如果 $R(abcd)=N(abcd)$，则 $C(abcd)=I(abcd)$。因为假设等于是 $(dcba)=(a'b'c'd')$，因此 $d=a'$，$c=b'$，$b=c'$ 和 $a=d'$。于是，由于 $C(abcd)=(d'c'b'a')$，我们通过替换得出：

$$C(abcd)=(abcd)=I(abcd)$$

(3) 如果 $R(abcd)=I(abcd)$，那么 $C(abcd)=N(abcd)$。验算同前类似。

(4) 如果 $R(abcd)\neq I(abcd)\neq N(abcd)$，则 $C(abcd)$ 同前三种转换有别，假使情况并非如此，并且 $C(abcd)=R(abcd)$，即：

$$(d'c'b'a')=(dcba)$$

于是 $d'=d$，$c'=c$，$b'=b$，$a'=a$，这就同严格字义上的定义是不相容的。如果假定 $C(abcd)=I(abcd)$，就有 $(d'c'b'a')=(abcd)$，那么 $d'=a$，$c'=b$，$b'=c$，$a'=d$ 并且 $d=a'$，$c=b'$，$b=c'$，$a=d'$，这将意味着同假设相反，得出

$$R(abcd)=N(abcd)$$

第三种可能性可以类似的方式处理。

定理Ⅲ——由此可立即建立以下四个等式：

(1) $$C(1\ 1\ 0\ 1)=(0\ 1\ 0\ 0)$$

(2) $$C(1\ 0\ 1\ 1)=(0\ 0\ 1\ 0)$$

(3) $$C(1\ 1\ 1\ 0)=(1\ 0\ 0\ 0)$$

(4) $$C(0\ 1\ 1\ 1)=(0\ 0\ 0\ 1)$$

由于互反很容易导致值的转换：并非二元命题本身的转换，而是它的组合成分命题值的转换，定理Ⅳ和Ⅴ往往赋予"互反"这个词以一个同 R 稍有不同的意义。为了补救这一缺点，如我们坚持 I、N、R 和 C 转换的定义，正如它们在这里所表示的意义，我们将毫无争议地建立这一定理：

定理Ⅳ——I、N、R、C 四种转换的集合构成一个同它们组合有关的可交换的群。

这样，我们毫无困难地得出下表：

	I	N	R	C①
I	I	N	R	C
N	N	I	C	R
R	R	C	I	N
C	C	R	N	I

这个表是逻辑自足的：

(1) 集合中两个元素的组合仍是集合内的一个元素。

(2) 其组合是结合性的。

(3) 每一元素有一个(即它本身的)逆运算。

(4) 存在一个中性元素即(I)。

(5) 其组合是可交换的。

这样一个群②，仅就它本身而言，既不允许从由(N到I)的四种运算格式之一忽然达于其中另一个，也不能由它生成16种二元运算的细目。但它阐明了整个系统的那些可逆性转换的实质，并且由此奠定那些转换的合理性。还应补充一句，这个群从下一事实获得它的真实意义：它阐明了彼此被独立地规定着的反演(N)和互反(R)在一个单一结构中所起的协调作用。更有意义的是，一个双向登记表及其逻辑价值来自组成群的那些转换作用于16种运算之上，也就是，作用于四元集合的那些部分的整体之上。

§32　命题间运算同类运算模式的运算的对应

我们已在§28中确认过，命题间的运算，尽管是自主的，也可以由纯粹类别运算构成的模式来体现：16种二元运算因而对应于那些可从两个类别及其相补的相交$(P\cup P)\cap(Q\cup Q)$的组合。这种同样的对应能在许多转换的细节中被重新发现么？这要在此简略说明一下。

我们从规范形式着手，通过证实分类论据的分类P或Q，把每个命题p或q转译为证实它们的论据的P或Q，而且把p或q转译为类别的互补P或Q，另方面还把算符$(\vee)$和$(\cdot)$转译成类别的并$(\cup)$和交$(\cap)$，那么，完全肯定的析取式就相应于：

(201)
$$(P\cup P)\cap(Q\cup Q)=PQ\cup PQ\cup PQ\cup PQ(=U)$$

(见图19)。

① NN＝I；RR＝I；CC＝I；N＝(CR＝RC)；R＝NC(＝CN)；C＝NR(＝RN)；I＝NCR(＝CRN＝RCN＝etc)。——编者

② 也称克莱因(Klein)四元转换群。——编者

我们称 U 为总类：

$$U=PQ\cup PQ\cup PQ\cup PQ$$

然而命题间运算转译为类别运算将被这一事实所保证，即我们在命题逻辑中已知其作用的对偶性法则是集合理论的一个著名法则，它只乞援于补、并和交的关系；总之，它与类别逻辑攸关[①]。因此，我们将以简单地颠倒所有($\cup$)和($\cap$)以及所有正负号(P 和 $\bar{P}$ 或 Q 和 $\bar{Q}$)的方式来否定表述(201)并将得到相应的"完全否定"(见图 19 和 20)：

(202) $\overline{PQ\cup P\bar{Q}\cup\bar{P}Q\cup PQ}=(P\cup Q)\cap(P\cup Q)\cap(P\cup Q)\cap(P\cup Q)=()$

因此，除开已在§28 中所阐明的转译外，我们很容易借助类别的语词从 16 种二元运算中的每一个得到第二种转译。一方面，正如我们已经知道的，任何二元的表达式同从(201)中摘出的某一排列相对应，例如($p\,|\,q$)的表达式便对应于下一排列：

$$PQ\cup P\bar{Q}\cup\bar{P}Q$$

(见图 23 和借类别的语词所举出的例子)。这样的排列就和 $U-PQ$ 等值，因为 PQ 的交被排斥于总类 U 之外(见图 23)。但，另一方面，根据(202)，同样得出 $\overline{PQ}=\bar{P}\cup\bar{Q}$，每借助于类别的语词，它便同命题(111)$p\,|\,q\leftrightarrow\bar{p}\vee\bar{q}$ 相对应：

(203) $$U-PQ=PQ\cup PQ\cup PQ$$

和

(203 乙) $$\overline{PQ}=\bar{P}\cup\bar{Q}=PQ\cup P\bar{Q}\cup PQ \quad (\text{见图 } 23)$$

因此，根据命题(201)和(202)三种表达式($U-PQ$)、($\overline{PQ}$)和($PQ\cup PQ\cup PQ$)是同一的，从减法角度看，它恰好表达了对偶性：

(204) $$\overline{PQ}=U-PQ$$

形式的机制可能把§30 的各个命题，同样地把在§31 内所引进的概念，以及与之有关的那些定理，分别转译成类别运算的一种模型。

例如，命题(162)($p\,|\,q$)$\leftrightarrow$($p\supset\bar{q}$)$\leftrightarrow$($q\supset\bar{p}$)被转译为：

$$(p\,|\,q):U-PQ;\qquad(p\supset\bar{q}):PQ\cup PQ\cup\bar{P}Q;$$

$$(q\supset\bar{p}):QP\cup QP\cup QP$$

由上得出：

(205) $$U-PQ=PQ\cup\bar{P}Q\cup PQ=QP\cup QP\cup QP$$

这也可被得出，只需这样提出($p\supset q$)$\leftrightarrow p\cdot q$：$\overline{PQ}=\bar{P}\cup\bar{Q}$(见 203 乙)，因为蕴涵 $p\supset q$ 是非蕴涵的否定 $p\cdot\bar{q}$($\leftrightarrow p\cdot q$)。

同样，命题(130)($p\vee q$)$\leftrightarrow$($\bar{p}\,|\,\bar{q}$)对应于：

$$p\vee q:PQ\cup P\bar{Q}\cup\bar{P}Q\quad\text{和}\quad\bar{p}\,|\,\bar{q}:U-\bar{P}\bar{Q}$$

从而得出

(206) $$PQ\cup PQ\cup\bar{P}Q=U-\bar{P}\bar{Q}$$

---

① 德·摩根(de Morgan)公式。

命题(132)$(p\vee q)\leftrightarrow(p\supset q)\leftrightarrow(q\supset p)$同样给出：

(206 乙) $$PQ\cup P\bar{Q}\cup\bar{P}Q=U-\bar{P}\bar{Q}=U-QP$$

因为$(p\supset q)$排斥$(p\cdot q)$，即 $P\bar{Q}$ 和$(q\supset p)$排斥 $q\cdot\bar{p}$，也即是 $\bar{P}Q$。

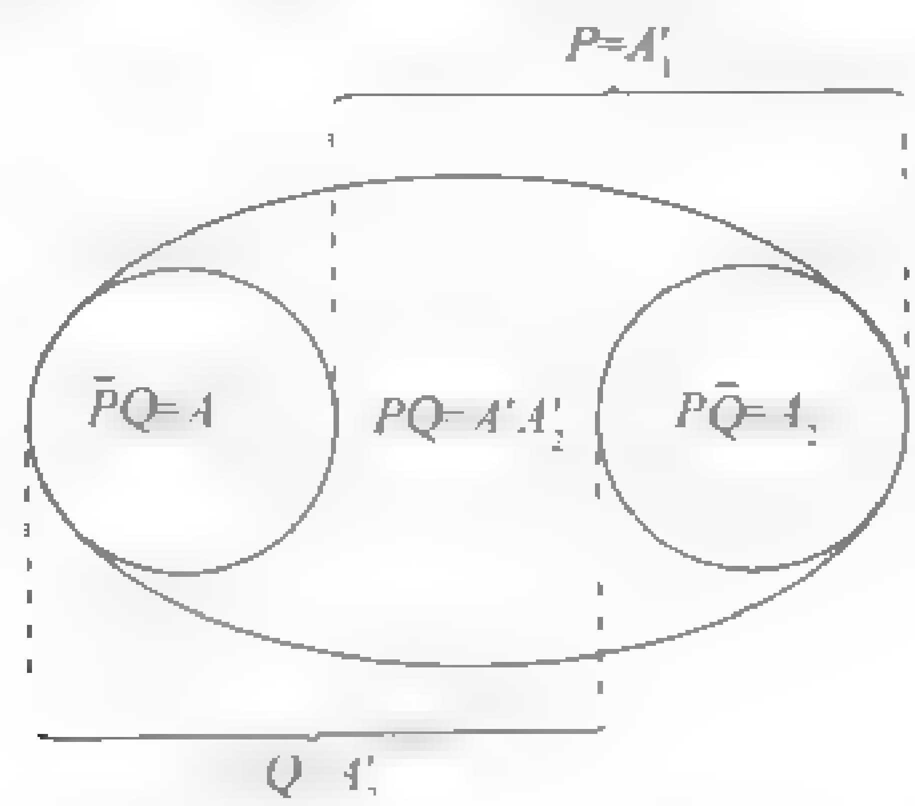


图 36

这个命题(132)特别是和类别的"替代"(vicariance)①$A_1+A_2'=A_2+A_1'$相对应。因为，我们假定 $P=A_1'$ 和 $Q=A_2'$(参阅图 36)，于是将有

$$P\bar{Q}=A_1'\bar{A}_2'=A_2 \quad 和 \quad \bar{P}Q=\bar{A}_1'A_2'=A_1$$

因此得出：

(207) $$B=A_1'A_2'+A_1'\bar{A}_2'+\bar{A}_1'A_2'=A_1'A_2'+A_2A_1$$

由于蕴涵($\supset$)对应于"包含于"($\subseteq$)，其结果是：

(208) $$A_1\subseteq A_2' \quad 因为\ A_1=\bar{P}Q \quad 和 \quad A_2'=Q$$

和

(208 乙) $$A_2\subseteq A_1' \quad 因为\ A_2=\bar{Q}P \quad 和 \quad A_1'=P$$

替代的群集将在析取的组合$(p\vee q)$中找到它的对应。

至于命题(159)$(p\supset q)\leftrightarrow(\bar{p}\vee q)$，我们得出：

(209) $$(p\supset q)：U-P\bar{Q} \quad 和 \quad (\bar{p}\vee q)：PQ\cup\bar{P}\bar{Q}\cup\bar{P}Q=U-P\bar{Q}$$

通过这种用类别的语言所做的转译，我们发现表达式$(p\supset q)$和$(\bar{p}\vee q)$是严格等值的，但前提条件是类别的形式对应于规范的形式。

命题(160)$(p\supset q)\leftrightarrow(\bar{q}\supset\bar{p})$，运用包含的术语，同样对应于$(P\subset Q)\leftrightarrow(\bar{Q}\subset\bar{P})$，这等于说，同

$$(P\cup Q=Q)\leftrightarrow(\bar{Q}\cup\bar{P}=\bar{P})$$

相对应。只要审查一下图 25 那就一目了然了。但算符($\leftrightarrow$)代表只有在"替代"的意义

① 替代式可分为三个组成部分
$(A_1+A_2')=(A_2+A_1')=B$
$A_1'+A_2'=B$
$\because A_1\subseteq A_2'$和 $A_2\subseteq A_1'$——编者

中才得以重新代表一种等值式，因为只有 PQ 的交才对 P 和 Q 是共同的，然而借助于规范形式的术语，人们就可更简单地得出：

(210) $$(p \supset q): U - P\bar{Q}$$

和

$$(q \supset p): (PQ \cup P\bar{\bar{Q}} \cup \bar{\bar{P}}\bar{\bar{Q}}) \quad (PQ \cup PQ \cup PQ) = U \quad PQ$$

使用类别的术语，则转换式(190)$(p \vee q) \leftrightarrow (p \quad q) \leftrightarrow (q \quad p)$同样也是显然的：

(211) $$(p \vee q): U - PQ - PQ$$

$$(\bar{p} = q): PQ \cup PQ = U - PQ - \bar{P}Q$$

$$(q \equiv p): PQ + PQ$$

对每个转换我们可以照此继续进行下去。这些转译在实用上的优点在于可能使得计算既迅速而又直观，从理论的观点看来，这些转译表明命题间运算和命题内运算两者的同构性，尽管前者具有其自主性。它使我们预感到逻辑形式化的两个阶层的那些整体结构之间存在耦合。这就是命题二价逻辑的公理体系即将向我们说明的内容。

译自 J. Piaget, *Essai de logique opératoire*,
第 5 章，1972 年，Dunod, Paris.
应厚昌译　左任侠校

[本章原译稿收录于《皮亚杰发生认识论文选》(左任侠、李其维主编，华东师范大学出版社，1991 年)。原译稿由应厚昌译，左任侠校，此次编辑时仅作字符校更。]

第六章 演绎的基础：公理化和二值逻辑的"群集"

在分析了基本的命题间运算之后，我们就要将演绎的基础剥离出来了。演绎，即通过前文描述过的运算方法，从前提的结论建构。演绎通过前面展示的运算实现了特征传递论证，也就是说，（推理）原则的形式确保了从真理到真理的过渡。现在我们需要研究这些原则，也就是将操作性运算回溯到作为其基础的结构那里。

§33 问题的立场

在演绎性的科学中，公理化不只是一种论证方法；它还具有以下两个方面的巨大优势，想要阐明一切的愿望，以及将明确的形式化素材整理成为最小数量的初始命题；于是，这些命题不用论证就被接受了（公理），但是，基于它们的后继结构却一步步地形成了。为了剥离出演绎的基础，我们首先需要检验命题演算所依赖的那些公理。然而，二价逻辑的公理化很早就已经建立了：罗素、怀特海、尼克德（Nicod）、希尔伯特（Hilbert）、阿克曼（Ackemann）和伯奈斯（Bernays）等人早已把自己的名字写在了著名的公理化问题研究领域。如此，我们对此问题再进行一次新的技术上的讨论就没有必要了。

但是，如果公理化能在纯数学上作为一种理论的起点被接受，（而这种数学上的基础特点不具有认识论的基础意义），那么在逻辑上情况也不会相同。实际上，所有公理化理论的运用都依赖逻辑，并且，从公理上确保逻辑的基础在于用一个严密的循环论证将逻辑建立在其自身的基础上。这样并不会减少公理化研究的用处，这样的研究对于联结的讨论是所必不可少的。但是这个研究并不能解决关于基础的问题。因为公理学提出的公理只有在整个逻辑本身已经运用到公理学的构成中去后，也就是说在逻辑整体上被唯一以其为前提的理论的运用隐秘地接纳之后，才能在理论上由逻辑来构成（因为从其自身性质上说，逻辑具有消除一切直觉的趋势）。

这就是为什么维特根斯坦自己，以及其他和他一起的一些作者，一直希望通过最基本联系的直接直觉，达到一种最初的逻辑事实，并且通过同样被视为直觉事实的受益者的象征主义而从这些初始联结上升到高级运算。然而，我们（在§3）已经分析了这一事业的困难：因为它显示出某种双重困难，即与朴素的实在论——本质上是超逻辑的、从

物理学和心理学的观点上都是无法证明的）——相联系，同时也和逻辑原子论相联系，逻辑原子论与完全形式化运算的全体性存在相对立。

但是，仍然有第二种方法，我们并不会做系统地研究，但会把握它与我们的分析相关的元素。在表达式得到定义之后，整个公理学取决于：1°基础命题，或者公理是无法证明的，但是其他的命题都是可演绎的；2°为了确保这个演绎而采用的规则。这些规则使得转换（这种转换在心理学意义上与操作和活动一致）成为可能，并且使得规则之间相互联系，就如同它们与那些可能从公理中被提炼出来的规则相关联一样。只是，如此形成的调节，就算满足演绎的需求，也只能在由运算本身构成的集合系统中做出非充分性解释，并且通常是内隐的。所以就需要阐明这种集合系统，它是公理体系必须使用的运算的来源。我们假设命题逻辑构成了一个运算整体，所有运算之间都相互关联，并且作为一个集合结构展示一种完全确定的形式：那么这个结构则会拥有其自身的作为整体规则的定律；因此，转换的细节取决于这些定律本身，反之则不成立。于是，就是这些整体性定律构成了演绎的事实原则，而不仅仅是在建构过程起点恰好出现的那些公理和规则，但是这些整体性定律也显现出了一个弊端，即不能解释那些实现简单调节的操作的整体机制。

如果假设是成立的，也就是说如果第二种方法是有效的，那么整体定律必须在公理的内部得到体现，因为它们表达了运算机制的基本方面。于是，这种方法包含了可能的验证，这种验证在于向着被罗素、希尔伯特或尼克德等人认可的公理的返回，即返回整体定律，这是我们从另一角度对它的说明。事实上，大家都知道，理论是建立在公理之上的，而公理强制性地被要求同时满足三个条件：不矛盾、完整和相互独立，所以公理自身必须组成一个体系（公理之间不矛盾律），但体系内部的因素之间不相互制约（公理本身的独立性）。一个这样的体系如果不是由一个运算整体组成的话，还能由什么组成呢？这个运算整体的不矛盾律由可逆性来确认（不矛盾律 $p \cdot \bar{p} \leftrightarrow o$ 已然是一种可逆性组成的表达），而因素间的独立性由运算的必要多样性或者说可复合性来确保。在这一点上，很明确，像 $\vdash p \supset (p \vee q)$ 或者 $\vdash (p \vee p) \supset p$ 这样的由罗素确定为基础命题的公理，对于运算分析并没有任何“基础”意义可言：它们仅仅描述了一些机制，即，部分（p）在整体（$p \vee q$）中的嵌套，或者部分（$p \vee p$）在其自身（p）中的嵌套，但是除了在这样的联系中，这些机制却不能作为事实而存在，也不具备任何意义。从演绎中形成的原理，就是要寻找在最简明的公理中所包含的意义，其必然性已经很明了了：如果方法是有效的，我们将会在罗素或希尔伯特的由命题间运算中简化而来的公理中，找到运算所必需的集合结构的定律。尤其，我们知道，尼克德是如何将罗素的那些互相独立的不同公理归结为一个“唯一公理”而并没有消除其独立性的：由此衍生出来的复合命题具有了对整体运算结构的分析而言，对整个逻辑公理特别有利的条件。

然而，完成了这一项目的第一部分之后，我们自然要寻求直接建立这个在二价命题间运算之间形成的整体结构。如此，我们面对多种可能性，与我们之前已经验证的与类

别运算和关系运算有关的可能性相符合；因而我们需要确定到底是二价逻辑的集合的形式构成了一个格(treillis)、一个群，还是被还原为一个简单群集。

§34　怀特海、罗素和希尔伯特、阿克曼的公理

所有的二价逻辑都可以还原为以下4个公理，希尔伯特和阿克曼将之表达为①：

(212)　　Ax. Ⅰ：$\vdash (p \vee p) \supset p$

(213)　　Ax. Ⅱ：$\vdash p \supset (p \vee q)$

(214)　　Ax. Ⅲ：$\vdash (p \vee q) \supset (q \vee p)$

(215)　　Ax. Ⅳ：$\vdash (p \supset q) \supset [(r \vee p) \supset (r \vee q)]$

更确切地说，罗素在这个集合中又增加了第五个公理：$\vdash [p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p \vee r)]$，但是后来又发现这个公理也可以还原为前面提到的4个公理。

这4个公理用罗素的符号来表达的话，写法如下：

(216)　　Ax. Ⅰ：$\vdash (\overline{p \vee p}) \vee p$

(217)　　Ax. Ⅱ：$\vdash \bar{p} \vee (p \vee q)$

(218)　　Ax. Ⅲ：$\vdash (\overline{p \vee q}) \vee (q \vee p)$

(219)　　Ax. Ⅳ：$\vdash (\overline{\bar{p} \vee q}) \vee [(\overline{r \vee p}) \vee (r \vee q)]$

这个符号体系实际上是通过选言命题$(\bar{p} \vee q)$表达了逻辑判断$(p \supset q)$，见命题(139)。希尔伯特在以(∨)和(－)的联系上建立命题演算的时候就宣称把$(p \supset q)$作为$(\bar{p} \vee q)$符号的缩写；同样，$(p \cdot q)$就是$\overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$符号的缩写。

弗雷格的符号则用缊涵来解释这一切，如下：

(220)　　Ax. Ⅰ：$\vdash (\bar{p} \supset p) \supset p$②

(221)　　Ax. Ⅱ：$\vdash p \supset (\bar{p} \supset q)$

(222)　　Ax. Ⅲ：$\vdash (\bar{p} \supset q) \supset (\bar{q} \supset p)$

(223)　　Ax. Ⅳ：$\vdash (p \supset q) \supset [(\bar{r} \supset p) \supset (\bar{r} \supset q)]$

最后，是布伦塔诺(Brentano)的符号，它将所有的简化为否定和合取：

(224)　　Ax. Ⅰ：$\vdash \overline{\overline{p \cdot p} \cdot \bar{p}}$

(225)　　Ax. Ⅱ：$\vdash \overline{p \cdot \overline{\bar{p} \cdot q}}$

(226)　　Ax. Ⅲ：$\vdash \overline{\overline{\bar{p} \cdot q} \cdot \bar{q} \cdot \bar{p}}$

① 希尔伯特-阿克曼，1919年。⊢符号表示在它之后紧接着表达的是一个公理或者定理。在真值表的注释中，这个符号是表示它永远有值1。

② 此处两个⊃符号代表不同意思。第一个表示的是一个运算(条件判断)，而第二个表示的是一种关系(缊涵)。一般情况下，是与⊢关联的基本符号⊃代表缊涵关系，我们将这种关系标记为→。

(227) $$\text{Ax. IV}: \vdash \overline{\overline{p} \cdot q \cdot r \cdot p \cdot r \cdot q}$$

因此，这4个公理，用前面提到的4个符号体系中的任意一种都是可以的，这4个公理能承载二价逻辑的所有重要性，我们在考虑的问题是：选择了这些基础命题之后，我们明确地或暗含地运用的运算结构有哪些？实际上，这几个公理中的每一个都构成了对某种运算形式的描述。这正是希尔伯特在运用一种运算规则来解读它们时得出的结论。这里我们感兴趣的，并不是要知道如何由公理出发，将之视作运算公理从而下达到对命题逻辑的特殊定理的证明：这正是公理学家的工作。相反，我们所重视的，是由公理溯源到它们的基础，也就是"前公理"，换句话说，即是溯源到它们所涵盖的和它们运用到演绎中的运算结构，通常是一种隐含的结构，但是如果要了解这些公理通过它们的集合建立起来的整体结构的话，就需要更多说明。而这个运算结构包含的9个不同的方面如下所示：

1．部分在整体中的嵌套。　　公理Ⅱ，以(213)的形式表述，表达了一个基本事实："所有的命题 p 都是由它自身和它与其相联系的其他命题以选言方式构成的整体的一部分"。也就是，如果 p ＝"x 是有脊椎的"，而 q 是另一个任意命题，例如"x 是水生的"或者"x 是单细胞的"等等，那么我们总能得出 $p \supset (p \vee q)$，也就是"如果 x 是有脊椎的，那么它是有脊椎的，或者是水生的(或者单细胞的，等等)，或者同时满足两者"：即命题 $p \supset (p \vee q)$ 永远为真。因为，如果$(p \cdot q)$为假，我们至少可以得到$(p \cdot q)$为真，而如果$(p \cdot q)$为假，我们至少可以得到$(p \cdot q)$为真，由此得出：$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$。

用"类别"的术语来描述，公理 $p \supset (p \vee q)$ 与关系集 $P \subset (P \cup Q)$ 相对应(见图37)，图中 $P \cup Q$ 分解为 $PQ \cup PQ \cup PQ$，这些子类别中的一个或者两个可能会成为空集(即同时满足既不是 PQ 和 PQ 也不是 PQ 和 PQ 的情况)。

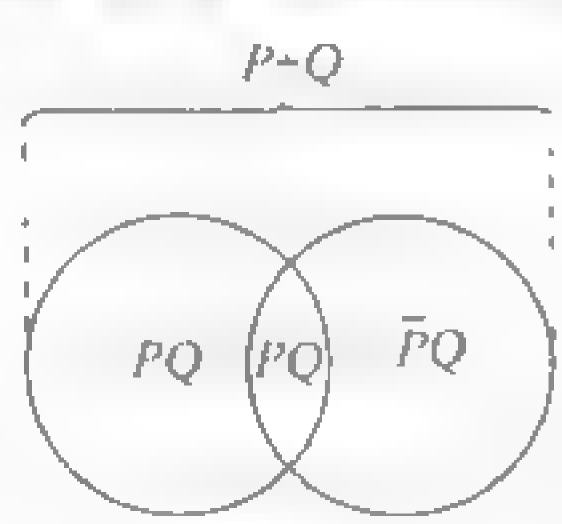


图 37

接下来，我们发现这个公理具有绝对的普遍性，我们甚至可以将它写作：$p \supset (p \vee \bar{p})$，这个类别与关系集 $P \subset (P \cup \bar{P})$ 相符合：论证 p 的那些论据的类别包含于由论证 p 的论据(类别 P)和论证 p 为假的论据(类别 $\bar{P}$)组成的论域中，并没有第三种可能(即遵守二价逻辑的排中律)。

而这样的一个公理体现出来基础性的运算意义。它将每个命题看作一个限定性的、部分的论断，这些部分嵌套在另一个更广的论断中：这个更广的论断相对于部分而

言扮演了整体的角色，如此，这个部分论断是组成整体的不可缺少的一部分。部分在整体中的嵌套确立了整个逻辑的第一定律，并且同时属于命题逻辑、类别逻辑和关系逻辑。

用析取的语言来描述，公理Ⅱ可以记作 $p\vee(p\vee q)$（命题 217），因为 $p\supset q$ 就等同于 $p\vee q$（命题 159）。在这个例子中，就是要表达：要么 x 不是有脊椎的，要么它就是有脊椎的或者水生的（或者单细胞的，等等）。与类别相对应的模式则为 $P\subset(P\cup Q)$ $(P\cup Q)$，或者 $P\subset(P\cup Q)$，因为，如果参照集合是 $(P\cup Q)=(PQ\cup PQ\cup PQ)$，以及 PQ 为真实集或空集，那么类别 P 就肯定包含于 $P\cup Q$ 了。

用蕴涵的语言来描述的话，公理Ⅱ就是 $p\supset(p\supset q)$（命题 221），因为 $(p\vee q)\leftrightarrow(p\supset q)\cdot(q\supset p)$。实际上，$(p\supset q)$ 的意思就是 $(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$ 就如同 $(p\vee q)$ 一样。那么，$p\supset(p\supset q)$ 与类别关系 $P\subset(PQ\cup PQ\cup PQ)$ 相符。由 $q\supset p$ 可得出 $(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)$，且与同样的包含关系相符。

最后，用合取和假（非）来表达，则是：

$$(p\cdot p\cdot q)\leftrightarrow(p\vee p\cdot q)\leftrightarrow p\supset(\bar{\bar{p}}\cdot q)\leftrightarrow p\supset(p\vee q)$$

并且与相同的类别嵌套是相符的。

不管采纳什么形式，我们都可以得出公理Ⅱ表达的是部分与整体的同一个基础性嵌套。若我们将这个嵌套用外延集合（类别）、内涵（关系）或简单命题这些术语来表达，剩下的即是它要组成整个逻辑构成的初始条件。

Ⅱ．子集与其自身（或者整体与其自身）的嵌套。 逻辑的第二个基本原理就是公理Ⅰ $(p\vee p)\supset q$：它的地位甚至表明罗素和希尔伯特的公理学是建构命题间运算不得不承认的一个初始命题。实际上，根据罗素的理论，一个命题一定“蕴涵它自身”，即 $p\supset p$。但是一个孤立的命题（假设上述观念是有意义的）是否能蕴涵其自身？这是令人怀疑的，因为一个命题永远都同时是一个整体不可缺少的一部分（公理Ⅱ）和其自身的全部；这是真的，被称为“原子的”或“基础的”命题，它们从一开始就会引起与其他一些命题的相互影响。因而，所有的命题都同时蕴涵它自身和其他命题。

但是，这种部分与其自身的自蕴涵（auto implication）或嵌套与“异蕴涵”（hetero implication）或者部分与整体的套入是不一样的，尽管这两者是相互联系的。实际上，公理Ⅰ写作 $(p\vee p)\supset p$ 而不是 $p\supset(p\vee p)$ 或 $p=(p\vee p)$，尽管这两种表达本身也是真命题。但是 $(p\vee p)\supset p$ 的关系是三者当中最显著的，因为它独立于 $p\supset(p\vee q)$ 之外表述了这个真值：归于其自身 $(p\vee p)$ 的命题 p 包含其自身的真，但除了 p 所包含的真之外，就再也不包含其他东西了：自蕴涵既是必然的又是重言式的。用类别来表达，它与重言式 $A\cup A=A$（命题 2)）相符合。部分在整体中的嵌套可以被接受而不会有同语反复：在完全数列中，有 $n<n+1$，$1<2$ 和 $n<n+1$（每个数字与下个数字的嵌套关系），或者 $n<(n+m)$，但是，我们可以说 $1+1=2$，却不能说 $1+1=1$（用迭代法则而非重言式）。

Ⅲ．子集的并集的对易性。 公理Ⅲ $(p\vee q)\supset(q\vee p)$ 表述了第三个基本原理，

根据这个原理，由 p 和 q 组成一个独立的整体 $(p \vee q)$，与它们的顺序无关，因此，记为交换律。这个定律在命题间运算中构成了表征的等式。在类别逻辑中，构成了加法交换律 $(P \cup Q = Q \cup P)$，在关系逻辑中，则构成了对称关系的加法交换律 $(\overset{a}{\leftrightarrow} = \overset{a}{\leftrightarrow})(\overset{a}{\leftrightarrow} + \leftrightarrow)$

用析取的语言来描述即为：

$$(\overline{p \vee q}) \vee (q \vee p)$$

不再加入其他任何东西。根据对偶性原则，那么同样地 $p \cdot q \cdot q \cdot p$ 与 $p \vee q \vee (q \vee p)$ 则完全对应。

然而，$(p \supset q) \supset (q \supset p)$ 这一表达式显然引出了一个仅仅以缩涵方式在之前的表达式中存在的关系：命题的互反性(réciprocité)。实际上，如果有

$$(p \supset q) \supset (q \supset p)$$

那肯定可以得出 $(q \supset p) \supset (p \supset q)$，所以 $(p \supset q) = (q \supset p)$，因为 $(p \vee q)$ 同时等于 $(p \supset q)$ 和 $(q \supset p)$，$(q \vee p)$ 也一样。命题的互反性是逻辑的一个基本原理，它以这种或那种形式介入到每个运算中，并且，明显地，即使以纯粹析取的符号，我们可以得出：

$$[(p \vee q) \vee (q \vee q)] \leftrightarrow [(q \vee p) \vee (p \vee q)]$$

它在简单交换律基础上加入了命题互反性元素。但是在不可交换的运算中，如条件判断中，命题的互反性就表现为一种特别的形式：这就是为什么作为条件判断系统的表达 $(p \supset q) \supset (q \supset p)$ 要与 $(p \vee q) = (q \vee p)$ 相区别了，而 $(p \vee q)$ 和 $(q \vee p)$ 又分别与 $(p \supset q)$ 和 $(q \supset p)$ 相对等。如此，根据弗雷格(Frege)符号的需要，我们将对于公理Ⅲ这个特别形式的讨论留到第Ⅷ点，到时我们会综合分析命题的可逆性。

Ⅳ. 嵌套的次序。　有了次序这个概念，我们就可以得到一些必须作为逻辑的基础被接受的原理，尽管它们并没有在公理中明显地表现出来。然而，虽然它们不是特别的公理性表达，至少在逻辑学中(希尔伯特曾细致地叙述了在数学公理中的次序公理)，它们显然在我们已经讨论过的四个公理中扮演了一个隐含的角色(这个角色甚至因为尼克德的将四个公理总结为一个的"唯一公理"而显得尤为重要)。

与具备交换律的子集的并集运算 $(p \vee q)$ 相反，部分在整体中的嵌套实际上包含了一个次序，它体现在条件判断运算的不可交换性中。因此 $(p \supset q)$ 完全不等同于 $(q \supset p)$，因为部分 p 包含于整体 q 中，反之则不成立。例如：公理Ⅱ写作 $p \supset (p \vee q)$ 而不是 $(p \vee q) \supset p$，且后者与前者不对等，并且后者表达的是一个错误的命题，因为 $(p \vee q)$ 仅仅包含了 p 或者 q 的真(可能而非必然地包含 p 和 q 的那个命题的共同的真)，公理Ⅱ则以 $p \supset (p \vee q)$ 的次序为前提，而与 $(p \vee q) \supset p$ 的次序相反，这又说明了将 $(p \supset q)$ 和 $(q \supset p)$ 的次序加以普遍区分的必要性。

实际上，如果次序的概念与大多数命题间运算 $(\vee)$、$(\cdot)$、(W)、$(\ )$、$(\ )$ 都无关的话，那么它对于 $(\supset)$ 和 $(\subset)$ 这两个条件判断却是必要的。我们会说条件判断 $(p \supset q)$

与析取$(p \vee q)$对等，也就是与一个交换性运算对等？但这只是承认相反的次序$(q \supset p)$与另一个析取$(q \vee p)$对等。因而，重要的不是说$(p \vee q)$可以被置换成$(q \vee p)$，而是不可交换的运算$(p \supset q)$和$(q \supset p)$可以与$(p \vee q)$和$(p \vee q)$这两个完全不对等的断言相对应。

道理很明确：$(p \vee q)$运算表达的是 p 和 q 这两个部分在同一个整体$(p \vee q)$中形成并集，并且这个并集与次序无关，因为它们是同一等级的子集。相反，$p \supset q$，以及 $p \supset q$，$q \supset r$，$r \supset s$，等等，它们都是表达的部分在整体中的连续嵌套，而这个整体又会成为另一个更高级别的整体的一个新的部分（或子集）。这些嵌套则暗含了一个次序，它与以下这些同样按次序排列的包含关系相符合：$P \subset Q \subset R \subset S \subset \cdots$，等等。

V．部分（或整体）间的交集。——嵌套原理(1)，自嵌套原理(2)和合并运算的交换律原理(3)，除了这三个原理之外，我们似乎还应该加入另一个非衍生性的原理（即使可能作为类别三段论的衍生结果，但是其中作用很小，几乎可以完全忽略）：即命题之间——部分的或整体的——可能的联结(association)。此处所指的显然是一个非公理性的原理，但是它以一种潜在的方式介入到了公理Ⅱ和公理Ⅳ中：运算$(p \vee q)$的意思实际上是指示了三种可能的联合：$(p \cdot q)$、$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$。然而，我们已经知道（见图37及例子），这三种可能的联合与类别 p 和 q 的交叉相协调，其中，共同部分是 PQ，非共同部分是 PQ 和 PQ。运算$(p \vee q)$包含着 $p \cdot q$ 的合取的可能性，即作为部分析取命题的交集。

Ⅵ．嵌套的传递性。——这是演绎的基本原理以及通过公理Ⅳ显性地表达的原理。通过

$$\vdash (p \supset q) \supset [(p \vee r) \supset (q \vee r)$$

实际上，我们可以断言：联合$(p \vee r)$通过中介$(p \supset q)$引申出了联合$(q \vee r)$。

公理Ⅳ表达了，在最普遍的形式下，部分与整体的嵌套的可传递性。假设 p 包含于 q，也就是说$\vdash p \supset q$。根据肯定前件式规则①可以得到结论：

$$\vdash (p \vee r) \supset (q \vee r)$$

也就是 $p \vee r$ 包含于 $q \vee r$。而这个蕴涵比蕴涵$(r \supset p) \rightarrow (r \supset q)$具有更大的普遍性，却被当作一个特例来对待。这正是相应的类别的包含关系图所直观地表达的内容。公理Ⅳ首先可以用图38来表示，我们得出：

(228) $$(p \supset q) \rightarrow [(p \vee r) \supset (q \vee r)]$$

然后

$$(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)$$

但是，在联合$(p \cdot q \cdot r)$是空集的情况下，这个公理为真（见图39）。

---

① 肯定前件式规则即：由$\vdash p$ 和$\vdash p \supset q$ 两个前提，可以得出$\vdash q$。

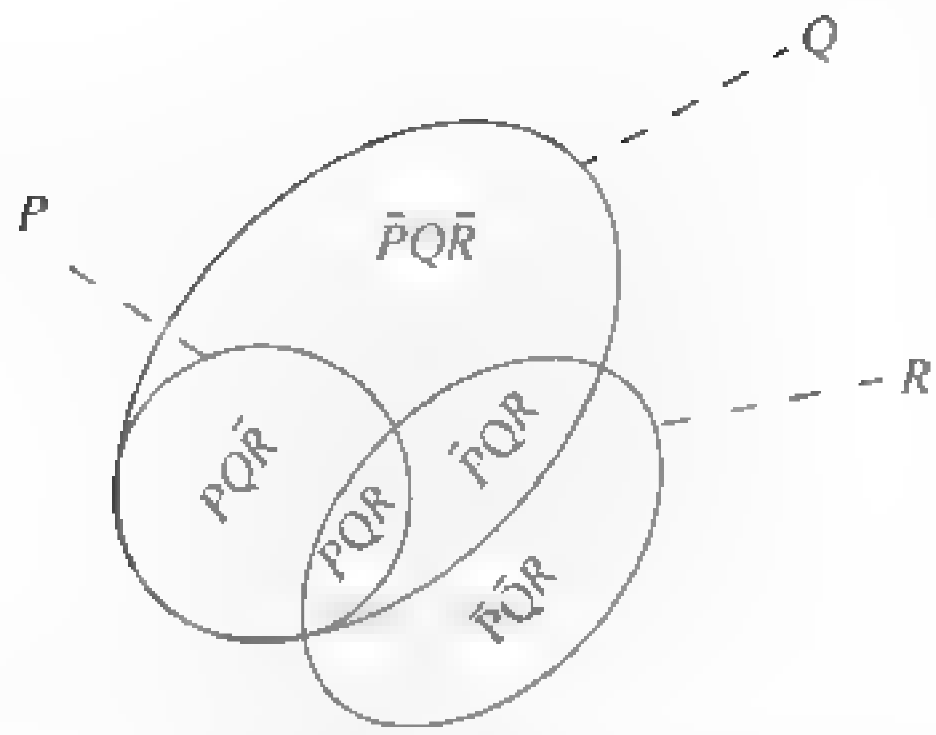


图 38

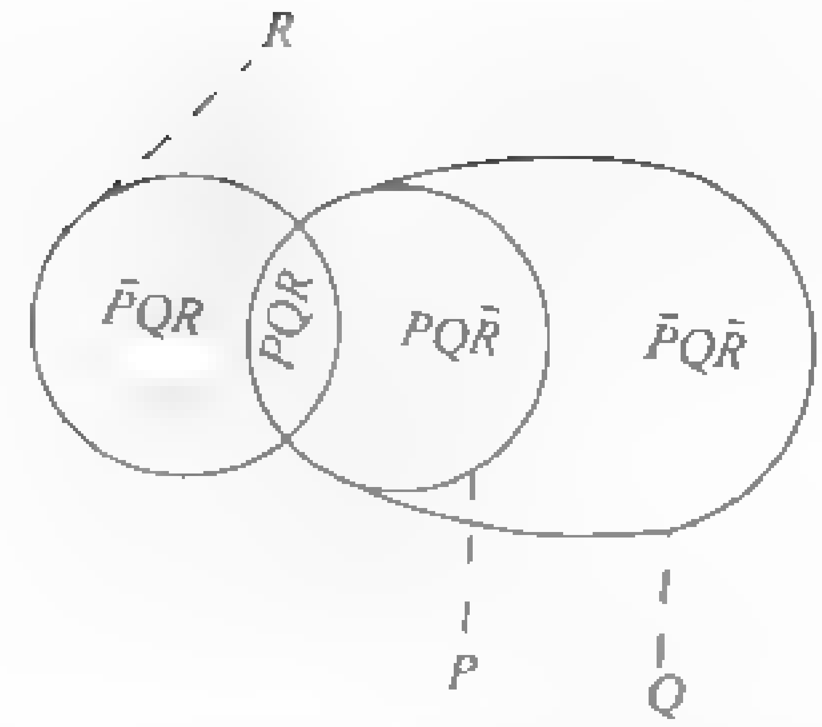


图 39

如果$(p \cdot q \cdot r)$被$(p \cdot q \cdot r)$替代，也就是说如果$r \supset q$的话，此公理同样为真(见图40)。

最后，如果$(p \cdot q \cdot r)$被排除，并由此将选言命题$(p \vee r)$缩减为$(r \supset p)$，公理依然为真。在此情况下(见图41)，嵌套就是：

(229) $$[(p \supset q) \cdot (r \supset p)] \rightarrow (r \supset q)$$

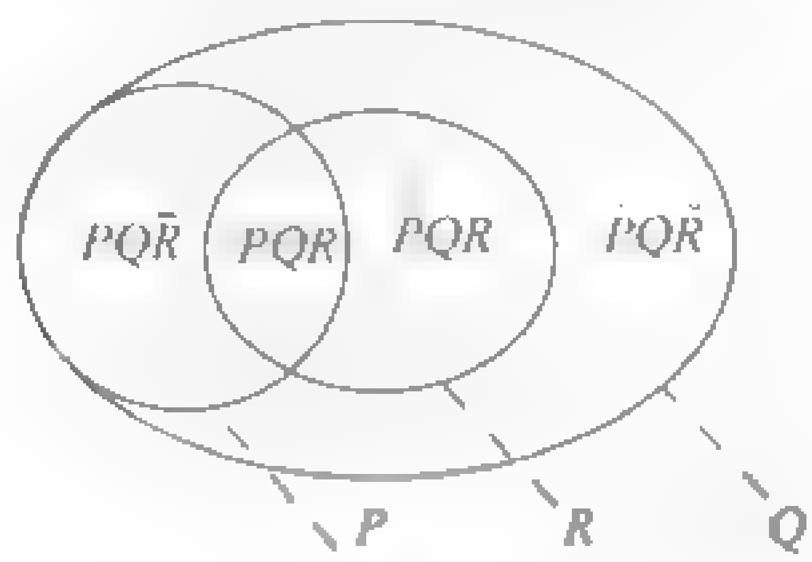


图 40

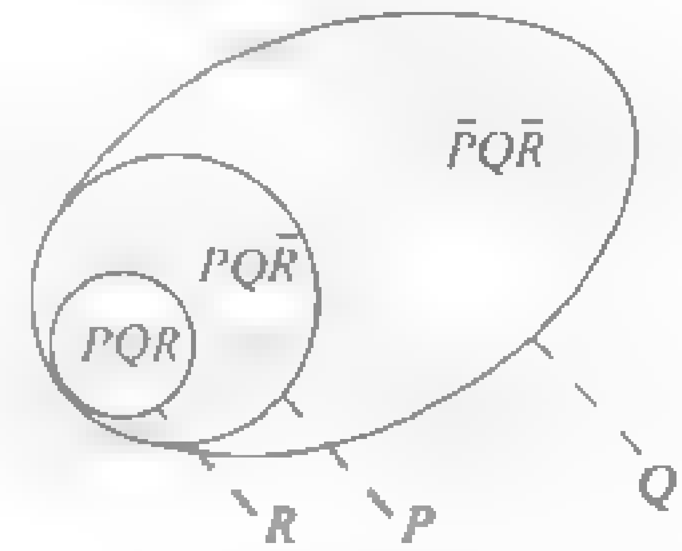


图 41

这就是弗雷格用另一种形式所表达的东西[命题(223)]：

$$(p \supset q) \rightarrow [(\bar{r} \supset p) \supset (\bar{r} \supset q)]$$

在这个命题中，只需要用正命题r来代替否命题r，就可以将$(r \supset p)$替换成$(r \vee p)$。

在罗素和希尔伯特所选择的表述中，公理Ⅳ很好地用更一般化的形式表现了部分在整体中的嵌套的传递性。

Ⅶ. 互补性和简单可逆性。　　公理Ⅰ—Ⅳ明确地指出了部分与整体之间的关系、联合运算的交换律以及嵌套的传递性，但是，另一方面，它们却忽略了一个基础的关系，这个关系隐含地存在于希尔伯特的表达式中[命题(216)到(227)]：这就是互补性关系，是否定(非)和逆运算的原理，因此也是所有演绎的基本原理之一。

希尔伯特个人还明确地指出，他将$(p \supset q)$作为$(p \vee q)$的缩写，也就是说在他的公理中否命题p与正命题p用得一样多。然而，否命题p又会将真值域切分为两个补充的子类别：p和p，正因如此，我们得到$(p \vee\!\vee p)$(适用于二价逻辑的排中律)。

另外，互补性不仅仅体现于独立的命题(p和p)中，也同时体现于这类联结中。例如，存在于命题(226)的联结$\overline{\overline{p \cdot q}}$(布伦塔诺符号系统中的公理Ⅲ)中，与命题(214)中的

表达式$(p \vee q)$等值，因为，否定$(p \cdot q)$，也就是否定“既非p也非q”，就等于肯定$(p \vee q)$，即肯定“p或者q”。同样的，有$(p \supset q)$即可排出$(p \cdot q)$，等等。而这些联结的否定同样是基于互补性的：如果$(p \cdot q)$是对$(p \vee q)$的否定，且反之亦然，就是说$(p \vee q)$与$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$等值，也就是说$(p \vee q)$与三个合取等值，在这三个合取之上，联合构成了作为$(p \cdot q)$的补充的完全肯定断言或重言式

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

换言之，互补性是可逆性的依据，或者说两个依据之一。如果说嵌套系统，以及传递性丰富了运算组合，那么，可逆性，体现为互补性形式，通过强制性确认$(p \cdot p \leftrightarrow o)$和$(p \leftrightarrow p)$，确保了这个系统的一致性和非矛盾性。在这个意义上，非矛盾律$(p \cdot p \leftrightarrow o)$只不过是一个正运算(正命题$p$)和它的逆运算(否命题$p$)之间的合取，这个合取的特征是形成了恒等运算$(o)$。同理，当一个二进制运算，如$(p \vee q)$与其逆运算$(p \cdot q)$合取组合，此时$(\bar{p} \cdot \bar{q})$的积为完全否定或“矛盾”$(o)$：

(230) $$(p \vee q) \cdot (p \cdot q) \leftrightarrow (o)$$

因此，我们非常有必要去探索简单可逆性(互补性)在运算机制中隐性地体现出来的基础性作用，它同时隐藏于公理Ⅰ—Ⅸ中：不仅每个公理隐含了否定$(p \vee q)$，而且同时它们相互之间非矛盾必然性更是包含着一个以(230)形式存在的二进制可逆性，这个可逆性本身是二元命题运算间的非矛盾性的表达。

Ⅷ. 互反性。除上述以外，还存在另一种形式的可逆性：即我们可以据此将条件式$(q \supset p)$指定为$(p \supset q)$的逆向条件式。这是在演绎的原理中的一个我们不能忽视的新的基础性原理：互反性(réciprocité)。互反性本身也是一种互补性，但是，是相对于$(p \quad q)$而言，而不是相对于完全命题$(p * q)$即$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$而言的，也就是说这两个互逆运算的合取联合等价于一个恒等式：

$$(p \supset q) \cdot (q \supset p) \leftrightarrow (p \equiv q)$$

互反性蕴涵在公理Ⅲ中，因为如果

$$\vdash (p \vee q) \supset (q \vee p)$$

那么$\vdash (q \vee p) \supset (p \vee q)$，所以$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$。而如果我们用弗雷格的表达式来写公理Ⅲ，会得到：

(231) $$(p \supset q) \rightarrow (q \supset p), \quad \text{但同时有} \quad (q \supset p) \rightarrow (p \supset q)$$

所以 $$(p \supset q) \leftrightarrow (q \supset p)$$

与类别运算相对应的模式的现实化在这一点上尤其具有效益。实际上，我们可以得出：

$$(\bar{P} \subseteq Q) \leftrightarrow (\bar{Q} \subseteq P)$$

[请参看命题(206乙)、(207)、(208)和(208乙)以及图36

然而，我们知道，这个等值不是同一性，而是同一性的组成部分，这个同一性的完整形式是(如图42)：

$$P\bar{Q} \supset (P\bar{Q} \cup \bar{P}Q) = (P\bar{Q} \cup \bar{P}Q) \supset \bar{P}Q \quad \text{（其中 } PQ \text{ 可为空集）}$$

这个表达是$(P=\bar{Q}) = (Q \subset P)$的完整形式，它在类别逻辑中构成了被我们称为替代(第二章，§13)的东西。而我们知道替代或者补充置换本身是对称关系的原理，也就是说都是对等的。

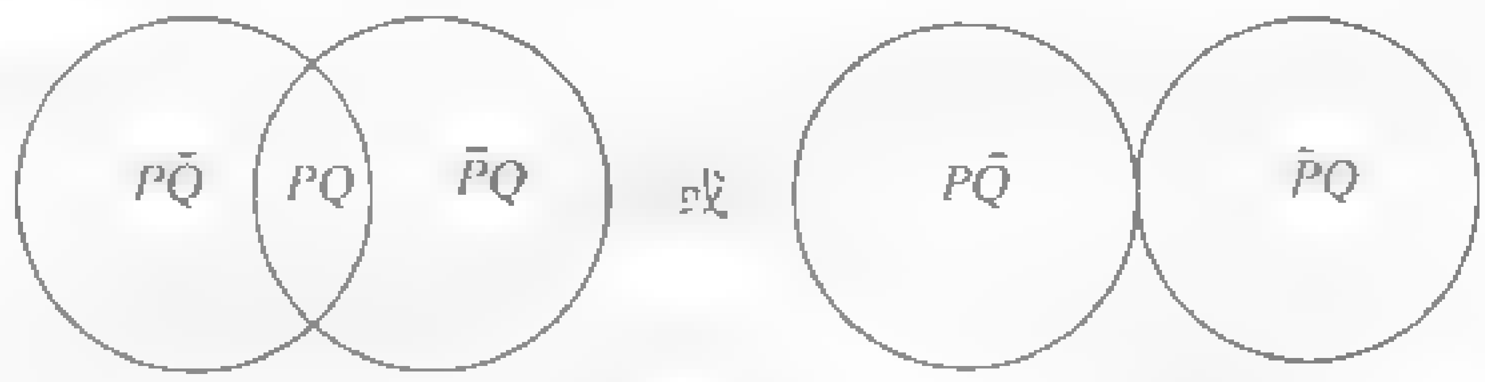


图 42

一般来说，互反性就是在关系中运用的可逆性：它要么仅仅体现等价，要么表达了关于等价的补充。

Ⅸ. 置换　　置换(substitution)不能像公理一样被明确地提出来，但是由于它对于演绎是必不可少的，因而在这些规则中也应占一席之地。确实，有些作者有意将它忽略。因为他们使用那些属于系统建构的元语言的公理格式，而不是那些属于系统的表达的公理。作为运算，置换有代表性：它简单地存在于用来言说公理格式的句法变量的定义中。

§35　尼克德的"唯一公理"及二价逻辑的集合结构

部分在整体或与其自身中的加法嵌套(∨)或乘法嵌套(·)，这些嵌套次序排列的可逆性，子集的联合的交换律，通过互补性体现的可逆性、互反性和置换，等等，这些都是罗素和希尔伯特的公理所依赖的，但并没有被完全阐明的运算机制的特点。演绎的基础就在于在集合结构中寻找这样的运算体系所包含的内容，并且剥离出它们必然联系的构成。

为了单独地分析数种不同的运算策略，之前我们已经列举了它们的整体系统的综合重构特征，如果不希望离开公理化这个领域，我们可以继续采用同样的运算解析方法，这里将它运用到这4个公理中去(Ⅰ—Ⅳ)，但是要综合成为一个单一的形式。演绎理论的公理同时满足了完整性、兼容性和独立性三个条件，它们联合成为一个单一的形式，实际上，这直接体现出了公理之间彼此连接建构的集合结构。从这一角度看，将四个不同的表达式融合为一个综合的表达式大大简化了工作。1916年，尼克德从罗素和怀特海的公理中，形成了一个更加有效的观点[1]；他将他们的公理融合为一个单一的公理，它可以将运算整体整合，从而建立了命题逻辑，并且建构了所有演绎的充分性、必要

① 尼克德手稿，1917年，发表于1916年10月。

性的基础。

人们一直没有真正理解尼克德的发现的意义，部分地是因为人们将他的成就与薛弗尔(Sheffer)的结合起来了，薛弗尔早些时候曾经将所有的命题间运算表达为一个单一的不兼容性语言(见§30，第五章)。有一些人和波尔先生一起谈论"薛弗尔-尼克德综合"①时，就好像在谈论一种将多样性简化为单一性的成功事件。另一些人则从中看到了一种简单的"好奇心"(比如希尔伯特对薛弗尔的单一符号系统的评论②)，或者看到事实的复杂性，和表面上简化需要的代价③。相反，这个观点在我们看来，作为其结果，就是强制性地将之前列举的那些公理所包含的运算整合为一个单一的公式，这个"唯一公理"会使5个不同命题(p、q、r、s和t)相互联系，其中公理Ⅰ到公理Ⅲ只涉及两个命题，公理Ⅳ会涉及三个命题。然而，将不同的命题联合为一个运算，就是要证明那些完整而又独立的公理之间是如何组合以建立一个结构的。正是基于这一点，我们将会对此进行讨论，并且尝试从中辨析出二价逻辑的集合结构。

首先是这个公理。其原始形式为：

(232) $$P|\pi|Q$$

在这个表达式中，由于$\bar{p}=\mathrm{d}f\,p|p$，我们得出：

$$P=\mathrm{d}f\,p|(q|r),\quad \pi=\mathrm{d}f\,t|\bar{t}\quad 和\quad Q=\mathrm{d}f(s|q)|(p|s)$$

另外，因为：

$$p\supset q=\mathrm{d}f\,p|(q|q)\quad 和\quad p\cdot q=\mathrm{d}f(p|q)|(p|q)$$

得到：

$$p|(q|r)\leftrightarrow p\supset(q\cdot r)\quad 和\quad t|\bar{t}\leftrightarrow t\supset t$$

所以：

(233) $$[p|(q|r)]|[(t|\bar{t})\cdot(s|q)|(p|s)]$$

或者：

$$\leftrightarrow[p\supset(q\cdot r)]\supset\{(t\supset t)\supset[(s|q)\supset(p|s)]\}$$

另外[命题(137)]：$(p|q)\leftrightarrow(p\supset\bar{q})$。所以：

$$(s|q)\leftrightarrow(q|s)\leftrightarrow(q\supset\bar{s})\quad 和\quad (p|s)\leftrightarrow(p\supset\bar{s})$$

由此得出：

(234) $$[p\supset(q\cdot r)]\supset\{(t\supset t)\supset[(q\supset\bar{s})\supset(p\supset\bar{s})]\}$$

另一方面，因为合取是不相容性的逆运算，所以$(p|s)=\overline{(p\cdot s)}$，由此：

$$(q|s)\vee(p|s)\leftrightarrow(p\cdot s)\supset(q\cdot s)\quad 因为\quad p\supset q=\bar{q}\supset\bar{p}$$

所以：

---

① 波尔，1948，第221页。

② 希尔伯特-阿克曼，1949。

③ 夏·瑟路斯，1949，第95—96页。

(235) $$[p\supset(q\cdot r)]\supset\{(t\supset t)\cdot[(p\cdot s)\supset(q\cdot s)]\}$$

罗素、波尔和夏·瑟路斯是在以上最后一个公式中写出尼克德的公理的。但是这个公式的表述没有命题(233)和(234)那么强，因为合取$(p\cdot s)$和$(q\cdot s)$不足以定义由不相容性和蕴涵而确定的p与q和s之间的关系：如果$(q\supset s)$，合取$(p\cdot s)$和$(q\cdot s)$不会排除合取$(q\cdot s)$。

另外，如果在命题(233)中，$(q|s)$为真，我们就不能同时在命题(235)中得到$(q\cdot s)$为真，如果指的是同一个命题s(因为$q|s=\overline{q\cdot s}$)。因此，我们将其经典形式留给命题(235)，并且将命题(233)和(234)写成如下所示：

(236) $$[p\supset(q\cdot r)]\supset\{(t\supset t)\cdot[(q|\bar{s})\supset(\bar{s}|p)]\}$$

以及

(237) $$[p\supset(q\cdot r)]\supset\{(t\supset t)\cdot[(q\supset s)\supset(p\supset s)]\}$$

这样，对于命题s来说，命题(235)、(236)和(237)都是等价的，s在命题(235)和(237)中被肯定，在(236)中被否定。

我们需要分析这个集合结构。我们会相继地检查：1. p、q和s之间的关系；2. 命题r的立场；3. 命题t的立场；4. 如此抽象出来的结构和群集结构之间的协调。

1. 命题p、q和s之间的关系很简单，既然在命题(235)中已经给出了$(p\supset q)$而在命题(237)中也给出了$(q\supset s)$。如果使类别P、Q和S与论证p、q和s相对应，我们就只能得出嵌套$P\subset Q\subset S$或者等价$P=Q=S$，或者得到两者的混合$P=Q\subset S$或$P\subset Q=S$。

在这三种情况下，我们得出

$$(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)\leftrightarrow q\quad\text{和}\quad(q\cdot s)\vee(\bar{q}\cdot s)\leftrightarrow s,$$

但是$(\bar{p}\cdot q)$和$(\bar{q}\cdot s)$在等价的情况下，可以是空集(见图43)：

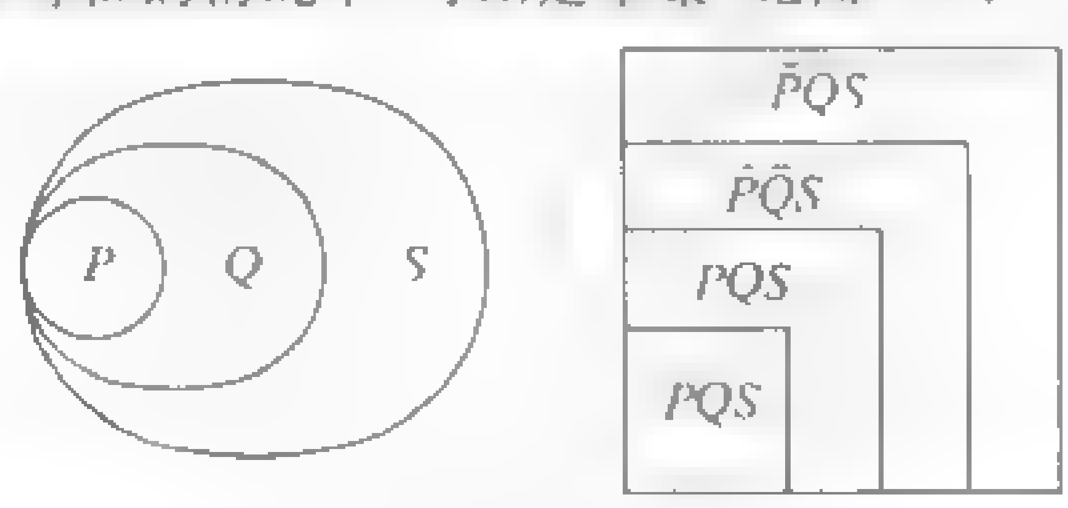


图43

2. 在r的立场，论证如下：$p\supset(q\cdot r)$，所以$p\supset r$，也就是说$(p\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{r})$。所以这里$r$和$q$之间仅有两类关系：一个条件判断$(r\supset q)$；$(q\supset r)$；一个二价判断$(r=q)$；或一个析取$(r\vee q)$。所有其他关系实际上都排除了$p\supset(q\cdot r)$。

在图44的情况下，只要能使一个二价条件判断替代其中任意一个或者所有蕴涵，我们可以得出一系列的嵌套：$(p\supset q)$，$(q\supset r)$，$(r\supset s)$或者$(p\supset r)$，$(r\supset q)$，$(q\supset s)$或者$(p\supset q)$，$(q\supset s)$，$(s\supset r)$，等等。因此，只需在$p\supset(q\supset s)$之上增加一个环节，我们就可以使它与类别的加法群集相协调。

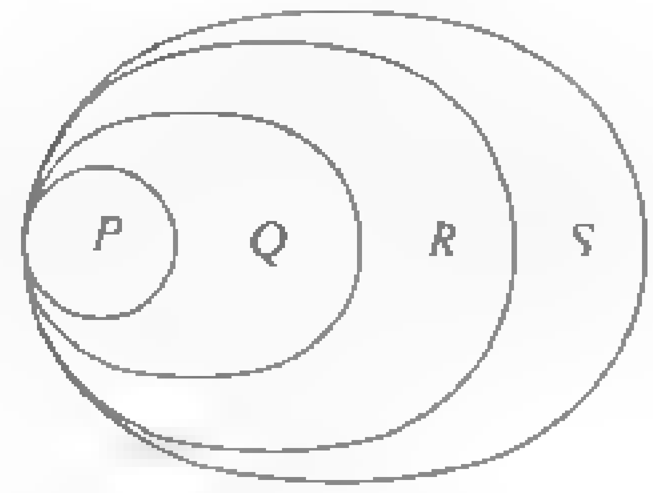


图 44

相反，在$(r \vee q)$的情况下，我们得出$(q \cdot r) \vee (q \cdot r) \vee (q \cdot r)$。但是由于$(q \supset s)$(命题 237)，我们也可以得出$(r \vee s)$[1]，并且合取$(q \cdot r)$和$(q \cdot r)$将会采用$(q \cdot r \cdot s)$和$(q \cdot r \cdot s)$的形式。如此，通过排除与$(q \supset s)$相矛盾的$(q \cdot s)$，我们可以得到这六个组合：

$$(q \cdot r \cdot s) \vee (q \cdot r \cdot s) \vee (q \cdot r \cdot s) \vee (q \cdot r \cdot s) \vee (q \cdot r \cdot s) \vee (q \cdot r \cdot s)$$

这是要说明析取式$(q \vee r)$和$(r \vee q)$和条件式$(q \supset s)$是与一个类别的乘法群集相符合的，而这个群集可以以行列对称表的形式呈现：

	QS	$\bar{Q}S$	$\bar{Q}\bar{S}$
R	QSR	$\bar{Q}SR$	$\bar{Q}\bar{S}R$
$\bar{R}$	$QS\bar{R}$	$\bar{Q}S\bar{R}$	QSR

而且，由于$p \supset (q \cdot r)$，类别P则会衍涵了类别QRS，从中得出两个子类别$PQRS$和$\bar{P}QRS$(见图 45)。

总之，两者其一：要么r衍涵(impliquer)q和s(或衍示q或s)且给出的结构与类别的加法群集相符合(图 44)，要么在r和q之间析取，因而也在r和s间析取，并且对应的类别组成一个乘法群集(见图 45)。

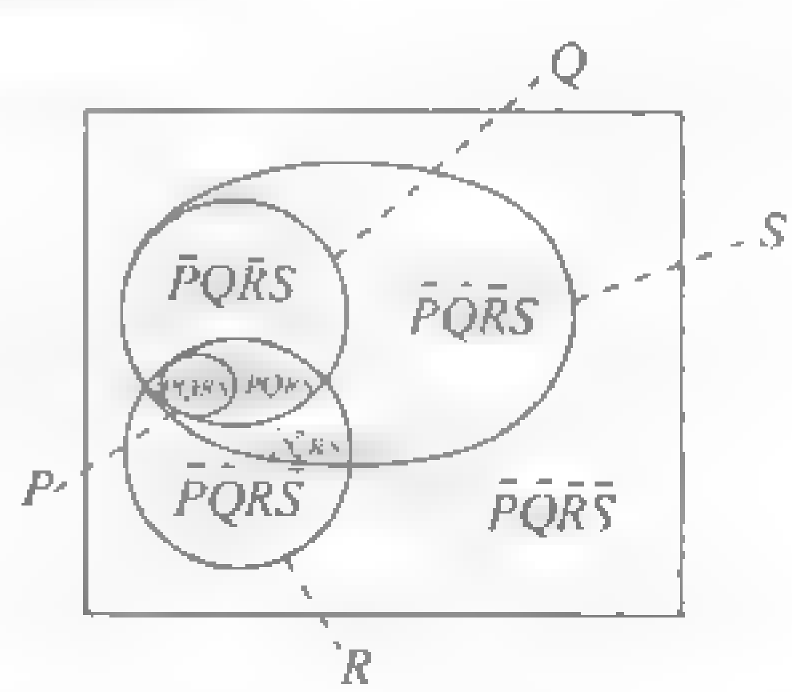


图 45

3. 上一条得出的结论就是"唯一公理"，包含两个可能的集合结构：

① $(q \supset s) = [(q \vee r) \cdot (r \vee s)]$仅仅是在唯一公理中自然体现的公理Ⅳ，因为唯一公理将其集中于公理Ⅰ—Ⅲ中。

a) 第一个由一系列嵌套的蕴涵组成：$(p\to q)$、$(q\to r)$、$(r\to s)$和$(s\to t)$，或者其他与$(p\to q)$、$(p\to r)$和$(q\to s)$相对应的顺序。

b) 第二个保留了$(p\to q)$、$(p\to r)$、$(q\to s)$和p(或q或r或s)$\to t$这些嵌套，但是引入了析取$(q\vee r)\to(r\vee s)$。

在这两种情况下，唯一公理都对应了一个基本类别结构：要么是与类别的加法群集(如：$P\subset Q\subset R\subset S\subset T$，或者是另外一种顺序)，要么是与双向单值对应的乘法群集：$PQST\cup PQST\cup PQST\cap(R\cup R)$。我们要做的就是证明这是一个双向单值对应关系，也就是说，一方面，如果我们将这些类别的群集用命题语言来表达，则会再次落回到尼克德公理，另一方面，如果我们将这个公理用初始蕴涵$(p\to q)$和次级蕴涵[我们用这样的方式命名命题(170)到(172)所定义的蕴涵$(p'\to q)$]来表达，则会构成一个与相应类别群集同构的命题间群集。

在这两种可能情况中，我们从第一种出发：这种情况下，$(p\to q)$、$(q\to r)$、$(r\to s)$和$(s\to t)$这些蕴涵与类别的嵌套$P\subset Q\subset R\subset S\cdots$相符。我们还记得这样一个群集的完整形式是一系列的以基本类别和次级类别为基础的二分法配置，即：

$$P+P'=Q,\quad Q+Q'=R,\quad R+R'=S,\quad S+S'=U$$

带着"P'、Q'、R'和S'这些次级类别的意义是什么"这个疑问，我们重新将这些类别的关系解读为命题。而我们知道(第一章)，所有这些蕴涵$(p\to q)$关系，即$(p\cdot q)\vee(\bar p\cdot q)\vee(\bar p\cdot \bar q)$都包含了一个因为"二级蕴涵"的介入而形成的二元包含关系$(p'\to q)$。事实上，如果合取$(\bar p\cdot q)$不为空，也就是说如果$(p\to q)$与$(q\to p)$不混同，那么通过$(p\leftrightarrow q)$，可以必然得到

$$(p\supset q)\to[(p\supset q)\cdot(p'\supset q)]\text{，在此 } p'\leftrightarrow\bar p\cdot q$$

[参看命题(170)]。

例如：如果$p=$"x_1是有脊椎的"衍涵了$q=$"x_1是动物"而非q衍涵p，那么，蕴涵$(p\to q)$本身也衍涵了命题$p'\leftrightarrow\bar p\cdot q$(="$x_1$是非脊椎动物")的真值，就像$p'=$"$x_1$是无脊椎的"衍涵$q=$"$x_1$是动物"一样。

既然有$p'\leftrightarrow(\bar p\cdot q)$，我们可以得到：

$$[(p\supset q)\cdot(p'\supset q)]\to[q\subseteq(p\vee p')]$$

[(命题(171)]或者更简单地：$(p\vee p'\leftrightarrow q)$。

我们还可以得到：

$$(q\supset r)\to[q(\vee q')\equiv r)]\text{，等等。}$$

我们马上可以看出，群集$P\subset Q\subset R\subset S\subset U$的次级类别$P'$、$Q'$、$R'$和$S'$与$p'$、$q'$、$r'$和$s'$这些蕴涵嵌套的次级命题是对应的。因此，在$p\to q$、$q\to r$、$r\to s$和$s\to t$的情况下，我们可以得到命题本身的群集，其形式为：

(238) $\quad (p\vee p')\leftrightarrow q,\quad (q\vee q')\leftrightarrow r,\quad (r\vee r')\leftrightarrow s,\quad (s\vee s')\leftrightarrow t$，等等。

然而，因为命题p和p'从定义上是排他的，既然$p'\leftrightarrow(\bar p\cdot q)$，那我们从这些嵌套

(238)中可以得出如下不兼容性：

(239) $(p|p')$， $(q|q')$， $(r|r')$，等等。

另一方面，因为$(p\supset q)$且$(p\supset r)$，我们可以将之简化为：

(240) $(p|q')$， $(p|r')$， $(p|s')$

p，$\bar{q}$，$\bar{r}$和s则与下表对应：

(241)
$$\bar{p}\leftrightarrow p'\vee q'\vee r'\vee s'\vee t'\cdots$$
$$\bar{q}\leftrightarrow q'\vee r'\vee s'\vee t'\cdots$$
$$\bar{r}\leftrightarrow r'\vee s'\vee t'\cdots$$
$$\bar{s}\leftrightarrow s'\vee t'\cdots，等等$$

最后，从$(s\vee s'\leftrightarrow t)$中，我们得出：

(242) $(s\vee s'=t)\rightarrow(t\supset t)$

由此得出结论：

$$[p\supset(q\cdot r)]\leftrightarrow(t\supset t)\cdot(q\supset s)\supset(p\supset s)$$

或者

$$[p\supset(q\cdot r)]\leftrightarrow(t\supset t)\cdot(q\supset s)\supset(p\supset s)$$

因此，唯一公理在其所反应的系列嵌套(第一种情况)的关系下，与群集(238)是同一的。

如果现在(第二种情况)，我们不用构成了特别简单二歧式(dichotomie)的两难推理$(p\vee p')\leftrightarrow q$，而是引入二难推理$(q\vee r)$，即$(s\vee r)$，那么，群集将呈现为以下形式：

(243)

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\bar{q}s$	$\bar{p}\bar{q}\bar{s}$
r	pqr	$\bar{p}qr$	$\bar{p}\bar{q}rs$	$\bar{p}\bar{q}r\bar{s}$
$\bar{r}$	$pq\bar{r}$	$\bar{p}q\bar{r}$	$\bar{p}\bar{q}\bar{r}s$	$\bar{p}\bar{q}\bar{r}\bar{s}$

在这个公式中，

$$\bar{p}\leftrightarrow p'\vee q'\vee s'\cdots，\quad \bar{q}\leftrightarrow q'\vee s'\cdots，\quad \bar{r}\leftrightarrow s'\vee\cdots，\quad 且\quad s\leftrightarrow r'。$$

有两个系列性嵌套而非一个，但很显然有一个新的群集(在§39中我们会再来讨论这个公式)。

总的来说，当罗素和希尔伯特从整个二价命题逻辑中抽象出的4个公理被合并为一个单一的表达式时，这样被建构的唯一公理相当于一个或两个与对应类别群集同构的命题间群集。① 这个公理则表达了一系列由部分到整体按序排列的嵌套，由于蕴涵的关系，它们是可传递性的，也是可逆的，因为

① 详情请见我们的文章《皮亚杰》，1948。

$$[(q\cdot s)\supset(p\cdot s)]\leftrightarrow[(p\cdot s)\supset(q\cdot s)]$$

并且保证了互反性$(t\leftrightarrow t)$。唯一公理就这样将我们在§34里抽离出来的关于罗素和希尔伯特的4个公理的9个特点的每一个都明确化了，并且将它们以一个群集的形式集中起来。这样一个结果本身非常有意义，因为，即使有其他可能的公理体系，唯一公理已经足以独立承担二价逻辑的重担。

然而，还有两个问题悬而未决 如果将这个逻辑运算的简化置于布尔代数构成的群中，难道不可能进一步地将它简化为一个可逆的结构吗？如果这个简化无法实现，那么尼克德的唯一公理中包含的"群集"与集合论的格(treillis)之间是什么关系呢？

§36 二价逻辑的运算构成一个群吗？布尔代数

我们追寻的以及要使之明晰地保留于视线之内的目标是，描述集合结构的特征，这个集合结构包括了全部二价逻辑运算，并且构成这种运算的前提。公理学家们称，这种逻辑依赖于我们起初运用的那些公理。的确，但是，由于这些公理同时是独立的、能相容的和完整的，它们通过自身的联系建构了一个结构：因而是这个结构代表了逻辑的真正基础，因为部分不能在整体之外存在，它们是整体的抽象。因而，我们追求的目的并不是用二价逻辑的这些运算来建构结构，而是找寻这些运算所依存的整体结构。

通过对尼克德的唯一公理的分析，我们得到的第一个答案就是：这个公理表达了一个"群集"结构。但是也并不完全如此，因为作为一个群集，是可逆性的格，同时通过部分与整体的嵌套以及群的嵌套从而与格形成了世系关系，并且同时和可逆性群也是世系关系。所以，我们的工作就是尝试从这两个非此即彼的方向上去简化，并且观察运行二价逻辑运算的群或格是否具有可以被整合的属性。

首先，在基于集合的运算中存在两个众所周知的群，并且可以被运用于命题间运算，它们是：排他析取（W）和逻辑等价（ ）。众所周知，数理逻辑的奠基人之一，布尔(G. Boole)曾先后在1847年和1854年制定了一个建立在类别析取加法基础上的代数[1]，之后，人们从未停止对此投入极大的兴趣 尤其是，从1924年到1925年，伯恩斯坦[2]就指出，布尔代数从非共通部分的合并的运算（W）角度建构了一个群，同时从其对偶的角度，建立了逻辑等价或者共通部分的合并（ ）。此外，逻辑等价的群具有明显的重要性，我们知道，是以布利根德(Bouligand)为代表的人赋予了它的功能。这两个群，（W）和（ ）就形成了两个"域"(corps)或者两个群的系统

Ⅰ. 排他析取群 正如我们在§10中讨论过，集的子集从在将共同部分进行合

① 布尔，1847及布尔，1854。
② 伯恩斯坦，1924。

并运算的角度形成了一个加法群，那么从运算角度我们又在命题间运算中发现了这样一个群$(p \mathrm{W} q)$：

1. 顺运算：$(p \mathrm{W} q)$，$(q \mathrm{W} r)$，等等。

2. 逆运算：$(p \mathrm{W} p) \leftrightarrow o$，$(q \mathrm{W} q) \leftrightarrow o$，等等。事实上：

(244)　$$p \mathrm{W} p \leftrightarrow (p \cdot p) \mathrm{W} (p \cdot p) \leftrightarrow (o) \mathrm{W} (o) \leftrightarrow o$$

3. 恒等运算：o。事实上：

(245)　$$(p \mathrm{W} o) \leftrightarrow p \quad \text{和} \quad (p \mathrm{W} p) \leftrightarrow o$$

4. 结合律：

(246)　$$[p \mathrm{W} (q \mathrm{W} r)] \leftrightarrow [(p \mathrm{W} q) \mathrm{W} r]$$

这些集运算中的任意两个进行乘积都可得出一个集合运算；所以，会有一个群存在，但是当它的直接运算运用到一个共同部分时$(p \mathrm{W} p)$，其直接运算也构成它自己的逆运算。从这些值得关注的表达中，我们注意到：

(247)　$$(p \mathrm{W} p) \mathrm{W} p \leftrightarrow p$$

实际上　$$(p \mathrm{W} p) \leftrightarrow o \quad \text{且} \quad (p \mathrm{W} o) \leftrightarrow p$$

(248)　$$(\bar{p} \mathrm{W} \bar{q}) \leftrightarrow (p \mathrm{W} q)$$

实际上　$$(\bar{p} \mathrm{W} \bar{q}) \leftrightarrow (\bar{p} \cdot \bar{\bar{q}}) \mathrm{W} (\bar{\bar{p}} \cdot \bar{q}) \leftrightarrow (\bar{p} \cdot q) \mathrm{W} (p \cdot \bar{q})$$

(249)　$$(p \mathrm{W} \bar{p}) \leftrightarrow U$$

（其中U被视为整体），特别地有：

(250)　如果$(p \mathrm{W} q) \leftrightarrow x$，那么$(p \mathrm{W} x) \leftrightarrow q$且$(q \mathrm{W} x) \leftrightarrow p$

另外，我们注意到如果p和q是完全不相交的，那么可以得出

$$(p \mathrm{W} q) \leftrightarrow (p \equiv \bar{q}) = (\bar{p} \equiv q)$$

[参照命题(190)]。

实际上有$(p \mathrm{W} q) \leftrightarrow (p \cdot q) \mathrm{W} (p \cdot q)$，那么有$(p \equiv q) \leftrightarrow (p \cdot q) \mathrm{W} (p \cdot q)$以及$(p \equiv q) \leftrightarrow (p \cdot q) \mathrm{W} (\bar{p} \cdot \bar{q})$。

由此我们得出，对于运算$(p \mathrm{W} q)$在构成群的要素的同时，相当于与两个排他性命题中的一个等价，并否定另一个命题。（这自然不能运用在三个命题上，除非一个命题真另外两个都为假，以此类推）。运算$(p \equiv q)$的真就构成了$(p \mathrm{W} q)$的假（正如我们在§30中看过的）。

Ⅱ. 双向条件群①，也就是运算$(p \equiv q)$，意为$(p \equiv q) \leftrightarrow [(p \cdot q) \mathrm{W} (p \cdot q)]$。为了更好地显示其与运算$(p \mathrm{W} q)$的世系关系，我们规定，如果运算$(p \mathrm{W} q)$为假，那么我们将其记为$(p \mathrm{W} q)$。另外，为了避免我们在比较这两类运算时可能产生的混淆，既然$(p \mathrm{W} q)$是$(p \mathrm{W} q)$的矛盾命题，那么我们说$(r \mathrm{W} s)$即$(r \equiv s)$。于是我们这样定

① 在谈逻辑等价群的时候，用关系名称$\leftrightarrow$代替运算名称$=$。

义如下：

$$(r \equiv s) \ df (r \ W \ s) \leftrightarrow (r \cdot s) \ W \ (\bar{r} \cdot \bar{s})$$

从$(r \equiv s)$到$(r \ W \ s)$的逻辑等价则形成了一个群，它的运算为：

1. 顺运算有：$r \overline{W} s$（即 $r \equiv s$），$s \overline{W} t$（即 $s \equiv t$），等等。

2. 逆运算与顺运算是恒等的，因为每一个逻辑等价包含了论证系统的整体：

(251) $$r \overline{W} r(\text{所以 } r \equiv r) \leftrightarrow (r \cdot r) \ W \ (\bar{r} \cdot \bar{r})$$

$$r \ W \ s(\text{所以 } r \equiv s) \leftrightarrow (r \cdot s) \ W \ (\bar{r} \cdot \bar{s})\text{，等等。}$$

3. 恒等运算则是完整系统 U。实际上，顺运算与逆运算相互恒等，它们的乘积永远都为 U，因为：

(252) $$r \ \overline{W} \ r(\text{所以 } r \equiv r) \leftrightarrow (r \cdot r) \ W \ (\bar{r} \cdot \bar{r}) \leftrightarrow r \ W \ \bar{r} \leftrightarrow U$$

[参照命题(249)]。

另外，U 与其任意一个元素的联合都能使它保持不变，因为这个元素与整体 U 之间的共通部分就是这个元素本身。

(253) $$r \cdot U \leftrightarrow r, \quad s \cdot U \leftrightarrow s, \quad \bar{r} \cdot U \leftrightarrow \bar{r}\text{，等等}$$

4. 结合律：

(254) $$[(r \overline{W} s) \overline{W} t] \leftrightarrow [r \overline{W} (s \overline{W} t)]$$

也就是说 $$[(r \equiv s) \equiv t] \leftrightarrow [r \equiv (s \equiv t)]$$

但是needs注意的是，项 o 不是这个群的一部分。实际上，$r \cdot o \leftrightarrow o$，这将 r 不可挽回地消除了。

再来看一个有趣的表达，它是(190)的互反命题：

(255) $$(r \overline{W} s) \leftrightarrow (r \ W \ \bar{s}) \leftrightarrow (\bar{r} \ W \ s)$$

实际上，$(r \equiv s)$是 r 和 $\bar{s}$ 的排他，因为：

$$(r \ W \ s) \leftrightarrow (r \cdot s) \ W \ (\bar{r} \cdot \bar{s}) \quad \text{并且} \quad (r \ W \ \bar{s}) \leftrightarrow (r \cdot \bar{s}) \ W \ (\bar{r} \cdot \bar{s})$$

Ⅲ. 前述两种群的意义——第一个群并不能独立地阐明命题转换的集合，因为这个群的基本运算在于将非共通部分合并，也就是基于分离它们的嵌套之外的元素而非基于这些嵌套本身。实际上：

1. 顺运算$(p \ W \ q)$是由$(p \cdot q) \ W \ (p \cdot q)$来定义的，它主要在于否定 p 对 q 或者 q 对 p 的蕴涵，因为 $p \cdot q \leftrightarrow p \supset q$ 并且 $p \cdot q \leftrightarrow q \supset p$。如此，排他析取就构成了两个非蕴涵的联合，$(p \ W \ q)$、$(p \cdot q)$和$(p \cdot q)$这三个二元联结是唯一既不包含$(p \cdot q)$也不包含$(p \cdot q)$的。然而，在所有演绎中最重要的运算可能就是蕴涵了；因而我们不太明白排他群自身如何足以将这个问题搞清楚，因为$(p \supset q)$这个蕴涵是共通部分$(p \cdot q)$和非共通部分$(\bar{p} \cdot q)$的联合。

2. 双向条件不属于这个群，尽管在命题的完整系统中，我们有：

(256) $$(p \mathrm{W} q) \leftrightarrow (p = q)$$

3. $(p \vee p) \leftrightarrow p$ 或 $(p \cdot p) \leftrightarrow p$ 这样的自嵌套也不属于这个群；然而它们对于命题间逻辑的运算机制是必要的（罗素和希尔伯特的公理Ⅰ）。

总之，排他析取群仅仅在于被分离了的元素而不是嵌套。因此，它与数字结构的关系要比与蕴涵逻辑更近（见 §1 和 §26）。正如海尔勃朗（Herbrand）证明的那样，它实际上与 2 模整数系统是同构的，也就是说，所有偶数和奇数都被看作与 0 和 1 等价。

而逻辑等价群则在于共通部分，与析取部分相反，它则刚好给出在排他群中所不包含的元素；只不过，这样的话，它不会拥有那些适用于第一个群的元素，而这些元素在表达二价转换的整体时又是必要的。

1. 如同双向条件判断（ ）不属于第一个群（因为对于它的转换表达的不可缺少）一样，排他析取（W）也不属于第二个群，因其对于表达 $(r \;\; s) \leftrightarrow (r \cdot s) \mathrm{W} (r \cdot s)$ 的必要性。实际上，如果有 $r = s$，那么 $(r \cdot s)$ 和 $(r \cdot s)$ 是不相交的，这个排他析取不构成群的运算。

2. 自嵌套 $(p \cdot p) \leftrightarrow p$ 在这里属于这个群，但是 (o) 不属于。实际上这个群的恒等运算是整体 I'，恒等运算不能以 $(I' = o)$ 的形式进行逆运算。将 (o) 排除在这个群之外了，是为了满足二价运算的完全系统的必然性，例如以 $p \cdot p \leftrightarrow o$ 的形式

3. 总的来说，逻辑等价群限于将逻辑等价合并，而不告诉我们这里为什么存在逻辑等价。然而，派生出逻辑等价的转换，例如 $(p \mathrm{W} q) \leftrightarrow t$ 也和逻辑等价输入了同样多的东西。

总之，排他析取群（W）只在于命题集的系统的非共通部分，而逻辑等价群（ 或 W）则在于共通部分，两者中的任何一个都不能独自构成命题间运算的整体。正因如此，从非共通部分的合并方面，由 $(p \;\; q)$ 得出 $(p \mathrm{W} q) \leftrightarrow (p \cdot q)$，而从共通部分合并的方面得出 $(p \mathrm{W} q) \leftrightarrow (p \cdot q)$；而蕴涵的运算的本质则是明确地将共通部分和 $(p \cdot q)$ 和 $(p \cdot q)$ 以及非共通部分 $(p \cdot q)$ 合并为一个唯一的整体 $(p \supset q)$，即

$$(p \supset q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$$

那么问题则在于我们能否将这两个群合并为一个单一系统，这个系统支持这类运算整体。

Ⅳ. 排他析取和合取的环以及系统的非充分性单位。 在群的概念上建立二价逻辑在于显示一个单一系统的特征，此系统的构成覆盖了所有命题间转换，尤其是可逆性的所有特征（我们在第四章已讨论过可逆性的基本重要性）。实际上，由顺运算组成的群的逆运算给出恒等运算；由此得出演化、返回和参照三种源于同一起点的运算机制，它们的相互联系构成了系统的相容性[1]。然而，在排他析取中，每一个基本运算也

① 朱维特（Juvet），1936。

是它自己的逆运算，但等为 o：即 $(p \mathrm{W} p) \leftrightarrow o$。在逻辑等价中，每一个基本运算同样也是它自己的逆运算，但恒等为整体：即

$$(r \equiv r) \leftrightarrow (r\ \overline{\mathrm{W}}\ r) \leftrightarrow r \mathrm{W} \bar{r} \leftrightarrow U$$

那么，很显然，$(p \mathrm{W} p) \leftrightarrow o$ 和 $p \mathrm{W} p \leftrightarrow U$ 这两个逆向运算是有相近的地方的，因为 (W)，即 $(-)$，是 (W) 的逆运算（从互补的意义上讲），并且 (W) 由 $(p \mathrm{W} p)$ 来表现，也就是说由 p 的简单否定来体现。所以可以写作：

(257) $$[(p \mathrm{W} p) \leftrightarrow o] \rightarrow [(p \mathrm{W} p) \leftrightarrow U]$$

在这种情况下，难道不可能将系统整体简化为一个单一的群吗？只是对于这样一个同时依赖于非共通部分和共通部分的系统，有必要用一个辅助运算 $(\cdot)$ 来补充基础运算 (W)，如此我们得到：

$$(p \mathrm{W} q) \leftrightarrow (p \cdot q) \mathrm{W} (p \cdot q)$$

$$(r \mathrm{W} \bar{s}) \leftrightarrow (r \cdot \bar{\bar{s}}) \mathrm{W} (\bar{r} \cdot \bar{s}) \leftrightarrow (r \cdot s) \mathrm{W} (\bar{r} \cdot \bar{s})\text{，所以 } r \leftrightarrow s$$

所以我们就有了以下运算，自然地用排他析取和合取这两种语言表现出来（但是这两种运算都是必要的）：

1. 顺运算：$(p \mathrm{W} q) \leftrightarrow (p \cdot q) \mathrm{W} (p \cdot q)$ 和 $(r \mathrm{W} s) \leftrightarrow (r \cdot s) \mathrm{W} (r \cdot s)$
2. 逆运算：$(p \mathrm{W} p) \leftrightarrow p \cdot \bar{p} \leftrightarrow o$
3. 恒等运算：(o) 因为 $(p \mathrm{W} p) \leftrightarrow o$ 及 $(p \mathrm{W} o) \leftrightarrow p$

另外，也可以很容易将所有命题间运算用这样的语言来表达。我们得出：

(258) $$(p \vee q) \leftrightarrow (p \mathrm{W} q) \mathrm{W} (p \cdot q)$$

(259) $$(p | q) \leftrightarrow (p \mathrm{W} q) \mathrm{W} (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

(260) $$(p \supset q) \leftrightarrow (p \mathrm{W} q) \mathrm{W} (p \cdot q)$$

(261) $$(q \supset p) \leftrightarrow (p \mathrm{W} q) \mathrm{W} (p \cdot q)$$

等等。

但是我们注意到，这个系统的唯一性只是表面的。正如信恩斯坦说的那样，布尔对抽象结构的研究的这样的重组依赖于三个基础运算：两个二元的 (W) 和 $(\cdot)$，和一个单元的 $(-)$。然而，加入了一个辅助运算的群就不再是一个单纯的群了，而成了一个"环"，在这个特殊情况下，从 (W) 和 $(\cdot)$ 这一对运算的角度，我们面对的是一个交换环（anneau commutatif），加法运算时排他析取 (W) 而乘法运算是 $(\cdot)$。如果环的这两个运算可以简化为一个单一算子，且它们构成了这个算子的两个可逆性表达，那么这样一个结构对逻辑来说会很有趣，但是这个结构只有在这样的特殊情况下才能明了命题间运算的整体形式。

然而，一开始可能会是这样的情况，因为，在很多个例子中，$(\mathrm{W} p)$ 与 $(\cdot p)$ 是可以替换的表达，$(\mathrm{W} p)$ 与 $(\cdot p)$ 也是一样，这两对表达用否定构成了环的附加运算。p 的排他 $(\mathrm{W} p)$ 相当于并集 p，即 $(\cdot p)$，并且反之亦然。例如，

(262) $$(p \mathrm{W} p) \leftrightarrow (p \cdot \bar{p}) \leftrightarrow o$$

(263) $$(p \cdot U) \leftrightarrow (p\ \mathrm{W}\ o) \leftrightarrow p \quad \text{因为} \quad U \leftrightarrow o$$

如此，我们似乎就可以构成之前怀疑其存在与否的那个群了。但是同时，一些抗辩仍然与之矛盾。实际上：

1. 逆向排他(W)和合取($\cdot$)相互之间并不是可结合的。

例如：设$(p \cdot p)\ \mathrm{W}\ q \leftrightarrow (o\ \mathrm{W}\ q) \leftrightarrow q$在所有情况下都为真。于是有，如果$p$和$q$是完全独立的$(p\ \mathrm{W}\ q)$，那么从$p \cdot (p\ \mathrm{W}\ q)$可以导出$p \cdot (o) \leftrightarrow o$，因为有$(p \cdot q)$且$(q\ \mathrm{W}\ q \leftrightarrow o)$。另外，如果$(p \vee q)$，则$p \cdot (p\ \mathrm{W}\ q)$可导出$p \cdot (p \cdot q)$。同样，如果$p \supset q$，则同样的表达可以导出$p \cdot (p\ \mathrm{W}\ q \cdot p) \leftrightarrow p$。那么$[(p \cdot p)\ \mathrm{W}\ q]$和$[p \cdot (p\ \mathrm{W}\ q)]$这两个表达并不是等值的，这就说明并不存在可结合性。

2. 通过对符号和运算的变换，即$(\mathrm{W}\ p)$和$(\cdot\ p)$或$(\cdot\ p)$和$(\mathrm{W}\ p)$来达到，从等式的一端到另一端的过渡并不总是可行的：

例：$(p\ \mathrm{W}\ p) \leftrightarrow p \cdot p$导出$(p \leftrightarrow p \cdot p \cdot p)$，所以$(p \leftrightarrow o)$；从$p \cdot p \leftrightarrow p$导出$p \leftrightarrow p\ \mathrm{W}\ p$是荒谬的，所以$p \leftrightarrow U$。同理，将$(\mathrm{W}\ U)$转换成$(\cdot\ U)$即$(\cdot\ o)$，则$(U\ \mathrm{W}\ p) \leftrightarrow p$可导出$U \leftrightarrow p \cdot p$或者$p \leftrightarrow p \cdot o$。

这些抗辩的理由具备很强的理论意义：这是一些重言式运算，$p \cdot p \leftrightarrow p$和$p \cdot p \leftrightarrow p$，这些运算与非重言式运算情形中可能的由一端转换到另一端的那些转换相对立。因而，这里我们遇到了之前提过的关于类别"群集"的相同困难(§10和规则Ⅰ到Ⅳ)。

3. 不可能构成一个唯一的群，$(\mathrm{W}\ p)$和$(\cdot\ p)$或者$(\mathrm{W}\ p)$和$(\cdot\ p)$这些运算包含两个恒等的运算。事实上：

(a) $(p\ \mathrm{W}\ p) \leftrightarrow o$且$(p\ \mathrm{W}\ o) \leftrightarrow p$，即$(o)$一恒等的，对于非共通部分的群而言。

(b) $(p \cdot p)\ \mathrm{W}\ (p \cdot p) \leftrightarrow U$且$p \cdot U \leftrightarrow p$，即$U$一恒等的，对于共通部分的群而言。

然而，这样一个恒等的二元性可能会阻止将一个系统简化为一个单一的群。我们或许可以回答说这两个恒等是等价的，既然(263)：

$$(p\ \mathrm{W}\ o) \leftrightarrow (p \cdot U) \leftrightarrow p$$

也就是说在这种情况下$(\mathrm{W}\ o) = (\cdot\ U)$。

但是$(\mathrm{W}\ o)$和$(\cdot\ U)$之间的这个等价只是表面并且部分的。实际上，若$(\mathrm{W}\ o)$(或无)和$(\cdot\ U)$(一和整体)构成一个相同的运算，在意义的层面和形式机械论的层面都不成立。从意义上说，"x是有脊椎的或什么都不是"或"x，同时是脊椎动物及一个整体的子集"是两个不相同的论点。其理由是p用其他一系列的嵌套的整体来支撑相同的关系$p \cdot (q, r, s, \cdots, U) \leftrightarrow p$，之后用被认为是$U$的整体系统来支撑它。所以：

$$p \supset q, \quad q \supset r, \quad r \supset s, \quad \cdots, \quad p, q, r, s, \cdots \supset U$$

我们因而意识到$(p \cdot U) \leftrightarrow p$只不过是一系列"特殊的恒等"[重复和吸收(toutification et absorption)]的一个最普遍的情况：

(264) $$(p \cdot p) \leftrightarrow p, \ (p \cdot q) \leftrightarrow p, \ (p \cdot r) \leftrightarrow p, \ (p \cdot s) \leftrightarrow p, \ \cdots, \ (p \cdot U) \leftrightarrow p$$

如果恒等$(\cdot\ U)$被认为等价于$(\mathrm{W}\ o)$，那么对于像p, q, r等这样的每个命题应该

都是一样的，同时对于那些关于它自己运用到的命题也是一样。所以 $(p \cdot U) \leftrightarrow p$ 只是我们在一个"群集"中碰到的那样的"特殊的恒等"中最普遍的，并且它不构成唯一的恒等运算。所以（W_o）和（$\cdot U$）之间不存在一一对应，但是（W_o）与一系列的使 p 不变的特殊恒等相对应。然而，正是这些特别恒等缩减了系统的一半，正如我们在第2点中讨论过的。

V. 结论。　整体来说，很明显（W）和（≡）这两个运算群不能够简化为一个，而且由二价逻辑构成的整体系统也就不能缩减为一个群。深层的理由是对逻辑所关心的部分对于整体的嵌套的考虑，使特殊恒等必然存在（重复，返回吸收和吸收），特殊恒等使群集区别于群。只有在考虑除了相互排斥（W）和逻辑等价（≡）之外的情况时，我们才能构成这些群，因为此时我们将元素从包含它们的整体中剥离出来，或者使嵌套被缩减以得到逻辑等价；总之，我们将只考虑非共通部分和共通部分，因为所有的嵌套以这两者同时存在为前提（正如我们看过的，蕴涵联合了 $p \cdot q$ 和 $p \cdot q$）。正是这样，在逻辑上，$(p \mathrm{W} p) \leftrightarrow x$（引自伯恩斯坦）是一个唯一且完整的表达，这其中，关系（$p \mathrm{W} q$）与（$p \equiv q$）是不可分离的。相反，只有在将关联（W）和（≡）分离开，对它们进行特别处理的情况下，我们才能把这个表达引进到布尔–伯恩斯坦的群当中。并且，从命题间运算的角度，（$p \mathrm{W} q$）和（$p \equiv q$）这两个表达体现的是相互对立的一些运算；但是，想要将它们结合为一个运算整体，并由此将这两个互补的群合并为一个系统，我们需要再引入嵌套以及特殊恒等的必然性，其本身正是对建立单一群的抗辩。

相反地，很明显，如果相互排斥群以及逻辑等价群这两者组成的主体（corps）不是以包含命题间运算的整体，那么它也要在这个整体结构中扮演重要角色[1]。一般来说，两个群联合的产物是一个"四项群"，正如那个我们在命题逻辑中已经隐约瞥见的职能（§31 定理 VI）。然而，肯定逻辑等价（≡）和否定逻辑等价（W）构成的群，还决定了命题的交互性和相关性（§31 定理 III 和 V）；它们通过与之相对立的否定（W 是≡的补）介入到 4 个转换组成的群当中，这个群表现了命题间可逆性的多个方面。但是这个四项群（定理 VI）尽管从可逆性方面是基础性的，却不足以了解嵌套的整体性，因为由于自嵌套的存在，它不包含"特殊恒等"，因此也不完全包含"特殊恒等"的那些基本关系。

§37　将命题逻辑简化为格

如果通过与共通或非共通部分联合的对立，也就是相等，我们回到嵌套，像这样的二价逻辑的基础性运算将不再由排他（W）和合取（·）的结合来表现，而是由不排他析取（V）和合取（·）的结合来表现。这两个运算显然地、特别地置于"特殊恒等"或者自

① 格里兹，1963。

被套$(p \vee p)$和$(p \cdot p)$之中，自然会防止了将之前运算简化为一个单一群。

我们暂且忽略构成群的概念的本质的可逆性问题，整理一下联合的析取和合取构成的集合系统。这个系统呈现为良好定义的结构，理论上被称为集合、"网状集合"、"网"或"网格"。格具有多种属性，关于这些属性我们在§10中一般性地描述过。现在就来以命题逻辑的语言来表述这些属性。让我们回顾一下那两个以上限和下限命名的"操作性"定义，我们注意到运算(∨)和(·)分别与这两个定义相符并且满足以下7种情况①：

1. $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$　　　1乙 $(p \cdot q) \leftrightarrow (q \cdot p)$
2. $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$　　2乙 $p \cdot (q \cdot r) \leftrightarrow (p \cdot q) \cdot r$
3. $(p \vee p) \leftrightarrow p$　　　3乙 $(p \cdot p) \leftrightarrow p$

1及1乙. 若$(p \vee q) \leftrightarrow q$，则$(p \cdot q) \leftrightarrow p$，且反之，若$(p \cdot q) \leftrightarrow p$，那么$(p \vee q) \leftrightarrow q$。

两个命题，因上限$(p \vee q)$和下限$(p \cdot q)$，其中的每一个都获得了单义的定义。于是，集合之中的命题系统就构成了一个格。

但是，如果说刚刚涉及的两个群范围太窄而不能承受整个命题逻辑的负载，那么，相反地，格就显得是个太大的系统，它没有细地紧扣转换的细节，仅满足于描述它们的周围却不触及其自身的机制。

1° 事实上，从其在逻辑上的运用方面来看，格的概念的主要漏洞在于满足于一个缩减的可逆性。网并不包含逆运算，因为下限与上限不需要严格的反演关系。在命题间运算的格的情况下，析取(∨)和合取(·)这两个起最高和最低界限作用的运算并不是相互的补(反演)，也不是相互的逆命题，而只是"对射的"(correlatives)(定义34和§31)。当然，相关是逆命题的反面。所以，我们可以(通过p和q的否定)从运算$(p \vee p)$得到它的逆命题$(p \vee q)$，并从$(p \vee q)$的否定而实现它的相关。

但是，否命题(p)和运算的否定$(p \vee q \leftrightarrow p \cdot q)$都不是格的构成运算：这是一些和其他命题一样的命题，所以也和其他命题一样有界，但这些都不是格存在的必要条件。因此，在反演、互反和相关这三种命题间逻辑的基本转换形式中(见§31)，由析取和合取构成的格只包含第三种。然而，前两种对所有演绎来说都是基本的。

2° 我们确实可以设想一个将上限与下限分离的运算。这种情况下，我们可以得出：

$$(p \vee q) \cdot (\overline{p \cdot q}) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow (p \mathrm{W} q)$$

但是这样又回到了我们在§36中讨论过的非共通部分和共通部分的系统中。

3° 另外，格不包含以下形式的运算：在上限$(p \vee p)$和这两个命题之一(p)的条件下，另一个则获得了单义定义。假设这个运算在于否定p，即$(\cdot p)$。我们能否得出：$(p \vee q) \cdot p \leftrightarrow q$? 但是，如果将运算$(p \vee q)$从广义上理解为$p$与$q$的上限的简单联合，

① 赫廷(Heyting)，1948。

则没有给出任何 p 和 q 的具体关系的信息；我们只知道以下三个合取中至少一个为真：$(p \cdot q)$或$(p \cdot q)$或$(p \cdot q)$，但不知道是哪一个或哪几个为真。所以，在 p 和 q 之间，我们可以有：a)完全析取关系：$(p \cdot q) \mathrm{W} (p \cdot q)$；b)不完全析取关系：$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$，伴随三个可能性的真；c)蕴涵$(q \supset p)$的关系：$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$；d)蕴涵$(p \supset q)$的关系：$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$；e)逻辑等价关系$(p = q)$：$(p \cdot q)$。于是，$(p \vee q) \cdot p$ 在 a)、b)和 d)的情况下可以推导出$(p \cdot q)$，在 c)和 e)的情况下可以推导出(o)。

1° 在涉及下限$(p \cdot q)$中的两个命题之一 q 时，不确定性就更大了，因为$(p \cdot q)$只是 p 和 q 的交集；所以$(p \cdot q)$这个子集要么覆盖 p 和 q 两个命题，要么只覆盖其中一个，要么它就是个空集(如果 $p|q$)。

2° 这是一个反演成为可能的情形：此时我们有$(p \vee q) \leftrightarrow q$，因而$(p \cdot q) \leftrightarrow p$。$(p \vee q)$则二分地分配在$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$；于是有

$$[(p \vee q) \cdot (\overline{p \cdot q})] \leftrightarrow (p \cdot q) \quad 和 \quad [(p \vee q) \cdot (\overline{\bar{p} \cdot q})] \leftrightarrow (p \cdot q)$$

这是因为，在这种情况下，p 包含于 q，这就使命题 q 可以被分解，分别存在于它的两个构成中：$p \leftrightarrow (p \cdot q)$及 $p' \leftrightarrow (p \cdot q)$。只有在这样的情况下，格的结构才能在群集的意义上被明确地限定。

总之，要表达命题逻辑的特殊转换，格是一个太过宽泛的结构。实际上，格被运用于最多样的结构之中，例如整数、空间映射等等。通过其普遍性，它表达了部分在整体中的包含以及交互相关等的基本逻辑机制。但是它忽略了构成所有逻辑转换最特别的特征——可逆性。

§38 从格到群集的过渡

通过对布尔-伯恩斯坦群的分析，以及对于析取和合取的命题间格的分析，所得出的结论是，这两个整体结构中任意一个都不能恰当地解释二价逻辑运算的整体：对群而言，是因为它们不能支撑这样的嵌套，而对格而言，是因为它放弃了可逆性。命题间运算的整体结构的问题在于将格所特有的嵌套以及群的可逆性归并为一个系统。要在群的基础上加入"特殊恒等"，我们就扩大了这个结构，同时，要在格的基础上加入可逆性，我们只需将其专门化，也就是要建立可逆的格。之后，取代布尔-伯恩斯坦的两个群的运算(W)和$(=)$或由它们的结合而推导出的环运算(W)和$(\cdot)$，以及标记格的运算$(\vee)$和$(\cdot)$是在$(\vee p)$和$(\cdot p)$的基础上建立的一个包含二价运算的整体结构，也就是，基于顺运算名义下的析取命题，以及基于合取否定命题，合取否定命题在简单互补的意义上，它是自身的反演。如我们所见，这样的选择与对偶性定律相符合

$$(p \vee q) \leftrightarrow (\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}) \quad 和 \quad (p \cdot q) \leftrightarrow (\overline{\bar{p} \vee \bar{q}})$$

如果 p 和 p 互补，并且 T 是 p 和 p 的结合(或 q 和 q 的结合)，那么有：

1. 顺运算：$(p\vee p)\leftrightarrow T$
2. 逆运算：$(p\cdot\bar{p})\leftrightarrow o$
3. 普遍恒等：$(\vee)o$ 因为 $p\cdot p\leftrightarrow o$ 且 $p\vee o\leftrightarrow p$
4. 特殊恒等：$(p\vee p)\leftrightarrow p$ 且 $(p\vee T)\leftrightarrow T$

顺运算、逆运算以及唯一普遍恒等显示了与群相同的可逆性，而特殊恒等对应着格的自嵌套。事实上，$(\vee\,p)$ 和 $(\cdot\,p)$ 的可逆性使我们能做这样的演绎推理，通过将一个数转变为另一个数，从而得出以下等式：

$$\bar{p}\leftrightarrow T\cdot\bar{p}\quad 和\quad p\leftrightarrow T\cdot\bar{\bar{p}}\leftrightarrow T\cdot p$$

于是，我们得到了格的基本转换：

$$[(p\vee T)\equiv T]\rightarrow[(p\cdot T)\equiv p]$$

另外，很明显 p 和 T 之间构成了一个蕴涵关系，因为 $T\leftrightarrow(p\cdot T)\vee(\bar{p}\cdot T)$ 且 $p\cdot\bar{T}\leftrightarrow o$（因为 $\bar{T}\leftrightarrow o$）。那么只若在 p 和 T 之间引入一系列 $p\supset q, q\supset r, r\supset s, \cdots\supset T$ 形式的中间结构以使得出、命题(258)一系列如下表达：

$$p\vee p'\leftrightarrow q,\quad q\vee q'\leftrightarrow r,\quad r\vee r'\leftrightarrow s,\quad \cdots$$

同时[命题(241)]能够将 p 对等于 $(p\leftrightarrow p'\vee q'\vee r'\cdots)$。如此，我们将格转化成了一个可逆的结构，保留了网的一般性特征，但是通过可逆性来加入了命题间逻辑的基本转换。正如我们在§37中讨论过的，准确地说，正是这个系统覆盖了尼克德的唯一公理，也正是它构成了我们称之为"群集"的东西。

所以，二价逻辑的特有整体结构不是群，群太过狭窄，因而不能包含自嵌套运算，同时也不是格，格太过宽泛，因而无法解释可逆性。它是一个群集，调和了可逆性和部分在整体中的嵌套。我们将会对此做更详细的解读。

§39　命题间运算的群集

这些命题间的群集，曾经被区分为八种形式（加法运算的群集或减法运算的群集，类别群集或关系群集，以及初始群集或次级群集），与这种解析方式相反，我们将命题间运算的整体缩减为一个单一群集，其中的多种形式直接地构成了彼此的起点。我们按照五个阶段来进行，首先，如之前曾分析过的一样，由一个单独的命题与其所属的系统的关系开始(A)，然后详细描述蕴涵的群集(B)，之后是一般性的二进制运算群集(C)，以及描述它们的二元构成(E)，紧接着是四种反演转换的群(D)。

A. 命题与其所属系统之间的关系。　　（这种关系）是一个单独的命题 p，不是原子元素，而是为了显示它的转换与它所属的系统整体之间的关系。也就是说一个任意命题(p)；不是因为运算而引入否定，我们称 $\bar{p}$ 是当 p 为假则其为真，当 p 为真则其为假的命题。然后我们可以定义运算，它们自身构成一个"群集"：

1. 顺运算是 p 的肯定与系统其他所有命题的析取地结合$(\vee p)$(目前我们只 p)：

(265) $$p \vee \bar{p} = T$$

(这里 T 是永远为真的命题)。

我们发现，对于单个命题 p 以及它在 T 中的互补命题 p，最初的顺运算相当于排中律。

2. 逆运算是 p 的否定与系统其他所有命题的合取地结合$(\cdot p)$(目前也就是和 p)：

(266) $$p \cdot \bar{p} = o$$

对于一个单独命题与其否定，逆运算相当于非矛盾定律。

3. 存在一种单一的一般恒等运算，它会是顺运算及逆运算的产物，并且它不改变任何其构成运算。我们将它记为$(\vee)o$，即：①

(267) $$p \cdot p = o, \quad p \vee o = p, \quad p \vee o = p, \quad T \vee o = T, \quad o \vee o = o$$

4. 存在一些特殊恒等运算，它们不改变它们那些构成运算。它们是：

(268) $p \vee p = p$， $p \vee p = p$ 及 $p \cdot p = p$ 重言式(tautifications)]

(269) $p \vee T = T$ 返回吸收(resorption)，也就是说 $p \vee (p \vee p) = (p \vee p)$

5. 这些组合是相联结的，与命题内群集的条件一样：

(270) $$p \vee (p \vee o) = (p \vee p) \vee o = T$$

相反地：

(271) $$p \vee (p \cdot \bar{p}) \neq (p \vee p) \cdot \bar{p}$$

因为 $p \vee (p \cdot p) = p \vee o = p$ 且$(p \vee p) \cdot \bar{p} = p \cdot p = o$。

因而，只是 $p \vee p$ 和 $p \vee o$(一般恒等顺运算)的机能的对偶性限制了结合性。

6. 依据这些已经被接受的定义，我们可以对逆运算进行反演，正如对顺运算做逆运算一样。运算的反演记为在原始表达上方加一条横杠，即$(\vee p) = (\cdot p)$。逆运算的反演就又回到顺运算：

(272) $$(\overline{\vee p}) = (\cdot \bar{p}) \quad 和 \quad (\overline{\cdot \bar{p}}) = (\vee p)$$

我们同样也写作：$(p = p)$的转换。

一般地，仔细地标记出否定的反演即否定运算的否定$(\cdot \bar{\bar{p}})$与否定重复，即特殊恒等 $\bar{p} \cdot \bar{p} = \bar{p}$ 之间的区别很重要。

7. $(\vee p)$和$(\cdot p)$是两个具备可逆性的基本运算，我们可以引入两个由它们自身演变出的新运算。如果 p 属于 T 又不等值于它，那么$(p \vee p) = T$[命题(265)]。那么我们可以试图通过反演$(\vee p)$来建立(p)和(T)之间的关系，即 $p = T \cdot (\vee p) = T \cdot p = T \cdot p$。如此我们便可定义新的成对运算：

(273) $$(\vee \bar{\bar{p}}) = (\cdot p) \quad 和 \quad (\overline{\cdot p}) = (\vee p)$$

---

① 在这一段及下一段中，我们保留第一版中群集的符号。

以下是它的意义：如果得出$(p\vee T)=T$(270)，那么析取$(p\vee T)$则包含了(p)和(T)之间的交集，即包括了$(p\cdot T)$以及它们的非交集部分$(T\cdot \bar{p})$。合取$(T\cdot p)$则呈现为在析取内部的一个部分反演，通过非交集部分的否定来表现，$(\vee \bar{p})$。相反地，合取$(\cdot p)$的反演则包含了非交集部分$(\vee \bar{p})$。那么，从$(p\vee T)$到$(p\cdot T)$的相关就只是基本运算$(\vee)$内部的一个部分反演而非其他。

7乙. 要注意，$(\vee p)$、$(\cdot p)$、$(\vee \bar{p})$和$(\cdot \bar{p})$这些转换构成了"四项群"的顺运算、反演、互反和相关运算的属性，独立于特殊恒等。

8. 被引入的运算$(\cdot p)$和$(\vee p)$同样也包含它们自己的特殊恒等。我们已经考察过$\bar{p}\vee\bar{p}=\bar{p}$[见(268)]。至于$(\cdot p)$，我们有：

(274) $$p\cdot p=p\text{(重言式 tautification)}$$

(275) $$p\cdot T=p \quad \text{或} \quad \bar{p}\cdot T=p\text{(吸收)}$$

换言之，所有的命题$(p$，$\bar{p}$或$T)$附属于自身的命题或者它所包含的另一个命题都是不变的。基于此，命题$(p\cdot T=p)$意味着两层等价的含义：a)如果我确认$T(=p\vee \bar{p})$和p的交集，那么在(p)基础上不再需要加入任何东西；b)如果我否认$T(=p\vee \bar{p})$内部的$\bar{p}$，则只能确认p。

9. 特殊恒等的最一般形式(275)也就是$(\cdot T)$等价于一般恒等$(\vee o)$，不是作为顺运算和逆运算(一般恒等的第一项功能，见3.)的产物，而是作为使其他运算不变的(一般恒等的第二项功能)产物：$(p\vee o)=(p\cdot T)$，$(\bar{p}\vee o)=(\bar{p}\cdot T)$等等。当且仅当依据第二个观点，我们可以反演$T$为$\overline{T}=O$，$O$为$\overline{O}=T$。

10. 逻辑等价关系$(\equiv)$是系统的一部分，并表达了替换构成逻辑等价两个成分的可能的表达，也表达了它们的互反的真。这个新的运算实际由前例演绎出来：

(276) $$(p\equiv p)\equiv(p\cdot p)\vee(\bar{p}\cdot \bar{p})$$

11. 于是，我们可以将逻辑等价的一个成分转换成另一个成分，$(\vee p)$以$(\cdot p)$的形式，$(\cdot p)$以$(\vee p)$的形式，或是互反。不过，这些转换受到与类别群集(§1...,Ⅲ；规则Ⅰ—Ⅳ)的相同规则的限制；那么在这些转换之前，在重言式(tautifications)和简化之间遵循一个顺序就很重要了。例如，在返回吸取$(p=p)$之前，$(p\vee p)=(p\cdot p)$不能引起任何的转换。但是相反，$(p=p)$可推导出$(p\cdot \bar{p}=o)$或$(\bar{p}=\bar{p})$，等。

12. 这样的转换通过采用对偶规则来实现。$p\vee p=p\cdot p$，$\bar{\bar{p}}\cdot\bar{\bar{p}}=p\vee p$，$\overline{\bar{p}\cdot\bar{p}}=p\vee p$，$p\vee\ddot{p}=p\cdot p$，$p\vee\bar{\bar{\bar{p}}}=p\cdot p$，$\overline{\bar{p}\cdot p}=p\vee p$，等，这样的转换实际上只是构成了反演一个表达，前文已经讨论过，而非其他。

那么，我们有了以下组合，它们都附属于前例，并构成了一个群集(我们用→来标识转换)：

$$(p\vee p=T)\rightarrow(p=T\cdot p)\rightarrow(\bar{p}=T\cdot\bar{p})$$

或

$$(p\vee \bar{p}=T)\rightarrow(p\cdot \bar{p}=o)$$

$$(p\cdot \bar{p}=o)\rightarrow(p=p)\rightarrow(\bar{p}=\bar{p})$$

或
$$(p\cdot\overline{\overline{p}}=\overline{o}) \rightarrow [(\bar{p}\vee p)=T]$$
$$(p\cdot o=o) \rightarrow (T=\bar{p}\vee T)$$
等等。

从组合$(p\vee p = T)$ $(p = T\cdot p)$ $(p = T\cdot p)$中我们可以演绎出：当(p)为真的时候，T一直是确定的，但是没有互反，因为在(p)的情况下，(T)也是确定的。所以我们说(p)蕴涵(T)，即$(p\supset T)$：

(277) $$(p\supset T)=(p\cdot T)\vee(\bar{p}\cdot T)\vee(p\cdot\bar{T})$$

(此处$\bar{T}=o$，所以$p\cdot o=o$)由此得出等价运算：

(277 乙) $$T=(p\cdot T)\vee(\bar{p}\cdot T)$$

最后这个表达式表述了T的"确定性"。

B. 蕴涵的群集——现在我们将系统T细分为一些嵌套的整体：
$$p\supset q,\quad q\supset r,\quad r\supset s,\quad s\supset\cdots,\quad u\supset T$$
这就是说命题(q)对于(p)所扮演的角色相当于(T)对于(p)一样，诸如之前的公式(265)到(277)；相应地，(r)扮演了如同(q)之于(p)一样的角色；诸如此类。那么我们就很容易将之前讨论的群集转换为一般化的多命题集合。并且我们可以让它们的元素跟构想的一样丰富。但是为了陈述得更清楚，我需要将运算$(\cdot p)$和$(\vee p)$中的$(\vee p)$和$(\cdot p)$分离开。于是，我们首先要勾勒出一些有区分度的形式，它可以描述多命题群集，然后将它们联结成一个单一整体。

形式Ⅰ——在这个形式中，我们只考虑基本运算$(\vee p)$、$(\cdot p)$和$(\ )$，并且，在$p\supset q$、$q\supset r$等链式蕴涵之后，不再对$p\supset T$命题(277)中，p、p、T和o之间的关系进行一般化处理。

于是，如果有$(p\supset q)$，根据(277)就有：
$$(p\supset q)=(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(p\cdot q)$$
并且根据(277 乙)$q=(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$，$(p')$即是$(p)$在$(q)$中的互补项，如$(p'=p\cdot q)$，那么我们有：
$$(p\supset q)\supset[(p\supset q)\cdot(p'\supset q)]$$
和
$$(p\supset q)\supset[(p\vee p')=q$$

承认§30中的命题(170)—(172)。

我们同样会有(图 46)：
$$r=(q\vee q'),\quad 其中\quad (q'=q\cdot r);$$
$$(s=r\vee r'),\quad 其中\quad (r'=\bar{r}\cdot s);等等。$$

由此，

(278)如果$p\supset q$、$q\supset r$、$r\supset s$，等，那么有$[(p\vee p')=q]$、$[(q\vee q')=r]$、$[(r\vee r')=s]$，等。

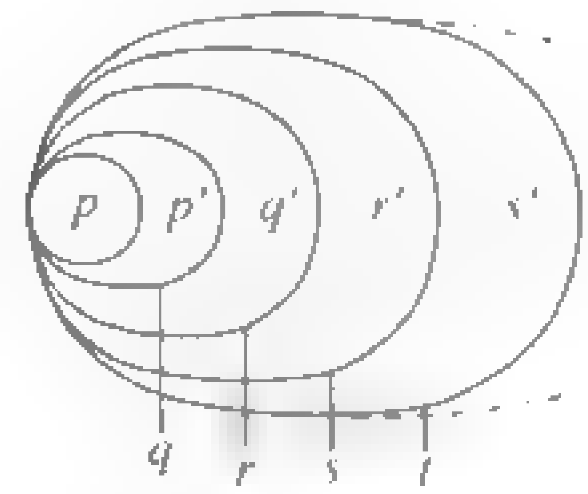


图 46

这个蕴涵群集的形式与类别的加法群集相协调(§12)。例如，p＝“x 是猫科动物”，q＝“x 是食肉的”，由此 p'＝“x 是一个食肉的非猫科动物”，r＝“x 是哺乳动物”，由此 q'＝“x 是一个非食肉的哺乳动物”，s＝“x 是脊椎动物”并 r'＝“x 是非哺乳的脊椎动物”，等等。

由此我们得到以下构成“群集”的组合：

1. 顺运算($\vee p$)在于将一个命题 p 与另一个在系统(278)中与 p 不相交的命题相联结，以得到一个逻辑等价；例如 $p \vee p' = q$。

1 乙. 一个单独命题的断言等同于关于这个命题的一个顺运算：因而(p)等同于($\vee p$)，或更确切地等同于 $p \vee p$(见第 4 条)。

2. 逆运算($\cdot \bar{p}$)的意义在于将命题 p 的否定与系统的另一个命题结合：

$$\bar{p} \cdot \bar{p}' = \bar{q} \quad \text{或} \quad (r \cdot \bar{p} = p' \vee q')\text{等。}$$

2 乙. 对一个单独命题的否定等同于一个逆运算：$\bar{p}$ 等同于($\cdot \bar{p}$)和 $\bar{p} \cdot \bar{p}$。从中可以得出与 $p = p$ 或($p \cdot \bar{\bar{p}}$)＝($p \vee p$)等价的双重否定($\cdot \bar{\bar{p}}$)＝p。

2 丙. 从逻辑等价的一端到另一端的过渡相当于一个逆运算：

如果($p \vee p'$)＝q，那么 $p = q \cdot \bar{p}'$ 且 $p' = q \cdot \bar{p}$；同样有($p \vee p'$)$\cdot \bar{q} = o$。

3. 一般恒等运算($\vee o$)构成了顺运算和逆运算的结果：$p \cdot \bar{p} = o$。

一般恒等运算不改变那些它的构成运算：$p \vee o = p$，$\bar{p} \vee o = \bar{p}$，因为 $p \vee (p \cdot \bar{p}) = p$ 且 $\bar{p} \vee (p \cdot \bar{p}) = \bar{p}$。

4. 特殊恒等是重言式(tautification)和返回吸收：

重言式(Tautification)：($p \vee p = p$)，($\bar{p} \vee \bar{p}$)＝$\bar{p}$，$\bar{p} \cdot \bar{p} = \bar{p}$。

返回吸收：若 $p \supset q$，则($p \vee q$)＝q。

4 乙. 与类的群集(§10)中相同的组合规则的应用对特别恒等的存在是必需的。例如($p \vee p$)＝p 不能通过将($\vee p$)转化成($\cdot \bar{p}$)得到 p＝($p \cdot \bar{p}$)。但是 $p - p$ 可以得出 $o = p \cdot \bar{p}$。

5. 联合受不相交的元素的限制，在所有的重言式和返回吸收之后。

群集的组合如下(见图 46)：

(279)
$$(p \vee p') = q$$
$$[(p \vee p' = q) \vee q'] = [(p \vee p' \vee q') = r]$$
$$[(q \vee q' = r) \vee r'] = [(p \vee p' \vee q' \vee r') = s]$$

$$[(r \vee r' = s) \vee s'] = [(p \vee p' \vee q' \vee r' \vee s') = t]$$

等等。

由此有：

(280) $(p \vee p') = (r \cdot p')$ 或 $(p' \vee q') = (r \cdot \bar{p})$

$(p \vee r') = (s \cdot \bar{p}' \cdot q')$ 或 $(p' \vee r') = (s \cdot p \cdot q')$等。

(281) 如果 $p = q \cdot p'$ 且 $p' = q \cdot \bar{p}$，则$(p \cdot p' = o)$

既然 $p \cdot q = p' \cdot q$ 并且 $p' \cdot q = p \cdot q$，那么由此可以得出不兼容性 $p|p'$：

(282) $(p \vee p') = (p|p')$，$(p \cdot p') \vee (p \cdot p') \vee (p \cdot p') = (p \mathbin{W} p' \mathbin{W} q)$

且

(283) $q = (p \mathbin{W} p')$

(284) 如果$(p \supset q)$ 且 $r = (q \mathbin{W} q')$，那么 $p|q'$，等等。

于是我们得出：1° 那些初级命题(p、q、r 等)或者次级命题(p'、q'、r'等)中的任意一个都蕴涵更高层次的初级命题：$p' \supset t$ 或 $r \supset u$，等等。2° 每个初级命题都作为整体与反地蕴涵那些构成它的命题：$s \supset (p \vee p' \vee r')$。3° 所有命题都能通过互补的否定从更高层次的那些命题中被演绎出来：$(q' = t \cdot s' \cdot r' \cdot q)$。4° 最后，每个命题(初级或次级)都与它的互补命题以及更高级别的次级命题不相融：$r|r'$，$r|s'$，$r|t'$，等等；同样$r'|r$，$r'|s'$，$r'|t'$，等等[参见(281)至(284)]。

这四种附属于合取$(p \cdot q)$(由 $q = p \cdot q \vee p' \cdot q$ 推导出来的)的推理类型足以建立整个类别三段论，正如我们在第八章将要讨论的那样：$(p \supset q)$实际上与全称肯定相符；$(p|q')$与全称否定相符；$(p \cdot q)$与特称肯定相符；$(p \cdot \bar{q})$与特称否定相符。

根据 $p' = \bar{p} \cdot q$ 的定义，我们最终注意到析取$(p \vee p')$总是相当于一个排他析取(与我们在形式Ⅲ中将会使用的，并会成为一个二元辅助定理的 $p \vee p$ 不同)。但是我们不能以运算(W)作为群集的基本运算，因为这样我们会得到$(p \mathbin{W} p = o)$而不是$(p \vee p = p)$，并且，如果$(p \supset q)$，那么$(p \mathbin{W} q = p')$而不是$(p \vee q = q)$。与布尔-伯恩斯坦的群不同，群集实际上需要有一个可以阐明诸如析取联结$(p \vee p' = q)$的嵌套$(p \vee q = q)$和自嵌套$(p \vee p)$的基本运算。

形式Ⅱ——蕴涵群集的第二种形式在正运算上有合取$(\cdot p)$，在逆运算上记为$(\vee p)$。首先请注意，这很容易将形式Ⅱ以形式Ⅰ的方式呈现出来，写作：

$$(p \vee p' = q) = [(p \supset q) \cdot (p' \supset q) = q]$$

但是，如果形式Ⅰ与类别加法群集($A + A' = B$，$B + B' = C$，等等)相符，那么只有形式Ⅱ可以将不对称传递关系的加法群集表达为命题间运算：

$$\rightarrow \cdot \rightarrow = \rightarrow, \quad \rightarrow \cdot \rightarrow = \rightarrow, \text{等等。}$$

例如：$(A < B) \cdot (B < C) = (A < C)$，$(A < C) \cdot (C < D) = (A < D)$，等等。

实际上，如果我们将 p 称为$(A < B)$的肯定命题，p'是$(B < C)$的肯定命题且 q 是$(A < C)$的肯定命题，我们发现，既不能说$(p \supset q)$，也不能说$(p' \supset q)$，就像在

$$p=\text{“}x_1 \in A\text{”} \quad 和 \quad q=\text{“}x_1 \in B\text{”}$$

的情况下一样，但是，为了表达$(A \subset B)$，$(B \subset C)$和$(A \subset C)$之间，也就是 p，p'和 q 之间的关系，要提出$(p \cdot p') \supset q$；因为 p 只有与 p'联合才蕴涵 q。但是，相反地，我们也得到了$(q \supset p \cdot p')$。并从中得出(见图 47)：

(285) $\qquad (p \cdot p')=q, \quad (q \cdot q')=r, \quad (r \cdot r')=s$，等等。

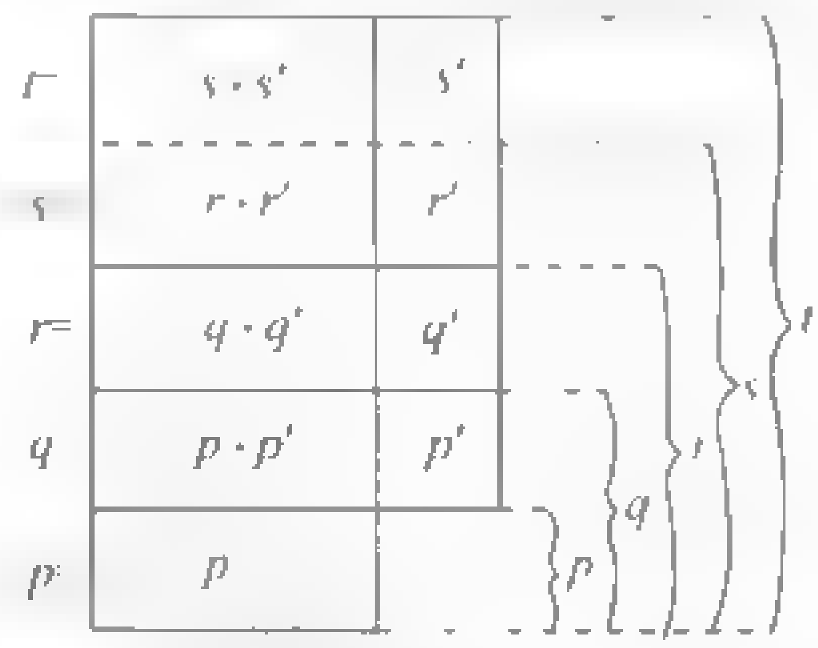


图 47①

至于逆运算，它不能是 $p \quad q \cdot p'$或 $p' \quad q \cdot p$，因为我们不能同时地确定 q 的真和其必要组成部分之一的假(例如确定“C 比 A 和 B 都大”，同时又排除“C 比 B 大”)。相反，根据我们之前分析过的[命题(273)]，$(\cdot)p$ 的反演是$(\vee p)$：

(286) $\qquad p=(q \vee \bar{p}'), \quad p'=(q \vee \bar{p}), \quad \bar{q}=(p \vee p')$，等等。

事实上，$(\bar{p} \vee \bar{p}')=(p \cdot p')$与 q 相等(q 的假等同于确定 q 的真的合取的元素的不相融性)。另一方面，反演的反演，即$\overline{\bar{p} \vee \bar{p}'}=q$ 意味着$(p \cdot p' = q)$。

$(q \vee p)$或$(q \vee p')$都有一个确切的含义，等同于$(p \supset q)$和$(p' \supset q)$[见命题(15)]。这即是说，通过将$(p \vee p'=q)$中的 p'分离来看，我们同时地确定 p'蕴涵$(p \supset q)$以及$(p \supset q)$蕴涵 p'(逻辑等价实际上是 $\subset\!\supset$)；同样地，将 p 分离来看，我们确定 p 蕴涵$(p' \supset q)$以及$(p' \supset q)$蕴涵 p。值得注意的是，这样就找到了这些用蕴涵来表达不对称传递关系的联结群集的逆运算的逻辑等价(286)；我们记得 $A < B$ 这个关系的反演是它的逆命题 $B > A$，不等关系$(A < B)$与它的反演$(B > A)$的逻辑乘积为逻辑等价$(A = A)$。如此，作为可逆性而不是通过互补性的否定群集关系的可逆性在命题间方面与$(\cdot p)$—$(\vee p)$相符，但同样表达了蕴涵之间的互反而不是相关命题的否定。没有什么能比这个形式Ⅱ与一个系列中元素的不对称传递关系的一一对应更能阐明这一点，在这个一一对应中，所有元素根据有序的种差前后相互连接，而与无序的类别的简单嵌套不同。

形式Ⅲ　蕴涵群集的形式Ⅰ将 q 与两个命题联结起来构成了一个两难命题$(p \vee$

① 图 47 的解读如下。每个包含$(p \cdot p')$或$(q \cdot q')$、$(r \cdot r')$等的格子都代表位于它下方和它右边的格子的逻辑乘积。例如，格子$(p \cdot p')$是(p)和(p')的逻辑乘积；格子$(q \cdot q')$是 $q(=p \cdot p')$和(q')的逻辑乘积；格子$(r \cdot r')$是 $r(=q \cdot q')$和 r'的逻辑乘积，等等。

$p')=q$，并推出两个互补缊涵$(p\supset q)$和$(p'\supset q)$。形式Ⅱ通过合取$(p\cdot p')=q$将p和p'更紧密地联结起来，得出$p\supseteq(p'\supset q)$及$p'\supseteq(p\supset q)$。现在看来，q是由p_1和p_2这两个既不能再完全分离也不能完全结合，却是由非排他析取$(p_1\vee p_2)$联结在一起的两个命题组成。这些基础命题因此相互缊涵，表现为$(p_1\supset p_2)$和$(p_2\supset p_1)$的形式[①]。如果我们称命题$(\bar p_1\cdot q)$为p_1'，称命题$(\bar p_2\cdot q)$为p_2'，那么我们有二重缊涵：[②]

(287) $$(p_1\vee p_2)=(p_1'\supset p_2)\cdot(p_2'\supset p_1)\text{（见图 48）}$$

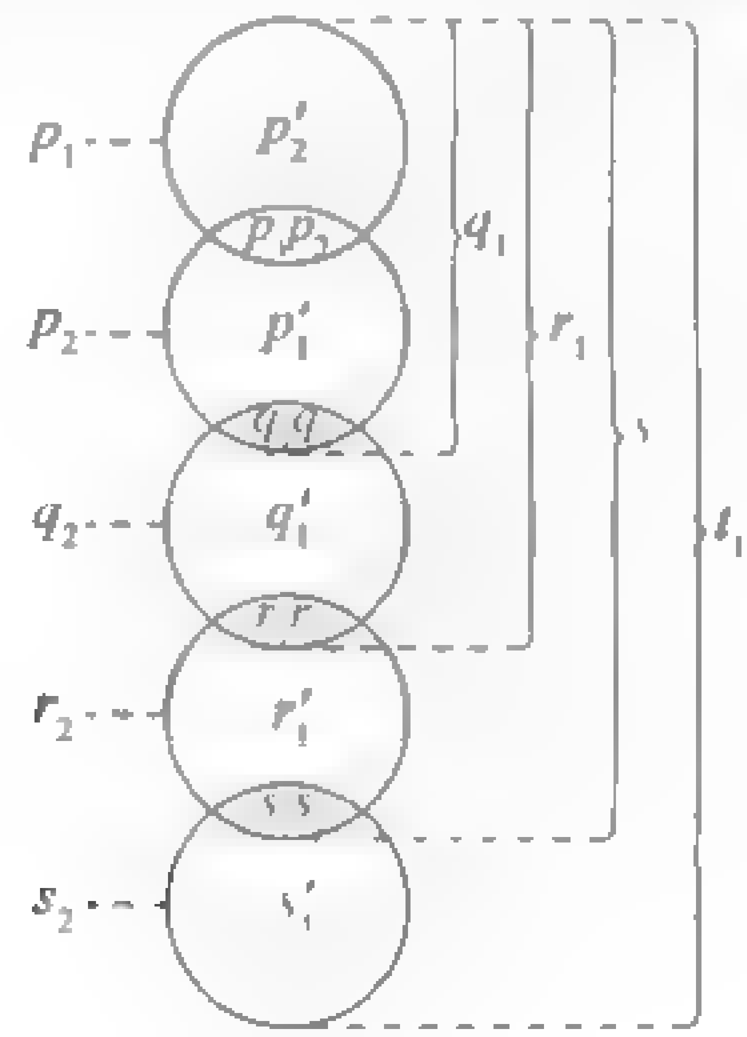


图 48

以及互逆性：

(288) $$(p_1\vee p_2)=(p_1'\mid p_2')$$

因为 $$p_1'=(\bar p_1\cdot q)\quad\text{且}\quad p_2'=(\bar p_2\cdot q)$$

那么，我们将会面对一个具有以下形式的群集（尼克德公理包含的两种可能情况之一）：

(289)
$$(p_1\vee p_2)=q_1$$
$$(q_1\vee q_2)=(p_1\vee p_2\vee q_2)=r_1$$
$$(r_1\vee r_2)=(p_1\vee p_2\vee q_2\vee r_2)=s_1$$
$$(s_1\vee s_2)=(p_1\vee p_2\vee q_2\vee r_2\vee s_2)=t_1$$

等等。

那么有：

(290)
$$q_1=(p_1\cdot p_2)\vee(p_1\cdot p_2')\vee(p_1'\cdot p_2)$$
$$r_1=(q_1\cdot q_2)\vee(q_1\cdot q_2')\vee(q_1'\cdot q_2)$$

---

① 我们记得三元定理$(p\vee q)$与$\bar p\supset q$和$q\supset p$等值（命题 132）。

② 我们承认类的替代。$p_1=A_1$，$p_1'=A_1'$，$p_2=A_2$且$p_2'=A_2'$，则$(A_1+A_1'=A_2+A_2')$，并且$A_1'\subset A_2$且$A_2'\subseteq A_1$。另外还有$A_2'\mid A_1'$。

随后，反演则为：

(291) $$\bar{q}=\bar{p}_1\cdot\bar{p}_2,\quad p_1=q_1\cdot(p_2\cdot p_1^{T}),\quad p_2=q_1\cdot(p_1\cdot p_2^{T})$$

(292) $$q\cdot\bar{q}=o,\quad 即\quad (p_1\vee p_2)\cdot(\bar{p}_1\cdot\bar{p}_2)=o$$

而特殊恒等为：$p_1\vee p_1=p_1$，$p_1\vee q_1=q_1$ 等。

以下为一个具体例子。p_1＝“x 属于以演变关系为同源的类别（我们称之为 P_1）”，并且 p_2＝“x 属于以联结关系为同源的类别（P_2）”。那么 $p_1\vee p_2=q_1$（一个可以同时改变 p_1 和 p_2 或者其中之一的个体）。如果 $P_1+P_2=Q_1$，那么 q_1＝“x 属于类 Q_1”；如果 Q_1 中一个成分被结合，我们就得到一个新的与 Q_1 联结的类别，于是有：q_2＝“$x\in Q_2$”且 $(q_1\vee q_2)=r_1$，等等。

有趣的构成首先是不相容性：

(293) $$(p_1'\,|\,p_2')\cdot(q_1'\,|\,q_2')\supset(p_1'\,|\,q_1')$$

同样，我们还有 $(p_1'\,|\,r_1')$，$(p_1'\,|\,s_1')$，等等。

尤其，当我们将 $q_3=(p_2\vee q_1)$ 的结合称为结合 q_3 时，我们会得到：

(294) $$(p_2\supset q_3)\supset[(p_1\vee p_2)\supset(p_1\vee q_3)]\text{（见图 49）}$$

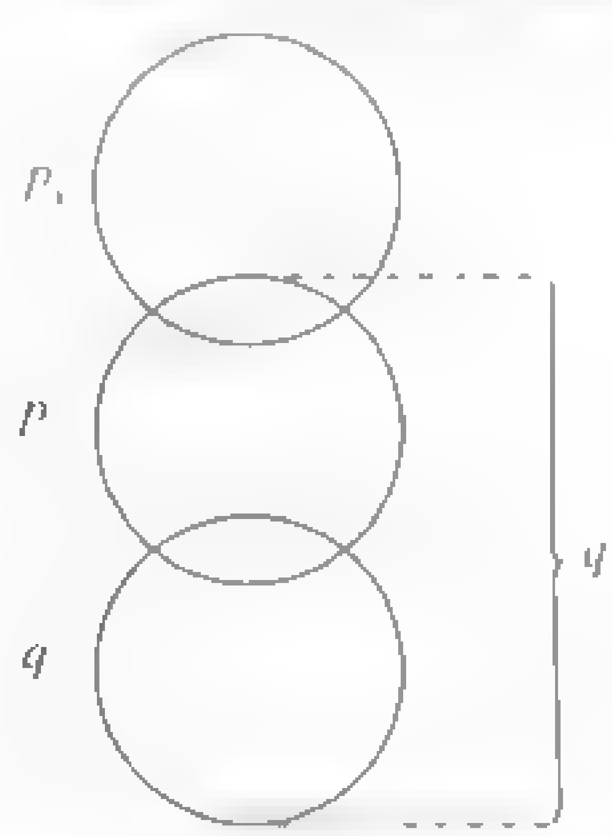


图 49

这个蕴涵(294)构成了罗素和希尔伯特的公理Ⅳ：$(p\supset q)\supset[(r\vee p)\supset(r\vee q)]$。

蕴涵群集的形式Ⅰ和形式Ⅲ就这样简洁地表达了二价逻辑的公理Ⅰ到公理Ⅳ。公理Ⅰ，$(p\vee p)\supset p$ 表达了群集 $(p\vee p)=p$ 的特殊恒等运算；公理Ⅱ，$p\supset(p\vee q)$ 表达了部分在整体中的嵌套 $(p\vee p')=q$，以及返回吸取 $(p\vee q)=q$；公理Ⅲ，$(p\vee q)\supset(q\vee p)$ 表达了群集的形式Ⅰ和形式Ⅲ所依靠的联结（$\vee$）的交换律；而公理Ⅳ表达了组合的可递性[命题(294)]。这就是为什么在群集的形式Ⅰ、形式Ⅲ与尼克德的唯一公理之间存在同一性了，正如我们在§35 中看过的那样。

形式Ⅳ —— 现在我们再引入一个复杂情况。假定基础命题 p_1、p_2 与它们的互补项 p_1' 和 p_2' 共同构成 q，而不再构成一个独立运算（如形式Ⅲ中那样）：

$$[(p_1p_2)\vee(p_1p_2')\vee(p_1'p_2)]=q$$

但是 q 还包含 $(p_1'p_2')$。那么我们会得到一个新的协调性公式，表述了我们称之为“完全

肯定"(并以 * 为标志)的运算：

(295) $$q=(p_1 * p_2)=(p_1 p_2)\vee(p_1 p_2')\vee(p_1' p_2)\vee(p_1' p_2')$$

并且我们可以组成一系列的完全肯定：

$$(p_2 * p_2)=q_1,\quad (q_1 * q_2)=r_1,\quad (r_1 * r_2)=s_1,\text{等等。}$$

这又将我们带回到了建立在二元的、三元的"重言式"基础上的二价逻辑的经典运算中去。①

1. 顺运算：

(296) $$(p*q)=(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$$

$$(p*q)*r=(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})$$
$$\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$$

$$(p*q*r)*s=(p\cdot q\cdot r\cdot s)\vee(p\cdot q\cdot r\cdot \bar{s})\vee(p\cdot q\cdot \bar{r}\cdot s)$$
$$\vee(p\cdot q\cdot \bar{r}\cdot \bar{s})\vee\cdots,\text{等(16 个组合)}$$

$$(p*q*r*s)*t=(p\cdot q\cdot r\cdot s\cdot t)\vee(p\cdot q\cdot r\cdot s\cdot \bar{t})\vee\cdots,\text{等(32 个组合)}$$

等等。

2. 逆运算在此有特别的意义，因为群集的这个形式Ⅳ可以将运算($\vee p$)，($\cdot p$)以及它们的反演($\cdot p$)，($\vee p$)组合成一个单独的整体。这样的话顺运算就意味着新的($\cdot$)和($\vee$)的同时性联结(adjonction)，就像在从($p*q$)到($p*q*r$)的过渡中一样。于是，我们理解到逆运算的构成了。我们写作：

(297) $$(p*q)\,\bar{*}\,r=(p*q)\quad\text{或}\quad(p*q)\,\bar{*}\,q=(p\vee\bar{p})$$

这样我们来分析下直接表达($p*q$)：

$$p*q=\left\{\begin{matrix}p\cdot q\\ p\cdot q\\ \dot{p}\cdot q\\ p\cdot q\end{matrix}\right\}=[(p\cdot(q\vee q)]\vee[\bar{p}\cdot(q\vee\bar{q})]$$

为了将$[p\cdot(q\vee q)]\vee[p\cdot(q\vee q)]$中的$(q\vee q')$进行反演，只需要将$[\cdot(q\vee q)]$反演为$[\vee(\dot{q}\cdot\bar{\bar{q}})]$，也就是说$[\vee(q\cdot q)]=\vee(o)$，由此有：

(298) $$[(p*q)*q]=[(p\vee\bar{p})\vee(o)]=(p\vee\bar{p})$$

这样的一个运算则与类别运算领域中的逻辑分析或抽象($PQ:Q=P$)相一致，意思是："通过 Q 进行的抽象，将乘积 PQ 约简为 P"。用命题间运算表达，逆运算则是将($\cdot$)和($\vee$)同时反演，与单独的($\cdot$)和单独的($\vee$)不一样。

3. 一般恒等运算则是：

(299) $$(*p)\,\bar{*}\,(p)=(\vee)o$$

① 为了不使象征符号更复杂，我们直接继续使用在§31中用过的字符(那么达成共识，p_1'写作$\bar{p}$，p_2写作 q 且 p_2'写作$\bar{q}$，等等)。

4. 特殊恒等运算则是：

(300)　　$(p*p)=p$，　$(p*q)*p=(p*q)$，等等。

5. 联合律(Associativité)：常用性规则。

总之，蕴涵群集的这4个形式都来自于与在(A)中分析过的最初的群集中相同的4个基础运算。事实上，在这4种形式中，只有从这些相同运算$(\vee p)$和$(\cdot p)$的逐步延伸中我们可以得出$(\cdot p)$和$(\vee p)$：形式Ⅱ与形式Ⅰ相关，而后者直接延伸了群集(A)，形式Ⅲ引入了两个互反的蕴涵，而形式Ⅰ只拥有其中一个，形式Ⅳ将在前几个形式中发展出的那些运算联结成一个单一整体。于是，在这4个不同的形式中只存在唯一一个群集，因为反演，互反和相关$(\vee p)$、$(\cdot p)$、$(\cdot p)$和$(\vee p)$相互都是可复合的。

C. 16个二元联结的群集。——现在只需要将形式Ⅰ的运算运用到由形式Ⅳ引起的那些命题合取中去[见命题(295)]，我们将其写为$(p*q=p\cdot q\vee p\cdot q\vee p\cdot q\vee p\cdot q)$，得到同一个普通群集的新形式：这个新形式将这16个我们在第五章中分析过的二元联结相互联系起来。

实际上，鉴于二元互补运算的8种可能的对子，如果我们将它们的项用运算$[\vee(pq)]$或者用运算$[\cdot(pq)]$来联结，当然，这些对子在第一种情况下会形成完全肯定命题$(p*q)$，在第二种情况下给出完全否定命题(o)：

$$
\begin{array}{llll}
(301) & (p\vee q)\vee(p\cdot q)=(p*q) & (p\vee q)\cdot(p\cdot q)=o & \text{既然}\ (p\cdot q)=(p\vee q)\\
 & (p|q)\vee(p\cdot q)=(p*q) & (p|q)\cdot(p\cdot q)=o & \text{既然}\ (p|q)=(\overline{p\cdot q})\\
 & (p\supset q)\vee(p\cdot\bar{q})=(p*q) & (p\supset q)\cdot(p\cdot\bar{q})=o & \text{等等。}\\
 & (p\subset q)\vee(p\cdot q)=(p*q) & (p\subset q)\cdot(p\cdot q)=o & \\
 & (p*q)\vee(o)=(p*q) & (p*q)\cdot(o)=o & \\
 & (p=q)\vee(p\,W\,q)=(p*q) & (p=q)\cdot(p\,W\,q)=o & \\
 & p[q]\vee p[q]=(p*q) & p[q]\cdot\bar{p}[q]=o & \\
 & q[p]\vee q[p]=(p*q) & q[p]\cdot q[p]=o &
\end{array}
$$

这样的逻辑等价的存在使我们可以阐述$(p\ q)$或$(p\supset q)$这些由运算$[\vee(pq)]$和$[\cdot(pq)]$联系起来的二元联结，它们本身又构成一个群集的元素。在这种情况下，那些构成我们之前讨论过的形式中更一般化形式的群集，将不再依靠像p或q这样的命题，而是像$(p\cdot q)$或$(p\cdot\bar{q})$等这样的合取命题组。

我们称(T)为完整系统，$T=(p*q)$从逻辑等价$(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$ T开始。

这样，只需要通过改变这样的合取符号(但不改变命题的符号)来将整个合取由一端转换到另一端，并通过替代运算$[\vee(pq)]$和$[\cdot(pq)]$来产生所有可能的二元运算。这些转换的整体则就成了一个群集。

实际上，如果我们将完整表达式中最后一个合取$(p\cdot q)$从第一个端转换到另一个端，则可以得出：

(302) $$(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)=T\cdot(\overline{\bar{p}\cdot\bar{q}})=\overline{\bar{p}\cdot\bar{q}}$$

即：$(p\vee q)=\overline{\bar{p}\cdot\bar{q}}$[参看命题(124)]。

通过转换倒数第二个合取，我们会得到：

(303) $$(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})=T\cdot(\overline{p\cdot\bar{q}})$$

即 $p\supset q=\overline{p\cdot\bar{q}}$[参看命题(155)]并就这样继续下去。

像这样的合取，它们的不同组合分别地定义了16个二元运算，这些合取则构成了一个明确的群集，并且与形式I的蕴涵群集一样，仅有一个不同之处：元素不再是一个简单的命题($\vee p$)，而是一个合取命题[$\vee(p\cdot q)$]。以下为这个群集的运算：

1. 顺运算是一个合取与另一个合取的析取联结($\vee$)：$(o)\vee(p\cdot q)$，$(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{p})$，等。

2. 逆运算是合取的否定析取与另一个合取否定相联结：$[\cdot(\overline{p\cdot q})]$，$[\cdot(\overline{\bar{p}\cdot\bar{q}})]$，等等。

3. 普通恒等运算[$\vee(o)$]是所有直接运算与其逆运算的乘积：$(p\cdot q)\cdot(\overline{p\cdot q})=o$。普通恒等运算与任意一个运算组合都不会改变这个运算：$(p\cdot q)\vee(o)=(p\cdot q)$。

4. 特殊恒等运算为：

(a) 重言式运算：$(p\cdot q)\vee(p\cdot q)=(p\cdot q)$。

(b) 返回吸收：$(p\cdot q)\vee[(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})]=[(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})]$。

(c) 合并(吸收)：$(p\cdot q)\cdot(p*q)=(p\cdot q)$。

5. 结合性：群集的常用规则。

群集的组成包含了二元联结的所有逻辑，它们都能被转为逻辑等价的合适形式，也就是常用的代数转换方程的形式(参看§10，Ⅲ)：

1° 首先是与我们在§32中将之转化为与类别模式的形式相符合的构成：

(304) $$(p|q)=(p*q)\cdot(\overline{p\cdot q})$$

(305) $$(p\cdot q)=(p*q)\cdot(\overline{p\cdot\bar{q}})\cdot(\overline{\bar{p}\cdot q})\cdot(\overline{\bar{p}\cdot\bar{q}})$$

事实上，不兼容$(p|q)$是减去合取$(p\cdot q)$的完全肯定。另一方面，合取$(p\cdot q)$则是减去相互排除$(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)$与合取否定$(\bar{p}\cdot\bar{q})$的完全肯定。

(306) $$p\supset q=p*q\cdot(p\cdot\bar{q})$$

蕴涵是减去非蕴涵部分$(p\cdot\bar{q})$的一个完全肯定。

2° 随后我们对那些成对联合的联结进行彼此转换：

(307) $$(p\,W\,q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})=(p|q)$$

以及

(308) $$(p|q)\cdot(\overline{\bar{p}\cdot\bar{q}})=(p\,W\,q)$$

实际上，一个相互排除加上一个合取否定得到一个不兼容。相反地，一个不兼容与一个析取$(\overline{\bar{p}\cdot\bar{q}})=(p\vee q)$的共通部分是[$(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)$]，即为一个相互排除$(p\,W\,q)$。

(309) $$(p\supset q)\vee(p\subset q)=(p\,W\,q)$$

事实上，一个相互排除$(p \vee\!\vee q) = (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$是$(p \supset q) - (p \cdot q)$和$(p \supset q) - (p \cdot q)$这两个非蕴涵的结合。

(310)　　$p[q] \vee (p \cdot q) = (p \supset q)$

p 的否定与合取的结合可以得到蕴涵。

(311)　　$(p = q) = (p * q) \cdot (\overline{p \cdot q})(\overline{\bar{p} \cdot q})$

一个逻辑等价是减去两个非蕴涵之后的完全肯定，或者是在重言式与$(p \cdot q) - (p \supset q)$和$(p \cdot q) - (q \supset p)$这两个蕴涵之间存在共通性，即$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$。

(312)　　$p[q] \vee (p \cdot q) = (p | q)$

p 的否定与非蕴涵$p \supset q - (p \cdot q)$的组合得到不兼容性。

(313)　　$(p \vee q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) = (p * q)$

于是有：　　$(p \vee q) = T \cdot (\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}) = \overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}$，等等。

3° 最后，我们根据定理Ⅰ至Ⅴ及它们的推论，实现了一般化运算到它们的反演、互反和相关的过渡。

(a) 反演通过群集的逆运算或者逻辑等价中一端到另一端的转换来实现。

(b) 一个运算到其相关的过渡仍然是群集的一个运算，因为一个运算的相关与这个运算本身在 p 和 q 的肯定或否定的情况下是混同的(定理Ⅱ和Ⅳ)，在其他的四个、两个或零合取表达式中(定理Ⅱ和Ⅴ，推理Ⅰ)与逆运算相混同；对于有三个或一个合取的表达式，通过共通部分$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$或非共通部分$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$的附加$\vee(pq)$或否定$[\cdot(\overline{pq})]$来得出(定理Ⅲ和推论Ⅰ)：

(314)　　$(p \vee q) \cdot (p \cdot \bar{q}) \cdot (\bar{p} \cdot q) = (p \cdot q)$

以及：

(315)　　$(p \cdot q) \vee [(p \cdot q) \vee (p \cdot q)] = (p \vee q)$

(316)　　$(p | q) \cdot (p \cdot \bar{q}) \cdot (\bar{p} \cdot q) = (\bar{p} \cdot \bar{q})$

以及：

(317)　　$(\bar{p} \cdot q) \vee [(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)] = (p | q)$

(318)　　$(p \supset q) \cdot (\overline{p \cdot q}) \cdot (\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}) = (\bar{p} \cdot q)$

以及：

(319)　　$(\bar{p} \cdot q) \vee [(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})] = (p \supset q)$

(320)　　$(q \supset p) \cdot (\overline{p \cdot q}) \cdot (\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}) = (p \cdot \bar{q})$

(320 乙)　　$(p \cdot q) \vee [(p \cdot q) \vee (p \cdot q)] = (q \supset p)$

这样返回到群集运算中的相关运算就能够通过(∨)和(·)的简单替换来对其进行简化，例如$(p \vee q) \to (p \cdot q)$[命题(314)]。那么我们可以将运算$(\cdot p)$和$(\vee p)$归并到这样的系统中[见命题(273)和相应的评论]，在依附于群集基本运算的前提下，这个系统允许析取的规范形式被转换为合取的规范形式，这种合取的规范形式表达了之前讨论过的表达式的相关性。例如：

$$[(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})] \rightarrow \{[(p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee q)] = (p \mathrm{W} q)\}$$

(c) 最后，由于逆命题是相关性的反演，那么我们只需要对一个已知表达式的相关性进行群集的逆运算，即可得到这个表达式的逆命题。那么就可以通过在初始表达中对符号(p)和($\bar{p}$)进行的简单倒置来对这个逆命题进行运算了。

总之，二元转换的整体来自于一般群集的这个形式(C)。对于形式(C)，从以蕴涵群集的形式B给出的表达($p * q$)开始(见B中B)，它的所有构成都作为联结(∨)、分解(·¯)、置换和"替代"出现。

D. 反演、互反和对射的群。 正如我们看过的一样(§31中定理Ⅵ)，附属于恒等转化的反演、互反和对射之间组成了一个"群"而不是"群集"。如果我们用N来表示反演，用R表示互反，用C来表示对射(I代表空集的或"恒等"的转换)，则可以得出：

(321) NN=I， RR=I 和 CC=I

(321乙) N=CR(=RC)， R=NC(=CN)， C=NR(=RN)

(321丙) I=CRN(=RCN=NCR=等等)

既然群集只是依赖于部分在整体中的嵌套，以及依赖于那些互补，那么，一个转换的群如何能从群集中推导出一些基础运算呢？原因就是这个群的转换唯独由不同形式的反演所组成，而这些反演以可逆的、可结合的以及可对易的等方式，实现了彼此的可复合性。反演N实际上是一个否定，也就是对于完全肯定的互补(*)。互反R是这样的命题的一个反演，也就是对于"逻辑等价"(定理Ⅴ)的互补。最后，对射C是互反R的一个简单反演(否定)，即再一次是对于完全肯定的互补(*)。那么在这样一个次级系统中，(N、R、C和I)就不能得出任何"特殊恒等"，因为"群集"的特殊恒等只有在具备相同符号的元素间才可能实现：

$$[(p \vee p) = p], \quad [(p \cdot p) = p], \quad [(p \cdot q) \vee (p \cdot q) = (p \cdot q)], \text{等等。}$$

如此，在单独的转换N、R和C等这些特殊情况下，只存在一种单一的恒等运算(I)；这些转化与"群集"的其他可能的组合都是分离的。只有它们相互之间进行构成，群集的一个基本反演形式则与两个真正意义上的"群"是可复合的。

在这一点上，我们尤其清晰地发现"群集"是介于"群"与"网"之间的一个中间结构：如果我们只限于考察群集的反演算子和恒等之间的构成的话，(会发现)群集是网的一种特殊形式，而群集本身包含了一个转换群。回忆一下，事实上，反演N与类别加法群集(以及命题间运算的一般化群集)的逆运算相对应，互反R与关系加法群集的逆运算(以及逻辑等价或命题间嵌套的项之间的替换)相对应。最后，作为反演和互反的乘积(NR或RN)，相关C则明确了相应网的上界和下界之间关系的特征。

E. 三元联结的群集，以及更多。 之前所有关于二元联结的讨论对于三元联结等类似联结，都是可行的，这类联结从($p * q * r$)或($p * q * r * \ldots$)等类似的运算中诞生，并具有与蕴涵(B)的群集的形式B同样的形式。对于($p * q * r$)，我们由此得到，顺运算：($p \cdot q \cdot r$)∨($p \cdot q \cdot \bar{r}$)等此类和逆运算：($p \cdot q \cdot r$)·($\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}$)=$o$等此类。于是就

可能产生三元联结，要么通过两个或三个二元联结（pq，qr 和 pr）的直接结合，要么通过完全肯定（$p*q*r$）的否定（命题（296））。

以组合（$p|q$）·（$q|r$）为例。我们首先可以将这些二元联结进行组合：

(322)
$$(p|q)=(\bar{p}\cdot\bar{q})\vee(p\cdot\bar{q})\vee(p\cdot q)$$
$$(q|r)=(\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(q\cdot\bar{r})\vee(q\cdot r)$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$(p|q)\cdot(q|r)=(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$$

事实上，（$p\cdot q\cdot r$）、（$p\cdot q\cdot r$）和（$p\cdot q\cdot r$）是被排除在外的，因为在这 6 个组合中，我们既没有联合（$p\cdot q$）也没有联合（$q\cdot r$）。

但是我们同样可以根据第二种方法来构成（$p|q$）·（$q|r$），即通过否认，（$p*q*r$）[参见命题（296）]的 8 个联合中，有三个与（$p|q$）或（$q|r$）相矛盾，也就是，它们包含了（$p\cdot q$）或（$q\cdot r$）：

(323)　$(p|q)\cdot(q|r)=(p*q*r)\cdot\overline{(p\cdot q\cdot r)}\cdot\overline{(p\cdot q\cdot r)}\cdot\overline{(p\cdot q\cdot r)}$

例如：如果 p＝"x 是无脊椎的"，q＝"x 是有脊椎的"且 r＝"x 附着于岩礁上生活的（牡蛎、藻类等等）"，我们可以得到多种联合，诸如：（$p\cdot q\cdot r$）＝既是无脊椎的，也非有脊椎的，也非附着于岩礁生活的；（$p\cdot q\cdot r$）；等等［见命题（322）］，但是不可能有（$p\cdot q\cdot r$）＝同时满足：无脊椎的，有脊椎的，附着于岩礁生活的；不可能有（$p\cdot q\cdot r$）＝非无脊椎的，有脊椎的，附着于岩礁生活的；也不可能有（$p\cdot q\cdot r$）＝同时满足：无脊椎的，有脊椎的，非附着于岩礁生活的。

同样，为了构成表达式（$p\cdot q$）$\supset\bar{r}$，我们唯一需要排除的是（$p\cdot q\cdot r$）这个联合：

(324)　$[(p\cdot q)\supset\bar{r}]=(p*q*r)\cdot\overline{(p\cdot q\cdot r)}$（见图 50）

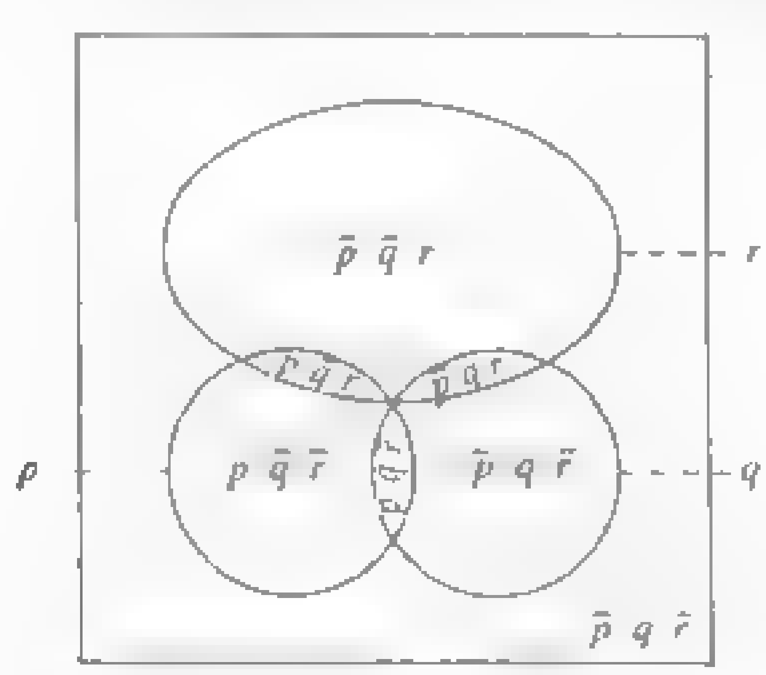


图 50

上面这个表达式等同于下面这个表达式：

(324 乙)　$[(p\cdot q)\supset\bar{r}]=[(p\cdot q)\cdot\bar{r}]\vee[\overline{(p\cdot q)}\cdot r]\vee[\overline{(p\cdot q)}\cdot\bar{r}]$

由（$\overline{p\cdot q}$）＝（$p|q$）＝（$\bar{p}\cdot\bar{q}$）∨（$p\cdot\bar{q}$）∨（$\bar{p}\cdot q$）可以推导出 6 个联合：

$$\bar{p}\cdot\bar{q}\begin{cases}r\\ \bar{r}\end{cases},\qquad p\cdot\bar{q}\begin{cases}r\\ \bar{r}\end{cases}\ 和\ \ \bar{p}\cdot q\begin{cases}r\\ \bar{r}\end{cases}$$

它们通过（$p\cdot q\cdot\bar{r}$）给出了整体：

(324 丙)　$[(p\cdot q)\supset\bar{r}]=(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)$

$$\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$$
$$=[(p*q*r)\cdot(p\cdot q\cdot \bar{r})]$$

例如：p＝"x 是一种水栖动物"，q＝"x 是一种陆栖动物"，并 r＝"x 是一种会飞行的动物"，于是有：$(p\cdot q)$＝"x 是两栖的"，$(p\cdot q)\supset r$＝两栖动物蕴涵不能飞行。那么命题(324 丙)的 7 个组合就得到了确认。

以下是另一个与前例等值的例子：

(325) $$(p\cdot q)|(q\cdot r)=(p*q*r)\cdot(\overline{p\cdot q\cdot r})$$

另外，我们还有：

$$(p\cdot q)\ (p\cdot r)=[(p\cdot q)\cdot(q\cdot r)]\vee[(p\cdot q)\cdot(q\cdot r)]\vee[(p\cdot q)\cdot(q\cdot r)]$$

而

$$(p\cdot q)\cdot(q\cdot r)=(p\ q)\cdot(q\ r)=(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$$
$$\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)$$

[见命题(322)和(323)]。

另外 $(p\cdot q)\cdot(\overline{q\cdot r})=(p\cdot q\cdot \bar{r})$ 且 $(\overline{p\cdot q})\cdot(q\cdot r)=(\bar{p}\cdot q\cdot r)$

由此得出与(324 丙)相同的 7 个组合。

同样的例子：两栖的$(p\cdot q)$与陆栖会飞行$(q\cdot r)$是不能兼容的

于是，由(C)型二元运算演进到诸如(E)型三元运算就容易了，后者通过将$(p*q)$变为$(p*q*r)$等而维持不变。但是随着复杂情况的增加，由于可能组合的数量的增加，多元运算的价值最终会被消解；准确地说，尤其是类型 B 的组合 I—III(它们是多元命题并且构成了类型 E 的一种特殊情况)，它们不具备可传递性，却因此包含了一种增长性的多元路径(multivocite)。这是为了得出结论需要我们加以强调的问题。

§ 40 结论：运算($\vee p$)和($\cdot p$)的群集，演绎的基础

之前开展的关于二价逻辑运算集合的证明，可以通过最初运用在$(p\vee p=T)$和$(p\cdot p=o)$系统中的单一运算($\vee p$)以及它的逆运算($\cdot p$)，由演绎推理来实现。从这个初始系统(它一开始就明确了非矛盾律和排中律等条件)到蕴涵群集$(p\supset q)$，也就是$(p\vee p'=q)$，$(q\vee q'=r)$，等等，再到完全肯定群集，($\vee p$)和($\cdot p$)这一对运算使二元运算的标准析取形式以及三个或 n 个元素的运算重新联合在一起。这样，二价逻辑的所有运算都可以缩减为一个单一并相同的"群集"，这个"群集"的属性由可逆性、邻接组合(互补性)、二分法的嵌套及自嵌套(特殊恒等)所定义的规则来描述。

命题逻辑并不是建立在原子式的简单结合基础之上，而是基于一个整体结构，而罗素-希尔伯特尤其是尼克德的公理已经显示了这个整体结构的存在，并且之前的论证显示这个结构呈现为更简单的形式。这个结构不能简化为一个群因为它不得不基于由部

分到整体的关系之上，由此特殊恒等则必须存在了，这就是我们以运算($\vee$)为基础运算的原因，它与分离了非共通部分的布尔—伯恩斯坦群的运算(W)的差异：蕴涵($p\supset q$)实际上表达了共通部分($p\cdot q$)和非共通部分($\bar{p}\cdot q$)的联结，即($p\cdot q\vee\bar{p}\cdot q$)，那么($p\vee p'$)$=q$。这个结构不再构成一个简单的格，因为它需要可传递性组合的加入。那么它则归结为群集规则，而这与类别的和关系的集合的结构是完全平行的。

这个观点体现了三重性视点：首先，关于蕴涵和逻辑等价(或者叫双向蕴涵)本质意义，是作为多元命题组合的无限可传递性的保障，即演绎推理本身的可能性前提；其次，关于逻辑的不矛盾律；最后，是关于二价命题逻辑与数学推理之间的关系。

1. 之前描述的单一群集的基础运算，也就是($p\vee\bar{p}=T$)或者大致上说($x\vee x'=z$)，实际上从一开始就构成了一个蕴涵规则，并使蕴涵成了群集组合的开端。事实上，($x\vee x'$)$=z$意味着($x\subset z$)，($x'\subset z$)，($x\vee x'$)$\subset z$及$z\subset$($x\vee x'$)……可以说析取联结($x\vee x'$)通过其自身机制产生x和x'在整体z的一个嵌套，各部分与整体之间的关系仅仅是蕴涵而已。所以，正是这样的蕴涵通过其连续的分化构成了完全肯定($p*q$)，而不是人们通常所说的，是完全肯定产生了所有其他运算。

这显然是从集群建构本身得出来的。(C)中的组合，即16种二元联结以及它们之间的转换，那就更不必说E的组合了，也就是三元(或以上)的，实际上仅通过加入数量更多的简单或互补替换而构成组合B(Ⅰ～Ⅳ)，也就是蕴涵的群集。例如，一个这样的组合：

$$[(p\,\mathrm{W}\,q)\vee(p\cdot\bar{q})]=[(p*q)\cdot(\overline{p\cdot q})]=(p|q)$$

仅仅是($p*q$)内部的一个互补性替换，而($p*q$)仅仅只是交互蕴涵($p\vee\bar{p}$)$\supset$($q\vee\bar{q}$)的结果(所有的交互都构成一个双向蕴涵)。

这个蕴涵优先性(或是与互逆命题的逻辑等价的优先性)应归因于它的嵌套的可传递性这一基础特点。实际上，在这16个二元联结中，确切地说只有蕴涵$p\supset q$或$p\subset q$和逻辑等价($p\equiv q$)具备我们所称为的上确界(majorante)可传递性。另一个唯一的可传递的二元联结是合取，($p\cdot q$)$\cdot$($q\cdot r$)$\supset$($p\cdot r$)，但是，因为($p\cdot q$)不排除($p\cdot\bar{q}$)和($\bar{p}\cdot q$)的可能的真，并且($q\cdot r$)不排除($q\cdot\bar{r}$)和($\bar{q}\cdot r$)(例如，析取$p\vee q$蕴涵$p\cdot q\vee p\cdot\bar{q}\vee\bar{p}\cdot q$这三个组合的可能的真)，合取的可传递属性可以被称为下确界(minorante)，它总是体现最有限的交互作用。例如，如果"x既是有脊椎的又是水栖的动物"($p\cdot q$)，并"既是水栖动物又是有肺的软体动物"($q\cdot r$)，那么"同时是有脊椎的也是有肺的软体动物"($p\cdot r$)(见图43)，完整合取($p\cdot q\cdot r$)是p、q和r的下边界(下界中的最大值)。相反，在像$p\supset q$，$q\supset r$，那么$p\supset r$这样的关系中，可传递性是上确界(majorante)的，在于它使p并入了$q\vee p\vee r$这个上边界(见图44)，这个上边界是p、q和r的上界中的最小值。至于逻辑等价，可传递性$p\equiv q$，$q\equiv r$，那么($p\equiv r$)使p、q和r嵌套到($p\equiv q\equiv r$)这个整体中，后者同时是这些命题的上边界和下边界。

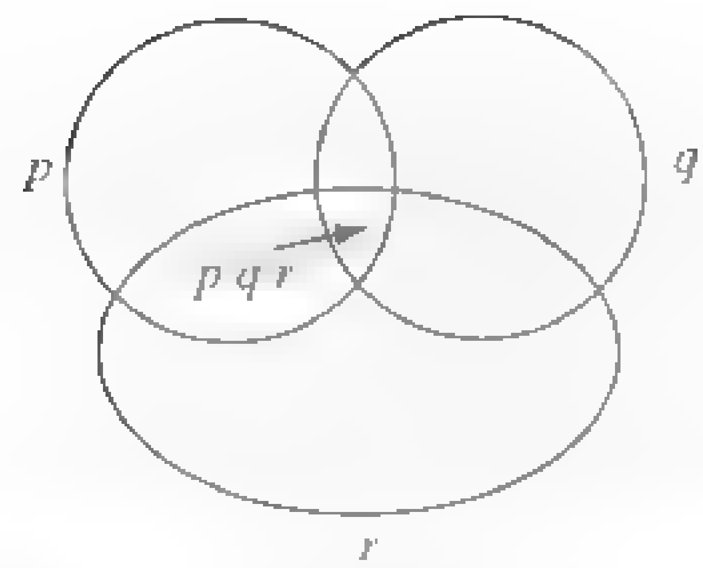


图 51

这就是为什么所有群集都是由一系列逻辑等价，即可传递性组成，并且蕴涵在命题间运算群集中扮演了基础性的角色。另外，所有群集都是“邻接”(contigues)成分之间的一系列二分嵌套（见§10）。严格意义上，蕴涵支撑了这样的条件，因为($p\supset q$)，($q\supset r$)，等等，等价于 $p\vee p'=q$（于是 $p'=p\cdot q$），$q\vee p'=r$（于是 $q'=q\cdot r$），等等。而由于表达式($p\vee p'=q$)将($\vee p$)、($\cdot p$)和($p\supset q$)这些运算都合并成一个单一的整体，它明确地给予了($\vee$)、(W)、($\cdot$)和($*$)这些运算本身并不具备的一个上确界可传递性：实际上，如果($p\supset q$)，则($p\cdot r$)$\supset$($q\cdot r$)；同样有：

$$(p\vee r)\supset(q\vee r)\quad 和\quad (q|r)\supset(r|p)\text{等}^{①}。$$

由此得出，如果一个非传递性组合，例如($p\ q$)·($q\ r$)，它本身对于演绎没有任何意义，因为它仅仅含有一个多值结论（见命题(5.22)的7种可能性），同样的运算群集则通过它们从属于蕴涵来给予它们特别的运算能力。

于是，论断性的演绎推理只能建立在蕴涵和逻辑等价的基础之上，其代价是使非传递性运算从属于具有序列可传递性的嵌套结构。这就是命题间运算群集的形式A和B的功能（包括了I—IV的多样性），与形式C和E相对，这两种形式是它们的简单一般化。但是这些形式B(I—IV)是完整的吗（自然是在可能将它们混淆的情况下）？这很容易确认，因为，如果它们使(∨)、(·)(W—特殊情况的∨)和(*)这些运算从属于蕴涵，这些形式则自然包含了逆运算（例如 $x\ y=z$ 得 $x\vee y=z$ 等等）。对于逆蕴涵来说同样是如此。至于 p 或 q 的肯定和否定，则仅仅只是顺向半蕴涵或逆向半蕴涵。

于是，只有一个同样规模的二价逻辑运算群集，而它的不同形式仅仅只是一些子群集。与其完全适用并且由命题来表达的类别的和关系的群集相比，这个单一群集将加法运算($\vee p$)和乘法运算($\cdot p$)合并为一个整体，因为“p 或 q”($p\vee q=P+Q$)的逆运算是“非 p 且非 q”，也就是说 $p\cdot q=P\times Q$。一般恒等运算则是加法运算的恒等($\vee o$)，而类别的乘法运算的恒等U则与系统中的特殊恒等中最一般的特殊恒等($p\cdot T=p$)相符，而不是与($p\cdot p=o$)相符。

2. 这个群集的第二层意义在于，为逻辑的非矛盾律提供了一些认识，并因此大体上隐约地阐明它运用于算术或数学中的非矛盾律时的困难及原因。

---

① 请见罗素-希尔伯特的公理4及尼克德的唯一公理。

实际上，如果像我们陈述的那样，系统的丰富性得益于蕴涵和逻辑等价的可传递性，那么它的一致性则完全依赖于可传递性（在这三种形式中：互补的、互反的、相关的，后两者可以从由第一个推理得出）。群集的基本逆运算（以其最初的形式 A 存在）是 $p \cdot \bar{p} = o$，也就是非矛盾律原则的前提条件。另一方面，我们称之为“完全否定”，通常用矛盾符号（o）来表示的运算，构成了相同表达式（$p \cdot \bar{p} = o$），运用于一些命题对中，例如：

$$[(p \cdot q) \cdot (\overline{p \cdot q})] = o \quad 或 \quad [(p \cdot q) \cdot (p | q)] = o$$

我们由此可以看出，从群集这个角度，非矛盾律与可逆性混同在一起：所有彼此相反的运算的有效结果都是矛盾的，且所有严格可逆的组合都是没有矛盾的。

但是，如果这样的话，很显然会存在非矛盾律的多样性形式或者使多样性水平，它们与已知的不同可逆结构相协调。根据一种与（$p \cdot \bar{p} = o$）不同的方法，一个既是无脊椎的又是哺乳的动物这一说法可能是矛盾的。事实上，命题间群集的可逆性完全取决于互补性：因为 $p \vee \bar{p} = T$ 且 $p = T \cdot p$ 或 $p = T \cdot \bar{\bar{p}}$，于是有（$p \cdot \bar{p} = o$）；同样，在类别逻辑方面，我们有（$A + A' = B$）、（$A = B - A'$）及（$A' = B - A$），由此 $A \times A' = o$。“x 既是哺乳动物又是无脊椎动物”之所以有矛盾，是因为我们将动物（B）分成了脊椎动物（A）和无脊椎动物（$A' = BA$），且哺乳动物包含于 A 而不是 A' 这一事实，有关命题则可以得出（$A \times A$）$= o$ 或 $p \cdot p \neq o$。但是，通过互补性建立在这个可传递性之上的非矛盾律是否足以证明数学中的非矛盾律，即，这种一致性是否能建立在结构化水平更高的可逆性形式的基础上？这将是我们在第八章将要探寻的问题。

3. 这引导我们去关注二价命题间运算群集所具备的第二个有趣的方面。事实上，这样一个完整群集的存在以最坚决的方式（因为其完整性的特点）论证了命题二价逻辑绝对地建立在部分与整体的关系（简单蕴涵或交互）和补充性之上，也就是，建立在部分之间以整体为中间媒介的关系之上。从适用于群集的可逆性（就完全肯定而言的互补性）到互反（就逻辑等价而言的互补性：见§31 的定理Ⅴ）再到相关性本身（逆命题的反演：见§31 的定理Ⅰ）都来自于这个单一的原理。这就是二价逻辑与数学逻辑之间的一个大的区别，它使得部分之间可以构成关系（得益于某些一一对应的对应以及递推的一般原理等等），并且能够在群越来越复杂的方向下跨越群集的限制。

但是，将适用于部分与整体的逻辑关系的“群集”与数学“群”进行对照，难道这没有矛盾吗，由于（$p \mathbin{W} q$）和（$p = q$）运算本身已经构成了群，那么另一方面反演、互反和相关系统是否又构成了一个真正的“转换群”呢？答案是否定的，因为运算（W）只有在从包含或蕴涵中将非共通部分分离出去，以实现它们之间的直接联结，只有在这样的情况下才得以构成群：这也就意味着排他析取群（W）只有在排除了对于逻辑嵌套而言的必然性，并区分群集和群的特殊恒等（$p \vee p$），在这样的条件下才能够从简单合取群（$\vee$）中得出。至于逻辑等价，每个逻辑等价 $p = q$ 都同时是群 $p = q = r = \cdots$ 的顺运算、逆运算和恒等运算，那么当然，如果我们有两个不同的逻辑等价，例如 $p = q$ 和 $s = t$，但（$p \neq$

)，这两个逻辑等价中的一个到另一个的转换就不再是逻辑等价了；于是，逻辑等价群则只依赖于最普遍的关系，依赖于逻辑的以及数学的共同关系，而不依赖于能建立逻辑等价并区分它们的不同变化的运算。所以，如果逻辑等价群要表达群集的更一般性的方面，需要在这样的条件下，即，排除了非共通部分（W），而对于排他群来说则是排除了共通部分。这样，对立存在于逻辑运算的整体群集之中，它将系统的共通部分和非共通部分结合成一个单一整体，因为建立在这样的嵌套基础之上，并且从群集中抽象了两种关系来将之另外考虑的群（W）和（ ）基础之上，在这样的情况下：仅仅只有其不可分的联结（p W q x）通过将析取部分（p W q）从属于将它们联结起来的整体（ x），以此来给予其一个逻辑意义。

至于反演、互反、相关和恒等这四个运算的群，像我们讨论过的那样，这些运算都是基于其自身的考量，独立于群集的其他运算。于是，作为转换的来源的基础性命题间运算（∨，⊃，*，等等），仅仅只在它们的不同反演关系（N，R 和 C）中，而不是联结关系中才会被考虑。

一开始就已知的（参见§39，A，7 乙），包含了四元运算（∨p），（·p），（∨p）和（·p）的，这样的一个群的构成，实际上，并没有包括其中的最后一个运算的运用，就像运用群集联合的运算一样，这个群的构成只是在于将这些运算进行相互转换。它构成的不是群集的起源而是群集的调节器，它将群集的多种因素通过与这样的嵌套对立：通过分离嵌套的互补（反演和互反），显示了部分与整体以及部分之间的关系的边界。在群集内部，我们可分辨这个基础性机构上的两个不同的方面，尽管是不可分离的：可逆性方面，作为群的起源，嵌套方面，作为"特殊恒等"的起源。但是，如果在纯逻辑层面上存在一些群的话，它们也不足以完整地来包含它（纯逻辑），因为它们从属于部分与整体关系以及互补的关系。这就是二价逻辑的自主性和极限性所同时解释的。其自主性是因为群集本身作为部分与整体关系的理论已经足够。而其极限性是因为建立在更复杂的群的结构之上的数学推论，尤其是通过递推法的著名推论都不能简化为这些关系，并且它们以部分之间的关系的理论为前提。

第七章　命题间运算的量化和经典三段论

命题的逻辑运算是否缢涵数量，还是与量化特征完全无关？为了弄清楚这个问题，我们有必要回顾一下类别逻辑与三段论所主张的东西之间的联系，因为三段论构成了类别理论和命题理论之间的一个中间理论。

§41　二价逻辑和类别逻辑

在第五章和第六章中，我们已经了解了命题逻辑关于命题间运算逻辑的完全自主性。然而，命题间逻辑容许建立在“弱结构化”（尤其请参看§28和§32）类别系统之上的运算构成的模式的实在性，并且命题间运算的“群集”遵从与类别群集和关系群集相同的规则。如何弄清这一状况呢？

命题间运算由可逆性活动构成，即类别化和序列化（seriation）的可逆性，体现为主项在谓项上产生的作用，以及表现在有限定内容的命题中；就是这种“内容”（见§2），或是命题的内部结构，被象征为类别运算和关系运算的形式。相反，命题间运算则抽离了这些运算中的这些方面，只关注它们的真或假的关联，而不太关注它们的特别的结构，也就是相关命题的内容。其结果是形成了一些新的运算，它们以这类命题作为一般性的谓项，而不再以它们所涉及的特别的内容为谓项；但是，由于命题已经（在它们的内容中）构成了一些运算，命题间运算则是在其他运算之上进行的运算，也就是二次幂运算。那么问题则在于弄清楚，这些二次幂运算如何能够通过承认实现由类别运算（或一次幂运算）构成的形式模型就能达到完全的自律。

这个问题的答案在于，命题间运算构成元素的形式化，这些元素是从命题内部的运算抽象得来的；由于比命题间运算更“抽象”，命题间运算从中得出一个更一般性更深刻的机制；而由于它又是命题间运算的“抽象”，命题间运算可能实现一种与它们的具体的初始域同构的模型。

例如，为了建构动物学的分类学大系，首先最重要的是承认一个命题集合为真（与真的认识论起源无关），这个命题集合确立了被分类的项之间的相似性、差异性和同形性（从解剖学意义上）等。整个逻辑运算的第一步则是在主项的活动中寻找比较或同化的根源，并将谓项整合或序列化。通过这个心理学意义上的活动，逻辑学仅仅只留下了

象征性的表达，以一个命题的形式或者词语的(verbal)综合判断：命题则就是处在类别和关系之前的，就像综合判断是处于它所产生的概念之前的一样，或者像一般化活动是处于其结果之前一样。但是命题只有首先根据其内容才被考虑：如此，它们显示个项、它们之间的关系、类别的特点等。设种 A 包含在属 B 中，以及另一个种 A'，则有 $A\cup A'=B$ 且 $A\cdot B=A$；每个这些类别或运算都来自于命题为了明确地表达这样的一个分类而发展起来的建立关系的活动。现在只要将这些同样的命题简单设为真的判断，将它们的否定设为假的判断，那么一个新的运算系统则成为可能。这个运算系统将不再与个别项、关系或类别有关了；相关的命题也一样，或者所有我们可能陈述的与 $A+A'=B$ 有关的命题，或构成这些命题的个体，将它们关联起来的关系或者将它们与相邻类别联系起来的关系等等，(都被忽略)而只有这些命题的真或假被考虑。换言之，在通过于项而进行的比较和分类的活动集合中，只摹取最一般性的特征；即这样一种活动，通过它每一个命题所表达的具体运算都可以被陈述为或真或假。就是这个由于项的先前行为开始的抽象作为一个新运算的起始点：一定数量的命题(如 p、q 等)，在某些论据中被视为真 x(p = "x 是一条鱼"，q = "x 是脊椎动物"等)，在另一些论据中被视为假(p、q、等)，那么只要将它们进行两两组合：($p\cdot q$)、($p\cdot q$)、($p\cdot q$)、($p\cdot q$)或者三个、四个命题的组合，而不用考虑其他，只考虑它们的可能联合的真或假，我们就明白了这个新的运算如何在命题的内容关联方面是独立的(autonome)，而同时在类别本身的运算中是同构的。

命题间运算的独立性首先来自于它更高水平的抽象性。设想($p\cdot q$)这样一组由两个为真的命题构成的组合：这个组合本身可以为真也可以为假：如果 p = "x 是一条鱼"且 q = "x 是脊椎动物"，那么($p\cdot q$)为真，但是如果 p = "x 是昆虫"，组合($p\cdot q$)则为假，于是有($p\cdot \bar{q}$)。命题逻辑将命题进行排列不仅仅是为了建立一些具体的、为真的、对应于likely类别的，以及肯定的组合，而是去辨别这些组合的真假，以便从中得出抽象的结构。命题间逻辑的目标是抽象出类别和关系的建构中必然的先决命题的纯粹形式(真或假的联合)，这种运算相对命题内的运算来说是独立的，其第一个理由是：命题间运算并不依存于命题内运算，因为它从一开始就只是陈述了后者的假设而已。第二个理由是：这个更高水平的抽象达成了一个更大的一般性：($p\cdot q$)、($p\cdot q$)等组合本身可以为真或假，不再是某个类别或特别关系的表达，而是表达了一个可以适用于所有类别或关系系统的一般性纲要。命题演算就构成了一个建立在较低幂级的运算之上的二次幂的运算集合，由此也得出了第三个关于独立性的理由。

但是为什么它在类别运算中是同构的呢，又为什么，比如运算($A\cup A'=B$)与逻辑等价($p\vee p'\leftrightarrow q$)对应，而 $p\supset q$ 是从包含($A\subset B$)中提取出来的呢？这是因为，如果所有命题内部运算系统都有一个由脱离其内容而被简单赋值为(1)和(0)的组合的命题组成的系统相对应的话，反之我们也可以使肯定或否定命题 p 或 q 的假设性论题的类别与所有命题间运算系统来对应，那么，根据这两个系统的互反性，这些假设性论题的类

别（类别 P 或 Q）则会具备一个与具体客体类别的结构同构的一个形式化结构。初始命题是建立在具体客观的类别之上的。但这不再必须是客体的类别：将是类别的类别，也就是，作为可能判断的格式（schemes）或者作为虚拟（virtuels）论题的类别。自然，类别 P 和 Q 可能与真实的客体类别相一致。但是，它们可能只包含可能的个体性联结。从具体类别的方面来看，很明显一个由"一些人"（A）组成的类别是包含在由"所有人"（B）这个类别之中的：由此（$A \subset B$）。反之，从命题间的角度，我们会说，命题 p = "所有人最终都会死亡"蕴涵命题 q = "一些人最终是会死亡的"：即有（$p \supset q$）而不是其逆运算（$q \supset p$）。如果使类别 P（= 所有确认 p 的情况的整体）对应命题 p，使 Q（= 所有确认 q 的情况的整体）对应 q，则可得到（$P \subset Q$），那么我们看到（$P \subset Q$）绝不与（$A \subset B$）相一致。事实上，类别 P 只包含一个具体的论题的整体，即"所有人"（= 属于 B 的个体）；相反，类别 Q 包含可能论题的一个多样性：如果"所有人"是 1，"一些人"则可以是 $n=1$ 和 2；1 和 3；1 和 4；2 和 4；3 和 4；1，2 和 3；1，2 和 4；等。总之，如果 P 对应于个体的一个完整的类别（B），那么类别 Q 对应于所有在 B 内部可能构成的子类别（A 和 A'，A 和 A' 等），那么（$P \subset Q$）与（$p \supset q$）对应，但是 P 和 Q 的外延与类别 A 和 B 的外延并不重合。

总之，在完全区分命题逻辑和命题内运算逻辑以及完全合并命题逻辑与类别逻辑的两种极端情况之间，有必要分别坚持命题逻辑的独立性以及与它所承认的作为可能模式的类别运算之间的一致性。于是，可以得出，在特别情况下，二价命题逻辑包含经典的三段论法，后者则依赖于从类别逻辑中借用的一个量化格式。

§ 42 经典的三段论法和命题的量化

如果二值逻辑的特性就在于只包含部分与整体的关系以及互补的关系，就像它的群集结构，以及它所对应的类别运算模式所阐述的那样，它必须蕴涵"所有"和"一些"的概念，即它所关注的命题如 p，q 等，仍然只是任意的并且没有以经典逻辑之前的方式被明确地量化。然而关于这个问题的讨论不仅仅只涉及命题间运算群集的纯粹"强度"（见定义 14）的陈述条目。它提出了一个更一般性的问题（这一章我们唯一关心的问题）：量化特征是否仅仅与所涉及命题的"内容"有关，还是必然地介入命题间运算的"形式"当中？

我们知道，实际上亚里士多德的逻辑构成了类别逻辑和命题逻辑之间的一个折中，确切地是因为它在命题组合的形式化中引入了对于"所有"和"一些"的讨论。相反，当代逻辑将命题演算与所有量化特征分离开来为了将量化保留在类别运算中，但是罗素以两者之间的关联的名义引入了命题函数（见 § 4）的概念：命题函数实际上可以"永远"或"有时"或"永不"为真，这就将与类别相关的量和与命题相关的真或假关联起来了。

而且，在一般意义上，人们是用命题函数语言与罗素一起将亚里士多德的逻辑翻译成了数理逻辑语言[1]。希尔伯特在谓项演算和命题演算之间使用了一种中介公式。

相反，我们接下来想要证明，命题间运算在一开始就蕴涵一种取决于其形式而不是命题的内容的量。这个形式上的或仅与形式有关的量足以构成一个一般性格式，而经典三段论可以被视为这个格式的一种特殊情况。我们绝不会打算彻底改变三段论逻辑理论，它已经很完备了[2]，我们只是想要将三段论法视为一个特殊的模式，我们可以为它匹配命题逻辑的量化结构(同样地，我们在§11中刚看过为什么这个逻辑与类别运算结构相对应)。

事实上，我们知道，经典逻辑分为4种命题：

A. 全称肯定：所有的 X 都是 Y。

I. 特称肯定：一些 X 是 Y。

E. 全称否定：所有的 X 都不是 Y。

O. 特称否定：一些 X 不是 Y。[3]

当一个命题被主项的所有外延所肯定或否定的时候，它就是全称的，不管主项是单称的，特称的还是一般性的：所有 X 都是 Y 可以被表示为："个体 x_1 是 Y"(总是为真的命题)，或"所有 x 都是 Y"(同上)。全称肯定所表达的是标志 Y 的外延与主项的外延相等或更大并且主项完全包含在它的外延之中。

当我们设定条件判断($p \supset q$)为真时，存在一个同样类型的关系。实际上，无论命题 p 和 q 属于什么性质(也就是 p 或 q 属于 A、I、E 或 O 这几个类别)，蕴涵($p \supset q$)都排除了($p \cdot q$)的可能性；于是，在($p \supset q$)关系中，"每一次"有 p 为真，都有 q 为真，如此，一个包含于其所有外延中的论题的类别与命题 p 匹配，否则我们就不能排除($p \cdot q$)。另一方面，q 与一个外延相等或更高的类别相对应，因为我们总是能有($p \cdot q$)可能会有($p \cdot q$)。例如，如果 p＝"一些动物从欧洲迁移到了澳大利亚"，并且 q＝"澳大利亚的动物并不完全是本地的"，p 是一个特称肯定命题(I)而 q 是一个全称否定命题(E)；不过($p \supset q$)这个关系与蕴涵 $P \supset Q$ 相符，意思为所有断定 p 的论题都断定 q(反之不成立)并且这个包含通过一个全称肯定来表达。即使在 p 表示"所有人最终都是要死亡的"，q 表示"一些人最终是要死亡的"情况下，断定 Q 的论题类别的外延要高于断定 P 的论题类别，因为整体的外延要低于其部分的外延(见§11中关于这个例子的讨论)。总之，蕴涵通过其"形式"包含了量化，因为在 p 为真的时候，q"总是"为真，而当 q 为真的时候，p"有时"为真。这个程度的量化与 $P \supset Q$ 的量化相对应，后者表达了一种全称肯定。

---

① 见夏·瑟路斯，1945，第五章。

② 见博琴斯基(Bochenski)，1948。

③ 这些命题在谓项逻辑中写作：A. $(\forall x)(ax \supset bx)$；I. $(\exists x)(ax \cdot bx)$；E. $(\forall x)(ax \supset \overline{bx})$；O. $(\exists x)(ax \cdot \overline{bx})$

以类似的方法，我们得出条件判断$(p\supset q)$"总是"为真，即$\vdash p\supset q$。在这些条件下，与蕴涵$p\to\bar{q}$对应的有$P\subseteq Q$，即全称否定(E)。

至于另外两个，特称肯定(I)和特称否定(O)，只需要记住它们是以以下方式与两个全称相关联的：

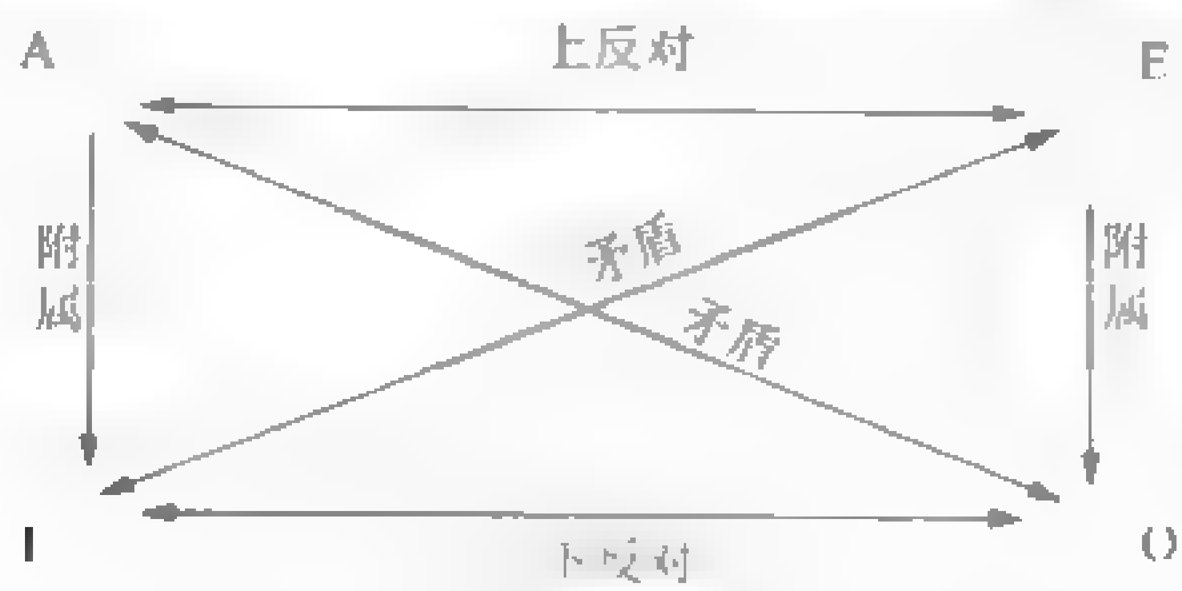
否—A 等同于 O

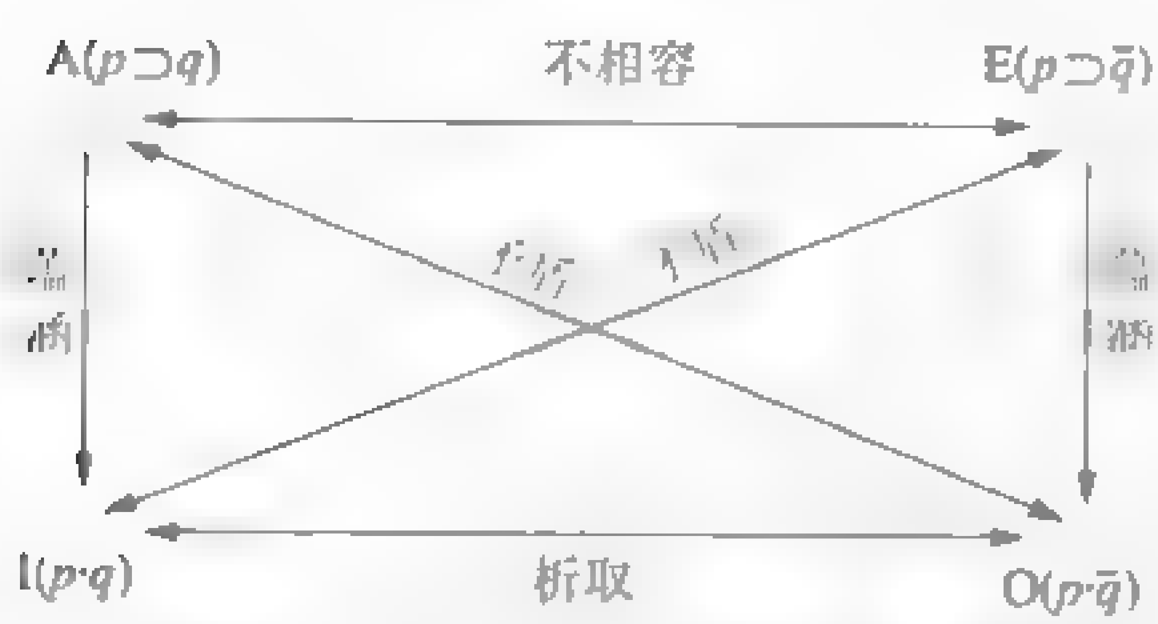
否—E 等同于 I

之后，既然

$$\overline{p\supset q}\leftrightarrow p\cdot q \quad 且 \quad \overline{p\supset \bar{q}}\leftrightarrow p\cdot q,$$

我们可以在$\vdash p\cdot q$的情况下使p与q之间的关系与(O)相对应，在$\vdash p\cdot q$的情况下使p与q之间的关系与(I)相对应。如此便可得到一个一般性格式，它与著名的对立方阵表构成的特别模式相对应，由经典逻辑(逻辑方阵)建立(见如下表格)





四类关系(矛盾、推出、上反对、下反对)在这个角度上与以下的命题间运算等值：

1. 矛盾命题与完全否定(矛盾)相对应：

$$(\overline{p\supset q})\leftrightarrow(p\cdot\bar{q}) \quad 及 \quad (\overline{p\supset \bar{q}})\leftrightarrow(p\cdot q)$$

2. 附属是"所有"对于"一些"的蕴涵：

$$(p\supset q)\to(p\cdot q) \quad 且 \quad (p\supset\bar{q})\to(p\cdot\bar{q})$$

事实上"所有P都是Q"蕴涵着"一些P是Q"，但是反之不成立，因为合取$(p\cdot q)$自身不排除$(p\cdot q)$；同样，$(p\supset q)$蕴涵$(p\cdot q)$，但是$(p\cdot q)$不蕴涵$(p\supset q)$，因为$(p\cdot q)$与$(p\cdot q)$是兼容的。

3. 否命题 A 和 E 与$(p\supset q)$和$(p\supset q)$之间存在的不相容关系相对应。

4. 最后，下反对关系与析取$(p\vee q)$关系对应："两个下反对可以都为真，因为由群

的几个主项所肯定的可以被另外几个所否定；但是它们不会都为假，因为对一个论断的否定与其矛盾断言相对应，而更不必说后者包含了下反对"[1]。这是与析取$(p\vee q)\leftrightarrow(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$相同的定义，将$p$和$q$两个命题联系起来，其中一个可为假，而不能两个同时为假。

由此得出：在形式本身的意义上，某些纯粹的命题演算中的内在运算包含了强度的量化特征，从经典逻辑在其发展之初提出了"一些"和"所有"概念来看是这样的。然而这一点也没什么好让人惊讶的，因为蕴涵、不兼容和析取对应于类别嵌套的确定形式（见§11）。我们也没很好地理解希尔伯特的看法，据此看法，由命题和谓项组成的一个独立运算可以了解这样的量化特征的嵌套。希尔伯特[2]说，如果X被赋值"是漂亮的"，那么X要么指"所有客体都是不漂亮的"，要么指"所有客体都是漂亮的这一命题为假"。但是，如果不在一个孤立的谓项的命题上去推理，而是考虑蕴涵$(p\supset q)$（="如果x是一个物体，那么它是漂亮的"），则很容易区分$(p\supset q)$也就是$(p\cdot q)$（="物体蕴涵漂亮，此命题为假"，="有一些物体是不漂亮的，此为真"）和$(p\mid q)$即$(p\supset q)$（="所有物体都是不漂亮的"）。命题间运算的相同形式，即$(p\cdot q)$和$(p\supset q)$，其中前者包含的否定比后者的更弱。于是，这些形式包含了一个潜在的量化特征，并与谓项的运算无关。另外，这似乎就是希尔伯特自己所承认的东西。

§43 三段论的格和式

三段论通过两个被当作为前提的命题而得出一个结论，换句话说就是将三个命题联系起来。然而，三个命题之间的可能联结的数量有256种，而传统的三段论法只分辨出了19种合理的式，它们根据所有结论的组合方式（=4种命题中二二组合形成的64种可能排列中得到许可的式）将A、E、I、O四种命题组合成一个多样化的顺序（=四种格），在这19种传统的式之上，其中14种归功于亚里士多德，5种归功于盖仑(Galen)[3]，还存在5种由泰奥夫拉斯特(Theophraste)在亚里士多德的第一种格基础上增加的结论性的式（亚里士多德自己也略有提及），这5种式通常用间接式的名字来指示[巴拉利普顿(Baralipton)，西兰特斯(Celantes)，达比提士(Dabitis)[4]，法培斯谋(Fapesmo)，费里松(Frisesomorum)]。

那么，我们很有必要探寻一下传统三段论法的这种限制是因为什么。是否是由于

---

① 见戈布洛，1918，第212页。

② 希尔伯特-阿克曼，1949，第40页。

③ 博琴斯基，1947。

④ 此处原文是"Babitis"，疑为笔误，根据上下文改为"Dabitis"。——译者注

三段论法坚持“所有”与“一些”的关系，而命题的二值逻辑却忽视这个约束性的条件？如果这个一般性的观点得到证实，则会否定我们之前的假设。或者相反，是否仅仅由于缺少抽象的符号体系和充分性的计算技术来应对逆运算及互反运算，进而没有一个足够一般化的可逆性，于是三段论法就局限于对于某些关系的分析而不能去发现它们的结合所能构成的整体关系。在这种情况下，同样的量化（强度的）结构就成了三段论法和命题综合演算的共同的结构。

让我们从这个角度来验证三段论的格和式，并探寻与那些三联命题组对应的联结，前提是我们承认在§42中提到的一一对应。第一个格，也称为完美格，就是对中项在大前提中作为主项，并且在小前提中作为谓项。由此得出4个结论性的形式AAA、EAE、AII和EIO。如此我们用 r 来标记包含大项的命题（例如“x 是会死亡的”），用 q 来标记包含中项的命题（例如“x 是人”），用 p 来标记包含小项的命题（例如“x 是苏格拉底”），则：

(326)②

$$\text{AAA} \rightarrow [(q \supset r) \cdot (p \supset q)] \supset (p \supset r)$$

$$\text{EAE} \rightarrow [(q | r) \cdot (p \supset q)] \supset (p | r)$$

$$\text{AII} \rightarrow [(q \supset r) \cdot (p \cdot q)] \supset (p \cdot r)$$

$$\text{EIO} \rightarrow [(q | r) \cdot (p \cdot q)] \supset (p \cdot \bar{r})$$

第二个格为中项在两个前提中都作为谓项，由此得出 rq、pq 和 pr 的格式：

(327)

$$\text{EAE} \rightarrow [(r | q) \cdot (p \supset q)] \supset (p | r)$$

$$\text{AEE} \rightarrow [(r \supset q) \cdot (p | q)] \supset (p | r)$$

$$\text{EIO} \rightarrow [(r | q) \cdot (p \cdot q)] \supset (p \cdot \bar{r})$$

$$\text{AOO} \rightarrow [(r \supset q) \cdot (p \cdot \bar{q})] \supset (p \cdot \bar{r})$$

第三个格是中项作为两个前提的主项，即 qr、qp 和 pr：

(328)

$$\text{AAI} \rightarrow [(q \supset r) \cdot (q \supset p)] \supset (p \cdot r) \text{③}$$

$$\text{IAI} \rightarrow [(q \cdot r) \cdot (q \supset p)] \supset (p \cdot r)$$

$$\text{AII} \rightarrow [(q \supset r) \cdot (q \cdot p)] \supset (p \cdot r)$$

$$\text{EAO} \rightarrow [(q | r) \cdot (q \supset p)] \supset (p \cdot \bar{r})$$

$$\text{OAO} \rightarrow [(q \cdot \bar{r}) \cdot (q \supset p)] \supset (p \cdot r)$$

$$\text{EIO} \rightarrow [(q | r) \cdot (q \cdot p)] \supset (p \cdot \bar{r})$$

最后，在第四个格中，中项在大前提中为谓项，在小前提中为主项：

---

① 我们称大项为结论的谓项，小项为结论的主项，中项为在大前提中与大项结合、小前提中与小项结合的项。

② 我们系统地观察到命题之间的关系，这是借助于（产生这些关系的）运算子而做到的。

③ 这个被传统逻辑学家舍弃的式，为了保证说服力，要求一个增补的存在前提。

(329)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{AAI} \rightarrow [(r \supset q) \cdot (q \supset p)] \supset (p \cdot r) \\
&\mathrm{AEE} \rightarrow [(r \supset q) \cdot (q | p)] \supset (p | r) \\
&\mathrm{IAI} \rightarrow [(r \cdot q) \cdot (q \supset p)] \supset (p \cdot r) \\
&\mathrm{EAO} \rightarrow [(r | q) \cdot (q \supset p)] \supset (p \cdot \bar{r}) \\
&\mathrm{EIO} \rightarrow [(r | q) \cdot (q \cdot p)] \supset (p \cdot \bar{r})
\end{aligned}
$$

如此可见19个经典的属于这四个可能的格的式都与确定的命题间的组合相对应，尽管这些组合中的某一些相互并不是直接相联的。那么首先我们需要明确这个对应关系的意义。三段论是一个推理模式，它需要相互关联的命题的"内容"(定义4)，也就是以外延来被看待的类别的嵌套(或以内涵来看待谓项)以及通过唯一的联项"是"(从属或包含)来表达嵌套。像这样，三段论就得到了双重限定。

首先，这基于被选定联项的属性，因为所有关系的逻辑都削弱了这个联项的独特性。

另外，因为三段论是一个命题内的推理，那些三段论联结的表达套入的命题的类是一些具体的类：它们的元素是主项并且或多或少直接构成一个"超逻辑内容"(定义6)。相反，那些我们刚刚建立与三段论关系的对应的命题在它们的内容上，也就是说在它们的命题内部结构上是绝对任意的，而且它们的联结只根据它们的命题间的形式会有真或假的变化。对于每一个这样的基础命题，我们都能使一个肯定它的论据类别与之相对应，但是 P、Q 和 R 这些类别不再是主项的类别：从它们的普遍联系上来看，这是等值的类别的类别。假设 $[(q \supset r) \cdot (p \supset q)] \supset (p \supset r)$ 与巴巴拉(Barbara)的三段论相对应，那很简单，也就是说通过类别的包含中项 $Q \subset R$ 和 $P \subset Q$，且类别中的所有元素都是证实 $(q \supset r) \cdot (p \supset q)$ 的论题，那么我们可以构成一个巴巴拉的三段论；而且，相应地，我们可以将所有巴巴拉的三段论写为以下形式：$[(q \supset r) \cdot (p \supset q)] \supset (p \supset r)$。

但这绝不是说相关的命题间的联系自身构成了一个AAA三段论。实际上，根据 p、q 和 r 建构的类别 P、Q 和 R，并不局限于嵌套所有类别——我们可以把这些类别约束为巴巴拉三段论中项(这已经给予类别 P、Q 和 R 一些可考察的外延)，而是嵌套所有具有论证结构：$(q \supset r) \cdot (p \supset q) \supset (p \supset r)$ 的类别，而无论命题 p、q 和 r 的内容和量化特征是什么。列举的命题间运算与这19个三段论的经典式之间的对应关系则很直接了；更有意思的是去验证这个对应关系存在，并且形式为 $(p \supset q)$、$(p | q)$、$(p \cdot q)$ 和 $(p \cdot q)$ 的命题就是以弄清那些显示三段论特有量化(A、E、I、O)的组合。

但是，这样的话，如果这样一种对应关系存在，那么为什么经典逻辑坚持这19个式(或24个，算上简接式的话)而不是去关注通过3个命题可构成的256个组合呢？是因为只有 $(p \supset q)$、$(p | q)$、$(p \cdot q)$ 和 $(p \cdot q)$ 这些关系承认"所有"和"一些"吗？或者是由于缺少一个足够的演绎的技术？从这个角度出发，我们来研究一下从一个式到另一个式的传递或转换。

依据三段论，经典逻辑分辨出"直接推理"，其中一些是由§42中的"对立"表格提

供的，另一些由不同形式的"转换"所提供。这些转换，从它们的角度，构成了蕴涵和互反。因此两个全称否定之间的简单转换 $(p|q)\leftrightarrow(q|p)$——"没有任何人是不死的——任何不死的都不是人"——意味着双重蕴涵 $(p\supset\bar{q})$ 和 $(q\supset\bar{p})$，而两个特称肯定之间的简单转换 $(p\cdot q)\leftrightarrow(q\cdot p)$——"一些脊椎动物是卵生的——一些卵生动物是脊椎动物"——是合取或蕴涵之间的逻辑等价：$(p\supset\bar{\bar{q}})\leftrightarrow(q\supset\bar{\bar{p}})$。有限定的转换——"所有鸟类都是脊椎动物——一些脊椎动物是鸟类"——使得 $(p\supset q)$ 被分离为 $(p\cdot q)$ 和 $(\bar{p}\cdot q)$，而换质位法(contraposition) $(p\supset q)\leftrightarrow(\bar{p}|q)$——"非脊椎动物不包括鸟类"——引向从蕴涵到不相容的另外一种表达或者同样地会从 $(p\supset q)$ 中得出 $(\bar{q}\supset\bar{p})$，因为有 $(p\supset q)\leftrightarrow(\bar{q}\supset\bar{p})\leftrightarrow(p|\bar{q})$。

因此，转换可以从一个格过渡到另一个格，或者在同一个格中从一个式过渡到另一个式。对于亚里士多德而言，这些转换在于将格Ⅱ和格Ⅲ简化为唯一一个被认为是完美的第一个格——它们之后成了一个真正的组合分析，莱布尼茨在将它概括为用结论的否定(它的矛盾命题)来代替大前提的演绎类型时，对这个组合很感兴趣。

然而，对于这些转换的检验，三段论法通过这些转换很好地表现出其运算本质，表明三段论法与命题的二值逻辑之间的区别与量化所扮演的角色无关，有只是与一般化的缺乏有关，尤其对于乘法运算和可逆性运算来说更是如此。

实际上，只有所谓的"直接"转换构成了前提对调(以字母 m 为符号的运算，例如，在卡雷美土(Camenes)和卡梅史特雷土(Camestres)中，可约为西拉伦特(Celarent)，构成了简单的命题换位(以 s 为象征的，在卡梅史特雷土中，第一个 s 指出了小项的一个简单对话的可能性，第二个 s 指出了结论的对话可能性)或有条件的命题换位(以 p 为符号，例如在达拉普(Darapti)中，可约为达里伊(Darii)。以下是从卡梅史特雷土(AEE，格Ⅱ)到西拉伦特(EAE，格Ⅰ)的简化：

(330) $\{[(r\supset q)\cdot(p|q)]\supset(p|r)\}\rightarrow\{[(q|p)\cdot(r\supset q)]\supset(r|p)\}$

以及从达拉普(AAI，格Ⅲ)到达里伊(AII，格Ⅰ)的简化：

(331) $\{[(q\supset r)\cdot(q\supset p)]\supset(p\cdot r)\}\rightarrow\{[(q\supset r)\cdot(p\cdot q)]\supset(p\cdot r)\}$

对于"间接"转换，它们是关于格Ⅱ和格Ⅲ的式 AOO 和 OAO 的转换，而格Ⅱ和格Ⅲ只有通过换质位法才能简化为第一个格。以下是 Baroco 对于格Ⅱ的一个转换为费里欧(Ferio)(格Ⅰ)的例子(字母 c 是代表间接简化的符号)：

(332) $\{[(r\supset q)\cdot(p\cdot\bar{q})]\supset(p\cdot\bar{r})\}\rightarrow\{[(\bar{q}\supset\bar{r})\cdot(p\cdot\bar{q})]\supset(p\cdot\bar{r})\}$

我们发现其中什么都没有改变，除了 $(r\supset q)$ 被变为其对应的 $(\bar{q}\supset\bar{r})$。

另外，还存在一些任意转换，它们构成将格Ⅱ和格Ⅲ向格Ⅰ的简化，而是不加区别地将一个格转换成另一个。通过莱布尼茨的工作，它们从最初的三段论中的命题开始，把其中一个命题转换成否定命题，从而形成了一种新的三段论的结构。① 这只涉及

① 夏·瑟路斯，1945，第 168 页。

$(p \supset q) \leftrightarrow (p \cdot q)$或$(p \cdot q) \leftrightarrow (p \supset q)$这类的运算。例如，通过用结论的否定来代替三段论的小项，我们得到格Ⅱ的一个三段论，它的结论是最初三段论的小项的否定：

$$(333) \qquad \{[(q \supset r) \cdot (p \supset q)] \supset (p \supset r)\} \rightarrow \{[(q \supset r) \cdot (p \cdot \bar{r})] \supset (p \cdot q)\}$$

总之，传统的简化方法包括转换、换质位法和对蕴涵关系、不相容关系以及合取关系的否定。这些转换的太过受限的特点首先表现为有关可逆性（反演和互反）的系统理论的缺失。在戈布洛[1]的著述中，我们发现一种说法，倾向从他称为反演和互反性的角度对前面的不同关系进行概括，这足以揭露反演运算视角下日常逻辑的混乱，因为缺乏恰当的符号体系。戈布洛说："一个命题的转换，就是形成另一个在项上有第一个命题的否定项的命题。如果两个全称命题同时都是逆命题，那么它们的互反为真。实际上，否定'非p排除q'，与'p引出q'相逆，它转变为'q引出p'，与'p引起q'互反。"（如此等等）。由此戈布洛总结："一个全称肯定命题的逆命题和互反命题都是单一判断"[2]。这不是要在术语学上挑戈布洛的刺，因为知道今天每个作者依然被迫建立自己的术语，问题所在只是我们要弄清，在以下三个援引的命题的情况下：$(p\;q)$、$(p \supset q)$和$(q \supset p)$，戈布洛所称的"否定"、"逆命题"、"互反"和"转换"等是否包括可逆转换的集合。然而很显然，从一开始，戈布洛就如此确定$(p \supset q)$的逆运算和互反运算，是因为$(p\;q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \leftrightarrow (q \supset p)$，以至于最后他发现它们是等价的时候并没有感到惊讶。事实上，我们可以对$(p \supset q)$实施可逆性转换包含：a）换质位法，使$(p \supset q)$和$(q \supset p) \leftrightarrow (p \supset q)$一样；b）互反，将$(p \supset q)$转换成$(p \supset q) \leftrightarrow (q \supset p)$ $(p\;q)$；c）逆反或否定：$(p \supset q) \leftrightarrow (p \cdot q)$；d）对射，在$(p \supset q)$中提出$(p \cdot q)$（见§31，定理Ⅲ）。说到戈布洛所坚持的$(p \supset q)$或$(p\;q)$以及$(q \supset p)$的一致性，它不仅仅是对一般概念为真，而是对所有组合都如此。例如$(p \cdot q) \leftrightarrow (p \supset q)$和$(p \cdot q) \leftrightarrow (p \supset q)$。这就是戈布洛的分析中由于缺乏对于运算可逆性的精确的理论而忽视了的"转换群"（见定理Ⅶ，§11）。

三段论法的第二个漏洞在于缺乏诸如$(p \vee q)$（见图21）或$(p * q)$（见图19）类型的乘法运算（类别的相交和乘法）。例如，戈布洛断言"没有析取判断"[3]，以由另外两个命题构成的命题自身不能构成单元为理由！然而，我们看到（并且是参考戈布洛自己的评论）就算是"下反对的"对立都暗含析取$(p \vee q)$。然而传统逻辑没能塑造结合$(p \vee q)$，尤其是：

$$(p * q) \leftrightarrow (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

而它们却也包含对于"所有"和"一些"的区别。正是这个基础性的缺陷揭示了三段论法在面对所谓"非常规"式时的尴尬，并且阻碍了三段论法构成一个真正一般性的命题逻辑。

① 戈布洛，1918，第240—244页。

② 戈布洛，1918，第241页。

③ 戈布洛，1918，第241页（第150节）。也参见第113节。

总之，就像其显现的那样，传统逻辑与二值命题逻辑之间的区别与量化特征的角色无关：两者都受限于强度的量化，强度的量化特征体现在对"所有"、"一些"和"完全否定"等概念的考量中，这些概念关于具体类别的包含，而这些包含却被放在经典逻辑，以及在命题演算中对部分与整体的嵌套和互补的排他性运用中来考量。它们的主要区别在于三段论法的形式化的不完全特征，三段论法由于缺少一个触及命题间纯粹运算的一般性的抽象算法，则既没能对可逆性问题也没能对乘法性嵌套问题有决定性影响。如此，"全或无的规则"(dictum de omni et nullo)，也可以被表述为一种必然的隶属性，即对每一个部分的肯定或否定必然导致对整体的肯定或否定，这显示了经典逻辑与二值命题逻辑的共同限制，总之，若考虑到数学逻辑，也就是强度逻辑的限制。

第八章　数学推理

将属于数学推理的"方法"与学院派逻辑对立起来，这是笛卡尔提出的一个一直位于整个现代逻辑中心的问题。这两个趋势，周期性地胶着，常常体现出做出终极性解答的努力。受三段论法与数学推理不相容的观念的启发，两个趋势中的第一个朝着使逻辑更灵活和宽松的方向努力。相反地，第二个趋势则努力地通过从数学到逻辑的这样一个相反方向来缩小距离，它认为每一个新构成的逻辑结构应该能够承受整个数学大厦的重量。然而，这个交替的结果是，同样的问题，首先只存在于三段论与完全归纳法之间的争论中，今天又完全重新出现了，而且以有关逻辑和数学演绎的关系问题的一种更一般性的形式存在。

§44　问题的提出

就像没有人否认三段论法在数学中的有效性、但是认为三段论不足以从整体上(以及在其最特别的方面)说明数学推理一样，同样地，每个人都承认在数学演绎中逻辑的运用；问题的提出只是为了弄清楚这个运用由什么构成以及这个逻辑是否足以支撑数学家们的演绎结构的整体。

实际上，有两种方式可以考虑逻辑格式在形式化的内容上的运用，形式化表征了最"一般性"的部分：要么这个逻辑格式只是简单地表达所有结构的共性，不管结构是不是数学的，但是它不会产生特殊性差异，仅局限于最弱而不是最大理解意义上的最"一般性"的特征；要么，相反地，逻辑格式通往数学意义上项的一般性，也就是特别结构的源头，这是相比通过过程性差异从这个源头中得到的详细说明来说尽管更一般化却更加丰富的源头。①

然而我们注意到，适宜于逻辑的结构都排他地由部分在整体的嵌套(加法的或乘法的)和不同形式的相补组成。比如经典三段论法(抛开其局限性)，逻辑则就是整体和部分的逻辑，即一个只考虑"所有"、"一些"、"一个"、"没有任何"等质性关系的纯粹"强度

① 这两种一般化特征与"弱性地结构化"的类和"结构化"的类的区分相联系，我们在定义11和13中引入了这种区分。

的"逻辑(定义14)。那么问题看起来就很简单了:数学推理是不是也可以简化成部分与整体的单纯关系,或者它的某些基本元素已经超出这个狭窄的范围?

很明显,强度关系,也就是部分与整体的关系以及相补关系在数学领域又重新出现。但是,除了这样的强度关系,部分与部分的外延关系也立即介入进来,它们以部分与整体的关系为前提但是又不止于此(见第四章)。于是,我们很容易理解,逻辑被运用于所有数学领域就像被运用于任何认知一样:仅仅只要了解这个部分在整体中嵌套的逻辑格式是在最丰富的普遍意义上还是最贫乏的一般意义上构成了涉多种形式的最一般性特征的:这就又回到了是否所有介入数学推理的联结都是可以简化为部分与整体的强度关系以及是否都是来自它们自己本身(最丰富的一般性)的问题上来了,或者相反地,强度关系是否只是表达了所有联结的外部范围而不能从这个范围中演绎出这些联结的细节(最贫乏的一般性)。

然而,这个看起来如此简单的问题,事实上惊人地复杂,因为,在定义了的和难以下定义的概念之间,以及论证了的和无法论证的命题的形式规则之下,存在着真实的运算规则,这个规则产生运算并且我们永远无法完全地将之阐明。这样,一般性结构与特殊结构之间的前后关系就尤其地比看起来的要不容易建立,因为问题的解决方法不仅要在被选为公理的概念和命题的分析中寻找,也要在下层运算机制的分析中寻找。

那么在逻辑与数学推理的关系上,我们又面临着之前在整数与逻辑类别的关系方面遇到过的类似的困难了;另外,说真的,这些同样的问题,只是从命题间的层面上更具普遍性了。同样地,两个集合之间的等价关系能够构成以整数为基础的幂集,同样,子集之间的联结构成了关于若干一般性转换的考量,这些一般性转换体现在代数、拓扑学以及分析中;于是,这个过程似乎可以同时既从类别——集合的逻辑层面——到基数进行,又从命题逻辑——它们的运算与部分集合的基础转换同构——到整体的数学演绎上进行。逻辑作为集合理论的最一般性主题,而集合理论自身构成了数学的最具一般性主题,于是,逻辑就这样成为数学的直接源头。许多逻辑学家正是用这种方式进行推理的,他们希望通过这种简化来更好地服务于数学家的事业。但是这个见解提出了一个基础的问题。

存在这样一种可能的做法,从一开始,在所构想的集合的网中,建立最抽象的形式(尤其承认其无限性),之后将类别以及强度逻辑的关系视为这个一般性结构的一个特殊情况(和一个很小的有限的部分)。但是这些我们可以随意从中抽取出数或者逻辑类别的一般性集合是不是包含比这个一般结构更复杂或者更简单的一个运算结构呢?整个问题就在于此,并且正是关于这个问题,才使得两种类型的一般性问题必然被明确地提出来。如果这些一般性集合不让除了那些可以从中证明逻辑类别的任何其他运算介入,那么它们就可以合理地被认为是一般化的;强度逻辑则会被视为有关集合理论的一个一般性运用,而最大的一般性,是所有分化了的结构的共同来源,甚至因此成为最丰富的一般性。但是,如果相反地,最初提出的那个抽象结构包含一些超越集合中联结范

围的运算，又该根据什么原则来将之视为更一般性的呢？

然而，我们(在§23—25中)已经看过，如果一个集合一开始就以一种只能用于强度类别的方式被定义①，那么它自然就具备了一些超越类别的特点：那么，只需要它的元素与另一个集合的元素一一对应便可停止构成强度类别并形成一个"幂"。于是，它会比类别更一般性还是更少一般性呢？如果我们忽略实施这样一个"任意"对应(见§25)所需要引入的运算，那么我们可以回答说它比类别更一般化，因为所有有限的类别都是一个可计数的集合并且可以与其他类别相对应。但是从运算本身的角度来说，由于只包含部分与整体的关系，强度类更加普遍，然而可计数集合和"任意"双单义对应则加上了部分与部分或元素与元素的关系，也因此超越了包含和互补的简单关系。

现在数学推理的问题也以同样的方式提出了：作为特殊情况，数学推理包含命题逻辑，这一点是明显的。但是这些数学推理是否是可简化的(就像我们试图缩减类别的数量一样)，或者它们是否在基础命题间运算中加入一些完全不包含在内的结合呢(正如"任意的"一一对应必须被加入到类别之中，在需要将类别转化为数的时候)？关于强度和范围之间关系的相同问题则必然地在此呈现；尤其是关于"一般性"的概念的相同问题(是较弱的还是较丰富的一般性)。

§45 三段论和递归推理

这些问题首先出现在经典的三段论领域，很快它就被发现不足以支撑数学演绎。如果在讨论的第一阶段中提供的解决方案如今被超越了，那么就只有把它们放在问题的现状下进行对比才有意义。

19世纪的英国逻辑学将三段论置于了一个双重批判境地。一方面是外部批判，即将三段论的贫乏与实验归纳的丰产相对立：三段论只是在实验归纳已经提供了前提之后才介入，并且局限于将它的内容以完全重言式的方式展开。另一方面是内部批判，即分化联项的各种可能的不同形式，并建立一个更适应数学推理内容的类别或关系的代数。然而，当这种逻辑的扩展在怀特海和罗素的值得纪念的著作中达到了对逻辑的数学演绎，尤其是达到了一个对于推理公理的简单解释(已经由皮亚诺指出)的时候，对于经典的三段论的同样的双重批判掀起了另外一股思想热潮，尤以法国的为代表，它尝试着用数学推理来与泛化并一般化了的三段论相对立。

实验归纳是丰产的，庞加莱说，因为它构成了一个程序性的一般化，但是在它运用于简单的关于概率判断时则缺乏足够的精确性。相反地，三段论是严谨的，但是完全是重言式的。而数学推理就既是一个程序性的一般化，也是一个完全严格的演绎推理：它

① 请参见§23。

在一般化的特征上与归纳相似，却又不缺乏精确性，同时在内在必然性特征上它与三段论相似，却又避免三段论的贫乏性。然而，三段论法的重言式特点来自于它的整个结构都可以被还原为部分与整体的嵌套：因此庞加莱说，三段论局限正是在于，如果我们了解两个士兵是同一个团的，那么（我们就知道）他们是同一个旅的！相反，数学推论建立在更为多样化的结构之上，例如整数的系列。那么正如庞加莱所说，是在“纯数字直觉”之中，也就是在可靠性中，我们能够无限地在前例中加入一个单元，并且需要寻找数学推理的独创性：其范例则是递归推理，根据此推理，如果一个集合的性质对于 n 为真，那么对于 $n=0$ 以及 $n+1$ 都为真，并且这一点对于所有数字都有效。这样的一个推理是不能还原为三段论的，因为它包含着相互关联的命题的无限性；另一方面，它又像归纳一样丰产，因为它通过一般化而拥有整体的部分，但是由于它依赖于“完整枚举”，所以它又是严谨的。

§ 46　递推法的推理和命题间的集群

罗素（的理论）的本质是，将数字设想为可还原的类别，他也努力地将推理通过递归还原为简单的序列性类别的嵌套：“如果我们定义‘有四条腿的动物为四足动物’，那么所有有四条腿的动物都为四足动物；数学归纳法中的数字就正好是同样的情况。①”确实在这里加入了顺序，但是也是从这一点来看，在数学归纳法中仅有纯逻辑的真值：“这个真值在由此及彼的推理中，也存在从第一个到最后一个的推理中。②”例如，如果阿特柔斯（Atree）的儿子是一个阿提德（Atride）③，并且他的孙子也是，那么根据这个由前例到下例的转换的特点，他所有的后代都会是阿提德。那么根据罗素的说法，我们不能在递归推理中找到任何秘密，而庞加莱无意中将来自于最基础的逻辑关系中的东西复杂化了。

我们目前实际上处于二价逻辑和数学演绎之间关系问题的中心。庞加莱说，递归推理在纯粹的逻辑上是非还原性的，因为它以过渡为前提，也不是从整体到部分的嵌套或相反嵌套为前提的，而是从1（或0）和 $n \to (n+1)$ 到所有的过渡。绝不，罗素回答说，“数字归纳是一个定义而不是一个原则”④：“一个集合的属性是遗传性的，当一个自然数的序列中，如果一个属性一直属于数字 n，也属于 n 的下一个数 $n+1$。同样，一个类是遗传性的，当如果 n 是这个类别的一个元素，且同时 $n+1$ 也是[……]。一个属性是

① 罗素，1928，第41页。

② 罗素，1928，第42页。

③ 法文中的复数名词“les Atrides”是希腊神话人物阿特柔斯后代的统称，中文一般称“阿特柔斯家族”，对单数名词“Atride”无统一译名，故此处音译为“阿提德”。——译者注

④ 罗素，1928，第41页。

可归纳的，也就是属于0的属性是遗传性的。同样，一个类别是可归纳的，当包含0的类别是遗传性的"[1]。很明显，基于这样的类别推理可以使从0和$n \to (n+1)$到数的整体甚至到无限的过渡成为可能。

这仅仅是定义，罗素说。但是，在通过从n到$n+1$的过渡来定义一个归纳的类别的时候，还要引入一些相对那些可以证明所有四足动物都有四条腿以及阿特柔斯的所有后代都是阿提德的运算来说的新的运算。在四足动物这个例子中，我们建立了一个从部分到整体的简单嵌套；在阿提德的例子中，我们仅仅以血统的传递性非对称关系为基础；但是，在从n到$n+1$这个例子中，我们将类别的运算合并为一个在机制上与这些运算在单独情形下不同的运算综合：我们将两个强度"群集"综合为一个数值"群"，通过引入所有能区别此群和群集的特点，建立一个强度类别或者分类只在于根据定性的逻辑等价（器官的相似，即使它有四条腿）的共同关系或一系列正负不对称关系（儿子、孙子等）来将个体进行合并；从而建立了可归纳的数字序列，这种归纳性产生于单位序数的加法，单位序数也就是既是可替代的（类别）又是可系列化的（非对称关系）的项。在其所含内容的意义上，递归推理区别于非数字性的命题内运算，正如数字区别于类别和强度关系一样（见§25—26）。

但是这里唯一让我们感兴趣的它的形式又是什么样的呢？罗素的解决方案可以这样表达：一旦内容被合适的定义所确定，那么递归推理的命题间形式则会与从二价逻辑中介入的任意推理的形式相同。然而，同构性正是在此得到了完全体现。一直以来，在证实相关命题的论题所建构的命题间结构与"类别的类"结构之间，我们都能看到这种同构性。尤其，我们注意到，蕴涵$(p \to q)$与包含$(P \subset Q)$相对应，而且如果$(p \supset q)$被分解为$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$，即$(P \subset Q)$，则意味着，如果$(P \subset Q)$那么有相补$(P \cup P' = Q)$，此处$P' = Q - P$。如果递归推理，并不像在推理$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \to (p \supset r)$中那样，以纯粹强度类别的类别$(P \cup P' = Q)$和$(Q \cup Q' = R)$为内容，而是包含了具有可归纳数字构成的数字特征的类别的类别，那么，形式又会如何呢？

要理解这一点，我们只需将递归推理的结构与一个蕴涵群集$(p \to q)$，$(q \to r)$，$(r \to s)$等相比较即可。我们还记得，实际上（§30，B中）所有蕴涵都能写为以下形式$(p \vee p' \leftrightarrow q)$，$(q \vee q' \leftrightarrow r)$，$(r \vee r' \leftrightarrow s)$，…或者$(p \cdot q' \leftrightarrow q, q \cdot q' \leftrightarrow r, r \cdot r' = s, \cdots)$，我们将之改写为以更弱的形式：

(334) $(p \vee p') \to q$，$(q \vee q') \to r$，$(r \vee r') \to s$，等等。

由此得出：

(335) $p \to q$，$p \to r$，$p \to s$，等等。

但是也得出p不能蕴涵p'或q'等。

另外，我们将递归推理写为如下形式：

① 罗素，1928，第35页。

(336) $$[(p_0)\cdot(p_n \supset p_{n+1})] \rightarrow p_i$$

也就是说，如果 p 对 1 有效的且"p 对 n 有效"能导出"p 对 $n+1$ 有效"，那么 p 对于 1 到无穷大都有效。

现在我们称 p 为"p 对 $n-1$ 有效"命题；q 为"p 对 $n-2$ 有效"命题；r 为"p 对 $n-3$ 有效"命题；等等，那么我们可以得出 $(p\supset q)$，$(p\supset r)$，等等；$(q\supset r)$，$(q\supset s)$，等等。

然而，如果我们有 $(p\supset q)$，$(q\supset r)$，等等，那么我们必然也会有 $(p'\supset q)$，$(q'\supset r)$，等等，因为：

$$(p\supset q)\leftrightarrow[(p\vee p')\supset q],\quad (q\supset r)\leftrightarrow[(q\vee q')\supset r]，等等。$$

事实上，如果"p 对 $n-2$ 有效"(也就是 q)蕴涵"p 对 $n-3$ 有效"(即 r)，那么我们必须考虑命题 q' 与 $3-2=1$ 相对应，意思为"p 对 1 有效"并且同样蕴涵 r。同理，如果 r ($=p$ 对 3 有效)蕴涵 s ($=p$ 对 4 有效)，我们会有命题 r' ($=p$ 对于 $4-3=1$ 有效)，它也蕴涵 s，等等。总之，在递归推理以及所有的蕴涵序列中，我们可以用(331)的形式来记录：$(p\vee p')\rightarrow q$，$(q\vee q')\rightarrow r$，$(r\vee r')\rightarrow s$，等等，而且我们会得出：$p'=p$ 对 1 有效，$q'=p$ 对 1 有效，$r'=p$ 对 1 有效，等等。

但是，我们看到了其中的本质区别，它与演绎结构相对应，并且与常规"群集"$(p\rightarrow q)$，$(q\rightarrow r)$ 等的结构不同。

如果在 $(p\vee p')\rightarrow q$，$(q\vee q')\rightarrow r$，$(r\vee r')\supset s$ 等中，我们有 $p=$"p 对 1 有效"，$q=$"p 对 2 有效"，$r=$"p 对 3 有效"，等等，且 $p'=$"p 对 $2-1$ 有效"，$q'=$"p 对 $3-2$ 有效"，等等，于是有：

(337) $$p\rightarrow p',\quad p\rightarrow q'，等等；\quad p'\rightarrow q',\quad q'\rightarrow r'，等等。$$

换句话说，p，p'，q'，r' 等命题都是等价的，都指的是"p 对于在前一个数字上增加的单位来说是有效的"。我们不是面对一系列被两个基本命题蕴涵的命题，这两个基本命题一个为初级(p，q，r 等)，另一个为二级命题(p'，q'，r' 等)，它们之间没有蕴涵关系，我们所拥有的是一系列命题，它们蕴涵，也被蕴涵于这样的基本命题，即其意义完全等价于"p 对于在前面数字上增加的单位来说是有效的"。递归推理则实现了一种一般性的等价，并且因此具备一种特殊的结构，这个结构属于蕴涵"群集"结构，就像整数加法群的结构属于类别"群集"结构。当然，命题间集群可以像运用到整体那样运用到数字中，但是它们在递归推理中比相关蕴涵系统更弱一些，并且也无法首先后者。

蕴涵 $(p\rightarrow q)$ 式推理只表达了一种全或无的观念：q 所肯定的东西在 p 中得到肯定，而反之则不成立；由此蕴涵 $(p'\rightarrow q)$ 的意思是 q 也在 p' 中得到肯定，尽管 p 和 p' 并不相互蕴涵。相反，从"p 对 n 有效"到命题 q，即"p 对 $n+1$ 有效"的过渡则表达了一个蕴涵 $(p\supset q)$，就像 q 来自于 p(与 n 相等)和 p'(与 $n+1$ 相等)，因为我们同时有 $(p\rightleftarrows p')$ 并且 $(q\leftrightarrow p\vee p')$。在此基础上，逻辑等价 $(p\leftrightarrow p')$，$(\leftrightarrow q'\leftrightarrow r'\leftrightarrow$ 等)并不是一个同一性，因为它每次都指的是一个加入到前数之上的一个新的单元，也就是，这是另一种命题，是累加效应的命题而不是重言式命题。总之，相比较于二价逻辑，我们在递归推理

中得到是迭代运算[1]（$1+1=2$），与类别和关系的重言式（$A+A=A$），（$a+a=a$）完全不同。实际上我们有（$p=p'$），但（$p\vee p'$）$\neq p$，因为（$p\vee p'$）$=q$。逻辑等价（$p=p'=q=$等等）则不能翻译为简单的逻辑等价（二价的）。

递归推理与逻辑推理之间的根本区别在于，准确而言，是这样的：逻辑只认识到部分与整体的关系，并且只是通过逆运算和互反运算的互补性的规则，来确定部分在整体中的函数、相反，递归推理则是通过部分的渐进组合而实现从元素到整体的过渡，这是一个由此及彼的函数。蕴涵（$p_n\rightarrow p_{n+1}$）则不能被还原为二价蕴涵（$p\rightarrow q$）：它意味着一个构成法则而不是一个简单的嵌套。

这些评论当然不是说递归推理缺少数学的演绎。但是如果它在数字结构中的应用也使数学演绎区分于简单的逻辑推理的话，那么在不同的程度上，对于结构一般包含外延量（"大约所有"等）的推理则也是如此。但是递推推理提供了第一个某些蕴涵到蕴涵（$p\rightarrow q$）不可简化性的范例，尽管它们的形式结构都包含一个共同因素：这个共同因素就是部分（p）与整体（q）的关系，而数字蕴涵的特殊因素是部分与部分的直接关系。

§47 无穷与排中律

我们在第四章已经看过，数学与逻辑之间在命题间方面的区别主要在于从有限运算向可归纳为无限的运算的过渡。这一点在排中律用无穷集所支持的关系中尤其显著，并且也是借此这个问题被迁移到了命题间的层面

从1907年开始，布劳威尔，以及后继的维利（Weyl）和其他作者，采取了一个新的立场，完全颠覆了罗素和数理逻辑学家的观点，此立场的目标在于从数学到逻辑的简单、纯粹的还原：数学联结的真只能由它们的实际构造来确定，并且逻辑将依赖于数学而不是控制数学。

事实上，观点转变的理由在于，布劳威尔证实了的关于某些流行论证的有效性的怀疑[2]。假设有一个集合 E 和一个集合的属性 a，人们论证说 a 并不适应于集合的所有元素：那么是否能得出结论，至少存在一个集合元素具备集合属性非一a？这是第一个问题，接下来是第二个问题：如果有一个代表集合属性 b 的元素，那么出于什么标准，我们可以确定 b 与非一a（即 $\bar{a}$）相等呢？

假设：

(a) $(\forall x)(ax\supset \bar{b}x)$ (b) $(\forall x)(bx\supset \bar{a}x)$ (c) $(\forall x)(\bar{b}x\supset ax)$

及 (d) $(\forall x)(\bar{a}x\supset bx)$

① 此处原文为 itétation，疑为 iteration 的笔误。——译者注

② 瓦夫尔（Wavre），1934。

或者简单地说：

$$(a)\ a\supset\bar{b}\qquad(b)\ b\supset\bar{a}\qquad(c)\ \bar{b}\supset a\qquad(d)\ \bar{a}\supset b$$

由此(a 和 c)得出逻辑等价(e) $a\equiv\bar{b}$ 及(b 和 d)逻辑等价(f) $b\equiv\bar{a}$。

刚刚提出的问题则在于，询问把公式写成$(a\equiv\bar{b})$以及承认$(a\ \mathrm{W}\ \bar{a})$是否合理；换句话说：在$(a\equiv\bar{b})$的情况下，非矛盾律$(a\cdot\bar{a}\equiv 0)$的影响范围是什么，以及排中律$(a\ \mathrm{W}\ \bar{a})$的合理性是什么？

在第一点上，布劳威尔采用了一种从某种意义上预示了哥德尔(Godel①)的发现的讨论：不去怀疑矛盾律的全称值(即将非完全枚举当成完全枚举)，他坚持它(完全枚举)在无限集合中的运用的困难。实际上，只有超逻辑的几个明显的事情允许将标志 a 和 b 视为相互的否定。诚然，在有限数量的对象构成的类别中，提出从 a)到 d)的蕴涵以及从中得出逻辑等价 e)和 f)是有效的。于是有：

(338)　　如果$(a\equiv\bar{b})$及$(b\equiv\bar{a})$，那么$(a\cdot b\equiv a\cdot\bar{a}\equiv 0)$

但是在无限集甚至不可计数集的情况下，对于蕴涵及逻辑等价(a 到 f)的采用，也就是被认为是相互的否定的两个属性 a 和 b 中矛盾律的运用会在给"所有"这个词定义一个确切的意义上碰到困难；而这个定义只有在明确的结构下才可能，就像那些基于通过完全归纳或递归公理得到的一系列整数之上的结构一样。这一点又说明了数学运算超出了非矛盾律的范围，而非矛盾律不足以分尽数学的存在；用布劳威尔的术语来说，数学的存在是"直觉的"，也就是与超越了二价逻辑运算范畴的实际的运算结构有关。

然而，事情在排中律领域中得以变得明确，因为在这种情况下，是定律的有效性本身而不再仅仅是它的合理性被布劳威尔学派强加于证明之中的新的逻辑要求所质疑。实际上，根据布劳威尔理论，我们不能确定 a 和 $\bar{a}$ 之间的所有第三物都不存在，也就不能确定排他析取$(a\ \mathrm{W}\ \bar{a})$的有效性，除了在一个有限集的情况中。例如，在一个装有有限数量的球的箱子里，我们能确定这些球都是白色的(a)或它们不都是白色的$(\bar{a})$，因为我们可以将这个集合的所有元素一个一个标记，正是根据这个标记我们可以提出$(a\equiv\bar{b})$。但是在无限集的情况下，人们将不能确切地指出$(a\ \mathrm{W}\ \bar{a})$，因为标记所有元素是不可能性的，也就是对于"所有"一词的不确定性。在这种情况下，对于一个命题为假的论证不会得出其矛盾面为真，因为这个真只有在对已经否认的命题另行处理的元素的结构得到确认的时候才能被承认。例如，对于一个无限集不包含某个元素的说法为假的论证并不因此构成这个元素的存在，这个存在只能通过直接的实际的结构来确定，而不是通过对其否定的否定进行演绎来得到。

有趣的是，布劳威尔在集合理论和分析领域中，以其对排中律的思考所质疑的那些命题是波莱尔(E. Borel)和勒贝格(Lebesgue)也怀疑过的，不过他是在对于提出的论证的直接批判之后。不仅仅是其有关数学演变的认识论，还有出于严谨的原因，才正是布

① 此处原文是"Gœdel"，疑为笔误，根据上下文改为"Godel"。——译者注

劳威尔理论重新被审视的原因。

至于对与数学演绎的关系中二价逻辑的意义来说，排中律的局限性的范围是十分明显的。质疑排除$(p \vee p)$的一般性实际上是拒绝承认一个命题能够通过其否命题的假来进行论证，除非在一个有限集中。这一方面承认了具备数学特点的运算结构相对二价逻辑运算来说的不可还原性。特别是，另一方面，限定了二价逻辑的范围，不仅仅同时限定了有限集，而且更是限定了部分与整体的关系，支持了本书所辩护的概念。

从形式上看，布劳威尔理论重又支持以下观点：独立于运算结构规则之外，我们无法将一个全称肯定和一个特称否定之间的排他析取运用到无限集之中。更确切地说，一旦无限的概念介入进来，那么全称的"所有"就会具备其逻辑意义。那么，两者取其一：要么它不再代表任何意思，要么它获得一个意思但是只能依靠结构规则；只有构成这个规则的运算在此情况下才超出(强度)逻辑运算的范围。

§ 48 直觉逻辑

布劳威尔从其对分析的批判中得出的结论是：二价逻辑不能以恰当和完备的形式运用于数学存在，或者，它仅仅代表一个局限于有限集的数学领域，真正的数学逻辑将是适于数字或数学运算本身的结构。

但是布劳威尔的后继者和弟子们都试图使他的理论与逻辑形式化对应。如此，在1930年，赫廷建立了一种逻辑①，其表现形式是弱的经典逻辑。如果我们在此用$\neg$表示否定(称为悖谬)，我们则特别地有以下规则：

(339) $$\vdash p \supset \neg\neg p$$

而反之则不为真。同样，我们有：

(340) $$\vdash (p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$$

但不是互反的。相反地：

(341) $$\vdash p \supset \neg\neg\neg p$$

最后这个结果在1923年就被布劳威尔提出来过，它被冠以"三重谬论原则"的名字。

由此引发的理念运动代表了两个不同的方向。其中之一表现为贡塞斯从1926年采取的立场。②

贡塞斯拒绝承认布劳威尔关于二价逻辑的和数学无限的排中律的一般非适合性(inadequation generale)的观点，他采用了一个中间立论：二价逻辑只是一个格式，我们无法将此格式的意义理解为绝对的，但是没有任何理由放弃在它合适的地方使用这一

① 赫廷，1930。

② 贡塞斯，1926。

格式；相反，在它不适合的地方，将它泛化是恰当的："如果在一个集合之中，属性 a 和属性非一a 同时包含两个附加类别的所有元素，在相同意义上即'所有'一词能够且必须在集合的定义中起作用，那么，以下命题：a）$(\forall x)ax$ 所有 x 都是 a，b）[$(\exists x)ax$ 类别中存在一个具备集合属性 a 的元素，两者都将被视为矛盾并且根据格式 L（二价的）来处理。但是也可能对于某些集合（不一定必须是无限的）、某些特性以及某些元素，非 a 非非一a 的偶然性是唯一免除矛盾的：那么，这两个类别就不再是附加的，集合的属性 a 和非一a 不再完备地被称为矛盾的，而命题 a）和 b）需根据格式Ⅰ来处理"[1]，也就是后继的格式。然而，这个由贡塞斯提供了概略的格式，构成了一个模型，此模型将希尔伯特的公理与布劳威尔的二重谬论原则调和一致，形成了一种新颖的"排四律"。贡塞斯用 p 来指真，用 p' 指假，用 Rp 来指无关紧要，不过为了简化我们写作 $(+p)$、$(\bar{p})$ 和 (p)。首先，我们有：

(342) $$(+p)\vee(\bar{p})\vee(p)$$

而不是 $(p\vee p)$。表达式（342）则永远是正确的。相反 $(+p)\cdot(p)$ 或者 $(+p)\cdot(p)$ 甚至 $(\bar{p})\cdot(p)$ 则永远是不正确的：

(343) $$[(+p)\cdot(\bar{p})]\leftrightarrow o,\quad [(+p)\cdot(p)]\leftrightarrow o \quad 及 \quad (p)\cdot(p)\leftrightarrow o$$

$(+p)$ 和 (p) 的悖谬由以下形式来定义。（在这些公式中我们一直使用的符号 $\neg$ 被贡塞斯写为 $\wedge$）：

(344) $$(\neg p)\leftrightarrow(p\vee p) \text{、及} \quad (\neg\bar{p})\leftrightarrow(+p\vee p)$$

悖谬 $(\neg p)$ 的意义为："要么 p 为假，要么我们不能得出任何结论。"对于无关紧要，比如 p，也就是贡塞斯标记为 $\widehat{Rp}$ 而我们记为与 $(\neg p)$ 不同的 $\neg(p)$ 的悖谬，它的意义为："或者我们对于 p 一点都不了解这个事实是错的，或者我们不能证明任何事物是因为我们不能证明任何事物。"那么：

(345) $$\neg(p)\leftrightarrow(+p)\vee(\bar{p})\vee(p)$$

这一悖谬则永远为成立（根据命题 342），而确定 $\neg(p)\cdot(p)\leftrightarrow(p)$ 以及 $(\neg p)\cdot(+p)$ 的真的命题则永远不为真：

(346) $$[\neg(p)]\cdot(p)\leftrightarrow(p) \quad 及 \quad [(\neg p)\cdot(+p)]\leftrightarrow o$$

那么我们可以接受经典逻辑的逻辑等价形式：

(347) $$\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p)\cdot(\neg q)$$

(348) $$\neg(p\cdot q)\leftrightarrow(\neg p)\vee(\neg q)$$

(349) $$[(\neg p)\vee(+q)]\leftrightarrow(p\supset q)$$

但是贡塞斯的格式还包含布劳威尔的二重谬论原则。根据（341）和（347），则有：

(350) $$\neg\neg p\leftrightarrow\neg(p\vee p)\leftrightarrow[(+p)\vee(p)]$$

和

① 贡塞斯，1926，第 232 页。

(351) $\neg\neg\neg p \leftrightarrow \neg[(+p)\vee(p)] \leftrightarrow (\neg p)\cdot\neg(p) \leftrightarrow \neg p$

但是另一种趋势呈现出反直觉逻辑的倾向。它在于强调不可逆的元素，这一元素在布劳威尔的基于无限的运算概念中有所表现，并且在赫廷的形式主义中也存在；于是，这第二种趋势达到了对这个极其新颖的形式化结构的构成，并且是一个非负逻辑(logique sans négation)。

§49 表面不可逆的运算和非负逻辑

数学的布劳威尔式概念的特征是存在一个完全的可建构性；这个直觉主义的术语(比较模棱两可的)，实际上，是参考了布劳威尔从给数学推理中借用的运算构成的性质，并且与所有感性的或柏拉式的直觉相对立(在康托尔式思辨的意义上)。然而，通过一个值得注意的悖论，与我们目前所有的有关运算的所有东西不同的是，布劳威尔在数学中引入了不可逆性：从 p 我们可以得出($\neg\neg p$)，但是从($\neg\neg p$)却不能再回到 p，也就是说从重否定不再回到肯定。换句话说，一个命题为假的否定不足以证明这个命题为真，而且通过悖谬进行的推理不再是数学中的一个永远有效的论证。

事物的这个不可逆性的推理很重要："所有"这个项会在无限集中失去意义，当一个确定的运算结构不给予它意义的话，那么我们就可以证明一些否定并且从中得出另外一些否定，但是由于不能够很好地解决那些要么为真要么为假的项，便不能再从否定回到肯定中去了。布劳威尔的不可逆性不会导向这些观念，即矛盾的，不可逆运算的观念。它仅仅表达了当我们由于缺少运算构成而不能了解逻辑运算依赖的所有项的时候，逻辑运算的局限是：它只是在事实上而不是规则(droit)上是不可逆的。它将被确实建构的无限的有理概念与非结构或纯生成无限的无理性对立起来，这种无理性首先就像是混乱属于秩序或者物理熵属于可逆力学。

格里斯为了在逻辑属性方面说明命题(339)而举的一个例子，会使我们明白这一点。假设有 0 和 2 之间的一个点的有限集(如图 52)。将排他地包含点 1 的子集称为 A，A 的补集称为($\bar{A}$)，也就是除了点 1 之外的在 0 到 2 存在的所有的点构成的子集；接下来将 p 定义为 $p = x \in (A \vee \bar{A})$。我们会注意到(从布劳威尔的观点)有一些点既不能归入到(A)也不能归入($\bar{A}$)，因为缺少有关它们的信息：我们不知道 0.999…是该等于

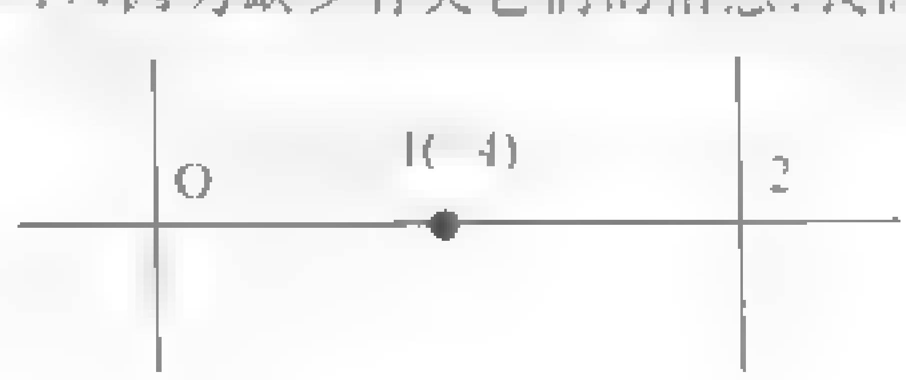


图 52

1(如果是，则它$\in A$)还是该片于($\bar{A}$)。所以我们既不能将它们包含于(A)也不能将它们包含于($\bar{A}$)，但是它们很确定地属于0到2之间。现在来限定p的补集$\neg p$，也就是那些位于0以下或位于2以上的点，即($\neg p = <0$及>2)。于是，我们得出$p \supset (\neg\neg p)$，但是不能得出$(\neg\neg p) \supset p$。实际上，p包含于(不为互反，也不为逻辑等价)$(\neg\neg p)$，因为p的补的补(即$\neg\neg p$)包含0到2之间的所有的点，而p则只排他地包含那些我们确定要么为1、要么与1不同的点；那么$(\neg\neg p)$中包含的不一定在p中，这就是为什么$p \supset (\neg\neg p)$是一个蕴涵(包含)而不是一个逻辑等价。其互反命题$(\neg\neg p) \supset p$为假，因为p包含的比$(\neg\neg p)$包含的少。再换句话说，p与$(\neg\neg p)$的一个子集相等，因为0到2之间的所有的点(即$\neg\neg p$)比那些我们确认其为1(即属于A)或不同于1(即属于$\bar{A}$)的点更多，或可以更多。

这个例子很好地阐释了在什么程度上逻辑的"所有"与(数学的)运算的"有些"不相对应，以及为什么运算$(p \supset \bar{\bar{p}})$的结果在无限中表面上是不可逆的：如果我们能在"所有"元素的性质上把握"有些"，那么则有，$(\bar{\bar{p}} \supset p)$则$(p = \bar{\bar{p}})$，但是这一点在非结构性的无限中就不再成立，那么非结构性无限仍然是不可逆的，因为准确地说，它没有被运算确定。这种表面的或虚假的不可逆性，也就是事实上的和没有规则的，它成了布劳威尔理论中非结构性无限性的特征。在展现运算局限性的同时，这种不可逆性也证实了运算的可逆性特征的议题。

但是，因为在所谓的直觉主义数学中，否定成了一种实无反映的道路，一位布劳威尔派的逻辑学家格里斯(G. F. C. Griss)希望建构一种非否定的数学逻辑，用简单的"差异"概念来代替"非"的概念[1]。与赫廷的带有否定的逻辑相反，格里斯则打算建立一个肯定的或者纯结构化的逻辑，只承认初级运算的蕴涵和合取。于是，矛盾律$(p \cdot \bar{p} = 0)$不会介入到格里斯的逻辑中，不是因为它引入了矛盾命题，相反地是因为它小心地避免了所有可能引起矛盾的否定，并且努力地将一切用集合理论的肯定性语言来表达。

伴随这样一种理论，我们则自然会面临非结构性无穷集的不可逆性的结果。赫廷的逻辑已经是不可逆的了，因为它对于肯定比对于否定来说有更多取值，并且它接受$(p \supset \neg\neg p)$的非互反性(命题(35))。但是格里斯却走得更远，它放弃了否定，也就是放弃了反演原则。

有趣的是，这样一个认可运算可逆性的局限性的形式主义，尽管作为一个完全的约束原则，通过将否定和非矛盾律$(p \cdot \bar{p} = 0)$联结起来而扮演了替代的角色。格里斯的逻辑实际上包含一个不相容的逻辑等价[2]，但却自然地从相补的意义而非准确意义上的否定的意义上被阐释。

然而，这个不相容性是合取$(p \cdot q)$，即格里斯的两个基础运算之一的逆运算。确

① 格里斯，1944。

② 参看德图什-菲乌艾(Destouches-Fevrier)，1948。

实，在赫廷的逻辑中，我们不能从$(p\supset\bar{\bar{q}})$中提取$(p\cdot q)$，并且格里斯的逻辑不包含任何可以直接从不相容过渡到合取的否定。但是就是在这儿两个联结互反，即使这个互反一定是有限的。

这样一个有趣的尝试带来的经验是，要想省去否定和非矛盾律，我们简单地将后者分离为其两个组成部分：一方面为相补，另一方面是一般性可逆性，即使它是不完全的。我们将在§51中看到这样一个结论的意义。

§50 多价逻辑

对于排中律的批评并不是二价逻辑泛化的唯一理由。从1921年，出于模态一般化的简单需求，波斯特(Post)就追随卢卡西维茨(Lukasiewicz)，开始考虑n价区分，以及波兰学派，和卢卡西维茨及塔斯基(Tarski)一起甚至试图建立一个具备价值无限的多价逻辑。另外，赖欣巴哈(Reichenbach)制定了一个旨在/澄清一些概率性模态，并且由维也纳圈子中的物理学家所关注问题启发的多价逻辑——一个贯通性逻辑的集合由此形成，其运用可能还未有很多成果，但是它的存在就足以证明二价逻辑的非排他性事实。

不局限于相补(p)和$(\bar{p})$，由此得排中律$(p\vee\bar{p}=1)$①以及矛盾律$(p\cdot\bar{p}=0)$，我们实际可以将$\bar{p}$的值视为与1相等并少于p的值，写作(简化了符号)：

(352) $$\text{val }\bar{p}=1-\text{val }p$$

条件式，这个形式化方法已经被赫廷的逻辑深刻地改变了，则具备以下意义：如果在$(p\supset q)$中，p的真值等于或低于q的真值，那么蕴涵$(p\supset q)$也等于1(真)。但是如果p的值高于q的值，则有：

(353) $$(p\supset q)=1-\text{val }p+\text{val }q\text{（如果 val }p>\text{val }q\text{）。}$$

例：如果p为真(1)且q为假(0)，则$(p\supset q)=1-1+0=0$。

下面来解读对于p和$\bar{p}$来说0，0.5和1这三个值。

例：若$p=1$且$q=0.5$，蕴涵$(p\supset q)$导出：

$$(1-1+0.5)=0.5$$

但是，由这三个值，我们可能推衍到n值：

$$0,\ \frac{1}{n-1},\ \frac{2}{n-1},\ \frac{3}{n-1},\ \cdots,\ \frac{n}{n-1},\ \cdots,\ 1$$

在$n=2$的二价系统中，我们则有0和$\frac{1}{2-1}=1$这两种可能。在n价的L_n逻辑中，我们相反会达到一个替代排中律的"排n律"——这个规则是$(p\vee\bar{p})$，对于$n=2$来说，用

① 此处1等于参照的整体。

否定语言部($p\vee\bar{p}$)。鉴于序阶 n 命题但是唯一被排除的，那么一般情况下有：

(354) $$\bar{p}\vee\bar{\bar{p}}\vee\bar{\bar{\bar{p}}}\vee\bar{\bar{\bar{\bar{p}}}}\vee\cdots\text{直到第 } n \text{ 个否定。}$$

同样，矛盾命题则为：

(355) $$\overline{(p\cdot\bar{\bar{p}})}\vee(\bar{\bar{p}}\cdot\bar{\bar{\bar{p}}})\vee(\bar{\bar{\bar{p}}}\cdot\bar{\bar{\bar{\bar{p}}}})\vee\cdots$$

关于这个 n 价逻辑的一般化推衍有两点需要注意。我们面对的是一个基础系统，自身很完善并且其非矛盾律($p\cdot\bar{p}=0$)是由可逆性决定的，而这个可逆性又排他地由互补性($p\vee\bar{p}=1$)来定义。介入到卢卡西维茨和塔斯基的变得温和的逻辑中的否定和蕴涵的系列，相反，却极度地强调排中律和非矛盾律。系统的矛盾命题重新依靠在可逆性上，因为从一个值往前一个或后一个值的过渡是通过加上或减去一个否定，也就是通过在一系列模态中往一个或另一个方向上的移动来得到的。只是，这个可逆性不是以一个单纯的互补性为特征，而是一个真正的连续法则，问题在于知道它是通过什么机制来确保系统的非矛盾律的。我们面对的是一个从特殊逻辑到 n 价逻辑的不确定性蕴涵，但是它们不局限于一个一般化的单一逻辑，后者为简易逻辑。

从数学和逻辑之间关系的角度出发，多价逻辑，通过连续性法则取代了部分与整体之间的排他性关系，超越了“群集”结构，以及限制了适用于数学存在的结构。

特别地，如果参照值为无限的，逻辑蕴涵则可能通过递归来进行推理。从 p 往后到 $\bar{p}$ 或往前到 p 的过渡实际通过增加或减少一个否定来实现；然而，这些运算可以相互构成，相互可逆也可联结，并且它们具备一个唯一的恒等。我们可以构思一个逻辑递归，它可以适应于算术递归，但是正如我们所见，前提是在它自身的机制中加入整数系列。[1] 一般来说，并且出于一个极其显著的悖论，逻辑“形式”一般化证明的极端形式主义使界线的完整性受到威胁，这些界线用以分离纯逻辑意义上的形式与数学内容。在蕴涵具备无限值的这样一个系统中，兼容性和不兼容性的概念都可能在丰富的关系中消失掉，以至于只有相关命题的实际意义(“内容”)能够为逻辑“形式”确保一个意义。这正是塔斯基本人明确感受到的。那么问题在于知道这个数学“内容”是否是有关逻辑的，或者它相反并不构成一个更完备的形式，在这形式中，无限分化的逻辑形式成了构成整体的部分？尤其要知道在这样的情况下，“一般逻辑”是不是不会与结构的一般理论乃至命题的一般运算相混淆。

[1] 从意义上说，这个逻辑递推不是必然为模态的，但是可能会被认为是针对真值的一般化程度。同样，根据补充类 p 和 $\bar{p}$，二价命题 p 和 $\bar{p}$ 又反过来二分地分配被考虑的集合，那么对 n 值的划分也可以被视作是对集的一个算术划分，这个划分是通过由一个部分单位往下一个部分单位的同值连续(递推)普遍化实现的。就是根据这样一个模式，属于无限值逻辑的蕴涵串才可能通过递推或者完全归纳的一般公理来进行推理。

§51 逻辑非矛盾律和数学推理的形式

虽然排中律的一般性意义受到质疑，矛盾律却并未或者至少未从同一意义上受到质疑。实际上，我们不能像用“排四律”或“排 n 律”来代替排中律那样来找到一个在演绎中从不同程度引入矛盾命题的逻辑。只是如果所有逻辑都需要一个矛盾定律，它（矛盾定律）不会对于所有系统都是一样的。我们已经看过除开 0 和 1 的模态的引入是如何根据 p 的不同模态值分化定律（$p \cdot p \leftrightarrow 0$），或者由于缺少否定而将其忽略的。而且，撇开模态，也可能定律（$p \cdot p \leftrightarrow 0$）并不是非矛盾定律的唯一可能表达。

首先应注意，在源自“互补性”的微观物理学定律的形式化的逻辑构成，与那些受启发于布劳威尔理论的直觉主义逻辑形式之间出现了一种罕见的汇聚。物理学家的“互补性”提供了被当作矛盾命题的命题的例子，从某一个角度（考虑到 P 的集合的属性的同时性）而不是从另一个角度。尽管这里所指的是涉及命题内容而不是其形式的关联，还是必要寻找一种适合这些内容的逻辑形式。投身到这项工作的人包括德图什-菲乌艾女士（Destouches Fevrier）和让-路易·德图什（J. L. Destouches）等。关于非矛盾定律，这些尝试的最有意义的一个方面就是用非结构性概念（即从某种角度是不可兼容的）来代替矛盾命题概念，从成对的可组合或不同组合的命题看了，但还是带有否定的运算符，我们试图不去否定非矛盾律的所有价值而是以允许或禁止的组合的一个复杂规则来超越非矛盾律。

然而，因为一个值得注意的汇聚，试图否认否定的价值而强调完全或肯定的价值，这样的尝试也同样局限于肯定（§49）。这就是德图什将格里斯的逻辑运用于物理学“互补性”的理由①。

从逻辑学的角度，由这样一种重合中可得出的结论是：有关真或假的二价格式似乎不适合用于量化外延的所有形式，并且，定律（$p \cdot p \leftrightarrow 0$）可能只是非矛盾律的一种特殊形式。

然而，就像布劳威尔学派对于排中律的批判一样，完全反方向的思想运动，即希尔伯特证明算术非矛盾律的研究，开启了一个危机，这是人们可以理解的，我们似乎可以将它视为在质疑非矛盾律的唯一性，而不只是逻辑和数学之间关系的性质。

首先我们需要回顾一下，与罗素和其他逻辑学家们不同的是，希尔伯特完全没有要简单地把数学还原为逻辑。对于他来说，就像对其他形式主义者一样，任务在于建立形式化系统，其中涉及证明非矛盾律。

然而，在这里困难出现了。对于适合使代数形式化的形式化系统的非矛盾律的论

① 德图什-菲乌艾，1948。此处原文Fevrer应为Fevrier的笔误——译者注

证只在 1936 年由根岑(Gentzen)[1]提出过。还需指出的是，这个论证在这系统中使用了非形式化的方法来进行论证。这种论证情况用哥德尔[2]的著名定理来解释，用人们能够直觉地表述的方式，就是，一个理论不能在其自身的属性中是“完备的”，以及更不可能，在那些更弱的属性中是完备的。

这种情形包含两种可能的但是相反的解释。一种是用逻辑“形式”使用的格式，以及还没有实现逻辑形式化的“内容”所使用的格式来解释，这种解释试图将不可形式化的内容变成一个超逻辑的事实，甚至在理论上，变成疑似谬误的事实，因为这在部分程度上逃脱了非矛盾逻辑定律被看作绝对的裁定。而我们可以构思另外一个合理的解释：代数结构可以构成相较于逻辑形式更为丰富的形式，而逻辑形式不能包括高于其本身的形式，就如部分不能包含整体一样。在这种情况下，代数的非矛盾律就不能在代数中得到论证，不是因为代数不包含一些既不为真又不为假的命题(相对于代数运算本身)，而是因为逻辑非矛盾律相对于运用于数学的非矛盾律而言，只是一个非常不精练的种概念。

于是问题则集中于逻辑非矛盾律的本质。然而，就算定律$(p \cdot \bar{p} \leftrightarrow 0)$是无懈可击的，我们也不确定它会使非矛盾律被消解。它只是表达了运算一致性的某种形式，因为相对于肯定(p)，否定$(\bar{p})$的形式化意义，与所考察的命题的整体系统相关。如果我们以完整结构的角度，就可以合理地研究在运算系统的严密中是否存在等级(degre)以及在非矛盾律中是否存在等级。一个数学的“群”比“群集”要更加系统化，而且群所运用的“结构化的类别”要比与群集相关的“弱结构化”类别更加系统化(定义 11—13)。如此我们可以思考非矛盾律$(p \cdot \bar{p} \leftrightarrow 0)$在一个强结构化的系统和相对弱结构化的系统中是否具备相同的价值。举另一个之前的例子，支持$(n \neq n)$，相比于“x既是无脊椎的又是鱼”难道不是一个更加“强烈”的反驳吗？

然而，有关二价逻辑特征集合的结构的分析带给我们的所有结论，本质上是揭示了非矛盾律的逻辑定律相对有限效能，以及它所依赖的机制的大得多的影响范围：$(p \cdot \bar{p} \leftrightarrow 0)$实际上对于命题逻辑来说构成了可逆性的一个特殊情况(即运算通过其逆运算而被消解)，但这是一个有限制的情况，唯一的相补情况是：

$$\bar{p} = 1 - p$$

换句话说，表达式$(p \cdot \bar{p} \leftrightarrow 0)$包含了整个逻辑非矛盾律(矛盾命题是$p \cdot \bar{p} \leftrightarrow 0$)，它只不过是运算$(\vee p)$和$(\cdot \bar{p})$构成的基础群集的恒等运算(一般化)，我们(在§39中)看到，有可能从二价逻辑中形成集合。非矛盾律的所有不一样的形式都与16种二重组合相符，例如：

$$[p \vee q] \cdot [\bar{p} \cdot \bar{q}] \leftrightarrow 0 \quad 或 \quad [p \supset q] \cdot [p \cdot \bar{q}] \leftrightarrow 0，等$$

① 根岑，1936。

② 哥德尔，1931。

都只表达了两个逆运算之间的组合同样的为空的价值，由于是相补的关系。

有两个基础性的，但不一样的事实介入到逻辑非矛盾律中来了。一个是一般性的，并且能够采取除特殊逻辑的非矛盾律以外的其他的形式：这就是可逆性。从这个一般性角度出发，其中彼此互为逆运算的两个运算的乘法运算不为零是矛盾命题（见§40）。相反，第二个事实则比较特别：介入到运算逻辑中的逆运算只与一个"群集"有关，即与简单互补的一个系统有关。从这个有限的角度，其中一个运算为另一个运算的补的话，它们的乘积不为零（空）是矛盾命题。

然而，如果从逻辑转向代数，我们自然能找到一些通过简单互补而属于非矛盾律的结构。例如，如果我们将实数集合区分为两个互补的子集，一个由有理数组成，另一个由无理数组成，而一个单一的判断，即一个确定的数字可以同时属于这两个子集，则提出了等同于逻辑非矛盾律的非矛盾公式。不过像$(n-n)\neq 0$这样的表达式包含着一种矛盾，这个矛盾很容易以运算$(+n)$和$(-n)$的可逆性来排除，除非它属于纯逻辑的补；那么，表达逆运算并且等值于整数加法群的关系$(n-n)=0$则相对于$(p\cdot p)\leftrightarrow 0$具备更大的效能。于是，我们可以通过逻辑非矛盾律来证明代数的非矛盾律就没什么奇怪了：这样的证明刚刚好又使整数的群结构从属于群集结构，也就是说将外延的数量还原为强度的数量或是部分与整体简单关系（见定义11－1，乙）的量特征。

于是我们就可以通过一个顺运算与其逆运算的乘积的无效性来描述一般性非矛盾律的特征：

(356) $$(\mathrm{Op})^{1}\times(\mathrm{Op})^{-1}=0$$

以上，+1和−1分别表示顺运算和逆运算。相反，逻辑非矛盾律（或通过相补的）得到定义。如果1＝被记为T的整体（见§39）：

(357①) $$\mathrm{Op}(P)\times\mathrm{Op}(1-P)=0 \quad 其中 \quad (1-P)=P$$

在(357)这个命题中，相关命题可以是单元的（肯定或否定）、二元的，等等，而P可以是单一命题(p)也可以是组合命题($p\cdot q$等)。

我们可以同时看到建立在外延结构（特别是对于数学来说）之上的推理和建立在强度逻辑结构之上的推理之间的相似和不同。在这两种情况中，推理的丰富性来自于组合运算（以有限数量或无限数量）所产生的新的运算。在这两种情况下，可逆的构成是精确的，因为非矛盾律明确地由完整可逆性即顺运算与逆运算乘积的空命题(356)和(357)来定义。于是可逆性就构成了基础性的推理法则：它（可逆性）同时确定了同一性（空运算）和非矛盾律，通过它的动力性特征而超越了这两个经典法则的静态表达（也就是采用了否定、互逆性等的不同形式）。

但是，存在两种运算构成，这两种构成根据它们所依据的或多或少强弱有别的有组织的系统来决定，也就是外延的或强度的量化。在强的或弱的结构情形中，任何运算都

① 原文是367，根据上下文，估计为357的笔误。——译者注

不能将描述了类别特征的属性转化为描述整体特征的属性;整体只构成部分类别的集合而不是它们通过内涵关系转换得到的运算概括。相反,在外延的或强度的结构情形中,存在部分到部分,部分到整体的过渡,不是通过简单的第一个包含于第二个的关系,而是通过从描述了类别特征的属性到描述整体特征的属性的运算的组合。在某些情况下,整体属性会必然地通过部分属性反映出来,这使得部分之间的联结更加简单了:这就是群与其子群之间的情况。但是,任何情况下,数学推理都比单纯的逻辑演绎更丰富一些,因为它通过不断地运算一般化地在内涵层面上进行,就像逻辑在外延层面上的运算一样;相反,非数学的逻辑推理则简化为一种我们可称之为包含的一般化,因为它依赖于这样的一些嵌套关系,这些嵌套建立在既定的关系之上,这些关系不适用于内涵的构建。

只不过,如果数学推理的丰富性因此是由适宜于外延数量的部分到部分的关系来得到的更大数量运算组合来构成的话,那么其精确性仍由可逆性来保证。在良好形式化的公理中,事实上,除了非矛盾律的逻辑法则(其已经独自构成了一个可逆性法则)之外,那些以公理以及命题演绎的必然性作为其特征的运算总是可逆的运算(根据可逆性所包含的不同变量)。

这便是为什么在一致性和深度的或二价非矛盾律的如此贫乏的法则之外,数学仍然保证其一贯性,即使在它超越了我们希望将其限制在内的逻辑范围的时候。而这也是为什么逻辑本身,如果想要与思想的真实动力性特征保持联系就必须在恒等和互补的非矛盾律中承认调节原则的最初近似值,这个原则是一般性运算机制的可逆性。我们已经看到(§45),只有建构于无穷集的运算可被认为是不可返回的;但是这种不可返回性则标志着运算建构的限制,与有理数建构相反,有理数建构的特征常是规则的可逆性。

文献总汇

B. A. BERNSTEIN, "Operations with respect to which the elements of a Boolean algebra form a group," *Trans. Amer. Soc.*, 1924,26,171-175;27,600.

I. M. BOCHENSKI, *La logique de Théophraste*, Univ. de Fribourg,1947.

—,"On the categorical syllogism," *Dominican Studies*, 1948,1,1-23.

M. BOLL, *Manuel de logique scientifique*, 2 éd., Paris,Dunod, 1948.

G. BOOLE, *The mathematical analysis of logic*, Cambridge, 1847.

—, *An investigation of the laws of thought*, Londres, 1854.

N. BOURBAKI, *Eléments de mathématiques*, Paris, Hermann, 1939-1947 (Les citations sont faites dans le texte de la première édition).

P. DESTOUCHES-FÉVRIER, "Logique de l'intuitionisme sans négation et logique de l'intuitionisme positif," *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1948,226,38-39.

G. FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik*, Hildensheim, Georg olms, 1962 (2ᵉ éd).

G. GENTZEN, "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie," *Math. Ann.*, 1936,112,493-565.

Ed. GOBLOT, *Traité de logique*, Paris, A. Colin, 1918.

K. GÖDEL, "Ueber formal unentscheidbare Satze der *Principia Mathematica* und verwandter Syteme," *Monatsch. Math. Phys.*, 1931,38,173-198.

F. GONSETH, *Les fondements des mathématiques*, Paris, Librairie Blanchard, 1926.

—, *Qu'est-ce que la logique?* Paris, Hermann, 1937.

G. G. GRANGER, "Un problème d'axiomatisation en psychologie," *Logique et Analyse*, 1965,29,72-83.

G. F. C. GRISS, "Negatieloze intuitionistische wiskunde," *K. Nederlandsche Ak. Wet.*, *Verslagen*, *Afd. Natuurk.*, 1944,53,261-268 (avec résumé en français).

J. B. GRIZE, "Du groupement au nombre; essai de formalisation," *Etudes d'épistémologie génétique*, Ⅺ. Paris, P. U. F., 1960,69-96.

—,"Des groupements à l'algebre de Boole," *Etudes d'épistémologie génétique*,

XV. Paris, P. U. F., 1963, 25-63.

—, "Remarques sur l'épistémologie mathématique des nombres naturels." *Logique et connaissance scientifique*, Encyclopédie de la pléiade, Paris, NRF, 1967, 512-525.

J. B. GRIZE, *Logique moderne*, I. Paris, Gauthier-Villars et Mouton, 1969.

A. HEYTING, "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik," *Sitzberichte Preuss. Akad. Wiss.*, 1930, 42-56, 57-71, 158-169.

—, "Formal logic and mathematics," *Synthèse*, VI, 1948.

D. HILBERT et W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik*, 3ᵉ ed., Berlin, Springer, 1949.

G. JUVET, "L'axiomatique et la théorie des groupes," *Actes Congrès Intern. Philos. scientif*, VI. Paris, Hermann, 1936.

L. LIARD, *Logique*, Paris, Masson, s. d.

J. NICOD, "A reduction in the number of the primitive propositions of logic," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1917, 19, 32-41.

J. PIAGET, "Le rôle de la tautologie dans la composition additive des classes et des relations," *C. R. Soc. Phys. Hist. Nat. Genève*, 1941, 58, 102-107. Le groupement additif des relations asymétriques. *Ibid.*, 117-126. Sur les rapports entre les groupements additifs des classes et des relations asymétriques. *Ibid.*, 122-126. Les groupements de la classification complète. *Ibid.*, 149-154. Les groupements de la classification bi-univoque. *Ibid.*, 154-159. Les groupements de la multiplication co-univoque. *Ibid.*, 192-197. La fonction régulatrice du groupement. *Ibid.*, 198-203.

—, *Classes, relations et nombres*, Paris, Vrin, 1942.

—, *La psychologie de l'intelligence*, Paris, A. Colin, 1947 (Réed. 1965).

—, "Du rapport entre la logique des propositions et les *groupements* de classes et de relations," *Rev. Métaphys. Morale*, 1948, 53, 139-160.

—, *Introduction à l'épistémologie génétique*, 3 vol., Paris, P. U. F., 1950.

—, *Essai sur les transformations des opérations logiques: Les 256 opérations ternaires de la logique bivalente des propositions*, Paris, P. U. F., 1952.

—, *Études d'épistémologie génétique*, I. Paris, P. U. F., 1957.

—, *Logique et connaissance scientifique*, Encyclopédie de la Pléiade, Paris, NRF, 1967.

—, *Le structuralisme*, Paris, P. U. F., 1968.

H. POINCARÉ, *Dernières pensées*, Paris, Flammarion, 1913.

B. RUSSELL, *Introduction à la philosophie mathematique*, Paris, Payot, 1928 (Rééd 1961).

Ch. SERRUS, *Traité de logique*, Paris, Aubier, 1945.

H. M. SHEFFER, "A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constant," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1913, 14, 481-488.

R. WAVRE, "Y a-t-il une crise des mathematiques?" *Rev. Metaphys. Morale*, 1924, 445-470.

A. N. WHITEHEAD et B. RUSSELL, *Principia Mathematica*, 3 vol., 2e ed., Cambridge Univ. Press, 1925-1927.

K. G. WITZ, "On the structure of Piaget's grouping I," *Archives de psychologie* (Genève).

原版定义列表

定义编号：

① 定义列表及后面的词汇索引中的页码，请按原版书页码检索。——译者注

原版词汇索引

① 该页原文为 equations，对照 97 页原文可确定该处为 equations 的笔误——译者注

论逻辑运算的转换

——256 个二值命题逻辑的三元运算

〔瑞士〕让·皮亚杰　著

张蓉蓉　译

蒋　柯　审校

论逻辑运算的转换——256 个二值命题逻辑的三元运算

法文版　*Essai Sur les Transformations des Opérations Logiques: Les 256 Operations Ternaires de la Logique Bivalente des Propositions*. Paris: Presses Universitaires de France, 1952.

作　者　Jean Piaget

张蓉蓉　译自法文

蒋　柯　审校

内容提要

本文作者想要阐述的是，在已出版的《逻辑通论》(*Traité de logique*)一书中未详细阐述的数理逻辑部分的分析，以及之前未能优先考虑根据心理学和发生认识论的需求，所生成的认识观点。

所有的运算都依赖于结构，在两个既定的运算之间，存在它们的逆运算(或互反运算)以及它们的逻辑积，依存关系的存在更多的呈现形式是，生命有机体中功能的相互依赖，这是一群通过一组作为基础的公理而连接起来的命题。于是还有一个在数理逻辑以及心理学领域都会被提及的问题，即这些结构之间的世系关系的问题。如果没有隐含运算结构单元的支持，彼此之间相互独立的命题又怎样才能建立起非矛盾的关系呢？

事实上，在这些系统一般常规形式下，并不包括反演性(反向或否定)，但是它们确实包含有互反性(专属于格的二元性法则，即一种互逆性，上"确界"和下"确界"的关系，即+和×之间的关系，同样，如我们所见，这也属于互逆性，等等)。然而，互反性本身也是心理的真实运算的一个基本运算法则。群结构和格结构之间又是怎样的世系关系呢？由于运算活动(的差异)，这两者被看作出发于两个相区别的源头，但却联合为一个功能性的整体，其特征是思维的逻辑机制，这种联合是如何发生的呢？这些都是心理学上关于反演和互反的关系的问题，本书对如上的问题都进行了探讨。

我们值得去进行二值逻辑的256个三元运算的研究，其整体结构演变关系，既是逻辑学的也是心理学的，这一点，在16个二元运算中同表现得尤为清晰。在正常情况下，我们是想象不出思维运算的自由合成法则、反演性以及互反性可能是什么？如果我们没有在256个三元运算中学习到，通过代入、置换、否定、逻辑加法或是逻辑删除等的方法将任意一个运算向另一个运算转换的话。于是本书尽可能系统地分析所涉及的256个三元运算中的运算机制。在256个三元运算中，作者发现了一系列新的问题：三元算式同一元、二元或二元—一元算式的还原；从群结构的观点来看，新的算式之间出现的相互转换；以转换决定的群为特征的运算族群的构成(新的未知转换，出现在了16个二元算式结构中，例如两个二元运算的置换，这两个二元运算的三元算式是逻辑积，等等)；运算族群之间的相互转换；最终建构了一个统一的表，既有逻辑加法也有逻辑乘法，它包含了256个三元运算，通过该表，我们可以分析整个逻辑运算结构；通过该表，我们可以展示逻辑运算结构的存在，而且可以决定在这样的结构中反演和互反分别起了怎样

的作用。作者很想通过本书对以上这些，对于《逻辑通论》一书来说，依旧存有的问题，一一进行解决。

本书用八章对上述问题进行分析：第一章主要进行的是256个三元运算向二元运算简化的一一罗列，同时将这些运算分门别类划归为O类、Ⅰ类、Ⅱ类、Ⅲ类、Ⅳ类、Ⅴ类、Ⅵ类、Ⅶ类和Ⅷ类。第二章主要通过列举推演256个三元运算向二元运算转换时所使用的反演、互反、对射以及同一的四种运算关系，这其中的转换群的转换运算关系。第三章具体分析在反演、互反以及对射转换运算中出现的异质转换情况。第四章具体推演的是专属于三元运算中交换产生的异质转换运算情况。经过前面章节的推演分析，到第五章作者开始对第一章中提到的九类运算组群进行组群间的对比分析，并详细介绍了各个族群的算式模式及对应的运算关系。通过前五章的运算分析，我们有理由开始第六章中运算族群间转换运算的分析研究，所以在第八章，作者做的就是这份细致的转换运算工作。前面几章细节的推演分析之后，第七章作者开始系统分析这256个三元运算中是否存在一个特有的转换结构体系，若是有，该系统是否具有自己特有的属性。通过常数表的建立，作者推演了这其中的结构关系，并进一步推论四元运算也可以采用同样的操作进行分析。最后一章，鉴于前一章的综合分析，我们有理由相信256个三元运算中存在一个特有的结构，本章则是通过这些数据对二值逻辑运算的系统进行分析，这其中具体分析的是INRC运算群、嵌套关系构成的格以及运算群集的属性特征。对集合的结构系谱进行的研究作者试图形成两个结论：其一是，所有的二值逻辑结构，同时具有群和格的构成法则；其二是，类别的或关系的最基础的结构，已经显示出了这种双重的同质性关系，一个具有这两种特性的系统，其中的运行法则应该具有最普遍的世系关系特征，即反演和互反运算在这一结构中彼此区别又彼此互补的特征体现。

张春蓉

作者其他代表作品

《儿童的语言与思维》(*Le langage et la pensée chez l'enfant*). 德拉肖 & 尼埃斯特雷出版社出版(Delachaux & Niestlé)

《儿童的判断与推理》(*Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*). 德拉肖 & 尼埃斯特雷出版社出版

《儿童的世界概念》(*La représentation du monde chez l'enfant*). 法兰西大学出版社出版(P. U. F.)

《儿童的物理因果性概念》(*La causalité physique chez l'enfant*). 法兰西大学出版社出版

《儿童的心理判断》(*Le jugement moral chez l'enfant*). 法兰西大学出版社出版

《儿童智慧的起源》(*La naissance de l'intelligence chez l'enfant*). 德拉肖 & 尼埃斯特雷出版社出版

《儿童"现实"的建构》(*La construction du réel chez l'enfant*). 德拉肖 & 尼埃斯特雷出版社出版

《儿童的数概念》(*La genèse du nombre chez l'enfant*). (与A. 斯泽敏斯卡(A. Szeminska)合著) 德拉肖 & 尼埃斯特雷出版社出版

《儿童数量观念的发展》(*Le développement des quantités chez l'enfant. Construction et atomisme*). (与B. 英海尔德(B. Inhelder)合著) 德拉肖 & 尼埃斯特雷出版社出版

《儿童的空间概念》(*La représentation de l'espace chez l'enfant*). (与B. 英海尔德合著) 法兰西大学出版社出版

《自发几何学》(*La géométrie spontanée*). (与A. 斯泽敏斯卡、B. 英海尔德合著) 法兰西大学出版社出版

《类、关系和数》(*Classes, relations et nombres*). 弗林出版社出版(Vrin)

《儿童时间概念的形成》(*Le développement de la notion du temps chez l'enfant*). 法兰西大学出版社出版

《儿童的运动和速度概念》(*Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*). 法兰西大学出版社出版

《儿童符号的形成》(*La formation du symbole chez l'enfant*). 德拉肖 & 尼埃斯特雷出版社出版

《智慧心理学》(*La psychologie de l'intelligence*). 科林出版社出版(Colin)

《逻辑通论》(*Traité de Logique*). 科林出版社出版

《发生认识论导论（*Introduction a l'epistemologie génetique*），卷一：《数学思维》（*La pensé mathematiques*）；卷二：《物理学思维（*La pensee physique*）；卷三：《生物学思维、心理学思维和社会学思维》（*La pensée biologique*，*la pensée psychologique*，*la pensée sociologique*）， 法兰西大学出版社出版

《儿童概率概念的起源》（*La genese de l'idee de hasard chez l'enfant*）.（与B.英海尔德合著） 法兰西大学出版社出版

当代哲学系列丛书

逻辑和科学哲理

该部分由加斯东·巴什拉(Gaston BACHELARD)指导主编

论逻辑运算的转换

——256 个二值命题逻辑的三元运算

Essai Sur les Transformations des Opérations Logiques

Les 256 Opérations Ternaires de la Logique Bivalente des Propositions

让·皮亚杰(Jean Piaget)
索邦大学教授

法兰西大学出版社(Presses Universitaires de France)
巴黎,圣日耳曼大道 108 号(108, Boulevard Saint Germain, Paris)
1952 年

目　录

前　言

数理逻辑是逻辑学家和数学家们都在使用的研究方法，其在实际使用中的重要性远超逻辑本身。所以，本文中，我们想要阐述的是，在最近出版的《逻辑通论》(*Traite de logique*)一书中未能详述的部分，以及我们未能优先考虑的，那些根据心理学和发生认识论的需求，所生成的认识观点。

真实规则的集合，是逻辑学家对数理逻辑研究的关键所在。这样的特征需求催生出，对于必要且充分的初始命题的探索，此类命题需要有能够承担推论结构体系的能力；因此，在这里的数理逻辑，被设计为一种纯公理性的体系。诚然，这样的公理体系皆依赖于运算，但这些运算的运用，则从属于一定数量的规则，而这些规则，依旧由那些公理所支配。于是这些公理很自然地成了逻辑学家们的主要研究对象。

与之相反，在心理学和发生认识论中，研究者关心的却是运算本身。鉴于思维源于活动(acte)，且表征则从属于动作(action)之间的协调，心理学家以及认识论的研究者关注的是心理的发生，他们将结构中发现结构之间的逻辑运算所表达的基础性协调，这些运算依然总是动作，只是其心理化(intériorisation)的功能是可逆的。同样，在心理学的意义上，表征是动作的内心化反映，而数理逻辑的公理，在心理学家看来，只是作为运算机制的一种简单的"意识通达的"(prise de conscience)表达式。

毫无疑问，心理学所研究的理智运算，不像数理逻辑研究的那么繁复，且不那么严密。究其原因，可能在于数理逻辑不是一个针对事实的科学：它的研究领域是可能性，准确说来，是建立所有可能的逻辑运算结构，然后演绎出这些运算的准确性和真实性。然而，反过来，平衡状态总是，从可能性出发，实现身体和心理上的平衡状态；数理逻辑用来分析可能的运算结构，反过来被用在心理学中，是对由现实思维达到平衡的形式所做的自我表述。

所以，心理学和发生认识论是能寄希望于数理逻辑的。首先，这也是最根本的，这是在思维研究上的新曙光：存在可能的运算结构；可以提前准备好解决问题的办法，在这里，这不是必须完成的任务，不过，这样的研究在数理逻辑研究领域本身还是很新颖的；以及我们可以了解，在可能的运算中，哪些是在常识思维中真实的功效。

然而，如果运算总是依赖于某个结构，这种结构的构成则是通过它们相互之间的依存关系，于是，我们还有一个在数理逻辑以及心理学领域都会被提及的问题，即这些结构之间的世系关系(filiation)的问题。

所有的运算都依赖于结构，因为孤立的运算是不存在的。在两个既定的运算之间，

存在它们的逆运算(或互反运算)以及它们的逻辑积。依存关系的存在更多的呈现形式是,生命有机体①中功能的相互依赖,这是一群通过一组作为基础的公理而联结起来的命题,同时是(逻辑)"闭合的",是一套演绎理论。还有,每个公理系统在选择公理的条件上,也存在暗示性的对比——必须是完整的、相互独立,且是逻辑自洽的(coherents),也就是说,彼此之间不能矛盾——是相应的运算系统的结构的组织化单元:事实上,如果没有隐含运算结构单元的支持,彼此之间相互独立命题又怎样才能建立起非矛盾的关系呢?

然而,结构的存在方式不是唯一的:它们多种多样,而如此的多样性,必然会引发它们之间的世系关系问题。我们这里所持的观点是:在这两者之间建立一致性,即可能的逻辑运算的形式结构和真实的心理(psychologiquement)运算的实际协调之间,现在的情况是,对最一般化结构的探索,既扰人心神又振奋人心。我们曾经可以相信,直到相当近的一段时间里都是可以这样认为,"群"(group)的结构应该是所有结构中最为一般性的,而且关于运算的分析结果,也很好地印证了这样的心理认识,其特征本质上是理智过程的可逆性(和知觉过程或习惯运动等相对立)。如今,反过来,我们试图给予我们称之为"格"(lattices)或"网"(reseaux)(或简述为"结构")这样的系统同样的重视。不过,我们还是需要明白,为什么会对网的结构有这般重要性的认识提升:事实上,这些系统,在一般常规形式下,并不包括,明确说来,即反演性(反向或否定),但是它们确实包含有互反性的(专属于格的二元性法则,即一种互逆性,上"确界"和下"确界"的关系,即+和×之间的关系,同样,如我们所见,这也属于互逆性,等等)。然而,互反性其本身也是心理(esprit)的真实运算的一个基本运算法则。然而,群结构和格结构之间又是怎样的世系关系呢?由于运算活动(的差异),这两者被看作出发于两个相区别的源头,但却联合为一个功能性的整体,其特征是思维的逻辑机制,这种联合是如何发生的呢?这些都是心理学上关于反演和互反的关系的问题,在如上这些的讨论中,都会被涉及并进行探讨。

为方便这些问题的解决,我们还建议,尽可能系统地分析所涉及的256个三元运算中的运算机制,即有3个命题参与的运算之间的关系。我们在《逻辑通论》一书中,以同样的观点研究过16个二元运算,然而这些研究对于更深入的运算分析还是太过浅薄。反过来,在256个三元运算中,我们发现了一系列新的问题:三元算式向一元——二元或二元——三元算式的还原;从群结构的观点来看,新的算式之间出现的相互转换;以转换决定的群为特征的运算族群的构成(新的未知转换出现在了16个二元算式结构中,例如两个二元运算的置换,这两个二元运算的三元算式是逻辑积,等等);运算族群之间的相互转换;最终建构了一个统一的表,既有逻辑加法也有逻辑乘法,它包含了256个三元运算,通过该表,我们可以分析整个逻辑运算结构;通过该表,我们可以展示逻辑运算结构的存在,而且可以决定反演和互反在这样的结构中,分别起了怎样的作用。以上就

① 劳特曼(Lautmann)在他著名的论著中曾强调了运算的群的结构和活体组织间的相似性。

是对于《逻辑通论》一书来说，依旧存有的问题，然而很显然，我们很想在本书中将其一一解决。

说实话，我们并非不担心发表这些研究的成果。在我们的心理学研究工作中，太过投入地运用着逻辑学的知识。而我们的数理逻辑论著就曾被冠之为心理学的作品，几乎不能适应数理逻辑的形式化要求，尤其是其中所涉及的问题角度，在公理专家看来是相当新奇的。唯一的未来的出路，可能是，如果在数理逻辑和心理学间的跨界研究，能真正开辟出一块嫁接甚至是合作的场地，这会给心理学提供——以所有有保障的比例——一点数理物理学曾经给予物理学[1]的东西，抑或最终这样的比较会导致了鲤鱼和兔子之间的结合。

然而，我们相信，如今在某些方面，数理逻辑和心理学之间还是有一些特殊方式的合作的，而且这样的合作，并非只是出于心理学的考虑。事实上，如果在所有可能的运算中(这样的运算是一直在重复的，它是系统阐述思维的平衡形式的条件)，关于理智的心理学的研究，完全能够建立思维的真实运算，这反过来应该会让数理逻辑学家对其产生一定的兴趣——他们可以将这些相同的真实运算和其形式化的方法结合起来。事实上，若我们不考虑那些逻辑规律和绝对真实(verites absolues)之间存在对应而不能被证实的假设，那么这里就只剩下两种解释，要么是一种纯粹的惯例主义(conventionalisme)(但是，在数理逻辑和物理事实之间的一致性关系，就变得非常的微妙，因为物理不是一种简单的通过约定的"句法结构"叙述论证的系统结构；从好的方面说，它是这些运算的逻辑积)，要么是一种和思维的现实机制相关的关系。然而，后一种方案，对于经典唯理论以及布尔代数而言，本来都是已经存在的，但是，在偏向柏拉图哲学的罗素(Russell)和怀特海(Whitehead)的研究中，这一种方案是被剔除出去的，不过如今，这样的方案又重新勾起了大家的兴趣。只是在21世纪初，承接于柏拉图主义的惯例主义，有过一段时间的过于泛滥。之后到如今，在数理逻辑的形式化和理智的心理过程之间的一致性已经被证实，它们建构了一个我们不曾想象得到的，更加艰涩难懂的结构化的事业。事实上，现代形式主义的精要简化已经成倍地提升了要求，以至于这样的要求看起来，像是天真地抑或是有些冒失地想要去尝试拉近两个领域，进行两者之间的对照比较。

然而，正是如此，在我们看来，因为现在正是适合的时候，去开始这一共同领域的研究努力，去研究分析运算机制本身。这就是为什么，我们值得去进行二值逻辑的256个三元运算的研究：其整体结构演变关系，既是逻辑学的也是心理学的，这一点，在16个二元运算中间表现得尤为清晰。在正常情况下，我们是想象不出，思维运算的自由合成法则、反演性以及互反性可能是什么的，如果我们没有在256个三元运算中学习到，通

1 做出这样的类比还是相当自大的，然而，我们相信，这期间是有一定真理存在的。尽管数理逻辑公理对于纯数学，在本文中，我们所使用的数理运算逻辑，也许还是处于相对幼年状态的，可是若与数理物理学相对应，事实上，它可以为真实思维结构建构出应用型结构，一如数理物理学为现实物理建构出模型那般。

过代入、置换、否定、逻辑加法或是逻辑删除等的方法将任意一个运算向另一个转换的话。我们已经花费了几个世纪的时间，从各个角度反复思考研究三段论的19种模式——而256个三元运算就是我们开始研究的契机。花几个小时来反思一下转换运算的整体系统结构以及其组成的推论，应该不会是浪费时间吧。

让 • 皮亚杰

引　言

我们在这里倡导，用运算的集合来进行命题推演，这些运算包括了 p、q 等两个或多个命题。此类命题的真或假，除了受命题本身的内容影响之外，组合的结构也会造成为假的结果，例如，如果 p 和 q 是真命题集合，那么组合 $(p \cdot q)$ 则为真，然而 $(p \mid q)$ 则为假(不相容性)。

我们所说的二值逻辑运算，只接受 (p) 或 $(p \cdot q)$ 为真以及 (p) 或 $(p \cdot q)$ 为假，它和多值逻辑不同，多值逻辑中可以有其他真值的介入，比如非真非假等。

另一方面，我们将建立在单个运算项之上的运算命名为"一元运算"(p 的肯定或者否定)；将建立在两个命题上的运算命名为"二元运算"(例如，合取 $p \cdot q$)；将有三个元素的运算命名为"三元运算"(合取 $p \cdot q \cdot r$)；等。

所有的运算我们可以用选言"范式"(forme normale disjonctive)的方法进行表达，用析取关系(∨)来连接，要么两个(二元运算)要么三个(三元运算)等不同命题，这些命题本身也组成了合取关系(·)。在二元运算中，这样的二元基础是由下面的算式来提供的①：

(1) $$(p * q) \equiv (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$$

而在三元运算的情况里，我们有以下的这些三位运算：

(2) $$\begin{aligned}(p * q * r) \equiv\ & (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \\ & \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)\end{aligned}$$

根据我们的选言归并，这些 0、1、2、3 或 4 组成了成对命题的运算，抑或 0 到 8 组成三位命题的运算，我们得到了 16 个不同的二元运算和 256 个不同的三元运算。而后者则会产生以下可能：

有 1 个运算可对应 0 个三位命题组成的运算为真

有 1 个运算可对应 8 个三位命题组成的运算为真(命题 2)

有 8 个运算可对应 1 个三位命题组成的运算为真(命题 2)

有 8 个运算可对应 7 个三位命题组成的运算为真(命题 2)

有 28 个运算可对应 2 个三位命题组成的运算为真(命题 2)

---

① 我们用 * 这个符号来代表"充分肯定"或"重言式"。参看我们的《逻辑通论》，科林出版社(1949)，第 229 页。

有 28 个运算可对应 6 个三位命题组成的运算为真(命题 2)

有 56 个运算可对应 3 个三位命题组成的运算为真(命题 2)

有 56 个运算可对应 5 个三位命题组成的运算为真(命题 2)

有 70 个运算可对应 4 个三位命题组成的运算为真(命题 2)

如果三元运算的逻辑是基础性的，那么三元的逻辑运算，从各方面看来，都非常重要且值得专门地研究。事实上，所有的推理都在于多个而非仅仅两个命题之间的联系。然而，由于四个命题的运算已经多达 65 536 个，所以三元的运算组合和二元的运算组合之间的对比是最有启发意义的。因此，非常值得尝试，将 256 个三元运算和我们已经熟知的 16 个二元运算一样，进行充分透彻的分析研究。

然而，目前严峻的情况是，这项研究从未深入推进过，尽管 256 这个数字对于逻辑学家来说并不可怕。布林(Boll)的《手册》(*Manuel*)中其实就囊括了一张三元公式的表格，包含一些逻辑等式以及这些逻辑等式所包含的范畴的几何表征，但是这里所涉及的只是一种仅仅基于运算机制本身的研究。

在本书中，我们想要努力抽离的正是这些运算机制，因为只有这些机制确定了，才可以允许三元运算和二元运算之间的对比有所建树。

自然，我们首先要研究的是，可能存在的从三元运算到二元或一元运算的还原。例如这样的三元运算：$(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$。我们提出的问题是，它是否构成了——以二元运算的方式，如$(p\supset q)$或$(p|q)$等——其自身的单元，且这些二元运算没有继续还原的可能，抑或反之，是否可以用一种更为基础的运算组成，合理地表现这些标准的三元算式。在这样的一种特殊情况中，我们确实可以有以下结果①：

(3) $(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})=[p\cdot(r\supset q)]=[(p|q)|(p\supset r)]$

即，三元运算在这里可以还原成二元运算$(r\supset q)$和一元运算(p)之间的另一个二元运算$(\cdot)$的组合，也可以是两个二元运算的组合，彼此之间由第三个二元运算$(|)$连接。问题是，我们要知道是否这样的还原是具有普遍性的，以及当我们确定其逆运算或互反运算时，或者在确定其内部构成时，应该如何看待这些三元—二元或三元—二元的算式。对第一个问题进行研究的理论，其重要性是显而易见的：若三元逻辑运算向二元逻辑运算的还原总是可行的，那么同化的过程，在三元逻辑运算领域里，无疑是没有阻碍的了。

然而，第二个问题产生了，即一个更为一般化的序列，事实上是它主导了前一个问题：它是 256 个三元运算的构成模式，也是决定生成作用的整体运算群系的构成模式。我们不想说，是通过可能性集合的系统而简单地将一个运算转化为另一个运算，例如：

$$(p\supset q)=(\bar{p}\vee q)\equiv(p|\bar{q})=(p\cdot\bar{q})\equiv\text{等等}$$

① 我们将使用(≡)这个符号来表达两个算式之间的等值关系，然而(=)则是一个算式内部等值关系的符号，由后项在此起运算的作用。

相反，我们想要研究的是运算结构的集合系统，包含了相对于其整体的相对规则，例如，"群"的结构。一个群就是一个运算集合，比如，两个运算的结果也可以是一个集合的运算；比如，每个运算都有且仅有一个逆运算；比如，一个运算的结果和其逆运算得到一个（唯一的）运算系统的恒等运算（恒等运算指的是一个运算和任何一个其他运算的组合，但不改变后一个运算本身的结果）；再比如，任何一个可以结合在一起的运算①（也构成一个集合）。然而，我们已经证明过，命题的二值逻辑的16个二元运算中，四种转换群的存在，这种存在表现了逻辑运算系统的可逆性②。

所有的二元运算，事实上都包括一个逆运算N，相对于"全称肯定"（affirmation complète）（命题1）来说，这是它的补（命题）。例如，$p \supset q$ 的逆运算N是 $p \cdot q$（因为 $p \supset q = p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$）。所有的二元运算也有一个互反运算R，属于同一类运算，只是产生在否定的命题之间。例如 $p \supset q$ 的互反运算是 $p \supset q$，即 $q \supset p$。最后，所有的二元运算都可以转换为对射运算C，在范式中用（∨）和（·）进行交换，但不改变运算符号。例如 $p \supset q$ 的对射运算C是 $p \cdot q$，因为，通过交换算式（$p \cdot q \vee p \cdot q \vee p \cdot q$）中的（∨）和（·），我们得到了（$p \vee q$）·（$p \vee q$）·（$p \vee q$），于是就得到了一个新的算式，其中的演算得出了 $p \cdot q$ 的结果。此外，我们还将I称为"恒等转换"，它是让被所涉及的运算保持不变（这里是 $p \supset q$）。这是说，我们一下子就验证了 $p \supset q$ 的对射运算C，即 $p \cdot q$，是其互反运算R（即 $q \supset p$）的逆运算N，同样，反之亦然，这个对射运算 $p \cdot q$ 是 $p \supset q$ 的逆运算的互反运算R（即 $p \cdot q$ 是 $p \cdot q$ 的互反运算）。这般下来，呈现在我们面前的就是一个I、N、R和C四种转换的可交换群，在16个二元运算中，该转换群可以用四位运算或成对运算加以运用。事实上，在所有情况中（R和C与N和I是区分开来的，抑或我们有R＝I以及C＝N，还有R＝N以及C＝I），我们总会有：

(4) $\quad CR(=RC)=N, \quad NR(=RN)=C, \quad NC(=CN)=R$

以及

(4乙) $\quad CRN(=RNC,等)=I$

只是，在一个四位运算或成对运算中，这样的一个转换的群彼此之间只能连接最多4种运算（当其中两种转换没有区别时），而且还需确定，这些四位运算或成对运算中，可以进行哪些转换将一个转换为另一个。

所以，现在需要研究的是在哪种形式下，转换群INRC同样存在于256个三元运算内部。（我们要考察）在后面这个领域里，这些从属于这一个规律的、不同的四位运算或成对运算转换之间是何关系。鉴于三元运算系统的复杂性，我们可以期望，从这个结果

① 如今，这些同类的条件，我们常常表述为，相对于元素间的构成法则，这些元素集合构成了一个组：1. 结合法则的情况；2. 集合中，若存在一个和唯一一个中立元素（即向右或向左复合项加上群体中任一元素，重新组成一个元素）；3. 若每个元素接受对称元素（即对于每一个元素都对应到另一个，唯一的，向右或向左复合项加上第一个，从而得到一个中立元素）。

② 《逻辑通论》，第285页。

中，获得构成二值逻辑运算整体的群结构的新希望。正是鉴于此观点，我们将不遗余力地推进这一研究①。

---

① 为方便后面章节的阅读，请参考符号一览表(第167页)。

第一章 三元运算到二元运算的还原和"分量"运算的反演

在第一章，我们会根据有次序的组合顺序，在选言范式内将256个三元运算列举出来。另一方面，我们会验证，这其中每一个涉及的运算，还原成二元运算的可能（或成为同类中的其他等值成分）。我们用 x 表示二元运算（例如 $p \cdot q$ 或 $p \supset r$，等），用 y 表示这个运算组合中的另一个二元运算（例如 $q \vee r$ 或 $p \equiv r$，等）。在双二元—二元表达式中，我们用 x 和 y 来表达前两个运算，用 x' 和 y' 来表达另外两个。最后我们用符号 α 或 α、β 等表示 x、y 或 x' 和 y' 这些运算之间的运算关系。这样，所有的三元运算就可以转换成一种或单或双的二元—二元运算的形式，例如：

$$\mathrm{I}\ x(\alpha)y \quad 或 \quad \mathrm{II}\ [x(\alpha)y]\,\alpha\,[x'(\beta)y']$$

此外，运算 x 和 x' 在某些情况下，可为一元运算的模式，这就使得三元表达式被还原为单或双的一元—二元表达式形式（但是，自然情况下，从未有过一元—一元表达式的形式，否则整个表达式就不能成为三元算式）。

现在我们用"分量运算"（operation composante）来称呼在 $x(\alpha)y$ 情况中的运算 α，同理包括在 $x(\alpha)y\ \alpha\ x'(\beta)y'$ 中的 α；用"复合运算"（operations composees）来称呼在 $x(\alpha)y$ 或 $x(\alpha)y$ 以及 $x'(\beta)y'$ 中的运算 x 和 y。在第二种情况中，连接这两个运算的是分量运算（α）。所以，从不会存在单一的合成运算。于是，我们将要通过推理论证的是，这个分量运算（α）在16个二元运算中总有一席之地。

出于方便，通常我们会将分量运算（α）还原为逻辑积（·）或其反演，即不相容（ ），抑或其逻辑等价（ ）又或其反演（W 或互逆排斥），这是双合取运算，还有"全称肯定"（*）或双等值运算。

于是，我们可以来证明下面这条法则（适用于任何分量运算）：

运算法则1：为获得一个三元运算在（单或双）二元—二元或一元—二元表达式下的反演N，需要根据专属二元逻辑运算的反演规则，去推演分量运算（α）。

这条规则看起来是如此的冗长且乏味，所以从另一方面说明，一开始罗列出256个三元运算的二元—二元或一元—二元形式是有必要的，这样会让我们便于理解接下来的研究分析。

§1 2个Ⅷ类和O类运算以及16个Ⅰ类和Ⅶ类运算

对应到8个三位命题组成的(唯一的)三元运算，一个是三元运算的"全称肯定"形式(命题2)。该运算被还原简化成一个二元——二元运算，甚至是一元——一元运算的表达式：

(5)
$$
\begin{aligned}
(p*q*r) &\equiv [(p*q)\cdot(q*r)] \\
&\equiv [(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(p\cdot q)] \\
&\quad \cdot [(q\cdot r)\vee(q\cdot r)\vee(q\cdot r)\vee(q\cdot r)] \\
&\equiv [(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r) \\
&\quad \vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})]
\end{aligned}
$$

以及

(5乙)
$$(p*q*r)\equiv p*(q*r)$$

实际上，由 $p*(q*r)$ 可以得出

$$[p\cdot(q*r)]\vee[p\cdot(o)]\vee[\bar{p}\cdot(q*r)]\vee[p\cdot(o)]$$

该运算也等同于(5)的构成形式。

于是，用三元运算的反演(|)或(o)来替代分量运算(·)或(*)，反演(换言之否定)表达式(5)和(5乙)是很容易的：

(6)
$$(\overline{p*q*r})\equiv(p*q)|(q*r)\equiv(p)o(q*r)\equiv O$$

实际上，由 $(p*q)|(q*r)$ 可以得出 $[(p*q)\cdot o]\vee[(o)\cdot(q*r)]\vee[o\cdot o]$，即

$$o\vee o\vee o$$

我们将用符号Ⅷ和O来表示这两个三元运算(5)和(6)。这两个运算，可以还原为一些二元——二元运算的表达式(甚至在特殊情况下，可还原为一元——一元运算的表达式)。

接下来，我们将验证，由1个三位命题组成的8个运算(Ⅰ1到Ⅰ8)以及由7个三位命题组成的8个运算(Ⅶ1到Ⅶ8)，我们按照命题(2)中三个连续命题的次序，分别罗列。我们很清楚地看到，在Ⅶ类运算中，每一个运算构成了已确定的Ⅰ类运算中相对应的运算的反演，根据逆运算的定义，反演是给定运算的补运算(全称肯定运算5的补运算)，所以，我们得出以下结果：

(7) 顺运算　　　　　　　　逆运算

$\mathrm{I}1(p\cdot q\cdot r)$　$\mathrm{VIII}1(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot \bar r)$

$\mathrm{I}2(p\cdot q\cdot \bar r)$　$\mathrm{VIII}2(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot \bar r)$

$\mathrm{I}3(p\cdot \bar q\cdot r)$　$\mathrm{VIII}3(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot \bar r)$

$\mathrm{I}4(p\cdot \bar q\cdot \bar r)$　$\mathrm{VIII}4(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot \bar r)$

$\mathrm{I}5(\bar p\cdot q\cdot r)$　$\mathrm{VIII}5(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot \bar r)$

$\mathrm{I}6(\bar p\cdot q\cdot \bar r)$　$\mathrm{VIII}6(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot \bar r)$

$\mathrm{I}7(\bar p\cdot \bar q\cdot r)$　$\mathrm{VIII}7(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot \bar r)$

$\mathrm{I}8(\bar p\cdot \bar q\cdot \bar r)$　$\mathrm{VIII}8(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot r)$

于是，显而易见，运算Ⅰ1到Ⅰ8很容易就可以转换为二元—二元或一元—二元运算的表达式，其中，这些表达式的分量运算本身也是二元的，因为，我们有：

(8) $\mathrm{I}1(p\cdot q\cdot r)\equiv[(p\cdot q)\cdot(q\cdot r)]\equiv[p\cdot(q\cdot r)]\equiv$ 等等

$\mathrm{I}2(p\cdot q\cdot \bar r)\equiv[(p\cdot q)\cdot(\overline{q\supset r})]\equiv[(p\cdot q)\cdot(q\cdot \bar r)]\equiv[p\cdot(q\cdot \bar r)]\equiv$ 等等

$\mathrm{I}3(p\cdot \bar q\cdot r)\equiv[(\overline{p\supset q})\cdot(\overline{r\supset q})]\equiv[(p\cdot \bar q)\cdot(\bar q\cdot r)]\equiv[p\cdot(\bar q\cdot r)]\equiv$ 等等

$\mathrm{I}4(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\equiv[(\overline{p\supset q})\cdot(\overline{q\vee r})]\equiv[(p\cdot \bar q)\cdot(\bar q\cdot \bar r)]\equiv[p\cdot(\bar q\cdot \bar r)]\equiv$ 等等

$\mathrm{I}5(\bar p\cdot q\cdot r)\equiv[(\overline{q\supset p})\cdot(q\cdot r)]\equiv[(\bar p\cdot q)\cdot(q\cdot r)]\equiv[\bar p\cdot(q\cdot r)]\equiv$ 等等

$\mathrm{I}6(\bar p\cdot q\cdot \bar r)\equiv[(\overline{q\supset p})\cdot(\overline{q\supset r})]\equiv[(\bar p\cdot q)\cdot(q\cdot \bar r)]\equiv[\bar p\cdot(q\cdot \bar r)]\equiv$ 等等

$\mathrm{I}7(\bar p\cdot \bar q\cdot r)\equiv[(\overline{p\vee q})\cdot(\overline{r\supset q})]\equiv[(\bar p\cdot \bar q)\cdot(\bar q\cdot r)]\equiv[\bar p\cdot(\bar q\cdot r)]\equiv$ 等等

$\mathrm{I}8(\bar p\cdot \bar q\cdot \bar r)\equiv[(\overline{p\vee q})\cdot(\overline{q\vee r})]\equiv[(\bar p\cdot \bar q)\cdot(\bar q\cdot \bar r)]\equiv[\bar p\cdot(\bar q\cdot \bar r)]\equiv$ 等等

而逆运算Ⅷ1到Ⅷ8则很容易，从前面每个算式的分量运算表达式的反演中得到：

(9) $\mathrm{VIII}1\equiv[(p\cdot q)|(q\cdot r)]\equiv[p|(q\cdot r)]$　　$\mathrm{VIII}5\equiv[(\bar p\cdot q)|(q\cdot r)]\equiv[\bar p|(q\cdot r)]$

$\mathrm{VIII}2\equiv[(p\cdot q)|(q\cdot \bar r)]\equiv[p|(q\cdot \bar r)]$　　$\mathrm{VIII}6\equiv[(\bar p\cdot q)|(q\cdot \bar r)]\equiv[\bar p|(q\cdot \bar r)]$

$\mathrm{VIII}3\equiv[(p\cdot \bar q)|(\bar q\cdot r)]\equiv[p|(\bar q\cdot r)]$　　$\mathrm{VIII}7\equiv[(\bar p\cdot \bar q)|(\bar q\cdot r)]\equiv[\bar p|(\bar q\cdot r)]$

$\mathrm{VIII}4\equiv[(p\cdot \bar q)|(\bar q\cdot \bar r)]\equiv[p|(\bar q\cdot \bar r)]$　　$\mathrm{VIII}8\equiv[(\bar p\cdot \bar q)|(\bar q\cdot \bar r)]\equiv[\bar p|(\bar q\cdot \bar r)]$

在标准范式(7)下，运算法则允许建构出这些二元运算Ⅷ1到Ⅷ8之间的等值关系，表达式(9)则是在于，处理整个二元—二元或一元—二元运算的表达式，比如说，在单二元表达式 $x(a)y$ 中，x 和 y 是复合运算(如 $p\cdot q$ 和 $q\cdot r$)而 a 是分量运算(这里是不相容运算)。如果 $x|y=\bar x\cdot y\vee x\cdot \bar y\vee(\bar x\cdot \bar y)$(不相容运算公式)，这样，若 $x=pq$，且 $y=qr$，我们则可以得到以下结果：

(10) $\bar x\cdot y=\bar p\cdot \bar q(q\cdot r\vee \bar q\cdot r\vee \bar q\cdot \bar r)=\bar p\cdot q\cdot r$

$x\cdot \bar y=q\cdot r(p\cdot \bar q\vee \bar p\cdot q\vee \bar p\cdot \bar q)=p\cdot q\cdot \bar r$

$\bar x\cdot \bar y=(q\cdot \bar r\vee \bar q\cdot r\vee \bar q\cdot \bar r)\cdot(p\cdot \bar q\vee \bar p\cdot q\vee \bar p\cdot \bar q)$

$=(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot \bar r)$

其中

$(p\cdot q)|(q\cdot r)=(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)$

$\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot \bar r)$

以上对于一元—二元运算的表达式，也同样适用，其中，这里我们有 $x=p$ 或 $\bar p$，而

y=一个二元的分量运算。

§2 28个Ⅱ类运算和28个Ⅵ类运算

首先，在这里我们要用选言的范式总结，2 个二位命题组成的 28 个三元运算的常数表，并且将其简化为二元—二元或一元—二元运算的形式：

(11) Ⅱ1 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv\{(p\cdot q)\cdot p[r]\}\equiv p\cdot q[r]=$等等 ①

Ⅱ2 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv\{(p\cdot r)\cdot r[q]\}\equiv r\cdot p[q]\equiv$等等

Ⅱ3 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv\{p[q]\cdot(q=r)\}\equiv[p\cdot(q=r)]=$等等

Ⅱ4 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv\{(q\cdot r)\cdot q[p]\}\equiv r\cdot q[p]\equiv$等等

Ⅱ5 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})]\equiv\{q[p]\cdot(p=r)\}\equiv[q\cdot(p=r)]\equiv$等等

Ⅱ6 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)]\equiv\{r[p]\cdot(p=q)\}\equiv[r\cdot(p=q)]=$等等

Ⅱ7 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})]\equiv[(p=q)\cdot(p=r)]\equiv[(p=q)\cdot(q=r)]$

Ⅱ8 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv\{p[q]\cdot(q\,\mathrm{W}\,r)\}\equiv[p\cdot(q\,\mathrm{W}\,r)]$

Ⅱ9 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv\{(p\cdot r)\cdot p[q]\}\equiv r\cdot p[q]$

Ⅱ10 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv\{q[p]\cdot(p\,\mathrm{W}\,r)\}\equiv[q\cdot(p\,\mathrm{W}\,r)]$

Ⅱ11 $[(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})]\equiv\{(q\cdot \bar{r})\cdot q[p]\}\equiv\bar{r}\cdot q[p]$

Ⅱ12 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p=q)\cdot(p\,\mathrm{W}\,r)]$

$\equiv[(p\,\mathrm{W}\,r)\cdot(q\,\mathrm{W}\,r)]$

Ⅱ13 $[(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv\{\bar{r}[q]\cdot(p=q)\}\equiv[\bar{r}\cdot(p=q)]$

Ⅱ14 $[(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})]\equiv\{(p\cdot \bar{q})\cdot \bar{q}[r]\}\equiv p\cdot \bar{q}[r]$

Ⅱ15 $[(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)]\equiv\{r[q]\cdot(p\,\mathrm{W}\,q)\}\equiv r\cdot(p\,\mathrm{W}\,q)$

Ⅱ16 $[(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})]\equiv[(p\,\mathrm{W}\,q)\cdot(p=r)]\equiv[(p\,\mathrm{W}\,q)\cdot(q\,\mathrm{W}\,r)]$

Ⅱ17 $[(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)]\equiv\{(r\cdot \bar{q})\cdot \bar{q}[p]\}\equiv r\cdot \bar{q}[p]$

Ⅱ18 $[(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)]\equiv\{q[p]\cdot(p=r)\}\equiv q\cdot(p=r)$

Ⅱ19 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\,\mathrm{W}\,q)\cdot(q=r)]\equiv[(p\,\mathrm{W}\,q)\cdot(p\,\mathrm{W}\,r)]$

Ⅱ20 $[(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})]\equiv\{r[p]\cdot(p\,\mathrm{W}\,q)\}\equiv r\cdot(p\,\mathrm{W}\,q)$

Ⅱ21 $[(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)]\equiv\{q[p]\cdot(p\,\mathrm{W}\,r)\}\equiv q\cdot(p\,\mathrm{W}\,r)$

Ⅱ22 $[(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})]\equiv\{(\bar{p}\cdot \bar{r})\cdot q[p]\}\equiv\bar{r}\cdot \bar{q}[p]$

Ⅱ23 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv\{(p\cdot q)\cdot q[r]\}\equiv p\cdot q[r]$

Ⅱ24 $[(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv\{(p\cdot r)\cdot p[q]\}\equiv r\cdot p[q]$

① 符号 $q[r]$ 表示根据 r 得出的 q 的肯定，即 $q[r]\equiv\{(q\cdot r)\vee(q\cdot r)\}$，参看《逻辑通论》，第 237 页和第 263 页。

Ⅱ25 $(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)] \equiv p\ q\ \cdot(q\ \ r) \equiv p\cdot(q\ \ r)$

Ⅱ26 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv\{p[q]\cdot(q\ \mathrm{W}\ r)\}\equiv p\cdot(q\ \mathrm{W}\ r)$

Ⅱ27 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv(p\cdot r)\cdot p[q]\equiv r\cdot p[q]$

Ⅱ28 $[(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})]\equiv\{(\bar{p}\cdot\bar{q})\cdot\bar{q}[r]\}\equiv\bar{p}\cdot\bar{q}[r]$

根据以上常数表，我们可以得出，在求取这些由二个二位运算构成的表达式的反演时，只需要重新反演其中的分量运算(·)。于是，我们得到了28个Ⅵ类运算(有6个二位运算)：

(12) Ⅵ1 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})]$

$\equiv(p\cdot q)\cdot q\ r\equiv p\ q\ r$

Ⅵ2 $[(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})]$

$\equiv\{(p\cdot r)|p[q]\}\equiv r|p[q]$

Ⅵ3 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$

$\equiv\{p[q]|(q=r)\}\equiv[p|(q=r)]$

Ⅵ4 $[(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})$

$\equiv\{(q\cdot r)|q[p]\}\equiv r|q[p]$

Ⅵ5 $[(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})$

$\equiv\{q[p]|(p=r)\}\equiv[q|(p=r)]$

Ⅵ6 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})$

$\equiv\{r[p]\ (p=q)\}\equiv[r|(p=q)]$

Ⅵ7 $[(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)$

$\equiv[(p=q)|(p=r)]$

Ⅵ8 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})$

$\equiv\{p[q]\ (q\ \mathrm{W}\ r)\}\equiv[p|(q\ \mathrm{W}\ r)]$

Ⅵ9 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$

$\equiv\{(p\cdot\bar{r})|p[q]\}\equiv\bar{r}|p[q]$

Ⅵ10 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)]$

$\equiv\{q[p]|(p\ \mathrm{W}\ r)\}\equiv[q\ (p\ \mathrm{W}\ r)]$

Ⅵ11 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv\{(q\cdot r)|q[p]\}\equiv r|q[p]$

Ⅵ12 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv\{(p=q)|(p\ \mathrm{W}\ r)\}\equiv[(p\ \mathrm{W}\ r)|(q\ \mathrm{W}\ r)]$

Ⅵ13 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)]$

$r\ q\ (p=q)\ r\ (p\ \ q)$

Ⅵ14 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r})]$

$\equiv\{(p\cdot q)|q[r]\}\equiv p|q[r]$

Ⅵ15 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})]$

$\equiv\{r[q]\ (p\ \mathrm{W}\ q)\}\equiv[r|(p\ \mathrm{W}\ q)]$

Ⅵ16 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv\{(p\,\mathrm{W}\,q)|(p=r)\}\equiv[(p\,\mathrm{W}\,q)|(q\,\mathrm{W}\,r)]$

Ⅵ 17 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$

$\equiv\{(q\cdot r)|p[q]\}\equiv r|p[q]$

Ⅵ 18 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv\{q[p]|(p-r)\}\equiv q|(p=r)$

Ⅵ 19 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv[(p\,\mathrm{W}\,q)|(q=r)]\equiv[(p\,\mathrm{W}\,q)|(p\,\mathrm{W}\,r)]$

Ⅵ 20 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})$

$\equiv\{r[p]|(p\,\mathrm{W}\,q)\}\equiv\bar{r}|(p\,\mathrm{W}\,q)$

Ⅵ 21 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})]$

$\equiv\{q[p]|(p\,\mathrm{W}\,r)\}\equiv q|(p\,\mathrm{W}\,r)$

Ⅵ 22 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)$

$\equiv\{(q\cdot r)|q[p]\}\equiv r|q[p]$

Ⅵ 23 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\dot{q}\cdot r)]$

$\equiv\{(\dot{p}\cdot q)|q[r]\}\equiv p|q[r]$

Ⅵ 24 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(\dot{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})]$

$\equiv\{(p\cdot r)|p[q]\}\equiv r|p[q]$

Ⅵ 25 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)]$

$\equiv\{p[q]|(q=r)\}\equiv p|(q=r)$

Ⅵ 26 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\dot{q}\cdot r)]$

$\equiv\{p[q]|(q\,\mathrm{W}\,r)\}\equiv\bar{p}|(q\,\mathrm{W}\,r)$

Ⅵ 27 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\dot{p}\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv\{(q\cdot r)|p[q]\}\equiv r|p[q]$

Ⅵ 28 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv\{(\bar{p}\cdot q)|\bar{q}[r]\}\equiv\bar{p}|\bar{q}[r]$

逆运算的原理，引领着Ⅱ类运算到Ⅵ类运算的转换，该原理，也就是§1节中使用的原理，即表达式，比如Ⅱ1＝$(p\cdot q)\cdot p[r]$。该表达式可简化为两个复合运算$x=p\cdot q$及$y=p[r]$，二者由分量运算(·)合在一起，于是有$x\cdot y$。而Ⅵ1的逆运算，也会是分量运算的反演结果，即$\bar{x}\,\bar{y}$。于是，像命题(10)里一样，我们有了以下结果：

(13)
$$x\cdot\bar{y}\equiv(p\cdot q)\cdot\bar{q}[r]\equiv[(p\cdot q)\cdot(\bar{q}r\vee\bar{q}r)]\equiv0$$
$$\bar{x}\cdot y\equiv(p|q)\cdot q[r]\equiv[(p\cdot\bar{q}\vee\bar{p}\cdot q\vee\bar{p}\cdot\bar{q})\cdot(q\cdot r\vee q\cdot\bar{r})]$$
$$\equiv[(p\cdot q\cdot r)\vee(\dot{p}\cdot q\cdot\bar{r})]$$
$$\dot{x}\cdot y\equiv(p|q)\cdot q[r]\equiv[(p\cdot q\vee p\cdot q\vee\bar{p}\cdot\bar{q})\cdot(q\cdot r\vee\bar{q}\cdot\bar{r})]$$
$$\equiv[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$$

这正好得出了结果，运算Ⅵ1。同样对于运算Ⅱ7的表达式形式，我们会有①：

① W这个符号表示互逆排斥的关系。参看《逻辑通论》，第236页和第262页。

(14)
$$x\cdot y\equiv[(p=q)\cdot(\overline{p=r})]\equiv[(p=q)\cdot(p\,W\,r)]$$
$$\equiv[(p\cdot q)\vee(\bar p\cdot\bar q)]\cdot[(p\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot r)]$$
$$\equiv[(p\cdot q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot r)]$$
$$\bar x\cdot y\equiv[(\overline{p=q})\cdot(p=r)]\equiv[(p\,W\,q)\cdot(p=r)]$$
$$\equiv[(p\cdot\bar q)\vee(\bar p\cdot q)]\cdot[(p\cdot r)\vee(\bar p\cdot\bar r)]$$
$$\equiv[(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot\bar r)]$$
$$\bar x\cdot\bar y\equiv[(p\cdot\bar q)\vee(\bar p\cdot q)]\cdot[(p\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot r)]$$
$$\equiv[(p\cdot\bar q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)]$$

然而,表达式$(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$,正好是运算Ⅵ7。所以从Ⅱ类运算的反演变为Ⅵ类运算,完全基于二元运算的反演原理。

§3 56个Ⅲ类运算和56个Ⅴ类运算

在56个Ⅲ类运算(3个一位运算)中,有8个运算不能简化为单二元—二元运算形式,只能简化为双二元—二元运算或双一元—二元运算的形式。至于其他48个运算,有24个运算是别无二致,可以简化为单二元—二元运算或单一元—二元运算的形式,而另外24个运算只能归并为单二元—二元运算的形式(如我们已经看到的运算Ⅱ7,Ⅱ12,Ⅱ16以及Ⅱ19)。

下面我们首先展示的是56个Ⅲ类运算的常数表:

(15)
Ⅲ1 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\supset q)\cdot(p|r)]\equiv p\cdot(q\vee r)$

Ⅲ2 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\supset q)\cdot(p\supset r)]\equiv p\cdot(r\supset q)$

Ⅲ3 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\supset q)\cdot(q|r)]\equiv q\cdot(p\vee r)$

Ⅲ4 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\supset q)\cdot(q\supset r)]\equiv q\cdot(r\supset p)$

Ⅲ5 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\supset q)\cdot(q\vee r)]\equiv[(p\supset q)\cdot(p\vee r)]$

Ⅲ6 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot\bar r)]\equiv[(p=q)\cdot(r\supset q)]\equiv[(p=q)\cdot(r\supset p)]$

Ⅲ7 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot\bar r)]\equiv[(p\supset q)|(p|r)]\equiv p\cdot(q\supset r)$

Ⅲ8 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\supset r)\cdot(q|r)]\equiv r\cdot(p\vee q)$

Ⅲ9 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p=r)\cdot(p\vee q)]\equiv[(p=r)\cdot(q\vee r)]$

Ⅲ10 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\supset r)\cdot(r\supset q)]\equiv r\cdot(q\supset p)$

Ⅲ11 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot\bar r)]\equiv[(p=r)\cdot(q\supset r)]\equiv[(p=r)\cdot(q\supset p)]$

Ⅲ12 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\vee q)\cdot(q=r)]\equiv[(p\vee r)\cdot(q=r)]$

Ⅲ13 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv\{(p\cdot q)=r[q]\}\cdot[(p\cdot q)|(q\cdot r)]$
$$\equiv[(p\cdot q)=r]\cdot[(p\cdot q)|\cdot\bar r]$$

Ⅲ14 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot r)]\equiv\{(p\cdot r)=q[r]\}\cdot[(p\cdot q)|(q\cdot\bar r)]$

$[(p \cdot r)\ [illegible]\ q] \cdot [(p \cdot q) | r]$

Ⅲ15 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r)] \equiv [(q=r) \cdot (q \supset p)] \equiv [(q=r) \cdot (r \supset p)]$

Ⅲ16 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r})]$ [illegible]

Ⅲ17 [illegible]

Ⅲ18 [illegible] $(p \supset q) \cdot (q=r)] \equiv [(p \supset r) \cdot (q=r)]$

Ⅲ19 [illegible] $\{(q \cdot r) = p[r]\} \cdot [(p \cdot q) | (q \cdot r)]$

$[p=(q \cdot r)] \cdot [(p \cdot q$ [illegible]

Ⅲ20 [illegible] $[(p=r) \cdot (r \supset q)] \equiv [(p=r) \cdot (p \supset q)]$

Ⅲ21 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r)] \equiv [(p=q) \cdot (q \supset r)] \equiv [(p=q) \cdot (p \supset r)]$

Ⅲ22 [illegible]

Ⅲ23 [illegible] $\{p[q]=(q=r)\} \cdot [(p \cdot q) | (q \cdot r)]$

$[(p \mathrm{W} q)=r] \cdot [(p \cdot q) | \cdot r]$

Ⅲ24 $[(p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (q \mathrm{W} r)] \equiv [(r \supset p) \cdot (q \mathrm{W} r)]$

Ⅲ25 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)] \equiv [(p \vee r) \cdot (q \mathrm{W} r)] \equiv [(q \supset p) \cdot (q \mathrm{W} r)]$

Ⅲ26 $[(p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r)] \equiv \{p[q]=(p \vee r)\} \cdot [(p \cdot q) | (q \cdot r)]$

[illegible] $[(p \cdot q) | r]$

Ⅲ27 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (p \mathrm{W} r)]$ [illegible] $(p \mathrm{W} r) \cdot (r \supset q)]$

Ⅲ28 [illegible]

Ⅲ29 [illegible] $[(p \mathrm{W} r) \cdot (r | q)] \equiv [(p \mathrm{W} r) \cdot (q \supset p)]$

Ⅲ30 [illegible] $[(p \supset r) | (q \vee r)] \equiv \bar{r} \cdot (q \supset p)$

Ⅲ31 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r})] \equiv [(q \supset p) | (q \supset r)] \equiv q \cdot (p | r)$

Ⅲ32 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r)] \equiv [(p \supset q) \cdot (p \mathrm{W} r)] \equiv [(p \mathrm{W} r) \cdot (q \vee r)]$

Ⅲ33 [illegible] $\{q[p]=(p \vee r)\} \cdot [(p \cdot q) | (q \cdot r)]$

[illegible]

Ⅲ34 [illegible] $\equiv [(p \supset q) \cdot (q \mathrm{W} r)] \equiv [(p | r) \cdot (q \mathrm{W} r)]$

Ⅲ35 $[(p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)] \equiv [(p \vee r) | (q \supset r)] \equiv r \cdot (p \supset q)$

Ⅲ36 $[(p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r)] \equiv [(p=q) \cdot (p | r)] \equiv [(p=q) \cdot (q | r)]$

Ⅲ37 [illegible] $[(p \mathrm{W} q) \cdot (p \vee r)] \equiv [(p \mathrm{W} q) \cdot (q \supset r)]$

Ⅲ38 [illegible]

Ⅲ39 [illegible]

Ⅲ40 [illegible]

Ⅲ41 $[(p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r})] \equiv [(p \mathrm{W} q) \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \mathrm{W} q) \cdot (p \supset r)]$

Ⅲ42 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r)] \equiv [(r \supset p) | (r \supset q)] \equiv r \cdot (p | q)$

Ⅲ43 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)] \equiv \{(p \vee q)=r[q]\} \cdot [(p \cdot q) | (q \cdot r)]$

$[(p \vee q)=r] \cdot [(p \cdot q) | r]$

Ⅲ44 [illegible] $[(p | q) \cdot (q \mathrm{W} r)] \equiv [(p \supset r) \cdot (q \mathrm{W} r)]$

Ⅲ45 [illegible] $[(p | q) \cdot (p=r)] \equiv [(p=r) \cdot (q | r)]$

Ⅲ46 $[(p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r)] \equiv [(p \vee q) | (r \supset q)] \equiv q \cdot (p \supset r)$

Ⅲ47 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\,W\,q)\cdot(p|r)]\equiv[(p\,W\,q)\cdot(r\supset q)]$

Ⅲ48 $[(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)]\equiv[(p\,W\,r)\cdot(p|q)]\equiv[(p\,W\,r)\cdot(q\supset r)]$

Ⅲ49 $[(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})]\equiv[(p|q)\cdot(q=r)]\equiv[(p|r)\cdot(q=r)]$

Ⅲ50 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)]\equiv\{p[q]=(q=r)\}\cdot[(p\cdot q)|(q\cdot r)]$

$\equiv[(p=q)=r]\cdot[(p\cdot q)\ r]$

Ⅲ51 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\vee r)|(q\vee r)]\equiv r\cdot(p|q)$

Ⅲ52 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\vee q)|(q\vee r)]\equiv q\cdot(p|r)$

Ⅲ53 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(q\supset p)|(r\supset p)]\equiv p\cdot(q\vee r)$

Ⅲ54 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(q\supset p)|(p\vee r)]\equiv p\cdot(r\supset q)$

Ⅲ55 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\vee q)|(r\supset p)]\equiv p\cdot(q\supset r)$

Ⅲ56 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\vee q)|(p\vee r)]\equiv\bar{p}\cdot(q\ r)$

为对这些表达式进行反演，我们需要重新否定分量运算，即，在此种特殊情况下，需要用不相容(|)代替逻辑积(•)；对于每一个Ⅲ类运算，在Ⅴ类中都有对应它的一个逆运算，也就是在Ⅶ类中的它的互补运算。另一方面，我们还要想到，每个表达式中只有唯一的一个分量运算。在双二元—二元运算或双二元—二元运算的表达式中，例如运算Ⅲ13，分量运算即是合取(conjonction)(或不相容)，它连接了第一个和第二个二元—二元(或二元—二元)运算的复合运算；就是这个唯一的分量运算，需要进行逆运算，以达到从Ⅲ13到Ⅵ13的转移。

为将来叙述的便利，我们用一张完整的Ⅴ类运算常数表来作为援引，这也许是有用的，尽管很容易看出，这张表就是从上一张表推演出来的，请看下表：

(16) Ⅴ1 $[(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)]$

$\equiv[(p|q)\cdot(p|r)]\equiv p|(q\vee r)$

Ⅴ2 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})]$

$\equiv[(p|q\cdot)(p\supset r)]\equiv p|(r\supset q)$①

Ⅴ3 $[(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)]$

$\equiv[(p|q)\cdot(q|r)]\equiv q|(p\vee r)$

Ⅴ4 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv[(p|q)\cdot(q\supset r)]\equiv q|(r\supset p)$

Ⅴ5 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv[(p=q)|(q\vee r)]\equiv[(p=q)|(p\vee r)]$

Ⅴ6 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv[(p=q)|(r\supset q)]\equiv[(p=q)|(r\supset p)]$

Ⅴ7 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

① 此处应为Ⅴ2 $[(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p|q)\cdot(p\supset r)]\equiv p|(r\supset q)$，疑为原文编辑笔误，此处按原文。——译者注

$$\equiv[(p\supset q)\cdot(p|r)]\equiv p|(q\supset r)$$

V 8 $[(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$$\equiv[(p|r)\cdot(q|r)]\equiv r|(p\vee q)$$

V 9 $[(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)]$

$$\equiv[(p=r)|(p\vee q)]\equiv[(p=r)|(q\vee r)]$$

V 10 $[(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})]$

$$\equiv[(p|r)\cdot(r\supset q)]\equiv r|(q\supset p)$$

V 11 $[(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$$\equiv[(p=r)|(q\supset r)]\equiv[(p=r)|(q\supset p)]$$

V 12 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$

$$\equiv[(p\vee q)|(q=r)]\equiv[(p\vee r)|(q=r)]$$

V 13 $[(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)]$

$$\equiv\{(p\cdot q)=r[q]\}|[(\bar{p}\cdot \bar{q})|(\bar{q}\cdot \bar{r})]\equiv[(p\cdot q)=r]|[(\bar{p}\cdot \bar{q})|\bar{r}]$$

V 14 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$$\equiv\{(p\cdot r)=q[r]\}|[(\bar{p}\cdot \bar{q})|(\bar{q}\cdot \bar{r})]\equiv[(p\cdot r)=q]|[(\bar{p}\cdot \bar{q})|\bar{r}]$$

V 15 $[(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)]$

$$[(q\ \ r)\ (q\supset p)\quad (q\ \ r)\ (r\supset p)]$$

V 16 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})]$

$$\equiv[(q\supset p)\cdot(q|r)]\equiv q|(p\supset r)$$

V 17 $[(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})]$

$$\equiv[(r\supset p)\cdot(q|r)]\equiv r|(p\supset q)$$

V 18 $[(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$$[(p\supset q)\ (q\ \ r)\equiv(p\supset r)\ (q=r)]$$

V 19 $[(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$$(q\cdot r)\ \ p[r]\ \ [(p\cdot q)\ (q\cdot r)]\ \ [p\ \ (q\cdot r)]\ [(p\cdot q)\ r]$$

V 2) $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$

$$[(p=r)\ (r\supset q)\quad (p\ \ r)\ (p\supset q)]$$

V 21 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$$\equiv[(p=q)|(q\supset r)]\equiv[(p=q)|(p\supset r)]$$

V 22 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})]$

$$\equiv[(p\supset q)\cdot(p\supset r)]\equiv p|(q|r)$$

V 23 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv[p|q]\equiv(q|r)\equiv[(p\cdot q)|(q\cdot r)]\equiv[(p\,W\,q)|r]\equiv[(p\cdot q)|r]$①

V 24 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)]$

$\equiv[(p\vee q)|(q\,W\,r)]\equiv[(r\supset p)|(q\,W\,r)]$

V 25 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)]$

$\equiv[(p\vee r)|(q\,W\,r)]\equiv[(q\supset p)|(q\,W\,r)]$

V 26 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)]$

$\equiv[p|q]\equiv(q\vee r)\equiv[(p\cdot q)|(q\cdot r)]\equiv[p|(q\vee r)]\equiv[(p\cdot q)|r]$

V 27 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})]$

$\equiv[(p\vee q)|(p\,W\,r)]\equiv[(p\,W\,r)|(r\supset q)]$

V 28 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)]$

$\equiv[(p\supset r)\cdot(q\supset r)]\equiv\bar{r}|(p\vee q)$

V 29 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv[(p\,W\,r)|(r|q)]\equiv[(p\,W\,r)|(q\supset p)]$

V 30 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv[(p\supset r)\cdot(q\vee r)]\equiv\bar{r}|(q\supset p)$

V 31 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})]$

$\equiv[(q\supset p)\cdot(q\supset r)]\equiv q|(p|r)$

V 32 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})]$

$\equiv[(p\supset q)|(p\,W\,r)]\equiv[(p\,W\,r)|(q\vee r)]$

V 33 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv q|[p\equiv(p\vee r)\equiv[(p\cdot q)|(q\cdot r)]\equiv[q|(p\vee r)]\cdot[(p\cdot q)|r]$

V 34 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})]$

$\equiv[(p\supset q)|(q\,W\,r)]\equiv[(p|r)|(q\,W\,r)]$

V 35 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv[(p\vee r)\cdot(q\supset r)]\equiv\bar{r}|(p\supset q)$

V 36 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)]$

$\equiv[(p\equiv q)|(p|r)]\equiv[(p\equiv q)|(q|r)]$

V 37 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})]$

$\equiv[(p\,W\,q)|(p\vee r)]\equiv[(p\,W\,q)|(q\supset r)]$

V 38 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$\equiv[(p\,W\,q)|(q|r)]\equiv[(p\,W\,q)|(r\supset p)]$

① 此处应为V 23 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)]\equiv[p|q]\equiv(q|r)\equiv[(p\cdot q)|(q\cdot r)]\equiv[(p\,W\,q)|r]\equiv[(p\cdot q)|r]$，疑为原文编辑笔误，此处按原文。——译者注。

V 39 $(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)$

$\equiv [(p \supset q) \cdot (r \supset q)] \equiv \bar{q} \mid (p \vee r)$

V 40 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r)]$

$\equiv [(p \supset q) \cdot (q \vee r)] \equiv \bar{q} \mid (r \supset p)$

V 41 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r})]$

$\equiv [(p \mathbin{W} q) \mid (q \vee r)] \equiv [(p \mathbin{W} q) \mid (p \supset r)]$

V 42 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)]$

$\equiv [(r \supset p) \cdot (r \supset q)] \equiv r \mid (p \mid q)$

V 43 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r)]$

$(p \vee q) \quad r \quad q \quad (p \cdot q) \quad (q \cdot r) \quad [(p \vee q) \quad r \quad (p \cdot q) \quad r$

V 44 $(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)$

$\equiv [(p \mid q) \mid (q \mathbin{W} r)] \equiv [(p \supset r) \mid (q \mathbin{W} r)]$

V 45 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r)]$

$\equiv [(p \mid q) \mid (p = r)] \equiv [(p \supset r) \mid (q \mid r)]$

V 46 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r})]$

$\equiv [(p \vee q) \cdot (r \supset q)] \equiv q \mid (p \supset r)$

V 47 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r)]$

$(p \mathbin{W} q) \quad (p \quad r) \quad (p \mathbin{W} q) \quad (r \supset q)$

V 48 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)]$

$\equiv [(p \mathbin{W} r) \mid (p \mid q)] \equiv [(p \mathbin{W} r) \mid (q \supset r)]$

V 49 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r)]$

$\equiv [(p \quad q) \mid (q = r)] \equiv [(p \mid r) \mid (q = r)]$

V 50 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)]$

$p[q] = (q = r)\} \mid [(p \cdot q) \mid (q \cdot r)] \equiv [(p = q) = r] \mid [(p \cdot q) \mid r]$

V 51 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r)]$

$[(p \vee r) \cdot (q \vee r)] \quad r \quad (p \quad q)$

V 52 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r})]$

$\equiv [(p \vee q) \cdot (q \vee r)] \equiv q \mid (p \mid r)$

V 53 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)]$

$\equiv [(q \supset p) \cdot (r \supset p)] \equiv \bar{p} \mid (q \vee r)$

V 54 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r)]$

$\equiv [(q \supset p) \cdot (p \vee r)] \equiv p \mid (r \supset q)$

V 55 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r})]$

$\equiv [(p \vee q) \cdot (r \supset p)] \quad p \quad (q \supset r)$

V 56 $[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r)]$

$$\neg\{\bar{p}[p]|(q|r)\}=p|(q|r)$$

在这里，这种不相容性的唯一的演算(calcul)样例是：运算Ⅲ13，在其双一元—二元形式下的复杂的运算表达式。不相容运算公式为：$x|y \equiv (\bar{x}y \vee x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y})$；我们将 x 看作一元—二元运算的第一个复合运算，而 y 作为第二个复合运算。于是我们得到以下结果：

(17) $x=[(p \cdot q)=r]$，所以 $x\equiv[(p \cdot q) \mathrm{W} r]$，

或 $x\equiv[(p|q)=r]$，抑或 $\bar{x}\equiv[(p \cdot q)=r]$

(17 乙) $y=(\bar{p} \cdot \bar{q}|\bar{r})$，所以 $\bar{y}\equiv[(\bar{p} \cdot \bar{q}) \cdot \bar{r}]\equiv(\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r)$

(参看§1中的Ⅰ8)其中

(18) $x\bar{y}=[(p \cdot q)=r] \cdot [\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}]$

$\equiv[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r})] \cdot [\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}]$

$\equiv(\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r})$

$\bar{x}y\equiv[(p \cdot q)=\bar{r}] \cdot [p \cdot q \cdot r]$

$\equiv[(p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r)]$

$\cdot [(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r)$

$\vee (\bar{p} q q \cdot \bar{r})$①$\vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r)]$

$\equiv[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r)]$

$\bar{x} \cdot \bar{y}\equiv[(p \cdot q)=\bar{r}] \cdot (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r})\equiv 0$

所以

$x|y\equiv[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r})]$

$\equiv$ Ⅴ13

因此，我们可以看到，在这里逆运算的法则依旧保持与之前的完全一致，唯一的不同在于计算的复杂性增加了。

§4 70个Ⅳ类运算

由4个三位运算命题构成的标准的三元运算表达式，可分为：(a)24个可简化为单一元—二元运算的表达式；(b)38个可以别无二致地简化为单一元—二元或单二元—二元运算的表达式；以及(c)8个只能转变为双一元—二元或双一元—二元运算的表达式(或者还有二重二元形式，不过这样的表达式，实际上可以说它依旧处于二元运算的形式)。至于Ⅳ类运算的反演，它们仍旧是Ⅳ类运算，其中Ⅳ1到Ⅳ35运算表达式的反演分别对应运算Ⅳ70到Ⅳ36(详见下表)。

① 此处应为$(p \cdot q \cdot r)$，疑为原文编辑笔误，此处按原文。——译者注

(19)

	序号 N.
Ⅳ 1 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot\bar r)]\equiv\{p[q]\cdot(q*r)\}\equiv[p\cdot(q*r)]$	Ⅳ 70
Ⅳ 2 [illegible] $\equiv\{[(p\vee q)\cdot(q\vee r)]\cdot[(q\vee r)\cdot(p\vee r)]\}\equiv\{[\bar p\|(q\ r)]\cdot[\bar q.(p\|r)]\}$	[illegible]
Ⅳ 3 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)]\equiv[(r\supset p)\cdot(q\vee r)]\equiv[(p\|r)\|(q\supset r)]$	Ⅳ 68
Ⅳ 4 [illegible]	[illegible]
Ⅳ 5 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot\bar r)]\equiv[(p=q)=(r\supset q)]\equiv[p=(q\vee r)]$	Ⅳ 66
Ⅳ 6 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\vee r)\cdot(r\supset q)]\equiv[(p\supset r)\|(q\|r)]$	Ⅳ 65
Ⅳ 7 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar r)]$ [illegible]	Ⅳ 64
Ⅳ 8 [illegible]	[illegible]
Ⅳ 9 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(q\supset p)\cdot(r\supset q)]\equiv[(p\ q)\|(q\vee r)]$	Ⅳ 62
Ⅳ 10 [illegible]	[illegible]
Ⅳ 11 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)]\equiv[(p\supset q)\cdot(p\vee r)]\equiv[(p\ q)\|(r\supset p)]$	Ⅳ 60
Ⅳ 12 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot r)]\equiv[(p\supset r)=(q=r)]\equiv[q=(p\vee r)]$	Ⅳ 59
Ⅳ 13 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p=q)=(p\vee r)]\equiv[q=(r\supset p)]$	Ⅳ 58
Ⅳ 14 [illegible]	[illegible]
Ⅳ 15 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot\bar r)]\equiv[(p=r)=(q=r)]\equiv\{p=q[r]\}$	Ⅳ 56
Ⅳ 16 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\vee q)\cdot(q\supset r)]\equiv[(p\supset q)\ (q\ r)]$	Ⅳ 55
Ⅳ 17 [illegible]	Ⅳ 54
Ⅳ 18 [illegible] [illegible]	[illegible]
Ⅳ 19 [illegible]	[illegible]
Ⅳ 20 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar r)]\equiv[(p\vee q)\cdot(p\supset r)]\equiv[(q\supset p)\|(p\|r)]$	Ⅳ 51
Ⅳ 21 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv\{r[p]\cdot(p*q)\}\equiv[r\cdot(p*q)]$	[illegible]
Ⅳ 22 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\ r)\ (q\supset p)]\equiv[r=(q\vee p)]$	[illegible]
Ⅳ 23 [illegible]	Ⅳ 48
Ⅳ 24 [illegible]	Ⅳ 47

	序号Ⅳ
Ⅳ 25 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(q\supset p)\cdot(p\ r)]\equiv[(p\vee q)\ (p\ r)]$ [illegible]	Ⅳ 46
Ⅳ 26 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)]\equiv[(p\equiv q)\equiv(p\cdot r)]\equiv[q\equiv(p\supset r)]$	Ⅳ 45
Ⅳ 27 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\vee q)\equiv(q\equiv r)]\equiv[r\equiv(p\supset q)]$	Ⅳ 44
Ⅳ 28 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot r)]\equiv[(p\equiv q)\equiv(p\equiv r)]\equiv\{q\equiv r[p]\}$	Ⅳ 43
Ⅳ 29 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot r)]\equiv\{p[q]\equiv(q\equiv r)\}\equiv[p\equiv(q\equiv r)]$	Ⅳ 42
Ⅳ 30 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)]\equiv[(p\supset q)\equiv(p\equiv r)]\equiv[r\equiv(p\cdot q)]$	Ⅳ 41
Ⅳ 31 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\equiv q)\equiv(p\supset r)]\equiv[q\equiv(p\cdot r)]$	Ⅳ 40
Ⅳ 32 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$ [illegible] $\equiv\{[(p\supset q)\cdot(q\vee r)]\cdot[(q\vee r)\cdot(p\supset r)]\}\equiv\{[p\mid(q\mid r)]\cdot[q\mid(p\ r)]\}$	Ⅳ 39
Ⅳ 33 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot \bar r)]\equiv[(p\supset r)\cdot(r\supset q)]\equiv[(p\vee r)\ (q\mid r)]$	Ⅳ 38
Ⅳ 34 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\supset q)\cdot(q\supset r)]\equiv[(p\vee q)\ (q\ r)]$ [illegible]	Ⅳ 37
Ⅳ 35 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\equiv q)\equiv(q\ r)]\equiv[p\equiv(q\cdot r)]$ [illegible]	Ⅳ [illegible]
Ⅳ 36 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\equiv q)\equiv(q\cdot r)]\equiv[p\equiv(q\ r)]$ [illegible]	Ⅳ [illegible]
Ⅳ 37 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\supset q)\mid(q\supset r)]\equiv[(p\vee q)\cdot(q\ r)]$	Ⅳ 34
Ⅳ 38 $[(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)]\equiv[(p\supset r)\mid(r\supset q)]\equiv[(p\vee r)\cdot(q\mid r)]$	Ⅳ 33
Ⅳ 39 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$ $\equiv$ [illegible]	Ⅳ 32
Ⅳ 40 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\equiv q)\equiv(p\cdot \bar r)]\equiv[q\ \mathrm{W}\ (p\cdot r)]$	Ⅳ [illegible]
Ⅳ 41 $[(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot r)]\equiv[(p\cdot \bar q)\equiv(p\equiv r)]\equiv[r\equiv(p\mid q)]$	Ⅳ [illegible]
Ⅳ 42 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar r)]\equiv\{p[q]\equiv(q\equiv r)\}\equiv[p\equiv(q\ \mathrm{W}\ r)]$	Ⅳ [illegible]
Ⅳ 43 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\equiv q)\ \mathrm{W}\ (p\equiv r)]\equiv\{q\ \mathrm{W}\ r[p]\}$	Ⅳ 28
Ⅳ 44 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\cdot q)\equiv(q\equiv r)]\equiv[r\ \mathrm{W}\ (p\supset q)]$	Ⅳ 27
Ⅳ 45 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\equiv q)\equiv(p\ r)]\equiv[q\ \mathrm{W}\ (p\supset r)]$ [illegible]	Ⅳ 26
Ⅳ 46 $[(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot \bar r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot \bar r)]\equiv[(q\supset p)\cdot(p\supset r)]\equiv[(p\vee q)\cdot(p\ r)]$	Ⅳ 25
Ⅳ 47 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\ q)\ \mathrm{W}\ (q\ r)]\equiv[p\equiv(r\ q)]$ [illegible]	Ⅳ 24
Ⅳ 48 $[(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot \bar q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot \bar q\cdot \bar r)]\equiv[(p\cdot q)\equiv(p\equiv r)]\equiv[r\equiv(p\cdot q)]$	Ⅳ 23
Ⅳ 49 $[(p\cdot q\cdot \bar r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(\bar p\cdot q)\equiv(p\equiv r)]\equiv[r\equiv(\bar p\cdot \bar q)]$	Ⅳ 22
Ⅳ 50 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[r\ p]\equiv[(p\cdot q)\equiv r]\ (p\cdot q)$ [illegible]	Ⅳ 21

	序号 N.
Ⅳ 51 $[(p\cdot q\cdot\bar r)\vee(p\cdot\bar q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\vee q)\ (p\supset r)]\equiv[(q\supset p)\cdot(p\ r)]$	Ⅳ 20
Ⅳ 52 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot r)]\equiv[(r\supset p)\mid(q\supset r)]\equiv[(p\mid r)\cdot(q\vee r)]$	Ⅳ 19
Ⅳ 53 $[(p\cdot q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$ $\equiv$ [illegible]	Ⅳ 18
Ⅳ 54 $[(p\cdot q\cdot\bar r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot\bar r)]\equiv[(p=q)\ \mathrm{W}\ (q\cdot r)]\equiv[p=(q\cdot\bar r)]$	Ⅳ 17
Ⅳ 55 [illegible]	Ⅳ 16
Ⅳ 56 $[(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot\bar r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot\bar r)]\equiv[(p=r)\ \mathrm{W}\ (q=r)]\equiv(p=\bar q[r])$	Ⅳ 15
Ⅳ 57 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot\bar r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)]\equiv[(p\supset q)\mid(r\supset p)]\equiv[(p\mid q)\cdot(p\vee r)]$	Ⅳ 14
Ⅳ 58 $[(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot\bar r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p=q)=(p\cdot\bar r)]\equiv[q=(p\cdot r)]$	Ⅳ 13
Ⅳ 59 $[(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot\bar r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)]\equiv[(p\supset r)\ \mathrm{W}\ (q=r)]\equiv[q=(p\vee r)]$	Ⅳ 12
Ⅳ 60 $[(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar r)]\equiv[(p\supset q)\mid(p\vee r)]\equiv[(p\ q)\cdot(r\supset p)]$	Ⅳ 11
Ⅳ 61 $[(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot\bar r)]\equiv\{q[p]\mid(p\ast r)\}\equiv[q\mid(p\ast r)]$	Ⅳ 10
Ⅳ 62 $[(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot r)]\equiv[(q\supset p)\mid(r\supset q)]\equiv[(p\mid q)\cdot(q\vee r)]$	Ⅳ 9
Ⅳ 63 [illegible]	Ⅳ 8
Ⅳ 64 $[(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot\bar r)]$ $\equiv\{[(p\vee q)\cdot(r\supset q)]\ [(p\vee q)\cdot(r\supset p)]\}\equiv\{[r\mid(p\mid q)],[p\mid(q\mid r)]\}$	Ⅳ 7
Ⅳ 65 $[(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p\vee r)\mid(r\supset q)]\equiv[(p\supset r)\cdot(q\ r)]$	Ⅳ 6
Ⅳ 66 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]\equiv[(p=q)=(\bar q\cdot r)]\equiv[p=(\bar q\cdot\bar r)]$	Ⅳ 5
Ⅳ 67 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(\bar p\cdot q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot\bar r)]\equiv[(q\supset p)\mid(q\vee r)]\equiv[(p\mid q)\cdot(r\supset q)]$	Ⅳ 4
Ⅳ 68 $[(p\cdot\bar q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)\vee(p\cdot\bar q\cdot r)]\equiv[(r\supset p)\mid(q\vee r)]\equiv[(p\mid r)\cdot(q\supset r)]$	Ⅳ 3
Ⅳ 69 [illegible] $\equiv$ [illegible]	Ⅳ 2
Ⅳ 70 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot r)\vee(\bar p\cdot\bar q\cdot r)]\equiv\{p[q]\mid(q\ast r)\}\equiv[p\ (q\ast r)]$	Ⅳ 1

以上这些运算的反演都基于同样的原理，也是根据前面同样的法则进行的推演，唯一的区别是，除了合取（·）被反演为不相容（ ），反之亦然之外，有必要注意的是，逻辑等价[即肯定（=）]被反演为互反否定（W）。

例如，Ⅳ 5［$p=(q\vee r)$］，根据分量运算（ ）到其反演（W）的转换，被反演为Ⅳ 66［$p\ \mathrm{W}\ (q\vee r)$］。我们可以用 x 代表第一个复合运算（一元运算 p），用 y 代表第二个复合运算（$q\vee r$）。于是，我们得到：

(20) $[x=y]\equiv[(x\cdot y)\vee(\bar{x}\cdot\bar{y})]$，以及$[x\,\mathrm{W}\,y]\equiv[(x\cdot\bar{y})\vee(\bar{x}\cdot y)]$

其中

(21) $[x=y]\equiv[p\cdot(q\cdot r\vee q\cdot\bar{r}\vee\bar{q}\cdot r)]\vee[\bar{p}\cdot(q\cdot\bar{r})]$

$\equiv[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

$[x\,\mathrm{W}\,y]\equiv[p\cdot(q\cdot r)]\vee[p\cdot(q\cdot r\vee q\cdot\bar{r}\vee\bar{q}\cdot r)]$

$\equiv[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

自然，我们也有$[x\,\mathrm{W}\,y]\equiv(x\neq y)\equiv(x\neq y)$，其中，可能的逆运算是从$p\equiv(q\vee r)$到$p=(\bar{q}\cdot r)$，也就是说，$(x=y)$反演为$(x=y)$或$(x=y)$。

至于其中的8个复杂运算表达式Ⅳ 2、7、18、32、39、53、61和69，除了它们标准的三元运算形式之外，还可以用二元联式的三位运算形式表达如下：

(22) Ⅳ 2 $\equiv[(p\vee q)\cdot(q\vee r)\cdot(p\vee r)]$　　Ⅳ 69 $\equiv[(p|q)\cdot(q|r)\cdot(p|r)]$

Ⅳ 7 $\equiv[(p\vee q)\cdot(r\supset q)\cdot(r\supset p)]$　　Ⅳ 64 $\equiv[(p\supset r)\cdot(q\supset r)\cdot(p|q)]$

Ⅳ 18 $\equiv[(p\vee r)\cdot(q\supset p)\cdot(q\supset r)]$　　Ⅳ 53 $\equiv[(p\supset q)\cdot(r\supset q)\cdot(p|r)]$

Ⅳ 32 $\equiv[(p\supset q)\cdot(q\vee r)\cdot(p\supset r)]$　　Ⅳ 39 $\equiv[(q\supset p)\cdot(r\supset p)\cdot(q|r)]$

但是这样的二元联式的三位运算形式，要么等价于双二元——二元运算形式(通过重复3个二元复合运算中的一个得到的)，要么等价于双一元——二元运算形式。举例说明，我们将运算Ⅳ 7，用后一个简化过程，展示如下：

(23) Ⅳ 7 $\equiv[(r\supset q)\cdot(r\supset p)\cdot(p\vee q)]=[(\bar{r}\vee q)\cdot(\bar{r}\vee p)\cdot(p\vee q)]$

$\equiv[\bar{r}\vee(p\cdot q)]\cdot[p\vee(q\cdot\bar{r})]$

而$\bar{x}\vee\bar{y}\equiv x|y$。所以：

(23乙) Ⅳ 7 $\equiv[(r\supset q)\cdot(r\supset p)\cdot(p\vee q)]\equiv[r|(p|q)]\cdot[\bar{p}|(q|\bar{r})]$

对于运算的(双二元——二元或双一元——二元)复杂表达式以及其反演的运算，(我们)可以根据Ⅲ类中的双一元——二元或双二元——二元运算表达式进行推演(参看§3节)。

§5　实际运用：结论的推演

所有的256个二元运算可以被简化为：

(a) 152个单一元——二元运算(0类和Ⅷ类中有2个；Ⅰ类和Ⅶ类中有16个；Ⅱ类和Ⅵ类中有48个；Ⅲ类和Ⅴ类中有48个；Ⅳ类中有38个)。

(b) 80个单二元——二元运算(Ⅱ类和Ⅵ类中有8个；Ⅲ类和Ⅴ类中有48个；Ⅳ类中有24个)。

(c) 24个双一元——二元运算(Ⅲ类和Ⅴ类中有16个；Ⅳ类中有8个)。

但是，在(a)列表中的152个运算，也可以用(b)列中80个运算的单二元——二元形式表达出来(互反为真除外)，而且(c)列中的24个运算，也可以用双二元——二元形式表

达。因此，这 256 个三元运算，都可以转换为二元—二元运算的形式，有的是单式的(a 列和 b 列的 232 个运算)，有的是双式的(c 列)。

若我们坚持将 §1—4 中所罗列的 256 个三元运算，都用单或双的二元—二元运算形式书写，那么不管是在理论方面，还是实际运用方面，都是有利的。事实上，所有的二元—二元运算表达式，回归到两个命题的连接上，其中有一个运算中项一次可以在两个命题中进行表达，也就是说，用第三个命题进行两次表达。例如，在运算Ⅳ 9 的表达式中，$[(q\supset p)\cdot(r\supset q)]$，命题 q 就是作为运算中项，连接了命题 p 和命题 r(此外，在这种特殊情况下，所涉及的，准确说来，是三段论中的两个前提)。

这就是我们在接下来将会用到的转换运算中的一个，它是由一个中项的置换构成的(转换运算 Pm，参看 §14)，它可以实现将 256 个三元运算由一个转换为另一个。通过用运算中项 p 替代运算中项 q(转换运算 Pqp)，我们可以有效地将运算Ⅳ 9 转换为运算Ⅴ 53$[(q\supset p)\cdot(r\supset p)]$，这样就将运算转换成了另一属类中的运算。为推广普及 Pm 这样的转换运算，我们需要将 256 个三元运算表达为单或双二元—二元运算的形式。

另一方面，从实际应用看来，由一个分量运算连接的两个二元复合运算，可以被看作一个可以导出结论的论证(中项推理)的两个前提。

鉴于此，(我们)需要用到一条非常简单的法则。

运算法则 2：一个二元－二元运算表达式的结论，是一个二元运算，其中是不作为运算中项的两个命题彼此相连，该运算可以是和一个不改变自身的二元—二元运算表达式的(·)组合构成，并且成对运算中的每一个，都以该二元运算的选言范式形式呈现，可以连接上三位命题中的至少一个命题，且该命题是由二元—二元运算表达式的选言范式构成。

例如，运算Ⅳ9 $[(q\supset p)\cdot(r\supset q)]$的结论是二元运算$(r\supset p)$。因为，组合构成中：

(24) $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)]\cdot[(p\cdot r)\vee(p\cdot \bar{r})\vee(\bar{p}\cdot \bar{r})]$

$=(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$

Ⅳ 9 的初始的运算表达式并没有改变，每一个成对运算$(p\cdot r)\vee(p\cdot r)\vee(p\cdot r)$中，结合了Ⅳ 9 范式中至少一个三位命题的运算。

相反，这个结论不能是$(p\cdot r)$，因为Ⅳ 9 和$(p\cdot r)$的逻辑积(·)只能①得到$(p\cdot q\cdot r)$，它是通过消减$(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$而修改了运算Ⅳ 9 的表达式。这个结论也不能是$(p*r)$，因为运算$(p*r)$的选言范式包括，除成对的如$(r\supset p)$类的运算形式，还有$(p\cdot r)$，该运算不能进入任何一个构成运算Ⅳ 9 选言表达范式的三位运算结构。

① 事实上$(p\cdot q\cdot r)$和$(p\cdot r)$共同的部分是$(p\cdot q\cdot r)$并不是$(p\cdot r)$，因为$(p\cdot q\cdot r)$要比$(p\cdot r)$受到更多限制。

第二章 用于256个三元运算中的4种转换群

三元运算总是可能被简化为单或双二元——二元运算表达式，其间需要了解的问题是，在三元运算领域这样的简化，是以哪一种形式来实现的：反演、互反、对射和同一。我们在之前的二元运算[1]领域的转换群中提到过这些形式。

§6 互反转换和对射转换的演算

任何一个三元运算，例如，运算IV 3［$(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})$］，其二元——二元表达式是 $(r\supset p)\cdot(q\vee r)$。如果我们将一个运算的逆运算定义为"全称肯定"的三元运算下的补（命题2），这样，我们很清晰地知道，运算IV 3包括一个逆运算，且是唯一的一个运算。该运算由运算IV 3中不曾出现的三元运算部分构成，并以全称肯定的形式呈现，于是，该逆运算即运算IV 68。因此，三元运算的反演，归结为二元性规则在三元范式下的应用，即一些(∨)和(·)以及其他命题运算符号的置换转变。即，在运算IV 3的情况中，我们有：

(25)
$$
\begin{aligned}
&\mathrm{N\ IV\ 3}[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot \bar{r})\vee(p\cdot \bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})]\\
&=[(\bar{p}\vee\bar{q}\vee\bar{r})\cdot(\bar{p}\vee\bar{q}\vee r)\cdot(p\vee q\vee\bar{r})\cdot(p\vee q\vee r)]\\
&\equiv[(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})]\\
&\equiv\mathrm{IV\ 68}
\end{aligned}
$$

然而，我们刚刚注意到（§1—1），在反演一个三元运算时，我们只需要先将三元运算转换为（单或双）二元——二元运算或一元——二元运算的表达式，再反演其"分量运算"即可。因此IV 3［$(r\supset p)\cdot(q\vee r)$］反演为 $(r\not\supset p)\vee\overline{(q\vee r)}$＝IV 68。既然三元运算可以简化为二元运算，因此，二元运算逻辑的转换规则也可以应用至这些三元运算的反演中，在此情况下，将这些运算视为一个基本单位（这些"复合"运算可以被看作组合运算的构成部分），于是三元运算转变为二元的运算（"分量"运算）。

① 参看前言部分。

那互反和对射的转换关系又是如何呢?

一个运算的互反是在否定的命题下进行的同一运算。例如 $p \vee q$ 的互反是 $p \vee q$ ($= p|q$)。我们可以很清晰地看出,我们是直接通过反演这个运算的选言范式的命题符号,获得了一个三元运算的互反,这样运算Ⅳ 3 的互反即:

(26) $$R[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)]$$
$$=[(\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r)] = \text{Ⅳ } 65$$

然而,若所有的三元运算都可以简化为二元组合运算,那我们是否可以直接从这个二元复合表达式转换为其互反运算,则是我们需要研究的问题。不过,这一操作是可行的。

运算法则 3:为求取三元运算的互反 R,建立一个单或双二元—二元运算或一元—二元运算表达式形式,只需要将这些二元(或一元)"复合运算"转换它们的互反运算,并保持"分量运算"不变。

事实上,任何一个运算表达式的互反都是同一个运算的表达式,只是其中涉及的命题符号变了,对于一个二元运算的互反,也是同样的运算,只是更换了命题的符号,这样,很清楚,一个二元—二元运算或一元—二元运算表示的互反也会是同样的运算,但是在它们的互反时,需要转换复合运算。因此,对于运算Ⅳ 3,我们有了:

(27) $$R[(r \supset p) \cdot (q \vee r)] \equiv [(\bar{r} \supset p) \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \supset r) \cdot (q|r)]$$

事实上,$(p \supset r) \cdot (q|r)$ 就是运算Ⅳ 65,其中选言范式是由方程式(26)的第二枝构成。

至于对射转换 C,从定义说来,在一个给定的运算范式里,在不改变命题符号的情况下,它是运算($\vee$)和($\cdot$)置换转变的结果。所以运算Ⅳ 3 的对射 C 将是:

(28) $$C[(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r})]$$
$$=[(p \vee q \vee r) \cdot (p \vee q \vee \bar{r}) \cdot (p \vee q \vee r) \cdot (p \vee q \vee \bar{r})]$$
$$= (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot p \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)$$
$$= \text{Ⅳ } 6$$

我们发现,既然只有命题符号从运算Ⅳ 68 反演为运算Ⅳ 6,而运算并没有改变,这个运算表达式(其范式下既是连续的也是选言的),就是运算Ⅳ 68 的互反(参见命题25)。既然运算Ⅳ 68 是运算Ⅳ 3 的反演,这正好印证了 INRC 转换群的一条规则,即,对射是互反的逆运算①:C=RN(这里Ⅳ 6,Ⅳ 3 的 C,是Ⅳ 3 的反演Ⅳ 68 的 R)

① 参看《逻辑通论》,第 285—286 页。

既然对射是互反的逆运算，因而我们就可以用互反的反演、一种二元运算来推演对射关系：

(29) $(\mathrm{C}\ \mathrm{IV}\ 3)=(\mathrm{RN}\ \mathrm{IV}\ 3)=(\mathrm{R}\ \mathrm{IV}\ 68)=\mathrm{R}[(r\supset p)|(q\vee r)]$

$$=[(p\supset r)|(q|r)]=\mathrm{IV}\ 6$$

另一方面，对射也是互反的反演①：C＝NR。运算Ⅳ 3的互反R是运算Ⅳ 65，因此运算Ⅳ 3的对射C将会是运算Ⅳ 65的反演(即Ⅳ 6)。我们可以用两种方式进行推演。首先，这里有二元性的规则：

(30) $(\mathrm{C}\ \mathrm{IV}\ 3)=(\mathrm{N}\ \mathrm{IV}\ 65)$

$$=[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$$

$$=[(p\vee q\vee r)\cdot(p\vee q\vee\bar{r})\cdot(p\vee\bar{q}\vee r)\cdot(p\vee q\vee\bar{r})]$$

$$=\mathrm{IV}\ 6$$

这一条也完全吻合了命题(28)。

然后，我们可以用二元运算来推演互反的反演：

(31) $(\mathrm{C}\ \mathrm{IV}\ 3)=(\mathrm{N}\ \mathrm{IV}\ 65)=[(p\supset r)\cdot(q\ r)]=[(p\supset r)\ (q\ r)]=\mathrm{IV}\ 6$

当然，其中这里也产生了这样的一个问题，我们是否也能直接去定义目标运算表达式的对射C，中间不必通过媒介C＝RN或者C＝NR(命题29—31)，且不是仅限于二元运算的转换(28)，而是用二元运算来推演——这一操作，同样也是可行的。

运算法则1：一个二元运算表达式的对射建立(mise sous)二元运算组合(或一元二元运算组合)的形式，通过将所有的对射部分替换为二元(或一元)运算，复合运算替换为分量运算，且不改变命题符号，从而实现。

在运算Ⅳ 3的情况中，对射转换的结果是：

(32) $\mathrm{C}\ \mathrm{IV}\ 3[(r\supset p)\cdot(q\vee r)]=[(p\cdot\bar{r})\vee(q\cdot r)]=[(\overline{p\cdot\bar{r}})|(\overline{q\cdot r})]$

$$=[(p\supset r)|(q|r)]=\mathrm{IV}\ 6$$

事实上，$(r\supset p)$的对射是$(p\cdot r)$；而$(q\vee r)$的对射是$(q\cdot r)$，分量运算$(\cdot)$的对射是$(\vee)$。这里$\mathrm{C}\ \mathrm{IV}\ 3=[(p\cdot r)\vee(q\cdot r)]$。然而$x\vee y$ … x，及$x\vee y$ … y。所以只需要否定$(p\cdot r)$和$(q\cdot r)$再用$(|)$替代$(\vee)$就可得到$[(p\supset r)|(q|r)]$，即运算Ⅳ 6。

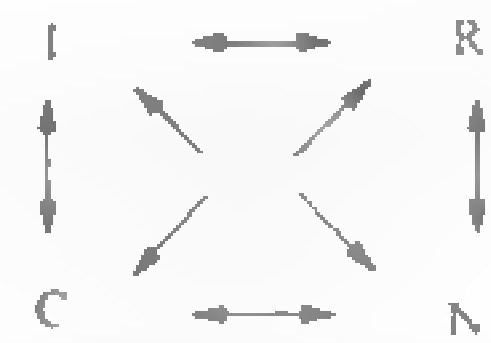
因此，我们发现，对于(命题29到31)，我们所得到的结果都是一样的，而且所使用的方法，既直接同时又都是专门针对二元运算的。

① 参看《逻辑通论》，第285－286页。

总的说来，我们发现，正如反演转换一样，通过二元逻辑中抽取的整个过程，除了范式中的三元推演外，一个运算的互反和对射是能够被推演出来的。所以，现在需要研究的是，在256个三元运算领域，INRC转换群应该采用哪种形式。

§7 用于256个三元运算中的反演、互反、对射和同一关系的转换群

在16个二元运算中，8个运算呈现出明显区分的反演、互反、对射关系，4个运算呈现为R＝N以及C＝I的关系（p和q的肯定和否定），4个运算呈现为R＝I以及C＝N的关系（对等……，以及完全肯定和完全否定）①。这反过来说明，在16个二元运算中，我们只找到了两对完整的四位运算，两对R＝N、C＝I以及两对R＝I、C＝N（两类不同的转换）运算。



于是，我们猜想，是否这样的份额同样也存在于256个三元运算的情况中，抑或，是否两类不同转换的成对情况，只适用于可能的矩阵运算的对角线中。事实上，16个二元运算构成了一个4×4关系的矩阵，这里的8个运算构成4对所提到的运算，既很好地对应了这个矩阵的两个对角线，也正好占了整个运算一半的比例。另一方面，256个三元运算构成的，是一个16×16关系的矩阵：在这种情况下，我们会发现有128个运算属于完整的四位运算，有64个运算为成对运算吗？抑或，反过来，我们会发现有56组完整的四位运算（224个运算），以及16对（32个运算）运算对应上述两条对角线吗？其中，第二种假设在后面被证实了。

根据0—Ⅷ类、Ⅰ—Ⅶ类、Ⅱ—Ⅵ类、Ⅲ—Ⅴ类以及Ⅳ类的次序，我们先给大家罗列上INRC转换组群的清单。

---

① 参看《逻辑通论》，第270—273页。

(33)

运算①	反演	互反（R）	对射（C）
VIII [p*(q*r)]	O (0)	VIII [p*(q*r)]	O (0)
I1 [p·(q·r)]	VII1[p|(q·r)]	I8[p̄·(q̄·r̄)]	VII 8[p|(q·r)]
I2 [p·(q·r̄)]	VII2 [p|(q·r̄)]	I7[p·(q·r)]	VII7[p̄|(q̄·r)]
I3 [p·(q̄·r)]	VII3[p|(q·r)]	I6[p·(q·r)]	VII 6[p|(q·r)]
I4[p·(q·r)]	VII4 [p|(q·r)]	I5[p·(q·r)]	VII5[p|(q·r)]
II1 {p·q[r]}	VI1 {p|q[r]}	II28 {p·q[r]}	VI 28{p̄|q̄[r]}
II2 {r·p[q]}	VI2 {r|p[q]}	II27 {r̄·p̄[q]}	VI27 {r|p[q]}
II3 p·(q=r)	VI3 p|(q=r)	II25p̄·(q=r)	VI25p̄|(q=r)
II4 r·q[p]	VI4 r|q[p]	II22r̄·q̄[p]	VI22r̄|q[p]
II5 q·(p=r)	VI5 q|(p=r)	II18 q̄·(p=r)	VI 18q̄|(p=r)
II6 r·(p=q)	VI6 r|(p=q)	II13r̄·(p=q)	VI 13r|(p=q)
II7(p·q)·(q·r)	VI7(p·q)|(q·r)	II7(p·q)·(q·r)	VI 7(p·q)|(q·r)
II8 p·(qWr)	VI8 p|(qWr)	II26 p̄·(qWr)	VI 26p̄|(qWr)
II9r̄·p[q]	VI9r̄|p[q]	II24 r·p̄[q]	VI 24 r|p̄[q]
II10 q·(pWr)	VI10 q|(pWr)	II21q̄·(pWr)	VI21q̄|(pWr)
II11r̄·q[p]	VI11r̄|q[p]	II17 r·q̄[p]	VI17 r|q̄[p]
II12(p=q)·(pWr)	VI12(p=q)|(pWr)	II12(p=q)·(pWr)	VI 12 (p=q)|(pWr)
II14 p·q̄[r]	VI14 p|q[r]	II23p̄·q[r]	VI23p̄|q[r]
II15 r·(pWq)	VI15 r|(pWq)	II20r̄·(pWq)	VI20r̄|(pWq)
II16 (pWq)·(p=r)	VI16 (pWq)|(p=r)	II16 (pWq)·(p=r)	VI 16 (pWq)|(p=r)
II19 (pWq)·(q=r)	VI19 (pWq)|(q=r)	II19 (pWq)·(q=r)	VI 19 (pWq)·(q=r)

① 在I这一栏中放上256个运算，是没有必要的，因为我们可以在每一栏里重建NR和C。例如，对于在R栏中的某一运算，比如运算I8的逆运算，即运算Ⅶ8（C栏），而其R则是I1（I栏），其C则是Ⅶ1（N栏），因为N=CR且C=NR。

② 此处应为Ⅶ4，疑为原文编辑笔误，此处按原文。——译者注

III1 $p\cdot(q\vee r)$	V1 $p\mid(q\vee r)$	III56 $p\cdot(q\cdot r)$	V56 $p\mid(q\cdot r)$
III2 $p\cdot(r\supset q)$	V2 $p\mid(r\supset q)$	III55 $p\cdot(q\supset r)$	V55 $p\mid(q\supset r)$
III3 $q\cdot(p\vee r)$	V3 $q\mid(p\vee r)$	III52 $\bar{q}\cdot(p\cdot r)$	V52 $\bar{q}\mid(p\cdot r)$
III4 $q\cdot(r\supset p)$	V4 $q\mid(r\supset p)$	III46 $\bar{q}\cdot(p\supset r)$	V46 $q\mid(p\supset r)$
III5 $(p=q)\cdot(q\vee r)$	V5 $(p=q)\mid(q\vee r)$	III36 $(p=q)\cdot(q\cdot r)$	V36 $(p=q)\mid(q\cdot r)$
III6 $(p=q)\cdot(r\supset p)$	V6 $(p=q)\mid(r\supset p)$	III21 $(p=q)\cdot(p\supset r)$	V21 $(p=q)\mid(p\supset r)$
III7 $p\cdot(q\supset r)$	V7 $p\mid(q\supset r)$	III54 $p\cdot(r\supset q)$	V54 $p\mid(r\supset q)$
III8 $r\cdot(p\vee q)$	V8 $r\mid(p\vee q)$	III51 $\bar{r}\cdot(p\cdot q)$	V51 $r\mid(p\cdot q)$
III9 $(p=r)\cdot(q\vee r)$	V9 $(p=r)\mid(q\vee r)$	III45 $(p=r)\cdot(q\cdot r)$	V45 $(p=r)\mid(q\cdot r)$
III10 $r\cdot(q\supset p)$	V10 $r\mid(q\supset p)$	III35 $r\cdot(p\supset q)$	V35 $r\mid(p\supset q)$
III11 $(p=r)\cdot(q\supset p)$	V11 $(p=r)\mid(q\supset p)$	III20 $(p=r)\cdot(p\supset q)$	V20 $(p=r)\mid(p\supset q)$
III12 $(p\vee q)\cdot(q=r)$	V12 $(p\vee q)\mid(q=r)$	III49 $(p\cdot q)\cdot(q=r)$	V49 $(p\mid q)\mid(q=r)$
III13 $[(p\cdot q)=r]\cdot[(\bar{p}\cdot\bar{q})\mid r]$	V13 $[(p\cdot q)=r]\mid[(\bar{p}\cdot\bar{q})\mid\bar{r}]$	III43 $[(p\vee q)=r]\cdot[(p\cdot q)\mid r]$	V43 $[(p\vee q)=r]\mid[(p\cdot q)\mid r]$
III14 $[(p\cdot r)=q]\cdot[(\bar{p}\cdot\bar{q})\mid r]$	V14 $[(p\cdot r)=q]\mid[(\bar{p}\cdot\bar{q})\mid r]$	III33 $[(p\vee r)=q]\cdot[(p\cdot q)\mid r]$	V33 $[(p\vee r)=q]\mid[(p\cdot q)\mid r]$
III15 $(q=r)\cdot(q\supset p)$	V15 $(q=r)\mid(q\supset p)$	III18 $(q=r)\cdot(p\supset q)$	V18 $(q=r)\mid(p\supset q)$
III16 $q\cdot(p\supset r)$	V16 $q\mid(p\supset r)$	III40 $q\cdot(r\supset p)$	V40 $q\mid(r\supset p)$
III17 $r\cdot(p\supset q)$	V17 $r\mid(p\supset q)$	III30 $\bar{r}\cdot(q\supset p)$	V30 $r\mid(q\supset p)$
III19 $[p=(q\cdot r)]\cdot[(\bar{p}\cdot\bar{q})\mid\bar{r}]$	V19 $[p=(q\cdot r)]\mid[(\bar{p}\cdot\bar{q})\mid\bar{r}]$	III26 $[p=(q\vee r)]\cdot[(p\cdot q)\mid r]$	V26 $[p=(q\vee r)]\mid[(p\cdot q)\mid r]$
III22 $p\cdot(q\mid r)$	V22 $p\mid(q\mid r)$	III53 $\bar{p}\cdot(q\vee r)$	V53 $p\mid(q\vee r)$
III23 $[(p\mathrm{W}q)=r]\cdot[(\bar{p}\cdot\bar{q})\mid\bar{r}]$	V23 $[(p\mathrm{W}q)=r]\mid[(\bar{p}\cdot\bar{q})\mid\bar{r}]$	III50 $[(p=q)=r]\cdot[(p\cdot q)\mid r]$	V50 $[(p=q)=r]\mid[(p\cdot q)\mid r]$
III24 $(p\vee q)\cdot(q\mathrm{W}r)$	V24 $(p\vee q)\mid(q\mathrm{W}r)$	III44 $(p\mid q)\cdot(q\mathrm{W}r)$	V44 $(p\mid q)\mid(q\mathrm{W}r)$
III25 $(p\vee r)\cdot(q\mathrm{W}r)$	V25 $(p\vee r)\mid(q\mathrm{W}r)$	III34 $(p\mid r)\cdot(q\mathrm{W}r)$	V34 $(p\mid r)\mid(q\mathrm{W}r)$
III27 $(p\vee q)\cdot(p\mathrm{W}r)$	V27 $(p\vee q)\mid(p\mathrm{W}r)$	III48 $(p\mid q)\cdot(p\mathrm{W}r)$	V48 $(p\mid q)\mid(p\mathrm{W}r)$
III28 $\bar{r}\cdot(p\vee q)$	V28 $r\mid(p\vee q)$	III42 $r\cdot(p\mid q)$	V42 $r\mid(p\mid q)$
III29 $(p\mathrm{W}r)\cdot(q\supset p)$	V29 $(p\mathrm{W}r)\mid(q\supset p)$	III32 $(p\mathrm{W}r)\cdot(p\supset q)$	V32 $(p\mathrm{W}r)\mid(p\supset q)$
III31 $q\cdot(p\mid r)$	V31 $q\mid(p\mid r)$	III39 $\bar{q}\cdot(p\vee r)$	V39 $\bar{q}\mid(p\vee r)$
III37 $(p\mathrm{W}q)\cdot(p\vee r)$	V37 $(p\mathrm{W}q)\mid(p\vee r)$	III47 $(p\mathrm{W}q)\cdot(p\mid r)$	V47 $(p\mathrm{W}q)\mid(p\mid r)$
III38 $(p\mathrm{W}q)\cdot(q\mid r)$	V38 $(p\mathrm{W}q)\mid(q\mid r)$	III41 $(p\mathrm{W}q)\cdot(q\vee r)$	V41 $(p\mathrm{W}q)\mid(q\vee r)$
IV1 $p\cdot(q*r)$	IV70 $p\mid(q*r)$	IV70 $\bar{p}\cdot(q*r)$	IV1 $p\mid(q*r)$

IV2 $(p\vee q)\cdot(p\vee r)\cdot(q\vee r)$	IV69 $(p\mid q)\cdot(p\mid r)\cdot(q\mid r)$	IV69 $(p\mid q)\cdot(p\mid r)\cdot(q\mid r)$	IV2 $(p\vee q)\cdot(p\vee r)\cdot(q\vee r)$
IV3 $(r\supset p)\cdot(q\vee r)$	IV68 $(r\supset p)\mid(q\vee r)$	IV65 $(p\supset r)\cdot(q\mid r)$	IV6 $(p\supset r)\mid(q\mid r)$
IV4 $(q\supset p)\cdot(q\vee r)$	IV67 $(q\supset p)\mid(q\vee r)$	IV55 $(p\supset q)\cdot(q\mid r)$	IV16 $(p\supset q)\mid(q\mid r)$
IV5 $p=(q\vee r)$	IV66 $p\mathrm{W}(q\vee r)$	IV35 $\bar{p}=(q\mid r)$	IV36 $\bar{p}\mathrm{W}(q\mid r)$
IV7 $(p\vee q)\cdot(r\supset p)\cdot(r\supset q)$	IV64 $(p\mid q)\cdot(p\supset r)\cdot(q\supset r)$	IV64 $(p\mid q)\cdot(p\supset r)\cdot(q\supset r)$	IV7 $(p\vee q)\cdot(r\supset p)\cdot(r\supset q)$
IV8 $p=(r\supset q)$	IV63 $p\mathrm{W}(r\supset q)$	IV54 $\bar{p}=(q\supset r)$	IV17 $\bar{p}\mathrm{W}(q\supset r)$
IV9 $(q\supset p)\cdot(r\supset q)$	IV62 $(q\supset p)\mid(r\supset q)$	IV34 $(p\supset q)\cdot(q\supset r)$	IV37 $(p\supset q)\mid(q\supset r)$
IV10 $q\cdot(p*r)$	IV61 $q\,(p*r)$	IV61 $q\,(p*r)$	IV10 $\bar{q}\,(p*r)$
IV11 $(p\supset q)\cdot(p\vee r)$	IV60 $(p\supset q)\mid(p\vee r)$	IV51 $(q\supset p)\cdot(p\mid r)$	IV20 $(q\supset p)\mid(p\mid r)$
IV12 $q=(p\vee r)$	IV59 $q\mathrm{W}(p\vee r)$	IV31 $\bar{q}=(p\mid r)$	IV40 $\bar{q}\mathrm{W}(p\mid r)$
IV13 $q=(r\supset p)$	IV58 $q\mathrm{W}(r\supset p)$	IV45 $\bar{q}=(p\supset r)$	IV26 $\bar{q}\mathrm{W}(p\supset r)$
IV14 $(p\supset q)\cdot(r\supset p)$	IV57 $(p\supset q)\mid(r\supset p)$	IV25 $(q\supset p)\cdot(p\supset r)$	IV46 $(q\supset p)\mid(p\supset r)$
IV15 $p=q[r]$	IV56 $p=q[r]$	IV15 $p=q[r]$	IV56 $p=\hat{q}[r]$
IV18 $(q\supset p)\cdot(p\vee r)\cdot(q\supset r)$	IV53 $(p\supset q)\cdot(p\mid r)\cdot(r\supset q)$	IV53 $(p\supset q)\cdot(p\mid r)\cdot(r\supset q)$	IV18 $(q\supset p)\cdot(p\vee r)\cdot(q\supset r)$
IV19 $(r\supset p)\cdot(q\supset r)$	IV52 $(r\supset p)\mid(q\supset r)$	IV33 $(p\supset r)\cdot(r\supset q)$	IV38 $(p\supset r)\mid(r\supset q)$
IV21 $r\cdot(p*q)$	IV50 $r\mid(p*q)$	IV50 $\bar{r}\cdot(p*q)$	IV21 $\bar{r}\mid(p*q)$
IV22 $r=(p\vee q)$	IV49 $r\mathrm{W}(p\vee q)$	IV30 $\bar{r}=(p\mid q)$	IV41 $\bar{r}\mathrm{W}(p\mid q)$
IV23 $r=(q\supset p)$	IV48 $r\mathrm{W}(q\supset p)$	IV44 $\bar{r}=(p\supset q)$	IV27 $\bar{r}\mathrm{W}(p\supset q)$
IV24 $p=r[q]$	IV47 $p\mathrm{W}r[q]$	IV24 $p=r[q]$	IV47 $p\mathrm{W}r[q]$
IV28 $q=r[p]$	IV43 $q\mathrm{W}r[p]$	IV28 $q=r[p]$	IV43 $q\mathrm{W}r[p]$
IV29 $p=(q=r)$	IV42 $p\mathrm{W}(q=r)$	IV42 $p\mathrm{W}(q=r)$	IV29 $p=(q=r)$
IV32 $(p\supset q)\cdot(p\supset r)\cdot(q\vee r)$	IV39 $(q\supset p)\cdot(r\supset p)\cdot(q\mid r)$	IV39 $(q\supset p)\cdot(r\supset p)\cdot(q\mid r)$	IV32 $(p\supset q)\cdot(p\supset r)\cdot(q\vee r)$

总的说来，这256个三元运算构成了56组完整的四位运算（四种不同的转换），以及16对运算，其中的每一对只包括了四种转换关系中的两类转换。

这些成对运算中，前8对运算，呈现出同一运算中非区分转换的互反关系（R—I），以及递运算中的非区分的对射关系（C—N）。这些运算具体是：

（1）Ⅱ类和Ⅵ类中的运算7、12、16以及19，这8个运算由两组肯定和否定的等式构成：[$(p=q)\cdot(p\ \mathrm{W}\ r)$]等；

（2）Ⅷ类和Ⅸ类的运算都属于双倍数或四倍数的等值运算；

(3) Ⅳ类中的运算 15、24、28、43、47 以及 56，其分量运算为等值运算关系，其中的一个复合运算是 p，q 或 r 的肯定或否定：$p=q(r)$ 等等。而它们的三元—三元形式，则是一个三重的等值关系：$(p=r)=(q=r)$ 等等。

这些成对运算中的后 8 对，包括一个逆运算中非区分转换的互反关系(R—N)，以及一个同一运算中非分区转换的对射关系(C—I)。这些关系仅存在于Ⅳ类运算中：

(1) Ⅳ类中的 6 个运算 1、7、10、61、21 以及 50，属于 $p \cdot (q * r)$ 类型；

(2) Ⅳ类中的 8 个运算 2、69、7、61、18、53、32 以及 39，属于双三元—三元运算(或双二元—二元运算)类型；

(3) 两个运算：29 和 42，属于 $(p=q)=r$ 的形式。

因此，256 个三元运算，整体上是遵循着 INRC 群中的 4 种转换的规律的，这些转换，有的是四类区分转换，有的只是其中的两类。在引出这些情况的具体范围，以及了解矩阵对角线上所涉及的 8 对运算和 8 对只有两类区分转换运算的相互关系之前(参看§35)，我们需要检验的是，另外可能存在的转换关系，特别是，这些可以从一个四位运算或一个成对运算转换到另一个的结果，我们需要考察这个结果是既定的还是任意的。

§8　转换运算 Nh，Rh 和 Ch，Na，Ra 以及 Ca

这里的第一个问题是关于 INRC 转换(群)的可能外延。我们已经看到(运算法则 1)，一个三元—三元运算或二元—二元运算表达式的反演，已由“分量”运算(a)的否定确定了，然而，互反性(运算法则 3)改变的只是“复合”运算。于是，假若我们对这些复合运算进行否定，又会发生什么呢？首先，我们先介绍几个定义。

通过否定单一的分量运算，获得对反演的否定 N，我们用 Nh 这个符号，表示这样的一个转换运算：否定复合运算而不改变分量运算。

以此类推，我们分别用符号 Rh 和 Ch 表示：在不改变分量运算情况下，复合运算的互反转换(Rh)或对射转换(Ch)。

另一方面，我们分别用 Na、Ra 以及 Ca 表示：在不改变复合运算情况下，分量运算(a)的反演转换(Na)、互反转换(Ra)以及对射转换(Ca)。

根据运算法则 1，3 和 4，我们很自然得到：

(34)　　$N=Na$(法则 1)

(34 乙)　　$R=Rh$(法则 3)

(34 丙)　　$C=ChCa$(法则 4)

此外，因为在所有的二元或一元的运算中，我们都有 R=CN，C=RN，N=CR 以及 I=RNC(相互转换)，我们同样总会得到：

(35) Ch=NhRh 以及 Ca=RaNa

抑或

(35 乙) Rh=NhCh 以及 Ra=CaNa，等等

彼此抵消，于是，我们得到：

(36) NhRa=I

事实上，既然 N=RC，于是 Nh=RhCh。另一方面，基于同样的原因，我们知道 Ra=NaCa。然而，因为 Na=N 和 Rh=R(命题 34 和 34 乙)，于是 ChCa=C(命题 34 丙)以及 NaRh=NR=C。所以 NhRa=RhChNaCa=(ChCa)(NaRh)=CC=I。

例如 $p\cdot(q\vee r)$，得到 Ra=$p\vee(q\vee r)$ 以及 NhRa=$p\vee(q\cdot r)$。而 $p\vee(q\cdot r)=p|(q\vee r)$ 因为 $x\vee\bar{y}=x|y$。

将所有情况综合起来，我们得出以下结果：

(37) Nh=Ra

例如，$p\cdot(q\vee r)$ 的 Nh 是 $p\cdot(q\cdot r)$。但是对于合取 $x\cdot y$ 的互反是组合的否定 $(\bar{x}\cdot\bar{y})$，于是我们得到 Ra $p\cdot(q\vee r)=p\cdot(q\cdot r)$，这个结果和运算 Ra 的定义并不背道而驰，因为，这里分量运算的改变，推动了复合运算的变化，在作为复合运算的范围里，后者并没有被转换(在 Nh 情况里这正好相反)。

另一个例子：$pr\vee qr$ 中得到 $pr\cdot qr$ 作为 Ra 的结果。Nh 的转换，通过反转 $(p\cdot r)\vee(q\cdot r)$ 得到。但是，根据 $x\vee y=x\cdot y$，我们得到 $(p\cdot r)\vee(q\cdot r)=[pr\cdot qr]$

从命题(35)和(35 乙)中，我们可以提取出反射转换的一个新的表达式：

(38) C=RaNNhR(可交换的)

事实上，C=ChCa(34 丙)。然而 Ca=RaNa(35)=RaN(34)。另一方面(34 乙) NhR=NhRh=Ch(35)。所以 ChCa=NhRNRa。这正好证明了命题(38)。

但是，根据(36)和(37)，命题(38)可简化为：

(38 乙) C=RaNNhR=NR

这一运算，又将我们带回到了命题(29)和(31)，也就是说，对射转换的本质关系是 C=NR。

从命题(35)到(38)，我们都在致力于展现二元运算中二元—二元或一元—二元演算的内部一致性(coherence)。此外，用专属于的二元运算的[1]方法，在 INRC 转换可行

[1] 此外，Na、Ra 以及 Ca 的转换，帮助我们建构了 256 个二元运算格框架的上和下"确界"群(命题 247)。

的范围内，这个内部一致性也是很明显的。

不过，若命题(35)到(38)总是为真，也就是说，撇开所涉及的运算的既定形式不说，根据I(NhRa)，R(Rh)，N(Na)，C(Ch(Ca)群的一般规则，转换关系Nh，Ch，Ra和Ca，只会在它们之间被合成。反过来说，从我们开始单独使用一些转换——例如Nh——的时候开始，这些转换自然是，依存于所考虑的运算的选定的形式。例如，运算$p\cdot(q\cdot r)$ Ⅰ1的Nh是$p\cdot(q\ r)$ Ⅲ56。但是运算$(p\cdot q)\cdot(q\cdot r)$ Ⅰ1的Nh是$(p\ q)\cdot(q\ r)$ Ⅴ3。对于运算Ⅰ1，同样的转换Nh，产生了两种对等的形式，且为Ⅲ56和Ⅴ3，这是两个不对等的运算。这就是为什么转换Nh并不属于IRNC转换群，也就是说，它不属于常数表(33)中的4种内部转换中的四位运算或成对运算的关系。反过来，这个转换可以用于将一个四位运算关系转换为另一个，这也是我们现在要去检验的，这个我们在后面称之为"异质"(heterologues)的转换，因为，当我们改变给定的运算形式时，这些转换不能给出确切的等值或同质结果。

第三章 反演、互反或对射转换运算产生的异质转换

今后，转换运算 I、N、R 和 C，即被称为"同质性"(homologues)转换，意指所有相同运算的形式相同(或同质)，经受这些转换以后，在新的运算中同样会得相等的形式。例如，运算Ⅳ 6 呈现出两种等值形式 $(p \vee r) \cdot (r \supset q)$ 以及 $(p \supset r)\ (q\ r)$；而这两种形式的反演 N 也是彼此对等的：$(p \vee r)\ (r \supset q)$ $(p \supset r)\ (q\ r)$；二者的互反 R 依次是：$(p\ r) \cdot (q \supset r)$ $(r \supset p)\ (q \vee r)$，以及对射 C 也是：$(p\ r)\ (q \supset r)$ $(r \supset p) \cdot (q \vee r)$

不过，我们可以对由运算所确立的某种形式进行特定的转换，这种转换定义并形成了一致性集合的结构，除非这些转换得到是同样的结果，即同样的转换应用于其他形式时，得到了和这个运算等价的(同质的)结果，否则，我们说转换是"异质"的。例如，若在运算Ⅲ6 的形式 $(p \vee r) \cdot (r \supset q)$ 中，我们分别反演这两个复合运算，而不改变分量运算(Nh 转换)，于是得到了 $(p \cdot r) \cdot (q \cdot r)$，若我们对运算Ⅳ 6 的等值形式 $(q \supset r)\ (q\ r)$ 进行同样的转换 Nh，我们得到的是 $(p \cdot r)\ (q \cdot r)$ Ⅷ。

不过，这些异质性转换的存在，在两个点上值得我们注意。首先，该转换可以建构新的结构，通过联结一些这样的转换：两个或几个四位运算抑或成对的二元结构运算，每个都根据 I、N、R 和 C 转换群进行转换，还可以在每一种情况下，通过一个一致性系统，用异质性转换来建构这些同质性转换。这就是我们在接下来的几个章节中，要去研究的问题。第二点，从一般的逻辑阐述观点看，该转换展现了两个不是重言式等同的等值运算，因为，在同样的转换下，这两个等值的形式系统，不会得出相同的结果！因此，等价仅仅表示的是运算可替代性，根据情况，这种可替代的可能性可以是一般通用性的或在某些不同程度中有所限制的①。

这些异质性转换可分为两种类型，一种是通过各种不同的否定模式进行，另一种通过交换来实现。我们将在下一章中去分析第二种类型。至于第一种，这些转换包括了反演、互反(或命题的否定)以及对射(或逆命题的否定)，它们对所涉及的运算表达式中的复合运算中的一个、另一个或整体进行转换。

① 为从一种既定形式转变为另一种等值的形式，事实上，需要进行某些运算，而且是这些相同的运算，将这些等值形式的这些个和另一些个区别开来，于是，很自然地，这些运算在获得等值结果的同时是有区别的，当这些算式用一种新的运算构成时，它们自然得出不同的结果

§9　有 8 个元素的转换群 INRC 和 Nh

为对这个四位运算转换的每个元素，进行异质转换 Nh，我们重新以运算Ⅰ1 $p\cdot(q\cdot r)$ 和其转换 INRC 作为开始。于是，我们得到：

(39)
$$\mathrm{Nh}\,[p\cdot(q\cdot r)]\equiv p\cdot(q|r)\equiv \text{Ⅲ56 对应 Ⅰ1}$$
$$\mathrm{Nh}\,[p|(q\cdot r)]\equiv p|(q|r)\equiv \text{Ⅴ56 对应 Ⅶ1}$$
$$\mathrm{Nh}\,[p\cdot(\bar{q}\cdot r)]\equiv p\cdot(q\vee r)\equiv \text{Ⅲ1 对应 Ⅰ8}$$
$$\mathrm{Nh}\,[p|(q\cdot r)]\equiv p|(q\vee r)\equiv \text{Ⅴ1 对应 Ⅶ8}$$

然而，我们在更早之前看到（表35），运算Ⅴ56是运算Ⅲ56的逆运算，运算Ⅲ1是运算Ⅲ56的互反，运算Ⅴ1是运算Ⅰ8和运算Ⅶ8的对射。对于四位运算Ⅰ1、Ⅶ2、Ⅰ8和Ⅶ8，以 $p\cdot(q\cdot r)$ 等形式的四种转换 INRC，因此对应于另一个四位运算的4种转换，即构成了相同的转换群 INRC，但是由运算Ⅲ56、Ⅴ56、Ⅲ1以及Ⅴ1，以 $p\cdot(q\cdot r)$ 等形式构成；而且两组四位运算间的对应，是由每个元素的转换来确定的，从第一组元素到第二组，通过异质性运算 Nh 加以确定。

多亏了这种新的转换 Nh，它将以 INRC 为基础的四种转换运算翻了一倍，因此，在我们面前有了一种新的结构，我们将这个群命名为8元素组。我们可以根据这个群的结构，勾勒出下图（参看图1）：

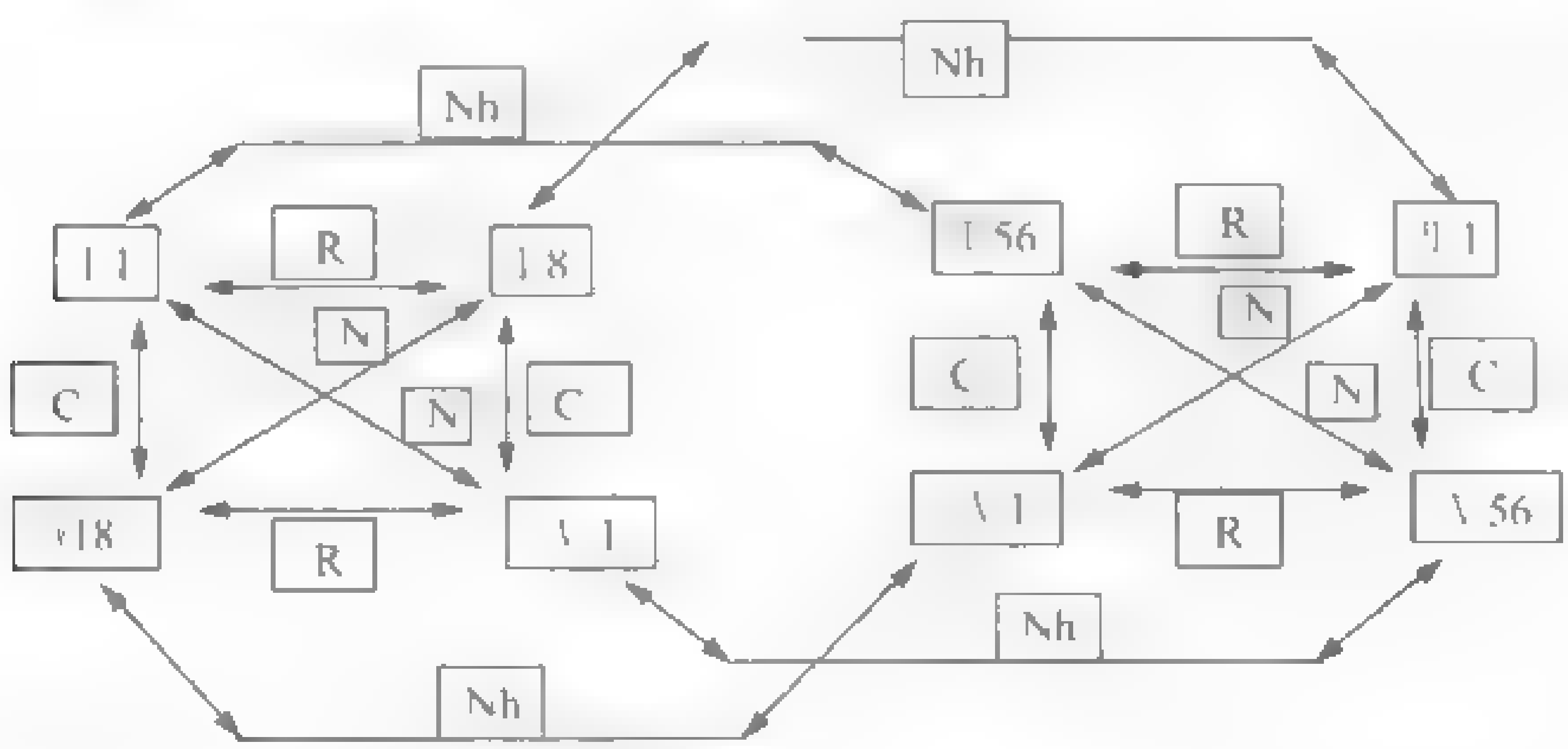


图 1

也就是说，例如Ⅰ1 $\xrightarrow{\mathrm{Nh}}$ Ⅲ56 $\xrightarrow{\mathrm{N}}$ Ⅴ56。我们将其简化为Ⅰ1 $\xrightarrow{\mathrm{CNhR}}$ Ⅴ56，事实上C（Ⅰ1）＝（Ⅶ8）；Nh（Ⅶ8）＝（Ⅴ1）以及R（Ⅴ1）＝Ⅴ56。同样地Ⅰ8 $\xrightarrow{\mathrm{NhN}}$ Ⅴ1＝Ⅰ8 $\xrightarrow{\mathrm{NNh}}$ Ⅴ1，因为Nh（Ⅰ8）＝（Ⅲ1）以及N（Ⅲ1）＝Ⅴ1。然而N（Ⅰ8）＝Ⅶ8以及Nh（Ⅶ8）＝Ⅴ1。

因此，和4个元素的群相比，这样的一个群构成的是一个独立且全新的完整结构，

用其他的交换及组合方式形成了转换运算 Nh。然而，必须强调这个事实，转换运算 Nh 是异质性的，运算Ⅲ56 等和运算Ⅰ1 等之间的关系，并不是像这两组四位运算中的每一个运算之间的内部关系一样，例如，只需要Ⅰ1 等运算，以及 $(p\cdot q)\cdot r$ 等形式，就可以在转换运算 Nh 中，将其转换为和Ⅲ56 等不同的运算。

(41)

$$\mathrm{Nh}\,[r\cdot(p\cdot q)]\equiv r\cdot(p|q) \qquad \text{Ⅲ51 对应 Ⅰ1}$$

$$\mathrm{Nh}\,[r|(p\cdot q)]\equiv \bar{r}|(p|q) \qquad \text{Ⅴ51 对应 Ⅶ1}$$

$$\mathrm{Nh}\,[r\cdot(p\cdot q)]\equiv r\cdot(p\vee q) \qquad \text{Ⅲ8 对应 Ⅰ8}$$

$$\mathrm{Nh}\,[\bar{r}|(\bar{p}\cdot\bar{q})]\equiv r|(p\vee q) \qquad \text{Ⅴ88 对应 Ⅶ8}$$

8 元素群，构成了一个界定清晰的结构，并不包含元素运算之间的种系关系，同样也限定了简单 INRC 群的构成。

然而，我们一下子就看到，如果根据用于运算Ⅰ1 等的形式，四位运算Ⅰ1—Ⅶ8，可以不加区别地转换为一组四位运算Ⅲ56—Ⅴ1，抑或一组四位运算Ⅲ51—Ⅴ8，这些多重对应并非是任意的，反而，它们自己构成了一个新的群。这也是为什么诸如运算Ⅰ1 中，从形式 $p\cdot(q\cdot r)$ 到形式 $r\cdot(p\cdot q)$ 的过渡本身，就构成了一个很确定的转换，该转换，我们后面称之为三元运算置换 Ppr。然而，通过对比表(39)和表(41)，我们注意到，运算Ⅲ56—Ⅴ1 和运算Ⅲ51—Ⅴ8 之间的区别，准确说来，在于这样的一个三元运算的置换，因此，通过同样的转换 Ppr，我们很容易就可以从Ⅲ56 转换为Ⅲ51，从Ⅴ56转换为Ⅴ51，从Ⅲ1 转换为Ⅲ8 以及从Ⅴ1 转换为Ⅴ8。在运算Ⅰ1 的情况中，形式 A $[p\cdot(q\cdot r)]$ 和 C $[r\cdot(p\cdot q)]$[1]，这里的两种形式 A 和 C 的关系是对等的，此为真，然而运算Ⅲ56 是一个区别于运算Ⅲ51 的运算，但是，在这两种情况里使用的转换运算是一样的。因此，这些对应关系：Ⅰ1A $\xrightarrow{\mathrm{Ppr}}$ Ⅰ1C $\xrightarrow{\mathrm{Nh}}$ Ⅲ51 $\xrightarrow{\mathrm{Prp}}$ Ⅲ56 $\xrightarrow{\mathrm{Nh}}$ Ⅰ1A，构成了一个新的，比之前的（关于 Ppqr 运算的不可交换性）运算更为复杂的群。但是，在用置换分析完异质性转换之前，我们还不能进行这部分研究。目前，我们仅限于总结，通过否定，这些异质性转换是否不能获得同质性转换的一般性，这些转换一点也不能，让新群构成一个很确定的结构，而且这些新的群，可以轮到它们，作为一个更加复杂的群结构的起始点，我们紧接着，在下面章节中，就会看到这样的分析。此外，在不脱离分量运算的转换 Nh 时，我们即将从§10 节开始，验证将 8 元素群并入 16 元素群的可能性。

§10 有 16 个元素的转换群 Ng，Nd，Nh 和 INRC

现在，我们还处在仅限于否定两个复合运算中一个运算的阶段，而且我们是从一个

[1] 我们在后面（§17）将三元运算中的 p，q 或 r 称之为 A，B 和 C，所以这里不能混淆了在逻辑三段论的格中的符号 C，与表示对射关系的符号 C。后面不会再有这种两可情况的可能。

一元—二元运算的表达式开始的。在这种情况中，我们用符号 Ng 表示，总是写在左边的左侧复合运算的否定，约定俗成地是一个二元运算；Ng 就是这个二元运算的否定。Nd 则是反过来，表示右侧复合运算的否定，也就是，约定俗成中的这个一元复合运算。我们很自然有：

(42)　　$$\mathrm{NgNd}=\mathrm{NdNg}=\mathrm{Nh}$$

以及

(42 乙)　　$$\mathrm{NdNgNh}=\mathrm{I}$$

借用表(41)的形式，我们再次拿运算Ⅰ1、Ⅶ1、Ⅰ8 以及Ⅶ8 的这组四位运算为例子，于是，我们得到了转换运算 Ng、Nd 和 Nh 的常数表(参看表 43)。

(43)	1)运算	2)(1)的 Nd	3)(1)的 Ng	4)(2)的 Ng=(3)的 Nd=(1)的 Nh
I	Ⅰ1 $[r\cdot(p\cdot q)]$	$[r\cdot(p\mid q)]\equiv$ Ⅲ42	$[r\cdot(p\cdot q)]\equiv$ Ⅰ2	$[\bar{r}\cdot(p\mid q)]\equiv$ Ⅲ51
N	Ⅶ1 $[r\mid(p\cdot q)]$	$[r\mid(p\mid q)]\equiv$ Ⅴ42	$[\bar{r}\mid(p\cdot q)]\equiv$ Ⅶ2	$[r\mid(p\mid q)]\equiv$ Ⅴ51
R	Ⅰ8 $[\bar{r}\cdot(\bar{p}\cdot\bar{q})]$	$[\bar{r}\cdot(p\vee q)]\equiv$ Ⅲ28	$[r\cdot(p\cdot q)]\equiv$ Ⅰ7	$[r\cdot(p\vee q)]\equiv$ Ⅲ8
C	Ⅶ8 $[r\mid(p\cdot\bar{q})]$	$[r\mid(p\vee q)]\equiv$ Ⅴ28	$[r\mid(p\cdot q)]\equiv$ Ⅶ7	$[r\mid(p\vee q)]\equiv$ Ⅴ8

从这样的一个简洁明了的结构系统中，我们看到：第四栏的运算既是第一个运算的 Nh，同时也是第二个运算的 Ng，还是第三个运算的 Nd。还有 Nd 是 Ng 的 Nh，反之亦然。因此，我们总会得出：

(43 乙)　　$$\mathrm{Nd}=\mathrm{NhNg}\quad\text{以及}\quad\mathrm{Ng}=\mathrm{NhNd}\ (\text{交换性})$$

此外，4 个 Nd、4 个 Ng 和 4 个 Nh 分别是它们各自的四位运算 INRC 和一开始的四位运算中的四个运算对应(见第一栏)。

例如，运算Ⅴ8 是运算Ⅶ8 的 Nd(Ⅶ7)N(Ⅰ7)R(Ⅰ2 的)Nh(Ⅲ12)C(Ⅴ28)以及 Nd。但是运算Ⅴ8 也是运算Ⅶ8 的 C(Ⅲ1)Ng(Ⅰ2)N(Ⅶ2)Nd(Ⅴ1)，Nh(Ⅶ1)以及 R，也就是说，这两列转换 NdNRNhCNd 和 CNgNNdNhR 源自同一个起点(Ⅴ8)到同一个结果(Ⅶ8)，使用的是两条不同的路径。此外，这两条转换路径都归结为转换 Nh(因为 NdNd=I 且 CNR=I)。

我们还需检证 Nh、Ng 及 Nd 转换的 16 元素群的另外一个例子，而且我们现在需要选择一个在三元—二元运算的情景中的例子。在这一点上，我们首先需要做的是，为我们之所谓的左边运算所对应的右边运算制定出一个标准。对于一个运算中项为 p 的表达式，我们用 $p(\alpha)q$ 表示左运算，用 $p(\beta)r$ 表示右运算。若中项运算为 q，运算 $p(\alpha)q$ 也表示的是左运算，$q(\beta)r$ 表示右运算。若中项运算为 r，那么 $p(\alpha)r$ 表示左运算，$q(\beta)r$ 表示右运算。这些命题名称符号，在运算 α 和 β 的对换运算中依旧适用。命题的类型部分保持原样(从这一点来看，$y\supset x$ 相当于 $x\subset y$)。

也就是说，例如，运算Ⅳ3 $[(p\ \ r),(q\ \ r)]$ 中，转换运算 Ng 的结果为 $[(p\cdot r)\ (q\supset r)]$，转换运算 Nd 的结果为 $[(p\ \ r)\ (q\cdot r)]$。所以我们会得到同样的群的形式(参看表 44)。

(44)

	1)运算	2)(1)的 Nd	3)(1)的 Ng	4)(1)的 Nh＝(2)的 Ng＝(3)的 Nd
I	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
N	Ⅳ 68 $[(p\ r)\cdot(q\supset r)]$	$[(p\vert r)\cdot(q\cdot\bar{r})]$＝Ⅱ 11	$[(p\cdot r)\cdot(q\supset r)]$＝Ⅱ 2	$[(p\cdot r)\cdot(q\cdot\bar{r})]$＝O
R	Ⅳ 65 $[(p\vee r),(r\supset q)]$	$[(p\vee r)\vert(q\cdot r)]$＝Ⅵ 17	$[(p\cdot r)\vert(r\supset q)]$＝Ⅵ 2	$[(p\cdot r)\vert(q\cdot r)]$＝Ⅷ
C	Ⅳ 6 $[(p\vee r)\cdot(r\supset q)]$	$[(p\vee r)\cdot(q\cdot r)]$＝Ⅱ 17	$[(p\cdot r)\cdot(r\supset q)]$＝Ⅱ 27	$[(p\cdot r)\cdot(q\cdot r)]$＝O

事实上，我们会从中发现和表(43)一样的结构体系，而且我们发现命题(42)和(42乙)也得到了印证。只有在特殊情况下，比如运算Ⅷ和运算O中，我们有N＝I以及R＝C，也就是说，互反和对射转换关系并不构成同向或反向的区分转换：$[(p*q)\cdot(q*r)]=[(p*q)\cdot(q*r)]$以及$[(p*q)\vee(q*r)]=[(p*q)\vee(q*r)]$。但是，在Ⅷ—O中从四位运算到成对运算的简化中，不会改变转换运算INRC、Nh、Ng以及Nd构成的群结构。所以，该转换群依旧保有一元——二元或二元——一元运算，以及完整的四位运算，或成对的R＝I及N＝C运算，及运算规则。

然而，作为异质性转换的Nh、Ng和Nd，我们知道，同一个运算不一定会得出同样的一元——二元运算或二元——二元运算形式下的结果Nh等。例如，我们给运算Ⅲ12一个二元——二元的运算形式$(r\supset p)\cdot(r\supset q)$，这时转换运算Nh，不再得到如(43)中显示的结果Ⅰ2 $r\cdot(p\cdot q)$，而是得到结果Ⅶ7 $(p\cdot r)\vee(q\cdot r)=r\vee(p\cdot q)$，这是Ⅰ2的对射C。只有再一次出现这样明显的不规则，跟在事实上遵循准确的规则之后，我们才能了解，是什么支配着转换运算Nh和分配律(distributivite)之间的关系。

我们知道，二元运算(·)和(∨)是分配性运算，每个运算都有自己的考虑，并且也有一个运算对于另一个运算的关系(这里包括运算$p\vee q$、$p\supset q$、$q\supset p$、$p\supset q$以及$q\supset p$，它们各自形式下的$p\vee q$、$p\vee q$、$p\vee q$、$p\cdot q$以及$p\cdot q$，但是不包括运算 、W、*、o以及$p\ q$等)。所以，对于4组完整的四位二元运算，以及对于所有的可以用运算项(∨)和(·)表达为一元和二元形式的二元运算，我们无论如何，都可以有命题符号x、y以及z进行如下表示：

(45) $x\cdot(y\vee z)=(x\cdot y)\vee(x\cdot z)$ 以及 $x\vee(y\cdot z)=(x\vee y)\cdot(x\vee z)$

然而，若我们将以D作为代表符号，表示的(45)这个分配关系，用转换运算Nh来构成，我们发现二者是不能交换的，但是，其中呈现出了这个运算的一般性质：其转换构成在一个方向得出的结果，与另一方向构成结果之间，是对射关系：

(46) NhD＝CDNh 以及 DNh＝CNhD

因为：$x\cdot(y\vee z)\xrightarrow{D}[(x\cdot y)\vee(x\cdot z)]\xrightarrow{Nh}[(\bar{x}\vee\bar{y})\vee(\bar{x}\vee\bar{z})]$

以及：$x\cdot(y\vee z)\xrightarrow{Nh}\bar{x}\cdot(\bar{y}\cdot\bar{z})\xrightarrow{D}[(\bar{x}\cdot\bar{y})\cdot(\bar{x}\cdot\bar{z})]$

抑或：$x\cdot(y\cdot z)\xrightarrow{D}[(x\cdot y)\cdot(x\cdot z)]\xrightarrow{Nh}[(\bar{x}\vee\bar{y})\cdot(\bar{x}\vee\bar{z})]$

而且：$x\cdot(y\cdot z)\xrightarrow{Nh}\bar{x}\cdot(\bar{y}\vee\bar{z})\xrightarrow{D}[(\bar{x}\cdot\bar{y})\vee(\bar{x}\cdot\bar{z})]$

然而,$[(x\vee y)\vee(x\vee z)]$是$[(x\cdot y)\vee(x\cdot z)]$的对射,正如$[(x\vee y)\cdot(x\vee z)]$是$[(x\cdot y)\cdot(x\cdot z)]$的对射一样,因为所有的$(\cdot)$和$(\vee)$都是从运算表达式中的一个置换为另一个。于是,由此得出,运算Ⅲ42的结果:

(17) $\quad$ Ⅲ42 $= r\cdot(p\vee q)\xrightarrow{D}(p\cdot r)\vee(q\cdot r)\xrightarrow{Nh}[(p\vee r)\vee(q\vee r)]$

$\quad = [(pr|\bar{q}r)] =$ Ⅶ7

以及$=r(p|q)=r\cdot(p\vee\bar{q})\xrightarrow{Nh}r\cdot(p\cdot q)\xrightarrow{D}[(p\cdot r)\cdot(q\cdot\bar{r})]=$ Ⅰ2

所以运算Ⅶ7和Ⅰ2为对射关系。

§11 互反和对射的异质性转换

如果我们现在将刚刚考察的异质性否定应用到互反运算中,则同样可以根据左边二元(或一元)运算的互反,以及右边二元运算的互反,引入转换Rg和Rd。我们注意到,我们在左边书写的总是一元运算。至于二元—二元表达式,我们保留了和Ng和Nd同样的惯例,也就是说,我们会有:

运算中项	Rg	Rd
p	$p(\alpha)q$ 或 $p(\beta)q$	$p(\alpha)r$ 或 $p(\beta)r$
q	$p(\alpha)q$ 或 $p(\beta)q$	$q(\alpha)r$ 或 $q(\beta)r$
r	$p(\alpha)r$ 或 $p(\beta)r$	$q(\alpha)r$ 或 $q(\beta)r$

至于转换Rh(=RgRd),我们注意到(命题34乙),于是有Rh=R,进而可以立即简化为:

(48) $\qquad$ Rg=RRd $\quad$ 以及 $\quad$ Rd=RRg(交换律)

下面是一个关于转换运算Rg、Rd和Rh的例子,我们一开始选用的是二元—二元类运算:

首先,我们验证的是命题(48):Rd是Rg的R,反之亦然;例如,运算Ⅲ10是运算Ⅳ3的Rd,由此得出,该运算也是运算Ⅲ35的R,运算Ⅲ35是运算Ⅳ3的Rg

我们推演出,Rg、Rd和Rh这些转换,事实上,简化为一个只有8个元素的组群,因为Rh等同于R,且Rd和Rg从不会组建为两组直接的四位转换运算,但是它们从属于同一个根据两组不同运算构建的四位转换运算

(49)

	1)运算		2)(1)的Rg	3)(1)的Rd	4)(1)=R的Rh
I	Ⅳ3	$[(p\vert r)\vert(q\supset r)]$	$[(p\vee r)\vert(q\supset r)]=$ Ⅲ35	$[(p\vert r)\vert(r\supset q)]=$ Ⅲ10	Ⅳ65
N	Ⅳ68	$[(p\vert r)\cdot(q\supset r)]$	$[(p\vee r)\cdot(q\supset r)]=$ Ⅴ35	$[(p\vert r)\cdot(r\supset q)]=$ Ⅴ10	Ⅳ6
R	Ⅳ65	$[(p\vee r)\ (r\supset q)]$	$[(p\vert r)\vert(r\supset q)]=$ Ⅲ10	$[(p\vee r)\vert(q\supset r)]=$ Ⅲ35	Ⅳ3
C	Ⅳ6	$[(p\vee r)\cdot(r\supset q)]$	$[(p\vert r)\cdot(r\supset q)]=$ Ⅴ10	$[(p\vee r)\cdot(q\supset r)]=$ Ⅴ35	Ⅴ68①

① 此处应为Ⅳ68,疑为原文编辑笔误,此处按原文。——译者注

转换运算 Rg 和 Rd 与置换转变之间的关系并非不重要，因为我们马上就会看到关于运算中项或运算的置换。

和前面的转换运算对称看过来，我们现在可以引进对射关系中的转换运算 Cg 和 Cd，同样，根据左边二元（或一元）运算的对射，以及右边二元运算的对射，我们已经认识到（§8）两组转换运算 CgCd 可表述为 Ch，而不要和对射转换（同质性）C 混淆。

我们再来举一个例子，如前面的二元一二元运算Ⅳ3 及其从属的 INRC 四位运算：

(50)

	1)运算	2)(1)的 Cg	3)(1)的 Cd	4)(1)的 Ch
I	Ⅳ3 $[(p\|r)\|(q\supset r)]$	$[(p\cdot\bar{r})\|(q\supset r)]\equiv$ Ⅶ8	$[(p\|r)\|(q\cdot r)]\equiv$ Ⅵ7	$[(p\cdot r)\|(\bar{q}\cdot r)]\equiv$ Ⅷ
N	Ⅳ68 $[(p\|r)\cdot(q\supset r)]$	$[(p\cdot\bar{r})\cdot(q\supset r)]\equiv$ Ⅰ8	$[(p\|r)\cdot(\bar{q}\cdot r)]\equiv$ Ⅰ7	$[(\bar{p}\cdot\bar{r})\cdot(\bar{q}\cdot r)]\equiv$ O
R	Ⅳ65 $[(p\vee r)\|(r\supset q)]$	$[(p\cdot r)\|(r\supset q)]\equiv$ Ⅶ1	$[(p\vee r)\|(q\cdot r)]\equiv$ Ⅵ2	$[(p\cdot r)\|(q\cdot r)]\equiv$ Ⅷ
C	Ⅳ6 $[(p\vee r)\cdot(r\supset q)]$	$[(p\cdot r)\cdot(r\supset q)]\equiv$ Ⅰ1	$[(p\vee r)\cdot(q\cdot r)]\equiv$ Ⅰ2	$[(p\cdot r)\cdot(q\cdot r)]\equiv$ O

对射的异质性转换，会得出一个有 16 个元素的群，一如前面的转换运算 Ng、Nd 和 Nh。但是在所有的情况中，我们都很容易将其简化为 R 和 N 类的转换运算：

首先，根据对射的可逆性特点（CC=I），我们有：

(51) Cg=ChCd 以及 Cd=ChCg

接着，我们有以下等值关系：

(a) 一个既定运算的转换关系 Ch，例如Ⅷ＝[(p·r)|(q·r)]对Ⅳ3，对应为该运算的互反 R 的转换运算 Nh，在该例子中，该运算的 R 是Ⅳ6＝[(p∨r)|(r⊃q)]，而 R 的 Nh 正好是$[(\bar{p}\cdot\bar{r})|(\bar{q}\cdot r)]$：

(52) Ch=NhR 或 Ch=NhNC

因为，我们有（命题 35）Ch=NhRh 以及 Rh=R。

(b) 一个既定运算的转换 Cg 是 Rg 的 Ng。例如运算Ⅳ3 的 Rg 是[(p·r)|(q⊃r)]。然而，Ⅳ3 的 Rg 是[(p∨r)|(q⊃r)]，而[(p∨r)|(q⊃r)]的 Ng 是[(p·r)|(q⊃r)]。同样 Cd 也是 Nd 的 Rd：

(53) Cg=NgRg 以及 Cd=NdRd（交换律）

因为 C=NR，其中 Cg=NgRg 且 Cd=NdRd。

(c) 此外，我们还有以下通用的关系：

(54) Cg=NhRCd 以及 Cd=NhRCg

因为，Cg=ChCd（命题 51）以及 Ch=NhR（命题 52）。同样 Cd=ChCg 且 Ch=NhR。

例如，运算Ⅶ8 是运算Ⅳ3 的 Cg；而运算Ⅳ3 的 Cd，即运算Ⅶ7，它的互反 R 是运算Ⅶ2，而且，在常数表（50）中，既定的运算Ⅶ8 的形式是运算Ⅶ2 的 Nh。

(d) 我们最终得到：

(55) Cg=NdRdCh 以及 Cd=NgRgCh

因为 Cd=NdRd（命题 53）以及 Cg=CdCh（命题 51）。同样 Cd=ChCg 以及 Cg=NgRg。

例如，运算Ⅶ8 是运算Ⅸ3 的 Cg，也是运算Ⅸ3 的 NdRdCh，因为运算Ⅸ3 的 Ch [$(p \cdot r)$ $(q \cdot r)$]；RdCh $(p \cdot r)$ $(q \cdot r)$ 且 NdRdCh [$(p \cdot r)$ $(q$ $)r)$ 运算Ⅶ8。

总而言之，所有的对射关系的异质性转换，都是可以简化为转换运算 Ng、Nd 和 Nh 以及 Rg，Rd 和 Rh(R)的。这些异质性对射，在我们接下来的研究中，几乎没什么用处，但对于前面的转换关系则不然。然而，我们也能有兴趣地注意到，其自身构成了一个直接有 16 个元素的结构(41)，尽管这样的关系结构是建立在我们刚刚展示的等值关系(52)到(55)之上的。

第四章 交换产生的异质转换

交换产生的异质性转换，得出了一个有趣的系列结构，它们专属于三元运算。由于它们局限于两个运算，二元运算的交换只包括一种转换：$(p \supset q) \xrightarrow{P} (q \supset p)$，与互反(R)对等，即$(q \supset p) = R(p \supset q)$。相反，三元运算，因为其包括三个运算，于是呈现出多种交换的可能，有的是二元—二元运算表达式的运算中项的交换，这就归于交换论证的“格”上，有的是一元—二元运算表达式的一元运算的交换，还有其他的是运算本身的交换，可能是复合运算甚至是分量运算的交换。

§12 一元—二元算式中分量运算(a)和复合运算(α)的置换运算 Pα及二元—二元复合运算的置换运算 Pαβ

Ⅰ. 假设有一个一元—二元运算表达式，其一般形式为$p(a)[q(\alpha)r]$，其中(a)为分量运算，连接运算p与一对运算q和r，(α)为复合运算连接了q到r。于是置换运算 Paα 则是在于交换(a)和(α)，即：

(56) $$p(a)[q(\alpha)r] \xrightarrow{Pa\alpha} p(\alpha)[q(a)r]$$

我们可以拿运算Ⅱ3、Ⅵ3、Ⅱ25以及Ⅵ25这一组四位运算为例，转换运算 Paα 将其转变为Ⅳ类运算：

(57) I (Ⅱ3) $[p \cdot (q = r)] \xrightarrow{Pa\alpha} p = (q \cdot r)$ Ⅳ35

N (Ⅵ3) $[p | (q = r)] \xrightarrow{Pa\alpha} p = (q\ r)$ Ⅳ36

R (Ⅱ25) $[p \cdot (\bar{q} = \bar{r})] \xrightarrow{Pa\alpha} [\bar{p} = (\bar{q} \cdot \bar{r})]\ [p = (q \vee r)]$ Ⅳ5

C (Ⅵ25) $[\bar{p} | (q = r)] \xrightarrow{Pa\alpha} [\bar{p} = (\bar{q} | \bar{r})] \equiv [p = (\bar{q} \cdot \bar{r})] \equiv [\bar{p}\ \ q(\vee r)]$① Ⅳ66

因此，我们可以看到第一组INRC的四位运算与第二组INRC四位运算相对应，因为运算Ⅳ36是运算Ⅳ35的逆运算N，运算Ⅳ5是它的互反R，运算Ⅳ66是它的对射C。

---

① 此处应为[$\bar{p}$ $q \vee r$]，疑为原文编辑笔误，此处按原文——译者注

于是，我们产生了一组有 8 个元素的结构，正如之前的转换运算 Nh。

但是需要注意的是，第二组四位运算，只有在给出其第一否定形式的转换 R 和 C 时，才是完整的，这正好印证了关于 R（命题意义的反演）和作为 R 的否定 C 的定义。若我们曾将运算Ⅱ25 用另一种等值形式书写，即 $p\cdot(q \quad r)$，因为有 $(q \quad r)=(q \quad r)$，通过置换运算 Paα 则可简化为 $p-(q\cdot r)$，这也是运算Ⅳ36 的逻辑等价。

此外，我们注意到，若运算(a)和(α)用(6)的通用形式(·)或(∨)，没有等价(或 W)，也没有肯定或否定 $p[q]$ 或 $q[p]$，转换运算 Paα 等价于对射 C：

(58) 若 α 和 a 是(∨)或(·)，那么有 $p(a)[q(\alpha)r]\xrightarrow{P a\alpha}C$

例如：

(58 乙) (Ⅲ1) $[p\cdot(q\vee r)]\xrightarrow{P a\alpha}[p\vee(q\cdot r)]=[p(q\ r)]$ (Ⅴ6) = Ⅲ1 的 C

该等值关系 Paα = C 具有一定的普遍性，因为两组完整的四位二元运算的 8 个运算，是可以书写为简单的(∨)或(·)的形式：$[p\supset q=\bar{p}\vee q]$、$[p \quad q=\bar{p}\vee q]$ 诸如此类。然而，我们已经看到，在同样的(∨)或(·)形式的表达式中，转换运算 DNh 与其反向的转换运算的对射是等值的：

DNh＝CNhD(命题 46)

在同样的情况下，对射构成了转换运算 Paα 的结果，因此，我们可以在下面的循环中，加上这种转换，该循环的通用形式为：

(59) DNh＝Paα NhD

例如：

(59 乙) Ⅲ1 $[p\cdot(q\vee r)]\xrightarrow{D}[(p\cdot q)\vee(p\cdot r)]\xrightarrow{Nh}[(\bar{p}\vee\bar{q})\vee(p\vee r)]=(p\cdot q)(p\cdot r)$ = Ⅷ1

Ⅲ1 $[p\cdot(q\vee r)]\xrightarrow{P a\alpha}[p\vee(q\cdot r)]\xrightarrow{Nh}[p\cdot(q\vee r)]\xrightarrow{D}[(p\vee q)\cdot(p\vee r)]$ = Ⅷ1

Ⅱ. 现在，假设有一个二元—二元运算的表达式，其一般形式为 $[p(\alpha)q](a)[q(\beta)r]$，其中(a)为分量运算，(α)和(β)为两个复合运算。例如，运算Ⅲ5 $[(p=q)\cdot(p\vee r)]$，运算(a)是(·)，运算(α)是(=)，运算(β)是(∨)。于是，转换运算 Paβ 则在于置换(α)和(β)，因此在这种情况下就是(=)和(∨)的置换，而不要改变分量运算以及命题的次序：

(60) $[p(\alpha)q](a)[p(\beta)r]\xrightarrow{P\alpha\beta}[p(\beta)q](a)[p(\alpha)r]$

例如： Ⅲ5 $[(p=q)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{P\alpha\beta}[(p\vee q)\cdot(p=r)]$ Ⅲ9

我们很清楚地看到，若我们将运算Ⅲ5 的 R、N 和 C，进行同样的转换运算 Pαβ，我们可以得到运算Ⅲ9 的 R、N 和 C，也就是说，异质性转换 Pαβ 融入同质性转换 INRC 中，产生了一个有 8 个元素的群：

(60 乙) (I) Ⅲ5 $[(p=q)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{P\alpha\beta}[(p\vee q)\cdot(p=r)]$ Ⅲ9(I)

(N) Ⅴ5 $[(p=q)|(p\vee r)]\xrightarrow{P\alpha\beta}[(p\vee q)|(p=r)]$ Ⅴ9(N)

$$(\mathrm{R})\ \text{Ⅲ}36\ [(p=q)\cdot(p|r)]\xrightarrow{P\alpha\beta}[(p|q)\cdot(p=r)]\quad \text{Ⅲ}45(\mathrm{R})$$

$$(\mathrm{C})\ \text{Ⅴ}36\ [(p=q)|(p|r)]\xrightarrow{P\alpha\beta}[(p|q)|(p=r)]\quad \text{Ⅴ}45(\mathrm{C})$$

转换运算 Pαβ 对我们来说，在从一种元素到另一种元素的转换中，将有重要的作用，这些转换不仅可以是同一族群类的元素，也可以是不同族群类的元素（甚至是不同种类的元素）。

Ⅲ. 基本转换运算 Pαα 和 Pαβ 是建立在二元—二元运算表达式的复合运算或分量运算，以及二元—二元表达式的复合运算的对称性基础之上的，除了这两者之外，我们还可以设想一些非对称的置换，及在分量运算(α)与一个二元—二元运算表达式的一个或两个复合运算(α 或 β；或 α 与 β)之间的非对称性：

(61)
$$[p(\alpha)q](\mathrm{a})[q(\beta)r]\xrightarrow{P\alpha\alpha}[p(\mathrm{a})q](\alpha)[q(\beta)r]$$

$$[p(\alpha)q](\alpha)[q(\beta)r]\xrightarrow{P\alpha\beta}[p(\alpha)q](\beta)[q(\alpha)r]$$

且，若 $\alpha=\beta$

$$[p(\alpha)q](\alpha)[q(\beta)r]\xrightarrow{P\alpha(\alpha\beta)}[p(\alpha)q](\alpha\cdot\beta)[q(\alpha)r]$$

但是，相对于前面的转换，这些转换不是很重要，因为它们不一定都会形成一个群，其中会连接上两组或多组四位运算，准确说来是没有充分的对称逻辑。例如，我们有：

(62) $\text{Ⅲ}5\ [(p=q)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{P\alpha\beta}[(p=q)\vee(p\cdot r)]=[(p\ \mathrm{W}\ q)\cdot(p\cdot r)]\ \text{Ⅴ}17$

不过运算Ⅴ17 和运算Ⅲ5 属于同一运算族群。相反运算Ⅲ5 的互反是运算Ⅲ36，表达如下：

(62 乙) $\text{Ⅲ}36\ [(p=q)\cdot(p|r)]\xrightarrow{P\alpha\beta}[(p=q)|(p\cdot r)]\ \text{Ⅶ}1$

这一结果，不仅来自同一运算族，还属于初始四位运算Ⅲ5 等的序列Ⅲ—Ⅴ类之中。

相反，若我们在这类运算中，使用转换运算 Pαα，我们会得到同一族类的运算，类型为[$(p\cdot q)=(p\vee r)$]或[$(p\cdot q)=(p\cdot r)$]等，都属于Ⅳ类运算。原因是分量运算变为等值关系（=或 W），这形成了群的建构中必然性（对于这个例子，参看§31）。

同样，转换运算 Pa(αβ)应用在(α=β)的二元运算表达式中，会得到一些很有意思的结构。这就是运算Ⅱ7 [$(p=q)\cdot(p=r)$]；运算Ⅱ12 [$(p=q)\cdot(p\ \mathrm{W}\ r)$]=[$(p=q)\cdot(p=r)$]，可表述为：

(63) (I) $\text{Ⅱ}12\ [(p=q)\cdot(p=r)]\xrightarrow{Pa(\alpha\beta)}[(p\cdot q)=(p\cdot r)]\equiv[p\cdot(q=r)]\ \text{Ⅵ}3$

(N) $\text{Ⅵ}12\ [(p=q)|(p=r)]\xrightarrow{Pa(\alpha\beta)}[(p|q)=(p|r)]\equiv[p|(q=r)]\ \text{Ⅵ}3$

(R) $\text{Ⅱ}12\ [(\bar{p}=\bar{q})\cdot(\bar{p}=r)]\xrightarrow{Pa(\alpha\beta)}[(\bar{p}\cdot\bar{q})=(p\cdot r)]\equiv[p\cdot(q=r)]\ \text{Ⅵ}25$

(C) $\text{Ⅵ}12\ [(\bar{p}=\bar{q})|(\bar{p}=r)]\xrightarrow{Pa(\alpha\beta)}[(\bar{p}|\bar{q})=(\bar{p}|r)]\equiv[\bar{p}|(q=r)]\ \text{Ⅵ}25$

我们发现，运算Ⅱ12 全等于其互反 R(其中Ⅵ12 N C)，产生相同的运算Ⅵ3，其逆运算Ⅵ12，因为分量运算在转换 Pa(αβ)之后，变为等价( )，而且(r y)等价于(x y)。但是运算Ⅱ12 的互反书写为(p q)·(p r)得到运算Ⅵ27，这是运算Ⅵ3 的互反，正如运算Ⅵ12 以[(p q) (p r)]的形式呈现。因此，这样的一个系统所展现的是，成对运算Ⅱ12 Ⅵ12 中的一个例子，这里产生了另一个族类的一组四位运算中的两个互反。但是，对于运算Ⅵ12，下面的形式中的两个不相容的运算形成了：

(63 乙)　$\text{Ⅵ}\,12\,[(\bar{p} W \bar{q}) V (\bar{p} W r)] \xrightarrow{Pa(\alpha\beta)} [(\bar{p} V \bar{q}) W (\bar{p} V r)] = [p \cdot (q = r)]\,\text{Ⅱ}\,3$

$\text{Ⅵ}\,12\,[(p\ W q) V (p\ W r)] \xrightarrow{Pa(\alpha\beta)} (p V q) W (p V r)]\quad p \cdot (q\quad r)]\,\text{Ⅱ}\,27$

所以我们发现转换运算 Pa(αβ)，没有呈现出基本的置换运算 Paα(一元 二元)和 Pαβ 的简便性，然而这在转换运算中构成了不可忽视的互补运算。

§13　一元—二元算式中用作一元运算命题的置换运算 Pu

对于一般形式为 $p(a)\ q(\alpha)r$ 的一元 二元运算表达式，除了 $q(\alpha)r \rightarrow r(\alpha)q$（蕴涵中的互反）以及 $p(a)\ q(\alpha)r \rightarrow p(\alpha)\ q(a)r$（转换运算 Paα）等这些我们已经了解的置换运算之外，我们还可以用命题 q 或 r 来置换命题 p。其中的不同排列组合，我们可以从这 3 个命题的置换中得到以下 24 种可能的情况：

(64)

1 $p(a)[q(\alpha)r]$	13 $p(\alpha)[q(a)r]$
2 $p(a)[r(\alpha)q]$	14 $p(\alpha)[r(a)q]$
3 $q(a)[p(\alpha)r]$	15 $q(\alpha)[p(a)r]$
4 $q(a)[r(\alpha)p]$	16 $q(\alpha)[r(a)p]$
5 $r(a)[p(\alpha)q]$	17 $r(\alpha)[p(a)q]$
6 $r(a)[q(\alpha)p]$	18 $r(\alpha)[q(a)p]$
7 $[r(\alpha)q](a)p$	19 $[r(a)q](\alpha)p$
8 $[q(\alpha)r](a)p$	20 $[q(a)r](\alpha)p$
9 $[r(\alpha)p](a)q$	21 $[r(a)p](\alpha)q$
10 $[p(\alpha)r](a)q$	22 $[p(a)r](\alpha)q$
11 $[q(\alpha)p](a)r$	23 $[q(a)p](\alpha)r$
12 $[p(\alpha)q](a)r$	24 $[p(a)q](\alpha)r$

现在我们需要介绍以下这些符号：

1. Pα 对承载运算(α)的元素的交换。例如，若在( )中运算(α)为(⊃)，我们就有 $(p \supset q) \xrightarrow{P\alpha} (q \supset p)$。

2. Pa 运算(a)的元素的交换。例如，若在(13)中(a)为运算 $q \supset r$，于是有($q \supset r$)

$\xrightarrow{Pa}(r\supset q)$。

3. 若另一方面，(a)或(α)为复合运算，置换运算 Pa 或 Pα 颠倒关系运算项的次序。例如，若(1)中的(a)为(⊃)，我们可以得到 $p\supset[q(\alpha)r]\xrightarrow{P\alpha}[q(\alpha)r]\supset p$(8)。

4. Pu＝Ppq；Ppr；等或 Pqp；Prp 等（等价于）二元运算的置换。例如，$p(a)[r(\alpha)q]\xrightarrow{Ppr}r(a)[p(\alpha)q]\xrightarrow{Prq}q(a)[p(\alpha)r]$等。

于是，我们发现在 1—6，7—12，13—18 以及 19—24 的每个集合中都有 6 个元素，组成了一个由置换运算 Pu 以及 Pα 或 Pa 构成的循环组

(65)

1($\overrightarrow{Ppq}$)	3	7 ($\overrightarrow{Ppq}$)	9	13($\overrightarrow{Ppq}$)	15	19($\overrightarrow{Ppq}$)	21
3(Pqr)	5	9 (Pqr)	11	15(Pqr)	17	21(Pqr)	23
5(Prp Pα)	2	11(Prp Pα)	8	17(Prp Pα)	14	23(Prp Pα)	20
2(Ppq)	4	8 (Ppq)	10	14(Ppq)	16	20(Ppq)	22
4(Pqr)	6	10 (Pqr)	12	16(Pqr)	18	22(Pqr)	24
6(Prp Pα)	1	12 (Prp Pα)	7	18(Prp Pα)	13	24(Prp Pα)	19

（转换运算 Prp Pα 或 Prp Pa 表示除了置换运算 Prp 以外，从 p,q,r 次序的考虑出发，还有置换由 α 或 a 连接的成对的运算项。）

此外，这 4 个组，还以下面的方式彼此关联着：

1 1—12 的运算表达式和 13—24 的运算表达式以置换运算 Paα 的模式一一对应：

(66) $$p(a)[q(\alpha)r]\xrightarrow{Pa\alpha}p(\alpha)[q(a)r]，等$$

2 1—6 的运算表达式和 7—12 的运算表达式以置换运算 Pα 一一对应，而 13—18 对 19—24 以置换运算 Pα 一一对应。

3 当运算(a)和(α)是以(∨)或(·)的形式呈现时，我们有：

(67) $$Pa\alpha=C，若(a)和(\alpha)=(\vee)或(\cdot)$$

因为，在分量运算和复合运算中，同质转换 C 就是由(∨)和(·)的交换得到的；其中 C＝Paα。例如：

$$Ⅲ1\ p\cdot(q\vee r)\xrightarrow{Pa\alpha}p\vee(q\cdot r)\equiv\bar{p}|(q|r)\ \vee 56\equiv Ⅲ1 的 C$$

4 当运算(a)和(α)是以蕴涵的关系呈现时，置换运算 Pa 和 Pα 构建出对应的二元表达式的互反：

(68) $[p(\alpha)q]\xrightarrow{R}[q(\alpha)p]$ 且 $[p(a)q]\xrightarrow{R}[q(a)p]$，若(α)和(a)＝(⊃)或(⊂)

5 若分量运算(1—12 中的 a 以及 13—24 中的 α)是肯定(⊃或⊂)或否定的蕴涵，我们可以用到下面两个集合的性质：

(69) $$p\supset[q(\alpha)r]=[\overline{q(\alpha)r}]\supset \bar{p}，这里是(\alpha)的反演$$

例如：

(69 乙) $$p\supset(q\cdot r)=(q|r)\supset\bar{p}$$

(70) $p\supset[q(a)r]\xrightarrow{R}\bar{p}\supset[r(a)q]$以及$\overline{p\supset[\overline{q(a)r}]}\xrightarrow{R}\overline{p\supset[r(a)\bar{q}]}$

例如：

(70乙) $p\supset(q\supset r)\xrightarrow{R}\bar{p}\supset(r\supset q)$以及$\overline{p\supset(\overline{q\supset r})}\xrightarrow{R}\overline{p\supset(\overline{r\supset\bar{q}})}$

也就是：$p\supset(q\vee r)\xrightarrow{R}\bar{p}\supset(q|r)$以及$p\cdot(q\vee r)\xrightarrow{R}\bar{p}\cdot(q|r)$(可以从$x\supset y\equiv\bar{x}\vee y$, $\overline{x\cdot y}$, $\bar{q}\supset r\equiv q\vee r$以及$r\supset\bar{q}\equiv q|r$中得出)。

从(69)和(70)中，我们可以得出：

(71) $\overline{p\supset[q(a)r]}\xrightarrow{R}\overline{[r(a)q]\supset\bar{p}}$

也就是说，$p\cdot[q(a)r]\xrightarrow{R}[r(a)p$①$]\cdot\bar{p}$。

例如，$p\cdot(\bar{q}\supset r)\xrightarrow{R}(r\supset\bar{q})\cdot\bar{p}$。

因此，我们发现，当分量运算(1—12中的a和13—24中的α)为否定的蕴涵，$x\supset y\equiv\bar{x}\vee y\equiv\overline{x\cdot\bar{y}}$或$y\supset x\equiv\overline{y\cdot\bar{x}}$，运算表达式7—12即分别对应为1—6的互反，运算表达式19—24则是13—18的对应互反：$p(a)[q(a)r]$表述为$p\cdot[q(a)r]$，以及$[r(a)q](a)p$表述为$[r(a)q]\cdot\bar{p}$(=R)，即$p\cdot(q\supset r)$和$(r\supset q)\cdot\bar{p}$(=R)的进行传递性表述。

⑥ 在同一个表达式(1)$p(a)[q(a)r]=p\cdot(q\supset r)$中，通过交换析取(以蕴涵的形式表达)和合取，得到对射(13)$\bar{p}\supset(q\cdot r)$。表达式13到24，因此是1到12的对射；由此得出，表达式19到24是1到6的逆运算(因为7—12是1—6的互反，19—24是7—12的对射，而N=CR)，且表达式7至12是13至18的逆运算。

⑦ 整体说来，通过使用融合了(∨)和(•)，以及肯定和否定蕴涵关系的表述，我们可以用很简洁的方式来解释表(64)：

(72) 1—6顺运算： (1)$p\cdot(q\supset r)\equiv p\cdot(\bar{q}\vee r)$(≡Ⅲ1)

7—12互反运算：(7)$(r\supset\bar{q})\cdot\bar{p}\equiv\bar{p}\cdot(q|r)$(≡Ⅲ56)

13—18对射运算：(13)$\bar{p}\supset(q\cdot r)\equiv\bar{p}|(q|r)$(≡Ⅴ56)

19—24逆运算②：(19)$(r\cdot q)\supset p\equiv\overline{(r\supset\bar{q})\supset\bar{p}}\equiv\overline{\bar{p}\supset(q\cdot r)}\equiv p\cdot(q\vee r)$(Ⅴ1)

于是，我们可以将表(64)中的24个运算表达式对应为Ⅲ—Ⅴ类中$p\cdot(q\vee r)$型的24个运算，这里的对应关系，我们将在§20中详述。

⑧ 自然，我们也可以将表(64)中的表达式转化进其他任何一种运算系统③，即使我们不考虑这4组1—6，7—12，13—18以及18—24之间的INRC转换关系，不考虑1—6和7—12之间的转换关系Pa，不考虑13—18和19—24之间的转换关系Pα。然

① 此处p应为q，疑为原文编辑笔误，此处按原文。——译者注

② 逆运算即反演、对射，所以互反的置换$P_{a\alpha}(r\supset q)\cdot\bar{p}=(r\vee\bar{q})\cdot\bar{p}\xrightarrow{P_{a\alpha}}(r\cdot q)\vee p=(r\cdot q)\supset p$。这也是对射$\bar{p}\supset(q\cdot r)$的互反，即$\bar{p}\supset(q\cdot r)$。

③ 这只针对当(a)或(α)为∨，∧，*，⊃以及$p\supset q$或$q\supset p$时的情况才可行。

而，无论运算(a)和(α)中使用的哪种表达，对于转换运算Pu，我们总会得到：

(73) $$\mathrm{Ppr}=\mathrm{PpqPqr}(\text{或 }\mathrm{P}\alpha)\quad\text{以及}\quad \mathrm{Prp}=\mathrm{Pa}(\text{或 }\mathrm{P}\alpha)\mathrm{PrqPqp}$$

例如(1)$p(a)[q(\alpha)r]$的Ppr是(6)$r(a)[q(\alpha)p]$。而$[q(\alpha)p]$是(1)的Pα，因为，若我们参考开始设置的Pqr的序列的话，qp类是qr类的逆运算。

注意：在前面的章节中，分量运算(a)我们只使用了合取、不相容以及逻辑等价的关系。当分量运算式是诸如命题(69)到(72)中的(⊃)或(⊂)时，则需要注意此处二元—二元运算表达式中互逆性的一般性特质：

(74) $$p\supset[q(\alpha)r]\xrightarrow{R}[\overline{r(\alpha)q}]\supset p\quad\text{或}\quad \bar{p}\supset\overline{[q(\alpha)r]}\xrightarrow{R}[\overline{r(a)q}]\supset p$$

换言之，命题p和二元联合命题$[q(\alpha)r]$之间的一个蕴涵关系的互反，是这个联合命题的对射(即，$\overline{raq}$为raq的否定，qar的互反)和命题p之间的逆蕴涵关系

下面是几个例子：

(74乙)
$$p\supset(q\cdot r)\xrightarrow{R}(q\vee r)\supset p[\equiv p\supset(\bar{q}\cdot\bar{r})]$$
$$p\supset(q\vee r)\xrightarrow{R}(q\cdot r)\supset p[\equiv\bar{p}\supset(q\cdot r)]$$
$$p\supset(q\supset r)\xrightarrow{R}(\overline{q\supset r})\supset p[\equiv p\supset(q\supset r)]$$
$$p\supset(q\cdot r)\xrightarrow{R}(q|r)\supset p[\equiv p\supset(q\cdot r)]$$

所以，这样的一个自然集合的特性，可以简化运算表达式1—6或13—18以及运算表达式7—12或19—24之间的运算过程，反之亦然。

§14 二元—二元算式中用作运算中项的命题p，q和r的置换运算Pm

对于一个二元—二元形式的三元表达式，例如$(p\supset q)\cdot(p\vee r)$等，有必要引入一个"运算中项"，因为对于一个二元—二元运算表达式的4个命题，只有3个是清楚明了的(这里涉及的是一个三元运算)，也就是说，这4个命题中有一个在两个二元运算中重复了，于是，它就在另外两个命题之间起了运算中项的作用：在$(p\supset q)\cdot(q\vee r)$这个情况里，运算中项为$q$。于是置换运算Pm就是进行中项$q$和另外一个中项，例如$p$或$r$的交换。这里我们将使用符号$\mathrm{P_{AB}}$或$\mathrm{P_{BA}}$、$\mathrm{P_{BC}}$或$\mathrm{P_{CB}}$、$\mathrm{P_{AC}}$或$\mathrm{P_{CA}}$来表示，这里的符号A即运算中项为$p$，符号B即运算中项为$q$，符号C即运算中项为$r$；即：

(75)
$$(p\supset q)\cdot(q\vee r)\xrightarrow{\mathrm{P_{BA}}}(p\supset q)\cdot(p\vee r)$$
$$(p\supset q)\cdot(q\vee r)\xrightarrow{\mathrm{P_{BC}}}(p\supset r)\cdot(q\vee r)$$
$$(p\supset q)\cdot(p\vee r)\xrightarrow{\mathrm{P_{AC}}}(r\supset q)\cdot(p\vee r)$$

……

这样，置换运算 Pm 就确立了：只需要用希望的命题，替代在这两个二元运算($p\supset q$ 或 $p\vee r$)中先前的中项(例如，用 p 替代 q)，这里新的命题被选为中项还未被体现出来(例如，p 替代 $q\vee r$ 中的 q，而不是在 $p\supset q$ 里的 q，因为 $p\supset q$ 中已经包含 p 了)。此外，我们将会在同样的位置，用新的命题替换旧的，且不进行任何内部二元表达次序的改变：例如，若我们用中项 r 替代 p，表达式 $p\supset q\cdot p\vee r$ 则会变为 $r\supset q\cdot p\vee r$，而不是 $q\supset r\cdot p\vee r$。

也就是说，在考虑到交换 Pα、Pβ 以及 Pαβ 后，交换 Pm 的列表可能如下所示：

(76)

1 $[p(\alpha)q]\cdot[p(\beta)r]$	13 $[p(\beta)q]\cdot[p(\alpha)r]$
2 $[q(\alpha)p]\cdot[p(\beta)r]$	14 $[q(\beta)p]\cdot[p(\alpha)r]$
3 $[p(\alpha)q]\cdot[r(\beta)p]$	15 $[p(\beta)q]\cdot[r(\alpha)p]$
4 $[q(\alpha)p]\cdot[r(\beta)p]$	16 $[q(\beta)p]\cdot[r(\alpha)p]$
5 $[p(\alpha)q]\cdot[q(\beta)r]$	17 $[p(\beta)q]\cdot[q(\alpha)r]$
6 $[q(\alpha)p]\cdot[q(\beta)r]$	18 $[q(\beta)p]\cdot[q(\alpha)r]$
7 $[p(\alpha)q]\cdot[r(\beta)q]$	19 $[p(\beta)q]\cdot[r(\alpha)q]$
8 $[q(\alpha)p]\cdot[r(\beta)q]$	20 $[q(\beta)p]\cdot[r(\alpha)q]$
9 $[p(\alpha)r]\cdot[q(\beta)r]$	21 $[p(\beta)r]\cdot[q(\alpha)r]$
10 $[r(\alpha)p]\cdot[q(\beta)r]$	22 $[r(\beta)r$①$]\cdot[q(\alpha)r]$
11 $[p(\alpha)r]\cdot[r(\beta)q]$	23 $[p(\beta)r]\cdot[r(\alpha)q]$
12 $[r(\alpha)p]\cdot[r(\beta)q]$	24 $[r(\beta)p]\cdot[r(\alpha)q]$

我们可以看到 12 个置换运算之间遵循着 $P_{AB}P_{BC}P_{CA}P_{AB}$…次序组成了两个循环的群：

(77) (Ⅰ)1(P_{AB})5;5(P_{BC})9;9(P_{CA}Pβ)14;14(P_{AB})18;18(P_{BC})22;22(P_{CA}Pα)4;

4(P_{AB})8;8(P_{BC})12;12(P_{CA}Pβ)15;15(P_{AB})19;19(P_{CB}②)23;23(P_{CA}Pα)1。

(Ⅱ)2(P_{AB})6;6(P_{BC})10;10(P_{CA}Pβ)16;16(P_{AB})20;20(P_{BC})24;24(P_{CA}Pα)3;

3(P_{AB})7;7(P_{BC})11;11(P_{CA}Pβ)13;13(P_{AB})17;17(P_{BC})21;21(P_{CA}Pα)2

我们还发现这两个循环交替从表(76)中的 1—12 列到 13—24 列依次行进：1→5→9(集合 1—12)→14→18→22(集合 13—24)，等等。

此外，在这两个循环所描述的置换运算 Pm 中，阐述表(76)中的元素之间，由明确的方式连接，每个集合内都有 4 个运算：(1—4)、(5—8)、(13—16)等等：(1—24)中的每个元素和其后继运算表达都有所不同，(1)使用置换运算 Pα：例如从 1 到 2 逆运算 $p(\alpha)q$ 为 $q(\alpha)p$；(2)使用置换运算 Pβ：例如从 13 到 14 逆运算 $p(\beta)q$ 为 $q(\beta)p$；(3)或者

① 此处 r 应为 p，疑为原文编辑笔误，此处按原文。——译者注

② 此处 P_{CB} 应为 P_{BC}，疑为原文编辑笔误，此处按原文。——译者注

使用双置换运算 Pα＋Pβ：例如，从 2 到 3，或 1 到 4；或 6 到 7 以及 5 到 8 等等。

(1—12)栏中的每一个元素，以 Pαβ 的转换方式（注意不要和 Pα＋Pβ 混淆），一值一单值地对应上(13—24)栏中的某一元素，因此有：

(78) $[p(\alpha)q]\cdot[p(\beta)r]\text{(Ⅰ)}\xrightarrow{P\alpha\beta}[p(\beta)q]\cdot[p(\alpha)r]\ (13)$

也就是说，这个系统中有如下显著的关系：

1.（命题 77）循环Ⅰ中的每个元素和循环Ⅱ中的元素（也属于置换运算 Pm 同类）由置换运算 Pα 连续对应：

(79) $1\overset{P\alpha}{\leftrightarrow}2;\ 5\overset{P\alpha}{\leftrightarrow}6;\ 9\overset{P\alpha}{\leftrightarrow}10;\ 14\overset{P\alpha}{\leftrightarrow}16;\ 18\overset{P\alpha}{\leftrightarrow}20;\ 22\overset{P\alpha}{\leftrightarrow}24;$

$4\overset{P\alpha}{\leftrightarrow}3;\ 8\overset{P\alpha}{\leftrightarrow}7;\ 12\overset{P\alpha}{\leftrightarrow}11;\ 15\overset{P\alpha}{\leftrightarrow}13;\ 19\overset{P\alpha}{\leftrightarrow}17$ 以及 $23\overset{P\alpha}{\leftrightarrow}21$。

但是，在使用左侧和右侧转换概念时（考虑到常数表 14），我们注意到，所有的这些置换运算 Pα 对于(1)到(12)这边的元素都是左侧交换，对于(13)到(24)这边都是右侧交换。

2. 转换运算 P_{AC}（从 p 到 r 的运算中项变换）或 P_{CA}（从 r 到 p 的变换），不是简单地 $P_{AB}+P_{BC}$ 相加的结果：例如，在(1)中用 r 替代 p，我们得到(23)，而不是(9)（遵守构建二元运算表达式内部次序的法则），因此，我们有：

(80) $P_{AC}=P_{(AB+BC)}P\alpha\beta P\alpha$（或 Pβ）

或(80 乙) $P_{AC}=P\alpha\beta P_{(AB+BC)}P\alpha$（或 Pβ）（可交换）

以及(81) $P_{CA}=P_{(CB+BA)}P\alpha\beta P\alpha$（或 Pβ）

或(81 乙) $P_{CA}=P\alpha\beta P_{(CB+BA)}P\alpha$（或 Pβ）（可交换）

例如（对于 80 和 80 乙），交换关系 $(1)\xrightarrow{P_{AC}}(23)$ 也可以等价为：

$$(1)\xrightarrow{P_{(AB+BC)}}(9)\xrightarrow{P\alpha\beta}(21)\xrightarrow{P\alpha}(23)$$

也可以是： $(1)\xrightarrow{P\alpha\beta}(13)\xrightarrow{P_{(AB+BC)}}(21)\xrightarrow{P\alpha}(23)$

另一方面（81 和 81 乙）$(9)\xrightarrow{P_{CA}}(14)$ 等价关系，可以是：

$$(9)\xrightarrow{P_{(CB+BA)}}(1)\xrightarrow{P\alpha\beta}(13)\xrightarrow{P\beta}(14)$$

也可以是： $(9)\xrightarrow{P\alpha\beta}(21)\xrightarrow{P_{(CB+BA)}}(13)\xrightarrow{P\beta}(14)$

自然也可以是： $(9)\xrightarrow{P\alpha}(10)\xrightarrow{P\alpha\beta}(22)\xrightarrow{P_{(CB+BC)}}(14)$ 等。

至于，怎样选择 Pα 还是 Pβ，若 Pβ 不会改变 P_{AC} 或 P_{CA}，我们自然选择 Pα，也就是说，是由交换 p 与 r 来进行取舍，于是，若 Pα 在 P_{AC} 或 P_{CA} 中保持不变，我们则选择 Pβ。

因此，对于（命题 77 的）这两个循环：Ⅰ和Ⅱ中的每一个，我们也发现了在交换 P_{CA} 中，Pα 和 Pβ 有一个周期性：

循环Ⅰ：9(P_{CA}Pβ)14；22(P_{CA}Pα)4；12(P_{CA}Pβ)15；以及 23(P_{CA}Pα)1；

循环Ⅱ：10(P_{CA}Pβ)16；21(P_{CA}Pα)3；11(P_{CA}Pβ)13；以及 24(P_{CA}Pα)2。

3. 另一方面，我们一直有：

(82) $$\mathrm{Pm}^{2}=\mathrm{P}\alpha+\mathrm{P}\beta$$

以及(82 乙) $$\mathrm{Pm}^{3}=\mathrm{P}\alpha\beta\mathrm{P}\alpha \text{ 或 } \mathrm{P}\alpha\beta\mathrm{P}\beta$$

表达式表示，按照循环Ⅰ或循环Ⅱ的次序，有 6 个连续的交换(或者有 3 个连续交换)。

例如，(1) $\xrightarrow{\mathrm{Pm}^{6}}$(4)而(1) $\xrightarrow{\mathrm{Pm}^{3}}$(14)。因为对于(1)来说，(4)是 $\mathrm{P}\alpha+\mathrm{P}\beta$，而(14)是 $\mathrm{P}\alpha\beta\mathrm{P}\beta$ 或 $\mathrm{P}\alpha\mathrm{P}\alpha\beta$。

4. 就 $\mathrm{P}\alpha\beta$ 而言，$\mathrm{P}\alpha$ 和 $\mathrm{P}\beta$ 是不可以交换的。所以我们有：

(83) $$\mathrm{P}\alpha\mathrm{P}\alpha\beta=\mathrm{P}\alpha\beta\mathrm{P}\beta \quad \text{以及} \quad \mathrm{P}\beta\mathrm{P}\alpha\beta=\mathrm{P}\alpha\beta\mathrm{P}\alpha$$

例如： $$[(1)\xrightarrow{\mathrm{P}\alpha\beta}(13)\xrightarrow{\mathrm{P}\beta}(14)]=[(1)\xrightarrow{\mathrm{P}\alpha}(2)\xrightarrow{\mathrm{P}\alpha\beta}(14)]$$

5. 若复合运算(α)和(β)是肯定或否定的(⊃)或(⊂)，抑或，以这种形式表示：($p\vee q=\bar{p}\supset q$；等)，我们则会得到：

(84) 若(α)和(β)＝(⊃)或(⊂)，则 $\mathrm{P}\alpha=\mathrm{R}\alpha$ 及 $\mathrm{P}\beta=\mathrm{R}\beta$

(84 乙) 若(α)和(β)＝(⊃)或(⊂)，则 $\mathrm{P}\alpha+\mathrm{P}\beta=\mathrm{R}$

6. 若(84 和 84 乙)为真，也就是说(α)和(β)要么由缊涵关系组成，要么找到紧跟在置换运算 Pm 和互反关系 R 之间的基本关系：

(85) $$\mathrm{Pm}^{6}=\mathrm{R}$$

举例说明，若(1)＝[$(p\supset q)\cdot(p\vee r)$]＝[$(p\supset q)\cdot(\bar{p}\supset r)$]，那么(4)则是[$(q\supset p)\cdot(r\supset p)$]＝[$(q\supset p)\cdot(\bar{p}\supset r)$]＝(1)的 R。因为 $\mathrm{Pm}=\mathrm{P}\alpha+\mathrm{P}\beta$(命题 82)。

所以，若复合运算为缊涵形式，6 个连续的置换运算 Pm 会得到一个互反关系，然而 12 个连续的交换则重回到运算的起始状态。

(86) $$\mathrm{Pm}^{12}=\mathrm{I}$$

对于连续的 3 个置换运算(Pm)，我们知道(82 乙)，它等价于 $\mathrm{P}\alpha\beta\mathrm{P}\alpha$ 或 $\mathrm{P}\alpha\beta\mathrm{P}\beta$，这反过来说明，若($\alpha$)和($\beta$)为缊涵关系，等价于复合运算($\alpha$)和($\beta$)的一个置换运算，等价于一个半互反关系 Rg 或 Rd(＝根据实际情况的 $\mathrm{R}\alpha$ 或 $\mathrm{P}\beta$)：

(87) $$\mathrm{Pm}^{3}=\mathrm{P}\alpha\beta\mathrm{Rg} \quad \text{或} \quad \mathrm{P}\alpha\beta\mathrm{Rd}$$

(85 到 87)这些基本关系致力于展示，由置换运算 Pm 或 $\mathrm{P}\alpha\beta$ 以及否定的转换运算(R，Rg 或 Rd)形成的转换的运算单位。

7. 此外，从(80 到 81 乙)以及(82 乙)或(87)中，我们得出：

(88) $$\mathrm{P}\alpha\beta=\mathrm{Pm}^{3}\mathrm{P}\alpha \quad \text{或} \quad \mathrm{Pm}^{3}\mathrm{P}\beta$$

而，若 $\mathrm{P}\alpha=\mathrm{R}\alpha$ 及 $\mathrm{P}\beta=\mathrm{R}\beta$

(88 乙) $$\mathrm{P}\alpha\beta=\mathrm{Pm}^{3}\mathrm{R}\alpha \quad \text{或} \quad \mathrm{Pm}^{3}\mathrm{R}\beta$$

8. 我们曾只限于考虑系统中分量运算的合取关系(·)。对于其他可替换的分量

运算，例如(V)——$[p(a)q] \vee [p(a)r]$，这 24 个置换运算 PmPαβPα 以及 Pβ 也将会深入细致地研究其中的可能性。若分量运算为(⊃)或(⊂)——$[p(a)q] \supset [p(a)r]$，这当然会通过置换运算 Pα 增加 24 个新的可能性。

(89) $$[p(a)q] \supset [p(\beta)r] \xrightarrow{P\alpha} [p(\beta)r] \supset [p(a)q]$$

然而，该置换运算(89)对我们来说没什么用处。相反，系统(76)还会不停地帮助我们，要么将同一族群中的运算从一个转换为另一个，要么将一个运算从一个族群转换进另一个；例如，Ⅳ27 $[(q \supset p) \cdot (p \supset r)] \xrightarrow{P_{\wedge\vee}} [(q \supset p) \cdot (q \supset r)]$——Ⅴ31（在这种情境中，一个属于Ⅳ类的运算就被转换为了另一个属于Ⅲ—Ⅴ类的运算）。

§15 运算的代入

前面的置换运算中，我们还没有深入细致地研究所有可能的转换运算清单。当然，首先，这些置换是可以应用到双一元—二元或双二元—二元，以及单类运算表达式中的。但是，此外我们还可以借助于个更为限定的转换运算，准确说来就是，置换运算，它可以简单地用一个新的运算替换一个组合运算（抑或一个给定的分量运算）。

对此，举例说明，24 个形式为 $p \cdot (q \vee r)$、$p \cdot (q \vee r)$、$p \cdot (q | r)$以及 $p \cdot (q | r)$的运算，或其逆运算，属于Ⅲ—Ⅴ类运算，很明显，我们可以看出，这些运算和Ⅲ—Ⅴ类的运算中形式为：$p \cdot (q \supset r)$、$p \cdot (q \supset r)$、$p \cdot (r \supset q)$以及 $p \cdot (r \supset q)$的 24 个运算的项与项是对应的。原因是，在运算 $p \vee q$（或 $p \supset q$）以及 $p \supset q$（或 $p \vee q$）以及 $p | q$（或 $q \supset p$）还有 $q \supset p$（或 $p \vee q$）之间，存在一定的对称性，这是因为，这些是属于一个相近的否定（$p \vee q$ 和 $p \vee q$ 或 $p \supset q$ 及 $p \supset q$）的同类运算。这样，我们可以借助于一个可以将(V)替换为(⊃)、将(|)替换为(⊂)，抑或反之进行替换的运算，该运算应该是在一个替换关系的运算之中（因为它就是一个简单的替代关系）还属于一个否定的关系运算（原因我们刚刚已经看到了）。我们用来表示该运算，具体定义如下：

$$p \vee q \xrightarrow{P_{\supset\vee}} p \supset q \quad 以及 \quad p | q \xrightarrow{P_{\supset\vee}} q \supset p$$

于是，我们很容易借助于这样的运算，构建一个有 8 个元素组成的结构，不仅如此，我们还可以将四位运算(V)和(|)与四位运算(⊃)和(⊂)联系起来：

(90) 四位运算(V) 四位运算(⊃)

(I)	Ⅲ1	$[p \cdot (q \vee r)]$	$\xrightarrow{P_{\vee\supset}}$	$[p \cdot (q \supset r)]$	Ⅲ7
(N)	Ⅴ1	$[p \| (q \vee r)]$		$[p \| (q \supset r)]$	Ⅴ7
(R)	Ⅲ56	$[p \cdot (q \| r)]$		$[p \cdot (r \supset q)]$	Ⅲ54
(C)	Ⅴ56	$[\bar{p} \| (q \| r)]$		$[p \| (r \supset q)]$	Ⅴ54

同样的运算重新出现在了二元—二元运算中。这 24 个二元—二元运算，在Ⅳ类运

算这里，是最值得注意的。这个组群中有一组形式为$(x\supset y)\cdot(y\vee z)$的四位运算，它们都遵循 INRC 转换群的运算法则。另外一组形式为$(x\supset y)\cdot(y\supset z)$的四位运算，这意味着，在一个或两个符合的运算中，运算$(\vee)$和$(\supset)$或$(\ )$和$(\subset)$之间有着某种对应关系。另一方面，这 24 个运算，用置换两个复合运算（但是用复合运算的互反和分量运算的反演）中的$(\vee)$和$(\supset)$，组成了一种等值形式。例如：

(91)　　$\text{IV}\,20\,[(q\supset p)\cdot(p\supset r)\ \ \ (p\vee q)\cdot(p\vee r)\ \ \ (p\cdot q)\vee(p\cdot r)]$

$$\equiv[(p\vee q)|(p|r)]$$

换言之，当我们用单独的$(\vee)$替换单独的$(\supset)$时，这是一个简单的对应，反之亦然，形成了两个运算的置换情况中的等值关系。但是等值是建立在分配性和二元转换运算$x\ y\ \ x\vee y$上的，这里是命题符号的逆反（互反）和分量运算的反演。

在Ⅳ类二元　三元运算表达式的情况中，转换运算P　类似于转换运算$P\alpha\beta$，因为后一个转换运算相当于一个双P　运算的合并，其中一个转换运算针对复合运算中的第一部分，另一个针对其第二部分。

我们也可以引进运算$(\ )$和$(\cdot)$或(W)和$(|)$的置换，因为：

$$(p=q)=(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\quad 且\quad (p\,\mathrm{W}\,q)=(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$$

$$(p\cdot q)\ \ \ p\cdot q\quad 且\quad (p\ \ q)\ \ \ (p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$$

这样置换运算P　，或P_{W}　就变成了成对运算$(p\cdot q)$在P　，中的消除和在P_{W}，中的添加，于是，在Ⅳ类运算表达式中，如$[p\ \ (q\vee r)]$，从其逆运算$[p\,\mathrm{W}(q\vee r)]$就转换为Ⅲ一Ⅴ类运算中的形式：

(92)　　$\text{IV}\,5\,[p=(q\vee r)]\xrightarrow{P_{=(\cdot)}}[p\cdot(q\vee r)]\ \text{III}\,1$

以及　　$\text{IV}\,66\,[p\,\mathrm{W}\,(q\vee r)]\xrightarrow{P_{\mathrm{W}(|)}}[p|(q\vee r)]\ \text{V}\,1$

我们也可以根据转换运算$P[\ ]$　，对应上Ⅱ一Ⅳ类的运算$[p\cdot q[r]]$和$[p\cdot(q\ \ r)]$，因为，我们有：

$$p[q]=(p\cdot q)\vee(p\cdot \bar{q})\quad 且\quad p[q]=(p\cdot q)\vee(p\cdot \bar{q})$$

$$(p\ \ q)\ \ \ (p\cdot q)\vee(p\cdot q)\quad 且\quad (p\,\mathrm{W}\,q)\ \ \ (p\cdot q)\vee(p\cdot q)$$

这样置换运算P　$[\ ]$则在于，成对运算$(p\cdot q)$转换为$(p\cdot q)$，以及成对运算$(p\cdot q)$转换为$(p\cdot q)$。

最后，当然，这些替换运算（我们当然可以构建其他的模式）可以应用在分量运算以及复合运算中。例如：

(93)　　$\text{III}\,1\,[p\cdot(q\vee r)]\xrightarrow{P_{\cdot =}}[p=(q\vee r)]\ \text{IV}\,5$

这些替换运算还可以组合起来，例如分量运算中使用P　，复合运算中使用P　：

(94)　　$\text{III}\,1\,[p\cdot(q\vee r)]\xrightarrow{P_{=(\cdot)}P_{\vee\supset}}[p=(q\supset r)]\ \text{IV}\,17$

现在对于这些如此不同的运算，我们可以使用起这些转换运算，构成运算族，同时进行族群间的相互转换。

第五章 运算族群

不同否定或交换的异质转换，已经让我们可以将 INRC 群中的某些四位运算转换为另外一些。现在需要做的是再进一步，根据"族群"(familles)的原则，回到 256 个三元运算中。一个族群即同类中的四位运算整体(O—Ⅷ类，Ⅰ—Ⅶ类，Ⅱ—Ⅵ类，Ⅲ—Ⅴ类或Ⅳ类)，其中组成它们的运算分别属于同一类型(也就是说，所及的族群的一组四位运算的 R 或 N 的运算，与同一族群中的另一组四位运算的 R 或 N 的运算为同类表达形式)，且用一个确定的异质转换可将一组转换为另一组，所得结果也可以构成一个群。当然，我们后面会研究用同样的异质转换，将一个族群转换为另一个族群的可能性；但是由此协调的跨族群的系统里的族群，不再是同样的形式，也不必然属于同类。

§16 族群明细

在§1—4 节以及§7 节部分，描述的运算，可划分为 14 个族群①，其中 1 个 O—Ⅷ类，1 个Ⅰ—Ⅶ类，3 个Ⅱ—Ⅵ类，3 个Ⅲ—Ⅴ类以及 6 个Ⅳ类：

O—Ⅷ类：一个族群，两个运算，只有转换运算 INRC，例如 R=I 以及 N=C。形式为：$p*(q*r)$以及$[p(o)(q*r)]$。

Ⅰ—Ⅶ类：一个族群，16 个运算分布在 4 组完整的四位运算群中，例如，我们可以将一组四位运算转换为另一组(抑或一个运算转换为另一个)，所用转换方法包括 Nd 和 Ng，Paα 和 Pu。形式为：$p\cdot(q\cdot r)$以及 $p|(q\cdot r)$。

Ⅱ—Ⅵ类：

(a) 一个族群，12 个运算 $p\cdot(q\vee r)$或 $p\cdot(q\,\mathrm{W}\,r)$，和 12 个逆运算 $p\ (q\ \ r)$或 $p\ (q\,\mathrm{W}\,r)$；6 个可按照 Nh、Nd 和 Pu 进行转换的四位运算。

(b) 12 个形式为 $p\cdot q|r$ 的运算和 12 个逆运算 $p\ q|r$；6 个可按照 Ng 和 Pu 进行转换的 INRC 四位运算。

(c) 4 个形式为$(p\ \ q)\cdot(p\ \ r)$的运算和 4 个逆运算$(p-q)\ (p\ \ r)$，分布于 4 个

① 布林(《手册》，第 11、…4 页)中描述的是 22 个族群，因为在我们的 14 个族群中，由 8 个即从 O—Ⅷ到Ⅲ—Ⅴ中，族群里包括一个顺运算和一个不同顺序的逆运算，这里 8+8+6=22 个。

成对运算，如 R－I 及 N－C，可按照 Nh、Ng、Nd 和 Pm 进行转换。

Ⅲ－Ⅴ类：

(a) 24 个形式为$[p\cdot(q\vee r)]$或$[p\cdot(q\supset r)]$的运算（这里有 2 个子族群，每 12 个运算为归属于一组），和 24 个逆运算$[p\ (q\vee r)]$或$[p\ (q\supset r)]$。这个族群的运算（12 个四位运算）按照运算 Pm、Rg 以及 P、进行相互转换。

此外，运算 $p\cdot(q\vee r)$等价于一个二元一二元形式

$$p\cdot(q\vee r)\equiv(p\cdot q)\vee(p\cdot r)\equiv(p|q)|(p|r)$$

(b) 24 个形式为$[(p\ q)\cdot(q\vee r)]$或$[(p\ q)\cdot(q\supset r)]$的运算（这里有 2 个子族群，每 12 个运算归属于一组）和 24 个逆运算$[(p\ q)\ (q\vee r)]$或$[(p\ q)\ (q\supset r)]$，这 48 个运算组成了一个单独的族群，12 个四位运算可按照 Pαβ、Pm、P，以及 Ng 的模式进行相互转换。

(c) 8 个双二元－二元或三元－二元运算，形式为：$[(p\cdot q)\ r]\cdot[(p\cdot q)|r]$ 和 8 个逆运算 $[(p\cdot q)\ r]|[(p\cdot q)\ r]$，分布在 4 个可按照 Nd 和 Pu 进行转换的 INRC 四位运算。

Ⅳ类：

(a) 8 个形式为$[(p\vee q)\cdot(q\vee r)\cdot(p\vee r)]$或$[p\ (q\ r)]\cdot[q\ (p\ r)]$和其 4 个逆运算，构成 4 个成对的 R－N 和 C－I 的运算整体，转换方式有：Pm、Ng 以及 P。

(b) 2 个运算$[(p=q)=r]$和$[(p=q)\vee\!\!\vee r]$，构成 1 对 N－C 和 R－I 的转换运算。

(c) 6 个运算$q\ p[r]$和$q\vee\!\!\vee p[r]$，构成 3 对 R－I 和 N－C 的由 Pu 连接的转换运算。

(d) 6 个运算 $p\cdot(q*r)$和 $p\ (q*r)$，构成 3 对 R－N 和 C－I 的由 Pu 连接彼此的转换运算。

(e) 24 个形式为：$[p\ (q\vee r)]$或$[p\ (q\supset r)]$（其中有 2 个子族群）；本族群形成了 6 个完整的四位运算，以 Pu 和 P、的方式进行转换。

(f) 24 个$[(p\supset q)\cdot(p\vee r)]$或$[(p\supset q)\cdot(q\supset r)]$（其中有 2 个子族群），分布在 6 个可按照 Pm、Pαβ 和 P，进行转换的完整四位运算中。但是，在只考虑这给定的形式时，这 3 种转换将本族群和Ⅲ－Ⅴ(a)类族群，在其二元－二元形式下的元素，紧紧地联系在一个有 96 个运算的体系中。若将Ⅳ(f)中的 24 个运算组建在一个封闭的体系中，需要将其变为$[(p\vee q)\ (p\ r)]$或$[(p\cdot q)\ (p\cdot r)]$的形式，并且用 Pm 或其他专门的交换进行转换。

这 11 个族群的分类，和我们之前选择的表述这些运算的一元－二元或二元－二元的形式关系不大，因为我们会重新看到，我们给它们的各种形式下的内部单位。此外，按照布林的设想，三元运算的 3 个面的几何图形中，这些族群，可以对应上一个立方

体[1]的8个点之间各种不同的关系类型。我们将用代数法,分类出这些族群,以及一个确定的拓扑结构,也许可以看见,其中包括的群与群之间的对应关系。所以现在我们需要分析这些族群的每一个,以便获得一个整体的结构。

§17 O—Ⅷ类和Ⅰ—Ⅶ类族群

O类和Ⅷ类两个运算,本身构成一个单独的成对族群(R—I和C—N)。当然,我们可以让这成对的两个运算进行转换,若涉及的是三元—三元形式[$p*(q*r)$],进行Pu转换;若涉及的是三元—三元形式[$(p*q)\cdot(p*r)$]等,进行Pm转换。于是,在这些运算中,我们也得到了3种形式的等式:

(95) $\text{Ⅷ A}\quad [p*(q*r)] \xrightarrow{\text{Ppq}} [q*(p*r)] \xrightarrow{\text{Pqr}} [r*(p*q)]$

对于转换运算Nh(因为O*O—Ⅷ)、Ng或Nd、Rg或Rd等,也是如此。

相反,对于Ⅰ—Ⅶ类中的运算,我们可以用转换Ng和Pα(R、N和C除外)将其简化为,一个有24个Ⅰ类(其中每个运算中有3个等值关系)运算的独立族群和21个Ⅲ类逆运算。转换运算Pα的原则如下:

(96) $\text{Ⅰ1A}\ [p\cdot(q\cdot r)] = [(q\cdot r)\supset p] \xrightarrow{\text{P}_\alpha} (q\supset r)\cdot p = [p\cdot(q\cdot r)]\quad \text{Ⅰ6A}$

$\text{Ⅰ8A}\ [p\cdot(q\cdot r)] = [\overline{(q\cdot r)}\supset \bar{p}] \xrightarrow{\text{P}_\alpha} [(q\supset r)\cdot p] = [p\cdot(q\cdot r)]\quad \text{Ⅰ3A}$

$\text{Ⅰ2A}\ [p\cdot(q\cdot r)] = [(q\cdot r)\supset p] \xrightarrow{\text{P}_\alpha} [(q\supset r)\cdot p] = [p\cdot(q\cdot r)]\quad \text{Ⅰ5A}$

$\text{Ⅰ7A}\ [p\cdot(q\cdot r)] = [(q\cdot r)\supset p] \xrightarrow{\text{P}_\alpha} [(q\supset r)\cdot p] = [p\cdot(q\cdot r)]\quad \text{Ⅰ4A}$

其中,有如下表格的关系:

(97)

	1)运算		2)Pα
Rg	Ⅰ1A	$p\cdot(q\cdot r) \leftrightarrow \bar{p}\cdot(q\cdot\bar{r})$	Ⅰ6A
	Ⅰ1B	$q\cdot(p\cdot r) \leftrightarrow \bar{q}\cdot(p\cdot\bar{r})$	Ⅰ4B
	Ⅰ1C	$r\cdot(p\cdot q) \leftrightarrow \bar{r}\cdot(p\cdot\bar{q})$	Ⅰ4C
	Ⅰ5A	$\bar{p}\cdot(q\cdot r) \leftrightarrow p\cdot(q\cdot\bar{r})$	Ⅰ2A
	Ⅰ3B	$\bar{q}\cdot(p\cdot r) \leftrightarrow q\cdot(p\cdot\bar{r})$	Ⅰ2B
	Ⅰ2C	$\bar{r}\cdot(p\cdot q) \leftrightarrow r\cdot(p\cdot\bar{q})$	Ⅰ3C

① 参看M. 布林(《手册》,第144—145页)。

		3)(1)的互反	4)(3)的 Paα=(2)的 R	
	Ⅰ8A	$\bar{p}\cdot(\bar{q}\cdot\bar{r})\longleftrightarrow p\cdot(\bar{q}\cdot r)$	Ⅰ3A	
Rg	Ⅰ8B	$\bar{q}\cdot(\bar{p}\cdot\bar{r})\longleftrightarrow q\cdot(p\cdot r)$	Ⅰ5B	
	Ⅰ8C	$\bar{r}\cdot(\bar{p}\cdot\bar{q})\longleftrightarrow r\cdot(\bar{p}\cdot q)$	Ⅰ5C	
	Ⅰ4A	$p\cdot(\bar{q}\cdot\bar{r})\longleftrightarrow\bar{p}\cdot(\bar{q}\cdot r)$	Ⅰ7A	Rg
	Ⅰ6B	$q\cdot(\bar{p}\cdot\bar{r})\longleftrightarrow\bar{q}\cdot(p\cdot r)$	Ⅰ7B	
	Ⅰ7C	$r\cdot(\bar{p}\cdot\bar{q})\longleftrightarrow\bar{r}\cdot(\bar{p}\cdot q)$	Ⅰ6C	

该两个表中的逆运算很相像①。我们发现，集合中前一条或后一条线(水平方向的)，和后面运算之间由转换运算Pu(=Ppq和Pqr)连接。另一方面，第一个3运算集合的每一条线，也是对应连接的(通过转换Rg：$p\cdot(q\cdot r)\to\bar{p}\cdot(q\cdot r)$对应于第二个3运算集合)。因此，该系统组成了一个单一的群，其中的转换有：(INRC=4)×(Rg=2)×(Paα=2)×(Pu=3)=48个元素，由运算(Ⅰ A、B和C)构成了其间的3个等值关系。除了涉及Pu的转换运算之外，群中的转换运算都是可替换的。

§18 Ⅱ—Ⅵ类的两个一元—二元运算族群

一元复合运算是等值关系(=或W)的Ⅱ—Ⅵ(a)类的24个一元—二元算式组是可以和前例比较的。但是源自置换运算Pu产生的三段论的格A、B和C，彼此之间不是等值的；建立在一元运算之上的运算Rg和R本身混淆在一起：$p\cdot(q\ \ r)\xrightarrow{R}p\cdot(q\ \ r)$；最后转换运算Nh和Nd替代Paα(因为Paα本身在Ⅳ类运算中会转换为$p\cdot q\ \ r$)。因此我们有(限于Ⅱ类中12个顺运算)：

(98)

	1)初始运算		2)(1)的Nd		3)(1)的Ng(=R)		4)(3)的Nd=(2)的R
Ppq	Ⅱ3 $p\cdot(q=r)$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ8 $p\cdot(q\ W\ r)$	$\overset{Nh}{\leftrightarrow}$	Ⅱ25 $p\cdot(q\ \ r)$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ26 $p\cdot(q\ W\ r)$
Pqr	Ⅱ5 $q\cdot(p=r)$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ10 $q\cdot(p\ W\ r)$	$\overset{Nh}{\leftrightarrow}$	Ⅱ18 $q\cdot(p\ \ r)$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ21 $q\cdot(p\ W\ r)$
	Ⅱ6 $r\cdot(p=q)$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ15 $r\cdot(p\ W\ q)$	$\overset{Nh}{\leftrightarrow}$	Ⅱ13 $\bar{r}\cdot(p=q)$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ20 $\bar{r}\cdot(p\ W\ q)$

我们发现运算(3)是运算(2)的Nh，且运算(4)是运算(1)的Nh。而NhNd=Ng(命题43乙)；因此，运算(3)是运算(1)的Ng，且运算(4)也是运算(2)Ng；不过，在特殊情况下，我们有Ng=Rg=R。互反运算的结构框架自然也是同构的②，其中(INRC=4)×(Nd=2)×(Pu=3)=24个(有区分的)运算。

① 并且带着Ⅵ类中相同的编号：Ⅰ1A对应Ⅵ1A，等等。

② 并且带着Ⅵ类中相同的编号：Ⅱ3对应Ⅵ 3，等等。

至于Ⅱ—Ⅵ(b)类的运算，其形式为：$p\cdot q[r]$ 等，其整体族群的结构和前例相似，两者的些许差异在于，这里 R 等值于 Nh，而不再是 Ng，在(98)中转换运算 Nh 所起的作用，这里由 Ng 承担。此外，需要注意的是，每个 $p\cdot q[r]$ 类的运算，都以两种等值形式呈现：$p\cdot q[r]$ 和 $q\cdot p[r]$。对于运算Ⅱ1 的置换运算 Pu，整体结果如下：

(99) (Ⅱ1 A) $p\cdot q[r] \xrightarrow{P_{pq}}$ (Ⅱ1 B) $q\cdot p[r] \xrightarrow{P_{qr}}$ (Ⅱ2C) $r\cdot p[q] \xrightarrow{P_{rp}}$ (Ⅱ2 A) $p\cdot r[q]$，

以及

(Ⅱ2 A) $p\cdot r[q] \xrightarrow{P_{rq}}$ (Ⅱ4 B) $q\cdot r[p] \xrightarrow{P_{qr}}$ (Ⅱ4 C) $r\cdot q[p] \xrightarrow{P_{rp}}$ (Ⅱ1 A) $q\cdot p[r]$

为缩短运算表达，我们只进行了区分性转换：

$$Ⅱ1\ A\ \ p\cdot q[r] \xrightarrow{P_{pr}+rq} (Ⅱ4\ B)\ q\cdot r[p] \xrightarrow{P_{qp}+pr} (Ⅱ2\ C)\ r\cdot p[q]$$

于是我们得到下表：

(100)

	1)初始运算		2)(1)的 Nd		3)(1)的 R		4)(3)的 Nd=(2)的 R
Ppr+rq	Ⅱ1 $p\cdot q[r]$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ14 $p\cdot q[r]$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ28 $p\cdot q[r]$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ23 $p\cdot q[r]$
	Ⅱ4 $q\cdot r[p]$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ11 $q\cdot r[p]$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ22 $q\cdot r[p]$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ17 $q\cdot r[p]$
Pqp+pr	Ⅱ2 $r\cdot p[q]$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ24 $r\cdot p[q]$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ27 $r\cdot p[q]$	$\overset{Nd}{\leftrightarrow}$	Ⅱ9 $r\cdot p[q]$

我们发现运算(3)是运算(2)的 Ng 关系，同样也出现在运算(1)和运算(4)之间。然而 NgNd=Nh(命题42)：因此运算(3)是运算(1)的 Nh，且运算(4)也是运算(2)的 Nh。因为，在个别情况下，我们有 Nh=R。逆运算的结构框架同样如此(对应的是，转换Ⅱ—Ⅵ类运算中相同编号的运算)。因此，我们得到(INRC=4)×(Nd=2)×(Pu=3)=24 个直接的区分运算(=48 个，加上命题9中的同质运算)。

(99)和(100)中，这些相同的运算，可以表述为二元—二元形式：对于 $p\cdot(q\ r)$，可以是 $(p\ q)\cdot(q\ r)$，以及 $(p\cdot q)\cdot(p\ r)$，甚至对于 $p\cdot q[r]$，可以是 $(p\cdot q)\cdot(r\supset q)$。这些二元—二元形式，同样也会产生Ⅱ—Ⅵ(a)和(b)族群类的两个转换运算群，自然，若两组转换中，第一组的情况和表(98)的一致，并不会因此说明，第二组会和表(100)有什么必然的关系。自然，我们也没有必要在此处做详细的说明。

§ 19 Ⅱ—Ⅵ(c)类的二元—二元运算族群

Ⅱ—Ⅵ(c)类的8个二元—二元算式，每个都有 A、B 和 C 这3格，彼此之间等值，但是这些 A、B 和 C 格，和那些包括两个肯定的等值(≡)运算不同。所以这个族群的整体结构，包括一个有24个元素的转换群，其中只有8个不等值关系。下面是4个顺运算

(Ⅱ类)的关系表格：

(101) 1)初始运算 2)(1)的 Nh

	1)初始运算	2)(1)的 Nh
P_{AB}	Ⅱ 7 A $(p=q)\cdot(p=r)$	Ⅱ 19 A $(p\ W q)\cdot(p\ W r)$
P_{BC}	Ⅱ 7 B $(p=q)\cdot(q=r)$	Ⅱ 16 B $(p\ W q)\cdot(q\ W r)$
	Ⅱ 7 C $(p=r)\cdot(q=r)$	Ⅱ 12 C $(p\ W r)\cdot(q\ W r)$

3)(2)的 Ng=(1)的 Nd	4)(1)的 Ng=(2)的 Nd=(3)的 Nh
Ⅱ 12 A $(p=q)\cdot(p\ W r)$	Ⅱ 16 A $(p\ W q)\cdot(p=r)$
Ⅱ 12 B $(p=q)\cdot(q\ W r)$	Ⅱ 19 B $(p\ W q)\cdot(q=r)$
Ⅱ 16 C $(p=r)\cdot(q\ W r)$	Ⅱ 19 C $(p\ W r)\cdot(q=r)$

因此(1)至(4)每一栏，分别是另外三个中某一个运算的 Ng、Nd 和 Nh，其中：Ng=NhNd；Nd=NhNg 以及 Nh=NgNd；此外每一横排中的一个运算和另外两个运算，通过置换运算 Pm 串联。涉及本族群(101)的关系中，有两个需要注意的特别之处。

1. 转换运算 Pαβ(两个二元复合运算的转换)，总是在一个单一二元……二元运算族群的整体结构中起作用，且在这里也确实出现了。但是，在个别运算情况(=)以及(W)中，它和 Nh 别无二致：

(102) Pαβ(=) 和 (W)≡Nh

例如，Ⅱ 12 A $(p=q)\cdot(p\ W r)\xrightarrow{P_{\alpha\beta}}(p\ W q)\cdot(p=r)$，Ⅱ 16 A (=Nh Ⅱ 12 A)。对于(=)·(=)或(W)·(W)的算式，我们自然有 Pαβ=I(同一转换)。但是，回到命题(102)的情况中，我们也可以用在(=)和(W)的形式里。例如：

(102 乙) $(p=q)\cdot(p=r)=(p\wedge q)\cdot(p\ r)\xrightarrow{P_{\alpha\beta}}[(p=q)\cdot(p\wedge r)=(p\wedge q)\cdot(p\wedge r)$

这证实了，在复合运算为(=)和(W)时，Pαβ=Nh。

2. 我们还记得，P_{AC} 不是 P_{AB+BC} 的结果，但是我们一直有 $P_{AC}=P_{AB+BC}$ PαβPα(或 Pβ)(命题 80 到 81 乙)。然而，在本族群中，个别情况下 Pα 和 Pβ 毫无例外，可以得到 Pα=I 以及 Pβ=I，其中：

(103) $P_{AC}=P_{AB+BC}$ Pαβ(若 α 和 β 是=或 W)

例如：

(103 乙) Ⅱ 12 A $[(p=q)\cdot(p\ W r)]\xrightarrow{P_{AC}}[(r=q)\cdot(p\ W r)]$ Ⅱ 19 C

Ⅱ 12 A $[(p=q)\cdot(p\ W r)]\xrightarrow{P_{AB+BC}}[(p=r)\cdot(q\ W r)]$ Ⅱ 16 C

然而，我们当然有 Ⅱ 19 C $\xrightarrow{P_{\alpha\beta}}$ Ⅱ 16 C，或(命题 102) Ⅱ 19 C $\xrightarrow{Nh}$ Ⅱ 16 C

该命题(103)也同样适用于 Ⅱ 7A $(p=q)\cdot(p=r)$ 或 Ⅱ 19A $(p\ W q)\cdot(p\ W r)$，因为这样 Pαβ 就再回到了相同的运算表达式里，其中

(104) $P_{AC}=P_{AB+BC}$ 若 Pαβ=I

命题(104)和命题(102)并不矛盾，因为后者只适用于算式中 α 和 β 为(=)和

(W),或(W)和(=)。

转换运算 Pm 一如既往地作周期循环。运算群中的其他转换也都是可交换的。

§20 Ⅲ—Ⅴ(a)序列中的 48 个一元—二元算式族群

Ⅲ—Ⅴ(a)序列中的 48 个一元—二元运算构成了两个分别有 24 个运算的子族群(其中 12 个运算属Ⅲ类,而 12 个逆运算属Ⅴ类)。一个子族群的形式为:$p\cdot(q\vee r)$,另一个为:$p\cdot(q\vee r)$,即 $p\cdot(q\supset r)$,两个子族群之间以 P_v 连接。每个子族群的内部转换运算只有 Rg,Rd 和 Pu:

(105)

	1)初始运算	2)(1)的 Rg	3)(1)的 R (2)的 Rd	4)(3)的 Rg (2)的 R=(1)的 Rd
P_v	Ⅲ1 $p\cdot(q\vee r)$	Ⅲ53 $\bar{p}\cdot(q\vee r)$	Ⅲ56 $\bar{p}\cdot(q\|r)$	Ⅲ22 $p\cdot(q\|r)$
Ppq	Ⅲ3 $q\cdot(p\vee r)$	Ⅲ39 $\bar{q}\cdot(p\vee r)$	Ⅲ52 $\bar{q}\cdot(p\|r)$	Ⅲ31 $q\cdot(p\|r)$
Pqr	Ⅲ8 $r\cdot(p\vee q)$	Ⅲ28 $\bar{r}\cdot(p\vee q)$	Ⅲ51 $r\cdot(p\ q)$	Ⅲ42 $r\cdot(p,q)$
	Ⅲ7 $p\cdot(q\supset r)$	Ⅲ55 $p\cdot(q\supset r)$	Ⅲ54 $p\cdot(r\supset q)$	Ⅲ2 $p\cdot(r\supset q)$
Ppq	Ⅲ16 $q\cdot(p\supset r)$	Ⅲ46 $q\cdot(p\supset r)$	Ⅲ40 $q\cdot(r\supset p)$	Ⅲ4 $q\cdot(r\supset p)$
Pqr	Ⅲ17 $r\cdot(p\supset q)$	Ⅲ35 $\bar{r}\cdot(p\supset q)$	Ⅲ30 $\bar{r}\cdot(p\supset q)$	Ⅲ10 $r\cdot(q\supset p)$

显然,反演的框架表也是同构的,用(∨)替代(·)(同样的编号:Ⅴ1;Ⅴ53;等等)。于是,根据 14 个转换的同一组运算,我们有(INRC=4)×(Rg=2)×(Pu=3)×(P_v=2)=48 个结构元素。在这些转换中,有 6 个置换运算 Ppq,Pqr,Ppr 或 Pqp,Prq 以及 Prp,按照表(64)的指示,我们记得,这些转换运算(加上 Pαα 和 Pa 或 Pα)分布其中。所以,根据下面的这些对应关系(第二个子族群同样适用),我们可以在表(105)和表(64)之间建立对应:

(106)

1 =Ⅲ1	2 =Ⅲ22	3 =Ⅲ3
7 =Ⅲ56	8 =Ⅲ53	9 =Ⅲ52
13=Ⅴ1	14=Ⅴ22	15=Ⅴ3
19=Ⅴ56	20=Ⅴ53	21=Ⅴ52
4 =Ⅲ31	5 =Ⅲ8	6 =Ⅲ42
10=Ⅲ39	11=Ⅲ51	12=Ⅲ28
16=Ⅴ31	17=Ⅴ8	18=Ⅴ42
22=Ⅴ39	23=Ⅴ51	24=Ⅴ28

但是,本族群Ⅲ—Ⅴ(a)主要关心的地方,在于和族群Ⅳ(f)之间的紧密关系。事实

上，一个算式，如 $p\cdot(q\vee r)$ 或 $p\cdot(q\supset r)$，是可以书写为一个二元—二元形式的：

(106) $$p\cdot(q\vee r)=[(p\cdot q)\vee(p\cdot r)]\equiv[(p|q)|(p|r)]$$

$$p\cdot(q\supset r)\quad p\cdot(q\vee r)\quad (p\cdot q)\vee(p\cdot r)\quad (p\supset q)\ (p\ r)$$

这些就是Ⅲ—Ⅴ(a)类的48个算式。然而，这些二元—二元形式，按照 $P\alpha\beta$ 的转换方法调换，有的转变为同族中的其他运算，有的转变为Ⅳ(f)族群中的运算。所以，后面我们还会回到这些关系上(§25)。

§21 Ⅲ—Ⅴ(b)类的48个二元—二元算式族群

对于本组的48个算式，若我们将 $(p=q)\cdot(p\vee r)$ 中的($\vee$)交换为($\supset$)，又或者我们将第二个复合运算中的($\vee$)或($\supset$)，与第一个复合运算中的(=)或(W)结合，可将本组的算式，分配在2个甚至是4个子族群中。此外，Ⅲ—Ⅴ(b)类表达式，包括两种形式的等值关系，比如 $(p=q)\cdot(p\vee r)$，以及 $(p=q)\cdot(q\vee r)$，这些形式中，带着不同的格(A和B或A和C抑或B和C)。因此，它们构成了96种不同的算式(但是其中只有48个具有区分性意义)，我们正是对这些算式进行4种可能的子族群划分。

这些运算可以形成以下的几个不同的子族群框架(INRC除外)的结构：

1. 两个复合运算(α)和(β)的置换运算 $P\alpha\beta$，即(=或W)以及($\vee$)、( )、($\supset$)或($\subset$)。例如：

(107) $$[(p=q)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{P\alpha\beta}[(p\vee q)\cdot(p=r)]$$

2. 运算中项的交换Pm。在前两个子族群这个特殊情况中，若被找寻的运算中项已经从属于包括了(=)运算的两个复合运算时，置换运算Pm产生了一个初始算式的等式；否则新的算式不能等值于初始的算式。例如：

(107乙) Ⅲ12 A $[(p=q)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{P_m}[(p=q)\cdot(q\vee r)]$ Ⅲ12 B = Ⅲ12 A

因为这里 q 是包含在 $(p=q)$ 里，且

Ⅲ9 A $[(p\vee q)\cdot(p=r)]\xrightarrow{P_m}[(q\vee r)\cdot(p=r)]$ Ⅲ9 C = Ⅲ9 A

因为这里 r 包含在 $(p=r)$ 里，但是，

Ⅲ36 A $[(p=q)\cdot(p\ r)]\xrightarrow{P_m}[(r=q)\cdot(p\ r)]$ Ⅲ12 C ≠ Ⅲ36 A

因为这里 r 没有包含在 $(p=q)$ 里。

至于后面两个子族群，我们再后面一些，去研究它们的等值条件。

3. 置换运算将 $[(p=q)\cdot(p\vee r)]$ 转换为 $[(p-q)\cdot(p\supset r)]$。

下面是前两个子族群的框架结构(108)：

(108)

		1)初始运算	2)(1)的 Pαβ	3)(1)的 R	4)(3)的 Pαβ=(2)的 R	
$P_{\wedge\vee}$	P_{AB}	Ⅲ5 A $(p=q)\cdot(p\vee r)$	Ⅲ9 A$(p\vee q)\cdot(p=r)$	Ⅲ36A $(p=q)\cdot(p\mid r)$	Ⅲ45 A $(p\mid q)\cdot(p=r)$	$P\subset$
		Ⅲ5 B $(p=q)\cdot(q\vee r)$	Ⅲ12B$(p\vee q)\cdot(q=r)$	Ⅲ36B $(p=q)\cdot(q\mid r)$	Ⅲ49 B $(p\mid q)\cdot(q=r)$	
	P_{BC}	Ⅲ9 C $(p=r)\cdot(q\vee r)$	Ⅲ12C$(p\vee r)\cdot(q=r)$	Ⅲ45C $(p=r)\cdot(q\mid r)$	Ⅲ49 C $(p\mid r)\cdot(q=r)$	
	P_{AB}	Ⅲ21A $(p=q)\cdot(p\supset r)$	Ⅲ20A$(p\supset q)\cdot(p=r)$	Ⅲ6 A $(p=q)\cdot(r\supset p)$	Ⅲ11 A $(q\supset p)\cdot(p=r)$	
		Ⅲ21B $(p=q)\cdot(q\supset r)$	Ⅲ18B$(p\supset q)\cdot(q=r)$	Ⅲ6 B $(p=q)\cdot(r\supset q)$	Ⅲ15 B $(q\supset p)\cdot(q=r)$	
	P_{BC}	Ⅲ11C $(p=r)\cdot(q\supset r)$	Ⅲ18C$(p\supset r)\cdot(q=r)$	Ⅲ20C $(p=r)\cdot(r\supset q)$	Ⅲ15 C $(r\supset p)\cdot(q=r)$	

我们发现，运算(3)是运算(2)的 RgPαβ 或 PαβRd(参看命题 83)，运算(4)是运算(1)的 RgPαβ 或 PαβRd。此外，我们还有，之前已经看到的一般运算原则(命题 88)：Pαβ $=\overset{3}{P}_m R\alpha$ 或 $\overset{3}{P}_m R\beta$。

举例说明：(Ⅲ18B $\xrightarrow{P\alpha\beta}$ Ⅲ21B) (Ⅲ18B $\xrightarrow{P_{BC}}$ Ⅲ18C $\xrightarrow{RgP_{AC}}$ Ⅲ6A $\xrightarrow{P_{AB}}$ Ⅲ6B)。因为，Ⅲ18既可以是Ⅲ6A的 RgP_{AC}，也可以是它的 $P_{AC}Rd$

至于 P_{α}(或 P_{β})，我们通常有(命题 80 和 81)：P_{AC} P_{AB+BC}①Pα3Pα(或 Pβ)，但是在( )、(∨)以及( )的情境中，我们有 Rα I以及 Rβ I，这样在第 个子族群中，我们可以有：$P\alpha\beta=\overset{3}{P}_m$以及 $P_{AC}=P_{AB}+BC$②Pαβ。

最后，反演的结构表(Ⅴ类)自然也是类似的。

另外两个子族群，呈现的结构框架和表(108)完全同构，唯一一点不同的地方是：所有的复合运算(α)和(β)的等值关系都是否定的。两个算式间的等值条件，不再是和(1-7)中的一样，而是用算式(W)·(V)或(W)·( )对应到等值算式(W)·( ))或(W)·(⊂)。例如：

(109)

$$\text{Ⅲ41 A}\ [(p\ W q)\cdot(p\supset r)]\equiv[(p\ W q)\cdot(q\vee r)]\quad \text{Ⅲ41 B}$$

$$\text{Ⅲ47 A}\ [(p\ W q)\cdot(p\mid r)]\equiv[(p\ W q)\cdot(r\supset q)]\quad \text{Ⅲ47 B}$$

$$\text{Ⅲ27 A}\ [(p\ W r)\cdot(p\vee q)]\equiv[(p\ W r)\cdot(r\supset q)]\quad \text{Ⅲ27 C}③$$

于是，我们推演出表(110)

---

① 应为 P_{AB+BC}，疑为原文编辑笔误，此处按原文。——译者注

② 应为 P_{AB+BC}，疑为原文编辑笔误，此处按原文。——译者注

③ 因此，对于Ⅲ41 A，"有脊椎的或无脊椎的"和"有脊椎意味着移动" "有脊椎的或无脊椎的"和"或无脊椎的，或不移动的动物或两者都有"；而对于Ⅲ47 A，"植物或动物的"和"与移动不兼容的植物" "植物或动物"和移动意味着动物"；最后，对于Ⅲ27 A：“动物(p)或植物(r)”和“动物或固定的(q)” “动物或植物”和“植物意味着固定的”。因为，若$(p\vee q)$，这里排除$(p\cdot q)$，以及若$(p\ W r)$，这里排除$(p\cdot r)$，于是对于Ⅲ27 A和C只有一种可能：$(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$，于是$(r\supset q)$。

(110)

		1)初始运算	2)(1)的 Pαβ	3)(1)的 R	4)(3)的 Pαβ=(2)的 R	
$P_{\smile\vee}$	P_{AB}	Ⅲ37A $(p\ W\ q)\cdot(p\vee r)$	Ⅲ27A $(p\vee q)\cdot(p\ W\ r)$	Ⅲ47A $(p\ W\ q)\cdot(p\mid r)$	Ⅲ48A $(p\mid q)\cdot(p\ W\ r)$	P
	P_{BC}	Ⅲ41B $(p\ W\ q)\cdot(q\vee r)$	Ⅲ24B $(p\vee q)\cdot(q\ W\ r)$	Ⅲ38B $(p\ W\ q)\cdot(q\mid r)$	Ⅲ44B $(p\mid q)\cdot(q\ W\ r)$	
		Ⅲ32C $(p\ W\ r)\cdot(q\vee r)$	Ⅲ25C $(p\vee r)\cdot(q\ W\ r)$	Ⅲ29C $(p\ W\ r)\cdot(q\mid r)$	Ⅲ34C $(p\mid r)\cdot(q\ W\ r)$	
	P_{AB}	Ⅲ41A $(p\ W\ q)\cdot(p\supset r)$	Ⅲ32A $(p\supset q)\cdot(p\ W\ r)$	Ⅲ38A $(p\ W\ q)\cdot(r\supset p)$	Ⅲ29A $(q\supset p)\cdot(p\ W\ r)$	
	P_{m}	Ⅲ37B $(p\ W\ q)\cdot(q\supset r)$	Ⅲ34B $(p\supset q)\cdot(q\ W\ r)$	Ⅲ47B $(p\ W\ q)\cdot(r\supset q)$	Ⅲ25B $(q\supset p)\cdot(q\ W\ r)$	
		Ⅲ48C $(p\ W\ r)\cdot(q\supset r)$	Ⅲ44C $(p\supset r)\cdot(q\ W\ r)$	Ⅲ27C $(p\ W\ r)\cdot(r\supset q)$	Ⅲ24C $(r\supset p)\cdot(q\ W\ r)$	

这样，我们在运算(2)和(3)之间，又有了新的关系 RgPαβ 或 PαβRd，同时运算(1)和(4)之间，有了关系 RdPαβ 或 PαβRg。

其他的运算 Pαβ，Pm，P ，或 P 也证明了，在(108)中的转换规则，而Ⅴ类运算的反演结构表也自然和这里的Ⅲ类运算表属于同类结构。

于是，我们很容易来总结，这 4 个子族群(108)和(110)为单一结构，可以整体从(108)转换到(110)，其中(1)和(3)栏用 Ng 转换，(2)和(4)栏用 Nd 转换，反之亦然。这里只涉及了一种转换(参看命题 83)：

(111)

$$NgP\alpha\beta = P\alpha\beta Nd$$

例如：

$$Ⅲ5A(p-q)\cdot(p\vee r)\xrightarrow{Ng}Ⅲ37A(p\ W\ q)\cdot(p\vee r)\xrightarrow{P\alpha\beta}Ⅲ27A(p\vee q)\cdot(p\ W\ r)$$

$$Ⅲ5A(p-q)\cdot(p\vee r)\xrightarrow{P\alpha\beta}Ⅲ9A(p\vee q)\cdot(p-r)\xrightarrow{Nd}Ⅲ27A(p\vee q)\cdot(p\ W\ r)$$

因此，综合起来我们有：(I，N，R，C＝4)×(Pαβ＝2)×(Pm＝3)×($P_{\smile\vee}$＝2)×(Ng 或 Nd＝2)＝4×2×3×2×2＝96 个元素，其中 48 个运算是不等值的。

§22 Ⅲ—Ⅴ(c)类的 16 个双一元—二元算式族群及Ⅳ(a)类的 8 个双一元—二元(或三重二元)算式族群

一个算式，如[p—($q\cdot r$)]·[p—($q\cdot r$)]，可被看作一个双结构，其中两个复合运算 α(—)和 β(—)，在复合运算的语境下，不用考虑两个合取运算($q\cdot r$)和($q\cdot r$)。于是，我们可以交换(α)和(β)，这样就可以将这些复杂的运算，囊括入之前构设的转换运算的蓝本中；然而，这些 Pαβ 转换，在此番情境中，得到了互反 R，因为，互反只是回过来，干涉了这些符号：[p—($q\cdot r$)]·[p—($q\cdot r$)] $\xrightarrow{P\alpha\beta}$[$p$—($q\cdot r$)]·[$p$—($q\cdot r$)]。另一方面，置换运算 Pu 同时作用在两个一元运算(p)和(p)上，于是产生了运算Ⅲ19 到运算Ⅲ14 及运算Ⅲ13 的转换(抑或对应到它们的逆命题)，然而，同样的这些一元运算的半互反运算 Rg(我们更喜欢表达为 Ru)，确保了这 3 个运算，变为运算Ⅲ23 的 A，B 和 C 的 3 个等值形式，及其逆命题的转换。自然对于Ⅴ类中的逆运算亦是如此。因此，对于Ⅲ(c)类运算，我们有：

(112)

1)初始运算

P_{pq}, P_{qr}

Ⅲ19 $[p=(q\cdot r)]\cdot[p|(q\cdot r)]$

Ⅲ14 $[q=(p\cdot r)]\cdot[q|(\bar{p}\cdot r)]$

Ⅲ13 $[r=(p\cdot q)]\cdot[\bar{r}|(\bar{p}\cdot\bar{q})]$

2)(1)的 R(=Pαβ)

Ⅲ26 $[p=(\bar{q}\cdot r)]\cdot[p|(q\cdot r)]$

Ⅲ33 $[q=(p\cdot r)]\cdot[q|(p\cdot r)]$

Ⅲ43 $[\bar{r}=(\bar{p}\cdot\bar{q})]\cdot[r|(p\cdot q)]$

3)(1)的 Ru

Ⅲ23 A $[\bar{p}=(q\cdot r)]\cdot[p|(\bar{q}\cdot\bar{r})]$

Ⅲ23 B $[\bar{q}=(p\cdot r)]\cdot[q|(\bar{p}\cdot\bar{r})]$

Ⅲ23 C $[\bar{r}=(p\cdot q)]\cdot[r|(\bar{p}\cdot q)]$

4)(2)的 Ru=(3)的 R

Ⅲ50 A $[p=(\bar{q}\cdot r)]\cdot[\bar{p}|(q\cdot r)]$

Ⅲ50 B $[q=(\bar{p}\cdot\bar{r})]\cdot[\bar{q}|(p\cdot r)]$

Ⅲ50 C $[r=(\bar{p}\cdot\bar{q})]\cdot[\bar{r}|(p\cdot q)]$

因此，我们得到了一个互反或半互反的运算群(INRC=4)×(Pu=3)×(Ru=2)=24个元素，其中16个不等值运算；运算(3)作为运算(1)的Ru(也就是每个复合运算的Rg)的同时，也是运算(2)的Rb(也就是每个复合运算的Rd，即 $q\cdot r$ 和 $q\cdot r$ 或 $p\cdot r$ 和 $p\cdot r$ 或 $p\cdot q$ 和 $p\cdot q$ 的R)；运算(4)既是运算(3)的R，也是运算(2)的Ru，也是运算(1)的Rb。于是，我们有：

(113)
(1)=(2)的 R=(3)的 Ru=(4)的 Rb
(2)=(1)的 R=(4)的 Ru=(3)的 Rb
(3)=(4)的 R=(1)的 Ru=(2)的 Rb
(4)=(3)的 R=(2)的 Ru=(1)的 Rb

此外，我们还有：

(113乙) R=RuRb， Ru=RRb， Rb=RRu

例如(2)=(1)的R，所以(2)=(4)的Ru，因为(4)=(1)的Rb。所以运算群(112)展现的是和运算群(49)同样的格式，即通过简单地用Ru和Rb来替换Rg和Rd(也就是，两个一元—二元算式中的每一个算式的Rg和Rd)。

至于Ⅳ(a)类8个三重二元运算族群，我们可以通过更简单的形式构成它的结构：

(114)

1)初始运算

P_{AB}, P_{BC}

Ⅵ32① $[(\bar{p}\vee q)\cdot(\bar{p}\vee r)]\cdot[q\vee r]$

Ⅳ18 $[(q\vee p)\cdot(\bar{q}\vee r)]\cdot[p\vee r]$

Ⅳ17 $[(r\vee p)\cdot(r\vee q)]\cdot[p\vee q]$

2)(1)的 R(=N)

Ⅳ39 $[(p\vee\bar{q})\cdot(p\vee\bar{r})]\cdot[\bar{q}\vee\bar{r}]$

Ⅳ53 $[(q\vee\bar{p})\cdot(q\vee\bar{r})]\cdot[\bar{p}\vee\bar{r}]$

Ⅳ64 $[(r\vee\bar{p})\cdot(r\vee q)]\cdot[p\vee q]$

3)(1)的 Rm

Ⅳ2 A $[(p\vee q)\cdot(p\vee r)]\cdot[q\vee r]$

Ⅳ2 B $[(p\vee q)\cdot(q\vee r)]\cdot[p\vee r]$

Ⅳ2 C $[(p\vee r)\cdot(q\vee r)]\cdot[p\vee q]$

4)(3)的 R(=N)

Ⅳ69 A $[(\bar{p}\vee\bar{q})\cdot(\bar{p}\vee\bar{r})]\cdot[\bar{q}\vee\bar{r}]$

Ⅳ69 B $[(\bar{p}\vee\bar{q})\cdot(\bar{q}\vee\bar{r})]\cdot[\bar{p}\vee\bar{r}]$

Ⅳ69 C $[(p\vee r)\cdot(\bar{q}\vee\bar{r})]\cdot[p\vee\bar{q}]$

---

① 第一栏第一行的Ⅵ32疑为Ⅳ32的笔误，此处按原文。——译者注

然而，在评论这张表之前，拿同样的这些运算和Ⅲ—Ⅴ(c)类的运算族群的运算进行一番比较，也是很有意思的。既然，我们已经知道(§4中的命题25和23乙)，前面的这些(三重二元)算式，可以转变为双一元—二元形式。在这些新形式下的Ⅳ(a)类运算族群，组建的框架结构如下：

(115)　　1)初始运算　　　　　　　　　　2)(1)的 R(=N)

	1)初始运算	2)(1)的 R(=N)
Ppq	Ⅳ32 $[p\|(q\|r)]\cdot[q\|(p,r)]$	Ⅳ39 $[p\|(q\ r)]\cdot[q\|(p\ r)]$
Pqr	Ⅳ18 $[q\|(p\|r)]\cdot[\bar{r}\|(p\|\bar{q})]$	Ⅳ53 $[\bar{q}\ (\bar{p}\|\bar{r})]\cdot[r\|(p\|q)]$
	Ⅳ7 $[r\|(p\|q)]\cdot[\bar{p}\|(q\|\bar{r})]$	Ⅳ64 $[\bar{r}\|(\bar{p}\|\bar{q})]\cdot[p\|(\bar{q}\|r)]$

3)(1)的 R	4)(3)的 R(=N)
Ⅳ2 A$[\bar{p}(q\|r)]\cdot[\bar{q}\|(p\|r)]$	Ⅳ69 A $[p\|(\bar{q}\|\bar{r})]\cdot[q\|(\bar{p}\|\bar{r})]$
Ⅳ2 B$[\bar{q}(p\|r)]\cdot[\bar{r}\|(p\|q)]$	Ⅳ69 B $[q\|(\bar{p}\|\bar{r})]\cdot[r\|(\bar{p}\|\bar{q})]$
Ⅳ2 C$[\bar{r}(p\|q)]\cdot[\bar{p}\|(q\|r)]$	Ⅳ69 C $[r\|(\bar{p}\|\bar{q})]\cdot[p\|(\bar{q}\|\bar{r})]$

于是，我们发现一件有趣的事情。和Ⅲ—Ⅴ(c)类中的运算相反：那里作为一元运算的命题，在完整的运算的一元—二元算式中，是一样的(例如Ⅲ13和Ⅲ26或Ⅲ25A中的 p 和 p；Ⅲ14和Ⅲ33中的 q 和 q 等)，而表(115)中的算式，在一元—二元算式中的一元运算，却不相同(例如Ⅳ32中的 p 和 q，Ⅳ53中的 q 和 r，等等)。然而，在第一个一元—二元算式(我们用UBⅠ表示该算式)中，作为一元运算的命题，自然也会出现在第二个一元—二元算式(我们用UBⅡ表示该算式)的二元运算中：例如，在Ⅳ32(运算1)中，我们有UBⅠ上的 p 和在UBⅡ里面的 $(p\ r)$ 中的 p。然而，我们注意到，在(3)栏中，运算Ⅳ2A反演了这些命题符号，于是，我们在UBⅠ中有 $\bar{p}$，在UBⅡ中有 p。所以，在这种特殊情况下，我们要引进转换运算 Ru′，该转换用来改变作为一元运算UBⅠ命题，以及其作为同样命题位于UBⅡ上时的符号：

(116)　　Ⅳ32 $[p\ (q\ r)]\cdot[q\ (p\ r)]\xrightarrow{Ru'}[\bar{p}(q\ r)]\cdot[\bar{q}\ (p\ r)]$ Ⅳ2 A

(命题符号 p 的改变)

反之亦然，我们将用转换 R 替代转换 Rb(命题113)，来定义不作为UBⅠ中一元运算的命题符号的改变：

(117)　　Ⅳ32 $[p\ (q\ r)]\cdot[q\ (p\ r)]\xrightarrow{Ru}[p\ (\bar{q}\ \bar{r})]\cdot[q\ (\bar{p}\ \bar{r})]$ Ⅳ69 A

(符号 q 和 r 的改变)

于是，我们发现，在表(115)中运算(1)、(2)、(3)和(4)之间存在着以下关系：

(118)　　(1)=(2)的 R=(3)的 Ru′=(4)的 Ru′

　　　　(2)=(1)的 R=(4)的 Ru′=(3)的 Ru′

　　　　(3)=(4)的 R=(1)的 Ru′=(2)的 Ru′

　　　　(4)=(3)的 R=(2)的 Ru′=(1)的 Ru′

此外，我们还有：

(119) $\quad \mathrm{R}=\mathrm{Ru}'\mathrm{R}\hat{\mathrm{u}}', \quad \mathrm{Ru}'=\mathrm{R\,Ru}', \quad \mathrm{Ru}'=\mathrm{R\,Ru}'$

所以，运算群(11)和运算群(119)，在一元和二元运算的分布上很相似；抑或和UB I中的运算( )和( )相比的置换运算，得到的是同样的结果。

至于，同样结构的形式(114)，其置换运算不再建立在一元运算符号之上，因为这里并没有，而是建立在第一对二元运算的作为运算中项的命题符号上：运算Ⅳ32中的 p，运算Ⅳ18中的 q，以及运算Ⅳ7中的 r。于是，我们可以定义，转换运算Rm作为运算中项符号改变，而转换运算 Rn则是不作为运算中项的命题的符号改变。于是表(114)中运算(1)，(2)，(3)和(4)有：

(120)
(1)＝(2)的R＝(3)的Rm＝(4)的Rm
(2)＝(1)的R＝(4)的Rm＝(3)的Rm
(3)＝(4)的R＝(1)的Rm＝(2)的Rm
(4)＝(3)的R＝(2)的Rm＝(1)的Rm

这里构成了和(118)一样的结构，唯一的不同是用Rm替换了Ru′，也就是说，命题 p，q 或 r 在这里，充当的是运算中项，而非一元运算的身份。

§23 Ⅳ(b)类，Ⅳ(c)类，Ⅳ(d)类和Ⅳ(e)类的一元—二元运算族群

这里有两个运算，Ⅳ2) $[(p \quad q) \quad r]$，和Ⅳ42 $(p \vee q) \quad r$ 或 $[(p \quad q) \vee r]$ 或 $[(p \quad q) \quad r]$，它们本身构成了一个单独的Ⅳ(b)类运算族群，比如R＝I以及N＝C；所有的转换Pαβ，Pu，Ng，Nd，Nh等，可将它们相互转换，抑或转化为各自本身。例如：

(121) $\quad [(p=q)\vee r] \xrightarrow{\mathrm{P}\alpha\beta} [(p \vee q)=r]$，即 Ⅳ42 $\xrightarrow{\mathrm{P}\alpha\beta}$ Ⅳ42

至于Ⅳ(c)类运算族群，形式为 $p \quad q$、r ，等等，这里由6个运算，构成了一个简单的结构，因为每个运算都有自己的R；事实上，$p \quad q[r]$ 等值于 $p \quad q[r]$，因为 $p \quad q[r]$ 等值于 $q=p[r]$。所以我们有：

(122) $\quad \mathrm{Ng}-\mathrm{N}\left|\begin{array}{l} \text{Ⅳ}15\ p-q[r] \xrightarrow{\mathrm{Ppr+rq}} \text{Ⅳ}28\ q=r[p] \xrightarrow{\mathrm{Pqp+pr}} \text{Ⅳ}24\ r=p[q] \\ \text{Ⅳ}56\ p=q[r] \xrightarrow{\mathrm{Ppr+rq}} \text{Ⅳ}43\ \bar{q}=r[p] \xrightarrow{\mathrm{Pqp+pr}} \text{Ⅳ}47\ r=p[q] \end{array}\right. \mathrm{Ng}=\mathrm{N}$

我们发现，运算Ⅳ15的转换运算Pu到运算Ⅳ28，以及到运算Ⅳ24，不只是转换运算Ppr或Pqr，这里得到的等值形式，是像表( )中Ppr＋rq以及Pqr＋pr这样进行的。

相反，若我们将Ⅳ(c)类的这6个运算置于二元 元形式下，比如运算Ⅳ15 $p \quad q[r]$ $[(p \quad r) \quad (q \quad r)]$，于是运算组的转换，就简化为N和中项置换运算Pm(122

乙)。

$$(122\text{乙})\quad \searrow\begin{bmatrix} \text{Ⅳ}28\,[(p=q)=(p=r)] \xrightarrow{P_{AB}} \text{Ⅳ}24\,[(p=q)=(q=r)] \xrightarrow{P_{BC}} \text{Ⅳ}15[(p=r)=(q=r)] \\ \text{Ⅳ}43\,[(p=q)\,W\,(p=r)] \xrightarrow{P_{AB}} \text{Ⅳ}47\,[(p=q)\,W\,(q=r)] \xrightarrow{P_{BC}} \text{Ⅳ}56[(p=r)\,W\,(q=r)] \end{bmatrix}\searrow$$

回归到256个三元运算的一般情况中，我们再看Ⅳ(c)类的二元—三元形式，我们发现，这些运算元素(122乙)(参看§35—37)占据了256个三元运算表的对角线↘。

Ⅳ(d)类运算族群，组成了一个类似的结构，除了R＝N＝Ng(其中C＝I)，这里Ppq和Pqr就是以从一个区分性算式转换为另一个(123)：

$$(123)\quad Ng=\searrow\begin{bmatrix} \text{Ⅳ}1\ p\cdot(q*r) \xrightarrow{Ppq} \text{Ⅳ}10\ q\cdot(p*r) \xrightarrow{Pqr} \text{Ⅳ}21\ r\cdot(p*q) \\ \text{Ⅳ}70\ \bar{p}\cdot(q*r) \xrightarrow{Ppq} \text{Ⅳ}61\ \bar{q}\cdot(p*r) \xrightarrow{Pqr} \text{Ⅳ}50\ \bar{r}\cdot(p*q) \end{bmatrix}\searrow g=N=Rg=R$$

至于Ⅳ(e)类运算族群，它是由12个形式为$p=(q\vee r)$的运算和12个形式为$p=(q\supset r)$的运算构成，代表着两个对应的子族群：

(124)

		1)初始运算	2)(1)的Rg(＝N)
$P_{\vee\supset}$	Ppq	Ⅳ5 $p=(q\vee r)$	Ⅳ66 $\bar{p}=(q\vee r)$
	Pqr	Ⅳ12 $q=(p\vee r)$	Ⅳ59 $\bar{q}=(p\vee r)$
		Ⅳ22 $r=(p\vee q)$	Ⅳ49 $\bar{r}=(p\vee q)$
	Ppq	Ⅳ17 $p=(q\supset r)$	Ⅳ54 $\bar{p}=(q\supset r)$
	Pqr	Ⅳ26 $q=(p\supset r)$	Ⅳ45 $\bar{q}=(p\supset r)$
		Ⅳ27 $r=(p\supset q)$	Ⅳ44 $\bar{r}=(p\supset q)$

3)(1)的R	4)(3)的Rg(＝N)＝(1)的Rd(＝C)		
Ⅳ35 $\bar{p}=(q\mid r)$	Ⅳ36 $p=(q\mid r)$	Ppq	$P_{\mid\supset}$
Ⅳ31 $\bar{q}=(p\mid r)$	Ⅳ40 $q=(p\mid r)$	Pqr	
Ⅳ30 $\bar{r}=(p\mid q)$	Ⅳ41 $r=(p\mid q)$		
Ⅳ63 $\bar{p}=(r\supset q)$	Ⅳ8 $p=(r\supset q)$	Ppq	
Ⅳ58 $\bar{q}=(r\supset p)$	Ⅳ13 $q=(r\supset p)$	Pqr	
Ⅳ48 $\bar{r}=(q\supset p)$	Ⅳ23 $r=(q\supset p)$		

横向的每一组(1到4)构成了一组四位运算INRC群，但是，因为分量运算为等值运算(＝)，反演(N)等值于Ng和Rg；对射C等值于(1)的Rd或R的Rg(因为RgR＝Rd)；并且互反R自然等值于RgRd，所以等值于(2)的Rd和(4)的Rg。我们在子族群$p=(q\supset r)$中也发现了同样的关系，而且，我们通过二值—单值的对应，通过$P_{\vee\supset}$转换可进行两个子族群之间的互相转换：$[p=(q\vee r)] \xrightarrow{P} [p=(q\vee r)]$。

但是Ⅳ(e)类的运算，每一个也可以呈现出两种三元—二元的等值形式，从不同方面看，这都是值得注意的。首先，在一元—二元(∨)形式中，(＝)和(∨)的概念是有交织

的，例如从 $p=(q\vee r)$ 得出的二元—二元($\supset$)形式，比如$[(p=q)=(r\supset q)]$，以及$[(p=r)=(q\supset r)]$，然后，逆转 $p=(q\supset r)$，得到$[(p=r)=(q\vee r)]$，以及$[(p=q)=(q\cdot r)]$。第二方面，这两个等值形式并没有同样的运算中项，而且它们的运算中项，作为(124)中一元运算的命题总是不同的。这样得到的一个框架结构，其中除了 I、N、R、C，我们有转换运算：① Pm——对在两个等值的二元—二元形式中，既不作为这个，也不作为另一个运算中项的命题的转换；当算式有中项 q 和 r(即：没有 p)时，被置换为中项为 p 和 r(即：没有 q)的算式，我们可以写作 $P_{(m)}$；② 我们用这个复杂的符号 $P_{(\supset)(\vee)}$ 来表示从$(x\supset y)$到$(x\vee y)$，或者是到$(x\cdot y)$的置换，以及从$(y\supset x)$即$(x\subset y)$到$(x|y)$，或者是到$(\bar{x}\cdot y)$的置换。然而，这种置换运算本身也是和中项 m 相连的：在$(x\supset y)$中，当命题 y 充当了整个算式中运算中项的角色，它自然在$(x\vee y)$中占据位置，置换运算 P 得到结果$(x\vee y)$；若 x 作为运算中项，置换运算 P，则得到结果$(x\cdot y)$。同样，当在逆蕴涵关系 $y\supset x$(或 $x\subset y$)中，是 x 作为整个表达式的运算中项，置换运算 P，得到结果 $\bar{x}\cdot y$，若 y 为中项，置换 P，得到结果 $x|y$[1]。

于是我们得到了结果表(124 乙)。

(124 乙)

1)初始运算		2)(1)的 R	
P_{AB}	Ⅳ5 $[(p=q)=(r\supset q)]\equiv[(p=r)=(q\supset r)]$	Ⅳ35 $[(p=q)=(q\supset r)]\equiv[(p=r)=(r\supset q)]$	P_{AB}
P_{AB} / P_{BC}	Ⅳ12 $[(p=q)=(r\supset p)]\equiv[(q=r)=(p\supset r)]$	Ⅳ31 $[(p=q)=(p\supset r)]\equiv[(q=r)=(r\supset p)]$	P_{AB} / P_{BC}
P_{BC}	Ⅳ22 $[(p=r)=(q\supset p)]\equiv[(q=r)=(p\supset q)]$	Ⅳ30 $[(p=r)=(p\supset q)]\equiv[(q=r)=(q\supset p)]$	P_{BC}

3)(1)的 $P_{(\supset)(\vee)}$		4)(2)的 $P_{(\supset)(\vee)}$=(3)的 R	
P_{AB}	Ⅳ17 $[(p=q)=(q\cdot r)]\equiv[(p=r)=(q\vee r)]$	Ⅳ63 $[(p=q)=(\bar{q}\cdot\bar{r})]\equiv[(p=r)=(q|r)]$	$P_{\bar{AB}}$
P_{AB} / $P_{\bar{BC}}$	Ⅳ26 $[(p=q)=(p\cdot r)]\equiv[(q=r)=(p\vee r)]$	Ⅳ58 $[(p=q)=(\bar{p}\cdot\bar{r})]\equiv[(q=r)=(p|r)]$	$P_{\bar{AB}}$ / $P_{\bar{BC}}$
$P_{\bar{BC}}$	Ⅳ27 $[(p=r)=(p\cdot q)]\equiv[(q=r)=(p\vee q)]$	Ⅳ48 $[(p=r)=(p\cdot q)]\equiv[(q=r)=(p|q)]$	$P_{\bar{BC}}$

5)(1)的 N=(2)的 C=(3)的 $NP_{(\supset)(\vee)}$		6)(2)的 N=(1)的 C=(5)的 R	
P_{AB}	Ⅳ66 $[(p\ W\ q)=(r\supset q)]\equiv[(p\ W\ r)=(q\supset r)]$	Ⅳ36 $[(p\ W\ q)=(q\supset r)]\equiv[(p\ W\ r)=(r\supset q)]$	$P_{\bar{AB}}$
P_{AB} / $P_{\bar{BC}}$	Ⅳ59 $[(p\ W\ q)=(r\supset p)]\equiv[(q\ W\ r)=(p\supset r)]$	Ⅳ40 $[(p\ W\ q)=(p\supset r)]\equiv[(q\ W\ r)=(r\supset p)]$	$P_{\bar{AB}}$ / P_{BC}
$P_{\bar{BC}}$	Ⅳ49 $[(p\ W\ r)=(q\supset p)]\equiv[(q\ W\ r)=(p\supset q)]$	Ⅳ41 $[(p\ W\ r)=(p\supset q)]\equiv[(q\ W\ r)=(q\supset p)]$	P_{BC}

7)(5)的 $P_{(\supset)(\vee)}$=(3)的 N=(4)的 C		8)(6)的 $P_{(\supset)(\vee)}$=(4)的 N=(3)的 C=(7)的 R	
P_{AB}	Ⅳ54 $[(p\ W\ q)=(q\cdot r)]\equiv[(p\ W\ r)=(q\vee r)]$	Ⅳ8 $[(p\ W\ q)=(q\cdot\bar{r})]\equiv[(p\ W\ r)=(q|r)]$	P_{AB}
P_{AB} / P_{BC}	Ⅳ45 $[(p\ W\ q)=(p\cdot r)]\equiv[(q\ W\ r)=(p\vee r)]$	Ⅳ13 $[(p\ W\ q)=(p\cdot r)]\equiv[(q\ W\ r)=(p|r)]$	P_{AB} / P_{BC}
P_{BC}	Ⅳ44 $[(p\ W\ r)=(p\cdot q)]\equiv[(q\ W\ r)=(p\vee q)]$	Ⅳ23 $[(p\ W\ r)=(\bar{p}\cdot q)]\equiv[(q\ W\ r)=(p|q)]$	P_{BC}

① 随之而来的是，一个成对等值算式的半互反运算 $x\supset y$ 和 $y\supset x$，对应到一个成对置换运算中的半对射运算 $x\cdot y$ 和 $x\vee y$ 或 $\bar{x}\cdot y$ 和 $x|y$。

我们可以看出这个结构和表(121)类似，尽管这中间起作用的异质转换是不同的。

§24 24个Ⅳ(f)类的二元—二元运算族群

12个形式为$[(p\supset q)\cdot(r\supset p)]$的二元—二元运算，构成了一个特别重要的子族群，在这些二元运算中间，已经赋予了经典三段论以证明的功效。在这12个运算的子族群中，加入运算形式$[(p\supset q)\cdot(p\vee r)]$，这样就构成了一个有24个元素组成的族群。

然而，到目前为止，(我们所)研究的族群的情况刚好相反，这里的简单转换运算Pm、Pαβ、Nh、Rg或Rd只限于维持群内部的结构形式，并没有超出既有族群的构成元素的集合。恰巧，这些相同的转换中的每一个，都可以应用在Ⅳ(f)类运算族群的每个元素上，并且，必然会连接上Ⅲ—Ⅴ(a)类运算族群的元素，以二元—二元形式呈现，并构建出一个总数为96的运算组，其中：Ⅲ—Ⅴ(a)类48个、Ⅳ(f)类24个，以及Ⅳ(f)类的24个等值运算。在关于族群之间相互转换这个部分的主要内容，我们在第六章(§25)中再作解释。

然而，这是一个区分Ⅳ(f)类族群和Ⅲ—Ⅴ(a)类族群的方式，并且将系统构成一个封闭的群，独立于前述系统。但是，这个方法需要使用更为复杂的转换，这里我们必须用到，Ⅲ—Ⅴ(c)类和Ⅳ(a)类族群中的双一元—二元和双二元—二元运算，以及一个等值形式下的运算的表达式。这些情况显示，Ⅳ(f)类族群具有独有的特征，尽管它是独立的并且构成了一个自然系统，但并没有与相邻的寻常族群有更少的关联，也没有表现出另外一种序列(Ⅲ—Ⅴ的序列而不是Ⅳ的序列)。

事实上，我们可以将这里的一个运算，比如运算Ⅳ11$[(p\supset q)\cdot(p\vee r)]$，变为其等值形式$[(p\supset q)\equiv(p\vee r)]$，因为，这里的等值算式的分量运算可以变化为两个合取运算：$[(p\supset q)\cdot(p\vee r)]$和$[(p\cdot q)\cdot(p\cdot r)]$。然而$[(p\cdot q)\cdot(p\cdot r)]=0$，这样等值关系中的两个合取，就被简化为了最初的算式，即运算Ⅳ11的$[(p\supset q)\cdot(p\vee r)]$。和Ⅲ—Ⅴ(a)类族群中最接近运算Ⅳ11的算式相反，具体说来，如运算Ⅴ54$[(q\supset p)\cdot(p\vee r)]$以及运算Ⅴ7$[(p\supset q)\cdot(p\ r)]$，它们是不可以转换为同类的等值形式的，如$[(q\supset p)\equiv(p\vee r)]$或$[(p\supset q)\equiv(p\ r)]$，因为这里的合取$[(p\cdot q)\cdot(p\cdot r)]$和$[(p\cdot q)\cdot(p\cdot r)]$并不为空，它们分别等值于$(p\cdot q\cdot r)$和$(p\cdot q\cdot r)$。因此算式$[(q\supset p)\equiv(p\vee r)]$或$[(p\supset q)\cdot(p\ r)]$，也不再属于Ⅲ—Ⅴ(a)类族群，而是Ⅱ—Ⅵ(a)类族群。

---

① 还需要注意，对于一个给定的算式，两个可能的置换运算中的一个Pm、不是Pm)会得到R：例如$(p\supset q)\cdot(r\supset q)\xrightarrow{P}[(p\supset q)\cdot(r\supset p)]$，但是$(p\supset q)\cdot(r\supset q)\xrightarrow{P}[(p\supset r)\cdot(r\supset q)]=R$。

一般说来，Ⅳ(f)类的21个运算中的每一个，及其每一个运算下面的两个等值算式，比如，$[(p\supset q)\cdot(p\vee r)]$和$[(p\quad q)\quad(r\supset p)]$(Ⅳ11)，可以通过简单地用分量运算(　)或(W)替换(·)或(　)，而将其设置为，肯定(　)或否定(W)的算式形式。相反，对于Ⅲ—Ⅵ(a)类族群中的18个运算，当我们用等值运算(=)和(W)替换分量运算(·)和(|)后，它们就变为Ⅱ—Ⅵ(a)类的运算了。

因此，我们从Ⅳ(f)类运算为等值形式的出发，对于一个算式，如$[(p\supset q)\cdot(p\vee r)]$，使用了包含否定的复合运算之间的等值关系，即得到$[(p\cdot q)\quad(p\cdot r)]$，而不是得到$[(p\supset q)\quad(p\vee r)]$。这样，在不改变任何原则的同时，简化了转换，因为这两个等值关系自然是一样的①。

于是，我们可以绘制出以下的表(125)。

(125)

	1)初始运算	2)(1)的N	3)(1)的R	4)(1)的C=(3)的N	Q
A	Ⅳ46 乙$(p\cdot q)=(p\cdot r)$	Ⅳ25 乙$(p\cdot q)W(p\cdot r)$	Ⅳ57 乙$(p\cdot q)=(p\cdot r)$	Ⅳ14 乙$(p\cdot q)W(p\cdot r)$	Q1
	Ⅳ46 $(\bar{p}\cdot q)W(p\cdot \bar{r})$	Ⅳ25 $(p\cdot q)=(p\cdot \bar{r})$	Ⅳ57 $(p\cdot \bar{q})W(\bar{p}\cdot r)$	Ⅳ14 $(p\cdot \bar{q})=(\bar{p}\cdot r)$	Q2
P_{AB}					
B	Ⅳ37 乙$(\bar{p}\cdot \bar{q})=(q\cdot r)$	Ⅳ34 乙$(\bar{p}\cdot \bar{q})W(q\cdot r)$	Ⅳ62 乙$(p\cdot q)=(\bar{q}\cdot \bar{r})$	Ⅳ9 乙$(p\cdot q)W(\bar{q}\cdot \bar{r})$	Q3
	Ⅳ37 $(p\cdot q)W(q\cdot r)$	Ⅳ34 $(p\cdot q)=(q\cdot r)$	Ⅳ62 $(p\cdot q)W(q\cdot r)$	Ⅳ9 $(p\cdot q)=(q\cdot r)$	Q4
P_{BC}					
C	Ⅳ38 乙$(\bar{p}\cdot \bar{r})=(q\cdot r)$	Ⅳ33 乙$(p\cdot r)W(q\cdot r)$	Ⅳ52 乙$(p\cdot r)=(q\cdot \bar{r})$	Ⅳ19 乙$(p\cdot r)W(q\cdot \bar{r})$	Q5
	Ⅳ38 $(p\cdot \bar{r})W(\bar{q}\cdot r)$	Ⅳ33 $(p\cdot \bar{r})=(\bar{q}\cdot r)$	Ⅳ52 $(\bar{p}\cdot r)W(q\cdot \bar{r})$	Ⅳ19 $(\bar{p}\cdot r)=(q\cdot \bar{r})$	Q6
$R_{=,\ast}$					
A	Ⅳ51 $(\bar{p}\cdot q)=(p\cdot r)$	Ⅳ20 $(\bar{p}\cdot q)W(p\cdot r)$	Ⅳ11 $(p\cdot \bar{q})=(\bar{p}\cdot \bar{r})$	Ⅳ60 $(p\cdot \bar{q})W(\bar{p}\cdot \bar{r})$	Q7
	Ⅳ51 乙$(\bar{p}\cdot \bar{q})W(p\cdot \bar{r})$	Ⅳ20 乙$(\bar{p}\cdot \bar{q})=(p\cdot \bar{r})$	Ⅳ11 乙$(p\cdot q)W(\bar{p}\cdot r)$	Ⅳ60 乙$(p\cdot q)=(\bar{p}\cdot r)$	Q8
P_{AB}					
B	Ⅳ55 $(p\cdot \bar{q})=(q\cdot r)$	Ⅳ16 $(p\cdot \bar{q})W(q\cdot r)$	Ⅳ4 $(\bar{p}\cdot q)=(\bar{q}\cdot \bar{r})$	Ⅳ67 $(\bar{p}\cdot q)W(\bar{q}\cdot \bar{r})$	Q9
	Ⅳ55 乙$(p\cdot q)W(q\cdot r)$	Ⅳ16 乙$(p\cdot \bar{q})=(q\cdot \bar{r})$	Ⅳ4 乙$(p\cdot q)W(q\cdot r)$	Ⅳ67 乙$(p\cdot q)=(q\cdot r)$	Q10
P_{BC}					
C	Ⅳ65 $(p\cdot \bar{r})=(q\cdot r)$	Ⅳ6 $(p\cdot \bar{r})W(q\cdot r)$	Ⅳ3 $(\bar{p}\cdot r)=(\bar{q}\cdot \bar{r})$	Ⅳ68 $(\bar{p}\cdot r)W(\bar{q}\cdot \bar{r})$	Q11
	Ⅳ65 乙$(p\cdot r)W(q\cdot r)$	Ⅳ6 乙$(p\cdot r)=(q\cdot r)$	Ⅳ3 乙$(p\cdot r)W(q\cdot r)$	Ⅳ68 乙$(p\cdot r)=(q\cdot r)$	Q12

我们可以看到，整个运算被分为各自有6个四位运算的两个子族群：Q1到Q6以及Q7到Q12。每个子族群包括3对四位运算，3对中的每一个运算组，由一个运算中项标记出来：p对应Q1Q2和Q7Q8，q对应Q3Q4和Q9Q10；r对应Q5Q6和Q11Q12。最后每对四位运算，代表同一运算的等值算式的两个系统：Q7Q8中的运算Ⅳ51和运算Ⅳ51乙抑或Q1Q2中的运算Ⅳ46乙和运算Ⅳ46等等。

① 根据$(x\quad y)\equiv(x=y)$。

1. 我们首先要检验，每个算式和它的等式之间的关系，也就是，不成对的四位运算 Q1；Q3 等，和成对的对应的四位运算之间的关系。此处彼此之间的关系呈现为一般常规形式。我们将运算中项称之为 m，这样对于 A 格就是 p；B 格就是 q；C 格就是 r。我们将其他不作为中项部分的命题称之为m(如表 120 中所示)，所以，对于格 A、B 和 C：

$$(A)m=q,r;\quad (B)m=p,r;\quad (C)\bar{m}=p,q$$

于是，我们发现，在所有的情境中，一个给定的算式的等值形式(例如Ⅳ46 乙对Ⅳ46，反之亦然)，包括一个命题m符号的改变，即 Rm，以及分量运算的一个逆运算(对 W 或反过来)，所以有 N：

(126)
$$Ⅳn \xrightleftharpoons{(Rm)N} Ⅳn\text{乙}$$

但是，因为互反 Rm涉及的是复合运算，而 N 是分量运算，所以我们不能把 R 和 N 组合成 C；

2. 每个成对的四元运算，是通过 Pm 转换为下一对的，即从 Q1Q2 到 Q3Q4，或从 Q7Q8 到 Q9Q10 是通过 P_{AB}进行；从 Q3Q4 到 Q5Q6，或从 Q9Q10 到 Q11Q12 是通过 P_{M} 进行。但是需要注意的是，表(125)并不符合整体可行的转换 Pm(参考表 76)；只有同时囊括Ⅳ(f)类和Ⅱ—Ⅴ(a)类的转换，才能实现这个完整的对应。

3. 至于由第一子族群转换为第二子族群，即从四位运算 Q1 到 Q6，分别对应到四位运算 Q7 到 Q17，需要注意的东西有很多。事实上，我们注意到，从分量运算和复合运算中命题的符号，这两个观点出发，若不借助于等值形式(Ⅳn 乙)，将第一子族群中的四位运算对应到第二子族群是不可能的。相反，通过引入该等值形式(同时转换它们在 Q1—Q6 和 Q7—Q12 上的位置，以使对应保留同样的分量运算)，恰巧在第一个子族群中的算式，和其对应的第二个子族群中的算式的第一个二元复合运算，总是一模一样：例如，我们在运算Ⅳ46 乙和运算Ⅳ51 中有($p \cdot r$)；我们同样在运算Ⅳ38 和运算Ⅳ65乙中有($q \cdot r$)，等等。因此，从第一个到第二个子族群的转换，只在每个算式的两个二元复合运算的第一个中进行，即，按照定义来说，只进行左侧运算的转换。

换言之，我们将不作为运算中项 m 的左边二元复合运算的两个命题，称之为mg 只需要反演mg 标识的命题，我们就可以从第一个子族群的运算转换为第二个子族群对应的运算，即进行 Rmg 的转换：

(127)
$$[Q1-Q6] \xrightleftharpoons{Rmg} [Q7-Q12]$$

例如，运算Ⅳ46 乙转换为运算Ⅳ51，只需要将符号 q 变为 q：事实上($p \cdot q$)是左侧二元复合运算，并且因为 p 是运算中项 m，所以 q 构成了命题mg；因此从($p \cdot q$)得到($p \cdot q$)。

然而，需要注意的是，转换 Rmg 并不等值于置换运算$P_{\backslash}$：事实上，在运算Ⅳ46 乙到运算Ⅳ51 的转换中，从($p \cdot q$)转换为($p \cdot q$)，但是在运算Ⅳ37 乙到运算Ⅳ55 的转换中，是从($p \cdot q$)转换为($p \cdot q$)，因为在这里 p 成了mg。

总而言之，Ⅳ(f)类运算族群，可以在不改变其意义的条件下，将其运算转换为等值形式，这是它与Ⅲ－Ⅴ(a)的区别，不能通过群的形成而实现结构化，这个群包含了一些不常使用的转换，如(Rm)N 和 Rmg 等。如果我们相对地使用一些寻常的转换运算，诸如 Pαβ，P，以及 Pm(在其所有通用情况下)等，那么就会形成一个完全独立的族群Ⅳ(f)类和Ⅲ－Ⅴ(a)类；这也是我们在接下来章节里面所要研究的内容。

第六章 一个运算族群向另一个的转换

在第一和第二章中，我们已经证明了，用（单或双）一元、二元或三元一二元算式形式，书写256个三元运算的可能，同时我们也按照INRC运算群和三元逻辑转换的规则，将这些算式整合为四位或成对的运算。随后，在第三和第四章中，我们通过否定或置换的异质性转换，在8、12或16个元素组成的运算群中，构建了从一个群的四位运算转换到另一个群的可能。在第五章中，我们刚刚看到，怎样让转换以运算群的形式，构成14个区分运算族群的结构。现在我们需要做的是，将这些族群彼此连接，考察它们的元素之间以何种转换运算实现了彼此对应。

§ 25 Ⅳ(f)类和Ⅲ—Ⅴ(a)类族群的互反转换

我们刚刚对每个族群做了内在性分析，为确保这些分析之间的转换运算，以及确保对族群间的转换的研究，我们非常有必要先描述Ⅳ(f)类和Ⅲ—Ⅴ(a)类族群间的关系，因为，如果这些引导性的例子，构成了从一个族群到另一个族群转换的显然的特殊例证，那么它还能表明，当这样一些转换运算，诸如：Pαβ，Pm，甚至是Rg或Rd等，在常规使用时，它们不可能不超越运算族群本身的界限范围。

假设有Ⅳ(f)类族群的一个运算，如运算Ⅳ11 $[(p\supset q)\cdot(p\vee r)]$，我们可以将其用至下列转换中：

1. 置换运算Pαβ，这里(α)＝(⊃)而(β)＝(∨)：

$$\text{Ⅳ}11\ [(p\supset q)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{P\alpha\beta}[(p\vee q)\cdot(p\supset r)]=\text{Ⅳ}20\ \text{乙}$$

2. 半互反运算Rα或Rβ：

$$\text{Ⅳ}11\ [(p\supset q)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{R\alpha}[(q\supset p)\cdot(p\vee r)]=\text{Ⅴ}54$$

$$\text{Ⅳ}11\ [(p\supset q)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{R\beta}[(p\supset q)\cdot(p\ r)]=\text{Ⅴ}7$$

3. 置换运算Pm：

$$\text{Ⅳ}11\ [(p\supset q)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{P_{AB}}[(p\supset q)\cdot(q\vee r)]=\text{Ⅴ}54$$

4. 只针对一个复合运算的置换运算$P_{\vee\supset}$：

$$\text{Ⅳ}11\ [(p\supset q)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{P_{\vee\supset B}}[(p\supset q)\cdot(p\supset r)]=\text{Ⅴ}22$$

$$[(p\supset q)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{P}[(p\vee q)\cdot(p\vee r)]=\text{Ⅴ}56$$

于是，我们发现，除了其中一个，这里的每一个置换运算（或半互反运算）都将运算

Ⅳ11 转换为另一个隶属于Ⅲ—Ⅴ(a)类族群的运算。其余是置换运算 Pαβ 在转换Ⅳ(f)类其他运算时，例如运算Ⅳ4 $[(q\supset p)\cdot(q\vee r)]$，也是变为Ⅲ—Ⅴ(a)类族群的运算，在这里是变为了运算Ⅴ46 $[(p\supset q)\cdot(r\supset q)]$。

从另一边来看，我们在§20 中，已经研究过的Ⅲ—Ⅴ(a)类族群中的 18 个三元—二元运算，可以根据下列转换运算，变为二元—三元的等价形式：

Ⅲ1 $[p\cdot(q\vee r)]\equiv[(p\cdot q)\vee(p\cdot r)]\equiv[(p|q)|(p|r)]$

Ⅲ7 $[p\cdot(q\supset r)]\equiv[p\cdot(q\vee r)]\equiv[(p\cdot q)\vee(p\cdot r)]\equiv[(p\supset q)|(p|r)]$

Ⅲ53 $[p\cdot(q\vee r)]\equiv[(p\cdot q)\vee(p\cdot r)]\equiv[(q\supset p)|(r\supset p)]$

Ⅲ56 $[p\cdot(q\supset r)]\equiv[p\cdot(q\vee r)]\equiv[(p\cdot q)\vee(p\cdot r)]\equiv[(p\vee q)|(r\supset p)]$

等(参看命题 106)。

结果是，在表(125)中的每个形式为三元—二元的运算，以 p、q、r 或 p、q、r 的一元运算为标识，对应上一个二元—三元运算的形式，其中运算中项 p、q 或 r 就是构成三元—二元算式以及一元运算的相同命题。所以反演转换的逆运算和顺运算一样：Ⅲ—Ⅴ(a)类中的 12 个四位三元—二元运算，其中 4 个运算中项是命题 p，4 个是命题 q，4 个是命题 r。然而，若我们考虑到，之前我们在§24(参考表 125)中，看到的Ⅳn(乙)的等值算式，Ⅳ(f)类族群的四位运算，同样也有 12 个。于是，很自然我们可以去研究，是否可以通过置换运算 Pαβ、Pm 以及 Rα 或 Rβ，将Ⅳ(f)类运算转换为Ⅲ—Ⅴ(a)类运算，反之亦然；以及是否，后面这一类运算可以用三元—二元运算及二元—三元运算两种形式呈现，例如，第二个形式的运算中项和第一个形式的一元运算对应，这样在Ⅲ—Ⅴ(a)类(参考表 125)[1]和Ⅳ(f)类(以常用形式或表 125 中的形式呈现)的四位运算之间，是会存在某种确定的对应关系：

(128) 中项或一元运算	Ⅲ—Ⅴ(a)类运算	Ⅳ(f)类运算
p..........	Ⅲ—Ⅴ(7;54)和(55;2)	Ⅳ11;20;51;60(和乙)
q..........	Ⅲ—Ⅴ(16;40)和(46;4)	Ⅳ4;16;55;67(和乙)
r..........	Ⅲ—Ⅴ(17;30)和(10;35)	Ⅳ3;6;65;68(和乙)
p..........	Ⅲ—Ⅴ(1;56)和(22;53)	Ⅳ14;25;46;57(和乙)
q..........	Ⅲ—Ⅴ(3;52)和(31;39)	Ⅳ9;34;37;62(和乙)
r..........	Ⅲ—Ⅴ(8;51)和(28;42)	Ⅳ19;33;38;52(和乙)

这两个子集和我们之前区分的两个子族群(表 105 和 125，但是表 125 中的子族群Ⅱ和表 105 中的子族群Ⅰ对应)刚好对应。

于是，我们看到了一共有 96 个元素组成的结合，按照转换运算构成了(I,N,R,C＝4)×(Pαβ＝2)×(Rα＝2)×(Pm＝3)×(Rmd＝Pm＝2)＝(4×2×2×3×2)＝96 种变换：

---

1 表 125 在每一条横线上给出了两个不同的四位运算的顺运算和互反运算，其中的一元运算是 p 或 p。

(129)

		(1) 初始运算	(2) (1) 的N	(3) (1) 的R	(4) (3) 的N (2) 的R=(1) 的C	四位运算 (Q)	(5) (1) 的Rα (3) 的Rβ	(6) (5) 的N (2) 的Rα=(4) 的Rβ	(7) (5) 的R (1) 的Rβ=(3) 的Rα	(8) (7) 的N (6) 的R=(2) 的Rβ =(4) 的Rα	四位运算 (Q)
Rmd	PAB, Pαβ	IV 11 $(p\supset q)\cdot(p\vee r)$	IV 60 $(p\supset q)\mid(p\vee r)$	IV 51 $(q\supset p)\cdot(p\mid r)$	IV 20 $(q\supset p)\mid(p\mid r)$	Q 1	V 54 $(q\supset p)\cdot(p\vee r)$	III 54 $(q\supset p)\mid(p\vee r)$	V 7 $(p\supset q)\cdot(p\mid r)$	III 7 $(p\supset q)\mid(p\mid r)$	Q 13
		IV 20 *bis* $(p\vee q)\cdot(p\supset r)$	IV 51 *bis* $(p\vee q)\mid(p\supset r)$	IV 60 *bis* $(p\mid q)\cdot(r\supset p)$	IV 11 *bis* $(p\mid q)\mid(r\supset p)$	Q 2	V 55 $(p\vee q)\cdot(r\supset p)$	III 55 $(p\vee q)\mid(r\supset p)$	V 2 $(p\mid q)\cdot(p\supset r)$	III 2 $(p\mid q)\mid(p\supset r)$	Q 14
	PBC, Pαβ	V 40 $(p\supset q)\cdot(q\vee r)$	III 40 $(p\supset q)\mid(q\vee r)$	V 16 $(q\supset p)\cdot(q\mid r)$	III 16 $(q\supset p)\mid(q\mid r)$	Q 3	IV 4 $(q\supset p)\cdot(q\vee r)$	IV 67 $(q\supset p)\mid(q\vee r)$	IV 55 $(p\supset q)\cdot(q\mid r)$	IV 16 $(p\supset q)\mid(q\mid r)$	Q 15
		IV 16 *bis* $(p\vee q)\cdot(q\supset r)$	IV 55 *bis* $(p\vee q)\mid(q\supset r)$	IV 67 *bis* $(p\mid q)\cdot(r\supset q)$	IV 4 *bis* $(p\mid q)\mid(r\supset q)$	Q 4	V 46 $(p\vee q)\cdot(r\supset q)$	III 46 $(p\vee q)\mid(r\supset q)$	V 4 $(p\mid q)\cdot(q\supset r)$	III 4 $(p\mid q)\mid(q\supset r)$	Q 16
	Pαβ	V 30 $(p\supset r)\cdot(q\vee r)$	III 30 $(p\supset r)\mid(q\vee r)$	V 17 $(r\supset p)\cdot(q\mid r)$	III 17 $(r\supset p)\mid(q\mid r)$	Q 5	IV 8 $(r\supset p)\cdot(q\vee r)$	IV 68 $(r\supset p)\mid(q\vee r)$	IV 65 $(p\supset r)\cdot(q\mid r)$	IV 6 $(p\supset r)\mid(q\mid r)$	Q 17
		V 35 $(p\vee r)\cdot(q\supset r)$	III 35 $(p\vee r)\mid(q\supset r)$	V 10 $(p\mid r)\cdot(r\supset q)$	III 10 $(p\mid r)\mid(r\supset q)$	Q 6	IV 6 *bis* $(p\vee r)\cdot(r\supset q)$	IV 65 *bis* $(p\vee r)\mid(r\supset q)$	IV 68 *bis* $(p\mid r)\cdot(q\supset r)$	IV 8 *bis* $(p\mid r)\mid(q\supset r)$	Q 18
	PAB, Pαβ	V 22 $(p\supset q)\cdot(\bar{p}\vee r)$	III 22 $(p\supset q)\mid(\bar{p}\vee r)$	V 53 $(q\supset p)\cdot(\bar{p}\mid r)$	III 53 $(q\supset p)\mid(\bar{p}\mid r)$	Q 7	IV 25 $(q\supset p)\cdot(\bar{p}\vee r)$	IV 48 $(q\supset p)\mid(\bar{p}\vee r)$	IV 14 $(p\supset q)\cdot(\bar{p}\mid r)$	IV 57 $(p\supset q)\mid(\bar{p}\mid r)$	Q 19
		V 56 $(p\vee q)\cdot(\bar{p}\supset r)$	III 56 $(p\vee q)\mid(\bar{p}\supset r)$	V 1 $(p\mid q)\cdot(r\supset\bar{p})$	III 1 $(p\mid q)\mid(r\supset\bar{p})$	Q 8	IV 48 *bis* $(p\vee q)\cdot(r\supset\bar{p})$	IV 25 *bis* $(p\vee q)\mid(r\supset\bar{p})$	IV 57 *bis* $(p\mid q)\cdot(\bar{p}\supset r)$	IV 14 *bis* $(p\mid q)\mid(\bar{p}\supset r)$	Q 20
	PBC, Pαβ	IV 34 $(p\supset q)\cdot(\bar{q}\vee r)$	IV 37 $(p\supset q)\mid(\bar{q}\vee r)$	IV 9 $(q\supset p)\cdot(\bar{q}\mid r)$	IV 62 $(q\supset p)\mid(\bar{q}\mid r)$	Q 9	V 31 $(q\supset p)\cdot(\bar{q}\vee r)$	III 31 $(q\supset p)\mid(\bar{q}\vee r)$	V 39 $(p\supset q)\cdot(\bar{q}\mid r)$	III 39 $(p\supset q)\mid(\bar{q}\mid r)$	Q 21
		V 52 $(p\vee q)\cdot(\bar{q}\supset r)$	III 52 $(p\vee q)\mid(\bar{q}\supset r)$	V 3 $(p\mid q)\cdot(r\supset\bar{q})$	III 3 $(p\mid q)\mid(r\supset\bar{q})$	Q 10	IV 37 *bis* $(p\vee q)\cdot(r\supset\bar{q})$	IV 34 *bis* $(p\vee q)\mid(r\supset\bar{q})$	IV 62 *bis* $(p\mid q)\cdot(\bar{q}\supset r)$	IV 9 *bis* $(p\mid q)\mid(\bar{q}\supset r)$	Q 22
	Pαβ	V 28 $(p\supset r)\cdot(\bar{q}\vee r)$	III 28 $(p\supset r)\mid(\bar{q}\vee r)$	V 42 $(r\supset p)\cdot(\bar{q}\mid r)$	III 42 $(r\supset p)\mid(\bar{q}\mid r)$	Q 11	IV 19 $(r\supset p)\cdot(\bar{q}\vee r)$	IV 52 $(r\supset p)\mid(\bar{q}\vee r)$	IV 33 $(p\supset r)\cdot(\bar{q}\mid r)$	IV 38 $(p\supset r)\mid(\bar{q}\mid r)$	Q 23
		V 51 $(p\vee r)\cdot(\bar{q}\supset r)$	III 51 $(p\vee r)\mid(\bar{q}\supset r)$	V 8 $(p\mid r)\cdot(r\supset\bar{q})$	III 8 $(p\mid r)\mid(r\supset\bar{q})$	Q 12	IV 38 *bis* $(p\vee r)\cdot(r\supset\bar{q})$	IV 33 *bis* $(p\vee r)\mid(r\supset\bar{q})$	IV 52 *bis* $(p\mid r)\cdot(\bar{q}\supset r)$	IV 19 *bis* $(p\mid r)\mid(\bar{q}\supset r)$	Q 24

注意：转换运算 Pαβ 让比如书写为$[(p\supset q)\cdot(p\supset r)]$的算式Ⅴ22 并不发生变化，被用在右侧转换运算连接着，比如Ⅳ11$[(p\supset q)\cdot(p\vee r)]$和$[(p\supset q)\cdot(p\supset r)]$形式下的运算Ⅴ22。为能够调解 P。 和之间的关系，我们给了第二个运算子族群（Q7 到 Q12）$[(p\supset q)\cdot(p\vee r)]$等形式。于是，转换运算P。 就被等值转换运算 Rmd 替代，也就是说，在右边(d)的二元运算中，改变运算中项（m，即 p、q 或 r）的符号（R）。随之而来的是，$(p\vee r)$被替换为$(p\vee r)[\ p\supset r]$；$(p\ r)$被替换为$(p|r)[\ r\supset p]$；$(p\supset r)$被替换为$(p\supset r)[\ p\vee r]$；而且$(r\supset p)$被替换为$(r\supset p)[\ p\ r]$。从这四种可能性来看，它完全等值于转换运算$P_{\vee\supset}$。

但是，我们本可以给 P。 使用另外一种形式的等值转换。任何情况下，该群都是不一样的，因为这里进行的是异质转换。但是，通过使用所有的等值运算 P。，我们可以得到的 96 个元素的群，都和前面的类似。

于是，我们发现了这个系统的完美协调关系。在垂直方向上，每个成对的四位运算（Q2；Q4；等）是前一个不成对的四位运算调换运算 Pαβ 的结果；每双不成对的四位运算和相继的成对四位运算（Q1Q2，Q3Q4，等）是前一双四位运算调换运算 Pm（$P_{\vee\vee}$或 $P_{\cdot\cdot}$）的结果；第二个子族群（Q7 到 Q12 和 Q19 到 Q24）是第一个子族群转换运算 Rmd 的结果（这 3 个转换是互逆的）。在水平方向上，每个运算集合中，有 4 个连续的运算（1）到（4）或（5）到（8），构成了一组四位运算的 INRC 群；右侧的 4 个运算（5 到 8）组成了左侧对应运算（1 到 4；即 5 和 1；6 和 2；7 和 3；8 和 4）的 Rα（和 α 相关的半互反，α 为蕴涵），反之亦然。所以，群的 96 个元素中的每一个元素，都是被其他元素精确地限定了的。

至于结合期间的组成，垂直方向上和水平方向上的转换运算，都遵循着以下这些非常简单的规则：

1. 半互反运算 Rα（包含有蕴涵关系的两个二元运算的互反）或 Rβ（V 和 的互反）以及其他转换的构成如下：

(130) $$R\alpha R=R\beta\text{（参考命题 83）（可交换）}$$

其中（130 乙） $$RR\beta=R\alpha\quad 且\quad R=R\alpha R\beta$$

例如： $$(\text{Ⅳ}11\xrightarrow{R\alpha}\text{Ⅴ}54)=(\text{Ⅳ}11\xrightarrow{R\beta}\text{Ⅴ}7\xrightarrow{R}\text{Ⅴ}54)$$

或 $$(\text{Ⅳ}11\xrightarrow{R}\text{Ⅳ}51\xrightarrow{R\alpha}\text{Ⅴ}7)=(\text{Ⅳ}11\xrightarrow{R\beta}\text{Ⅴ}7)$$

这组演算是可以交换的，同样如下：

(131) $$R\alpha P\alpha\beta=P\alpha\beta R\alpha$$

例如： $(\text{Ⅳ}11\xrightarrow{R\alpha}\text{Ⅴ}54\xrightarrow{P\alpha\beta}\text{Ⅴ}57)$ $(\text{Ⅳ}11\xrightarrow{P\alpha\beta}\text{Ⅳ}2乙\xrightarrow{R\alpha}\text{Ⅴ}57)$

然而，我们自然有：

(131 乙) $$RgP\alpha\beta=P\alpha\beta Rd\quad 或\quad RdP\alpha\beta=P\alpha\beta Rg$$

因为转换运算 Pαβ 让运算（α）（$\supset$）从左边换到右边或反演过来。

我们还有：

(132) $R\alpha N = NR\alpha$， $R\alpha C = CR\alpha$， $R\alpha Rmd = RmdR\alpha$，等等。

例如： $(\mathrm{IV}\,11 \xrightarrow{Rmd} \mathrm{V}\,22 \xrightarrow{R\alpha} \mathrm{IV}\,27) = (\mathrm{IV}\,11 \xrightarrow{R\alpha} \mathrm{V}\,4 \xrightarrow{Rmd} \mathrm{IV}\,2)$

2. 置换运算 $P\alpha\beta$ 在于交换(⊃)和(∨)，或(⊃)和( )，或(⊂)[1]和(∨)或( )。所以该运算也是可交换的：

(133) $RP\alpha\beta = P\alpha\beta R$， $P\alpha\beta P$， $P_{AB}P\alpha\beta$， $P\alpha\beta Rmd = RmdP\alpha\beta$，等等

例如： $(\mathrm{IV}\,11 \xrightarrow{R} \mathrm{V}\,51 \xrightarrow{P\alpha\beta} \mathrm{IV}\,60\text{乙}) = (\mathrm{IV}\,11 \xrightarrow{P\alpha\beta} \mathrm{IV}\,2\ \text{乙} \xrightarrow{R} \mathrm{IV}\,6\text{乙})$

此外，我们还验证了命题(88 乙)：

$P\alpha\beta = PmP\alpha$ 或 $P\alpha\beta = PmP\beta$ 这里有 $P\alpha = R\alpha$ 且 $P\beta = I$。

例如 $(\mathrm{IV}\,11 \xrightarrow{P\alpha\beta} \mathrm{IV}\,2\ \text{乙}) = (\mathrm{IV}\,11 \xrightarrow{P} \mathrm{V}\,4 \xrightarrow{P_{BC}} \mathrm{V}\,30 \xrightarrow{P} \mathrm{IV}\,2\ \text{乙} \xrightarrow{I\beta} \mathrm{IV}\,20\text{乙})$，因为 $q \vee p = p \vee q$，且 $(\mathrm{V}\,51\text{乙} \xrightarrow{P\alpha\beta} \mathrm{IV}\,60) = (\mathrm{IV}\,71\text{乙} \xrightarrow{P} \mathrm{IV}\,55\text{乙} \xrightarrow{P} \mathrm{III}\,37 \xrightarrow{P} \mathrm{III}\,51 \xrightarrow{R\alpha} \mathrm{IV}\,60)$。

当运算 $x(\beta)y$ 在置换运算 P 或 P 的过程中没有变化，我们有 $P\alpha$(即 $R\alpha$)，当 $x(\alpha)y$ 没有变化，我们有 $P\beta$。

3. 置换运算 Pm 验证了其常用特性，除特殊情况外，我们有 $P\beta = I$(因为 $q \vee p = p \vee q$ 而且 $q|p = p|q$)：

$$P_{AC} = P_{AB+BC}P\alpha\beta P\alpha(\text{或 } P\beta)$$

例如：$(\mathrm{IV}\,11 \xrightarrow{P} \mathrm{IV}\,6\ \text{乙}) = (\mathrm{IV}\,11 \xrightarrow{P} \mathrm{V}\,30 \xrightarrow{P\alpha\beta} \mathrm{V}\,5 \xrightarrow{R\alpha} \mathrm{IV}\,6\ \text{乙})$ 和 $(\mathrm{IV}\,2\text{乙} \xrightarrow{P} \mathrm{V}\,30) = (\mathrm{IV}\,20\ \text{乙} \xrightarrow{P_{AB+BC}} \mathrm{V}\,5 \xrightarrow{P\alpha\beta} \mathrm{V}\,30)$ 因为有 $P\beta = I$。

但是，我们有：

(134) $$R = P\dot{m}R\beta$$

因为当 α 和 β 是蕴涵关系(命题 85)，且当 $P\dot{m} = P\alpha \cdot P\beta$ 时，$P\dot{m} = P$。然而，特殊情况时 $P\beta = I$。为获得运算 R，需要在 Pm 中加上半互反运算 $R\beta$

例如：$(\mathrm{IV}\,11 \xrightarrow{R} \mathrm{V}\,1) = (\mathrm{IV}\,11 \xrightarrow{P} \mathrm{V}\,4 \xrightarrow{P_{BC}} \mathrm{V}\,30 \xrightarrow{P} \mathrm{IV}\,2\ \text{乙} \xrightarrow{P} \mathrm{IV}\,16\ \text{乙} \xrightarrow{P_{BC}} \mathrm{V}\,35 \xrightarrow{P_{AC}} \mathrm{V}\,54 \xrightarrow{R\beta} \mathrm{V}\,51)$。

至于连接在置换运算 Pm 和表(76)之间的关系，这里的对应关系的建立，在(∨)和( )的情况时，只需要对应于这些置换，如(1 3)，(2 4)等等，因为 $p(\beta)r = r(\beta)p$，等等。

注意：为以清楚明了的方式，实现表(76)中的 24 种可能，可能需要用转换运算 P，或 P 替换转换运算 $P\alpha\beta$，同时需要用在两个二元运算中，所以需要用(∨)置换(⊃)，用( )置换(⊂)，此外还要有 $P\beta = R\beta$，于是有 $(p \vee q) \xrightarrow{P\beta} (p\ q)$：

---

[1] 运算(⊂)是在蕴涵关系( )下将命题以 r、q、p 这样的顺序连接时使用的

$$\text{Ⅳ}25\ (q\supset p)\cdot(p\supset r)\xrightarrow{P}(p\cdot q)\cdot(p\vee r)$$

因此，我们在一个新的形式下，实现了 96 个元素的群，当然该情境中还是有其他特性存在的，只是这里不需再加赘述了。

§ 26 Ⅳ(f)类和Ⅲ—Ⅴ(a)类族群向其他族群的转换

按照我们刚刚对转换组群的介绍，Ⅳ(f)类和Ⅲ—Ⅴ(a)类运算族群，不仅仅是彼此间互相转换；这里的每个转换运算都可以以不同的模式，产生其他族群中的运算。

1. 首先需要注意的是，Ⅳ(f)类族群中的每组四位运算，都可以通过异质性否定 Nh，从两个方面转换为 O—Ⅷ类运算：

(135)

(I) $\text{Ⅳ}11\ [(p\supset q)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{Nh}[(p\cdot q)\cdot(p\cdot r)]\equiv O$ (I)

(N) $\text{Ⅳ}60\ [(p\supset q)|(p\vee r)]\xrightarrow{Nh}[(p\cdot\bar{q})|(\bar{p}\cdot\bar{r})]\equiv\text{Ⅷ}$ (N)

(R) $\text{Ⅳ}51\ [(q\supset p)\cdot(p|r)]\xrightarrow{Nh}[(\bar{p}\cdot q)\cdot(p\cdot r)]\equiv O$ (R)

(C) $\text{Ⅳ}20\ [(q\supset p)|(p|r)]\xrightarrow{Nh}[(\bar{p}\cdot q)|(p\cdot r)]\equiv\text{Ⅷ}$ (C)

等等。

这些结合运算（表 129 中的 1、3、5 和 7 栏）得到了结果(O)，而不相容的运算 N 和 C(2,4,6 和 8 栏)，得到了结果(Ⅷ)。

相反，同样的转换运算 Nh 应用在Ⅲ—Ⅴ(a)类族群的四位运算中，转换结果则属于Ⅰ—Ⅶ类族群中的运算［证明Ⅳ(f)类和Ⅲ—Ⅴ(a)类运算族群，是两个彼此不同且自然的新证据］：

(136) (I) $\text{Ⅴ}51\ [(q\supset p)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{Nh}[(\bar{p}\cdot q)\cdot(\bar{p}\cdot\bar{r})]\equiv\bar{p}\cdot(q\cdot\bar{r})$ Ⅰ6(I)

(N) $\text{Ⅲ}51\ [(q\supset p)|(p\vee r)]\xrightarrow{Nh}[(p\cdot q)|(p\cdot r)]\equiv p|(q\cdot r)$ Ⅶ6(N)

(R) $\text{Ⅴ}7\ [(p\supset q)\cdot(p|r)]\xrightarrow{Nh}[(p\cdot\bar{q})\cdot(p\cdot r)]\equiv p\cdot(\bar{q}\cdot r)$ Ⅰ3(R)

(C) $\text{Ⅲ}7\ [(p\supset q)|(p|r)]\xrightarrow{Nh}[(p\cdot q)|(p\cdot r)]\equiv p|(q\cdot r)$ Ⅶ3(C)

我们同样有(回归到表 129 上)：

(136 乙)

(I)	$\text{Ⅴ}55\xrightarrow{Nh}(p\cdot\bar{q})\cdot(p\cdot r)$	Ⅰ7(I)	(I)	$\text{Ⅴ}40\xrightarrow{Nh}(p\cdot\bar{q})\cdot(\bar{q}\cdot r)$	Ⅰ4(I)
(N)	$\text{Ⅲ}55\xrightarrow{Nh}(\bar{p}\cdot q)|(p\cdot r)$	Ⅶ7(N)	(N)	$\text{Ⅲ}40\xrightarrow{Nh}(p\cdot q)|(\bar{q}\cdot r)$	Ⅶ4(N)
(R)	$\text{Ⅴ}2\xrightarrow{Nh}(p\cdot q)\cdot(p\cdot r)$	Ⅰ2(R)	(R)	$\text{Ⅴ}16\xrightarrow{Nh}(p\cdot q)\cdot(q\cdot r)$	Ⅰ5(R)
(C)	$\text{Ⅲ}2\xrightarrow{Nh}(p\cdot q)|(p\cdot\bar{r})$	Ⅶ2(C)	(C)	$\text{Ⅲ}16\xrightarrow{Nh}(\bar{p}\cdot q)|(q\cdot r)$	Ⅶ5(C)

以及

$$(\mathrm{I})\ \mathrm{V}56 \xrightarrow{\mathrm{Nh}} (\bar{p}\cdot\bar{q})\cdot(\bar{p}\cdot\bar{r}) \qquad \mathrm{I}8(\mathrm{I})$$

$$(\mathrm{N})\ \mathrm{III}56 \xrightarrow{\mathrm{Nh}} (\bar{p}\cdot\bar{q})\,|\,(\bar{p}\cdot\bar{r}) \qquad \mathrm{VIII}8(\mathrm{N})$$

$$(\mathrm{R})\ \mathrm{V}1 \xrightarrow{\mathrm{Nh}} (p\cdot q)\cdot(p\cdot r) \qquad \mathrm{I}1(\mathrm{R})$$

$$(\mathrm{C})\ \mathrm{III}1 \xrightarrow{\mathrm{Nh}} (p\cdot q)\,|\,(p\cdot r) \qquad \mathrm{VIII}1(\mathrm{C})$$

Ⅲ—Ⅴ(a)类运算族群中的 12 个四位运算中的另外 8 个，也得到同样的Ⅰ—Ⅷ类中的这 4 个四位运算(对于后面这些四位运算，转换运算 Pu 和 Pm 对其进行的是自身转换，于是它们产生的区分运算属于Ⅲ—Ⅴ(a)类运算族群)。

因此，我们注意到，Ⅲ—Ⅴ(a)类运算族群中的一组四位运算的 INRC 转换，对应于 Nh 转换下的Ⅰ—Ⅷ类一组四位运算的 INRC 转换。因此，我们有如(135)情况中展现的，从一个运算族群到另一个族群的新的转换族群。

然而，还有更多。若排除源于Ⅲ—Ⅴ(a)类运算族群设定的三元—二元运算形式，我们分析一下一元—二元的运算形式(表 105)，要转换成Ⅰ—Ⅷ类的运算，只需要进行 N(Cd)运算即可，也就是说，进行分量运算的否定，并且对右边(二元的)复合运算进行对射 C 的转换。于是我们有：

(137)

$$(\mathrm{I})\ \mathrm{III}1\ p\cdot(q\vee r) \xrightarrow{\mathrm{N(Cd)}} p\,|\,(q\cdot r) \qquad \mathrm{VIII}1(\mathrm{I})$$

$$(\mathrm{N})\ \mathrm{V}1\ p\,|\,(q\vee r) \xrightarrow{\mathrm{N(Cd)}} p\cdot(q\cdot r) \qquad \mathrm{I}4(\mathrm{N})$$

$$(\mathrm{R})\ \mathrm{III}56\ \bar{p}\cdot(q\,|\,r) \xrightarrow{\mathrm{N(Cd)}} \bar{p}\,|\,(\bar{q}\cdot\bar{r}) \qquad \mathrm{VIII}8(\mathrm{R})$$

$$(\mathrm{C})\ \mathrm{V}56\ \bar{p}\,|\,(q\,|\,r) \xrightarrow{\mathrm{N(Cd)}} \bar{p}\cdot(\bar{q}\cdot\bar{r}) \qquad \mathrm{I}8(\mathrm{C})$$

我们同样有Ⅲ55 $p\cdot(q\supset r) \xrightarrow{\mathrm{N(Cd)}} p\,|\,(q\cdot r)$ Ⅷ7，等等。

于是，我们可以进行(这个要点将在第七章彰显作用，届时会涉及，将不同的转换组统一到一个单独的群中)，从(135)到(137)的简化转换，进行一些简单的合并或进行减法，方法如下：

(138)

$$[\mathrm{IV}11 \xrightarrow{\mathrm{Nh}} \mathrm{O}] = [(\mathrm{IV}11)\cdot(\overline{\mathrm{IV}11})]$$

$$[\mathrm{IV}60 \xrightarrow{\mathrm{Nh}} \mathrm{VIII}] = [(\mathrm{IV}60)\vee(\overline{\mathrm{IV}60})]$$

所以

$$[\mathrm{IV}(\mathrm{f})\cdot(\overline{\mathrm{IV}\mathrm{f}})] = \mathrm{O}$$

且

$$[\mathrm{IV}(\mathrm{f})\vee(\overline{\mathrm{IV}\mathrm{f}})] = \mathrm{VIII}$$

以及(138 乙)

$$[\mathrm{III}54 \xrightarrow{\mathrm{Nh}} \mathrm{VIII}6] = [(\mathrm{III}54)\vee(\mathrm{V}54)\cdot(\mathrm{Cd}\,\mathrm{III}54)]$$

$$= [\mathrm{VIII}\cdot(\overline{p\cdot q\cdot r})] = \mathrm{VIII}6$$

且 $[\mathrm{V}54 \xrightarrow{\mathrm{Nh}} \mathrm{I}6] = [(\mathrm{V}54)\vee(\mathrm{III}54)\cdot(\mathrm{Cd}\,\mathrm{V}54)] = [\mathrm{VIII}\cdot(\overline{p\cdot q\cdot r})] = \mathrm{I}6$

所以 $[\mathrm{III}c \xrightarrow{\mathrm{Nh}} \mathrm{VIII}] = [(\mathrm{III}c)\vee(\mathrm{V}c)\cdot(\overline{\mathrm{Cd}\,\mathrm{III}c})] = [\mathrm{VIII}\cdot(\mathrm{Cd}\,\mathrm{III}c)] = \mathrm{I}$

且 $\qquad [\mathrm{V}c \xrightarrow{\mathrm{Nh}} \mathrm{I}] \equiv [(\mathrm{V}c)\vee(\mathrm{III}c)\cdot(\overline{\mathrm{C}d\vee c})] \equiv [\mathrm{VIII}\cdot(\overline{\mathrm{C}d\vee c})] \equiv \mathrm{VII}$

换言之，转换运算 Nh，在个别情况下，在遵守 INRC 转换群的规则时，等值于合并运算，同时与删除某些三位运算$(p\cdot q\cdot r)$，$(p\cdot q\cdot r)$等的操作也是等值的。

Ⅱ. 现在我们在同样的Ⅳ(f)类和Ⅲ—Ⅴ(a)类族群的运算中，进行 Ng 和 Nd 的转换运算。于是，第一种情况中，我们将其转换为Ⅱ—Ⅵ(b)类运算族群。因为，我们有：

(139) (I) $\mathrm{IV}\,11\,[(p\supset q)\cdot(p\vee r)] \xrightarrow{\mathrm{Nd}} [(p\supset q)\cdot(\bar{p}\cdot r)] \equiv \bar{p}\cdot r[q]$ $\quad$ Ⅱ 27(I)

(N) $\mathrm{IV}\,60\,[(p\supset q)\mid(p\vee r)] \xrightarrow{\mathrm{Nd}} [(p\supset q)\mid(p\cdot r)] \equiv p\mid r[q]$ $\quad$ Ⅵ 27(N)

(R) $\mathrm{IV}\,51\,[(q\supset p)\cdot(p\mid r)] \xrightarrow{\mathrm{Nd}} [(q\supset p)\cdot(p\cdot r)] \equiv p\cdot r[q]$ $\quad$ Ⅱ 2(R)

(C) $\mathrm{IV}\,20\,[(q\supset p)\mid(p\mid r)] \xrightarrow{\mathrm{Nd}} [(q\supset p)\mid(p\cdot r)] \equiv p\mid r[q]$ $\quad$ Ⅵ 2(C)

以及

(140) (I) $\mathrm{IV}\,11\,[(p\supset q)\cdot(p\vee r)] \xrightarrow{\mathrm{Ng}} [(p\cdot q)\cdot(p\vee r)] \equiv p\cdot q[r]$ $\quad$ Ⅱ 11(I)

(N) $\mathrm{IV}\,60\,[(p\supset q)\mid(p\vee r)] \xrightarrow{\mathrm{Ng}} [(p\cdot q)\mid(p\vee r)] \equiv p\mid q[r]$ $\quad$ Ⅵ 11(N)

(R) $\mathrm{IV}\,51\,[(q\supset p)\cdot(p\mid r)] \xrightarrow{\mathrm{Ng}} [(p\cdot q)\cdot(p\mid r)] \equiv p\cdot q[r]$ $\quad$ Ⅱ 23(R)

(C) $\mathrm{IV}\,20\,[(q\supset p)\mid(p\mid r)] \xrightarrow{\mathrm{Ng}} [(p\cdot q)\mid(p\mid r)] \equiv p\mid q[r]$ $\quad$ Ⅵ 23(C)

然而，重要的是，转换运算 Nd 和 Ng 结果的合并，于是得到转换运算 N：

(141) $p\cdot r[q]\vee p\cdot q[r] \equiv (p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$

$$\equiv \mathrm{IV}\,60(\equiv \mathrm{II}\,14\vee\mathrm{II}\,27)$$

$p\cdot r[q]\vee p\cdot q[r] \equiv (p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$

$$\equiv \mathrm{IV}\,20(\equiv \mathrm{II}\,2\vee\mathrm{II}\,23)$$

此外，需要注意的是，Ⅳ(f)类运算若由两个蕴涵运算或两个析取运算组成，同样也会得到Ⅱ—Ⅵ(b)类的运算结果。例如：

(142) $\qquad \mathrm{IV}\,14\,[(p\supset q)\cdot(r\supset p)] \xrightarrow{\mathrm{Nd}} [(p\supset q)\cdot(\bar{p}\cdot r)] \equiv \bar{p}\cdot r[q]$

以及 $\qquad \mathrm{IV}\,14\,[(p\supset q)\cdot(r\supset p)] \xrightarrow{\mathrm{Ng}} [(p\cdot \bar{q})\cdot(r\supset p)] \equiv p\cdot \bar{q}[r]$

其中 $p\cdot \bar{q}[r]\vee\bar{p}\cdot r[q]\equiv \mathrm{IV}\,57$，这是Ⅳ14 的逆运算(N)。

另一方面，若不在Ⅳ(f)类运算的合取形式上进行演算(表 129)，我们可以使用转换运算 Nd 和 Ng，对同样的Ⅳ(f)类运算，进行等值形式(表 125)下的转换，我们得到的不再是其逆运算 N(根据命题 141)。

因为，我们有：

(143) $\qquad \mathrm{IV}\,11\,[(p\cdot q)=(p\cdot r)] \xrightarrow{\mathrm{Nd}} [(p\cdot q)=(p\vee r)] \equiv \mathrm{IV}\,60$

且 $\qquad \mathrm{IV}\,11\,[(p\cdot q)=(p\cdot r)] \xrightarrow{\mathrm{Ng}} [(p\supset q)=(p\cdot \bar{r})] \equiv \mathrm{IV}\,60$

抑或还有 $\qquad \mathrm{IV}\,14\,[(p\cdot q)=(p\cdot r)] \xrightarrow{\mathrm{Nd}} [(p\cdot q)=(r\supset p)] \equiv \mathrm{IV}\,57$

且 $$\text{Ⅳ}14\ [(p\cdot\bar{q})=(\bar{p}\cdot r)]\xrightarrow{\mathrm{Ng}}[(p\supset q)=(p\cdot r)]\equiv\text{Ⅳ}57$$

相反，同样的这些转换运算，运用到Ⅲ—Ⅴ类运算族群中，会得出完全不同的结果。首先，若我们在本族群的二元—三元合取形式中，使用转换Nd和Ng，我们会得到：

(144) (I) $\text{Ⅴ}54\ [(q\supset p)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{\mathrm{Nd}}[(q\supset p)\cdot(p\cdot r)]\equiv p\cdot(q\cdot r)$ Ⅰ8(I)

(N) $\text{Ⅲ}54\ [(q\supset p)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{\mathrm{Nd}}[(q\supset p)\cdot(p\cdot r)]\equiv p\cdot(q\cdot r)$ Ⅶ8(N)

(R) $\text{Ⅴ}7\ [(p\supset q)\cdot(p|r)]\xrightarrow{\mathrm{Nd}}[(p\supset q)\cdot(p\cdot r)]\equiv p\cdot(q\cdot r)$ Ⅰ1(R)

(C) $\text{Ⅲ}7\ [(p\supset q)\cdot(p|r)]\xrightarrow{\mathrm{Nd}}[(p\supset q)\cdot(p\cdot r)]\equiv p\cdot(q\cdot r)$ Ⅶ1(C)

以及

(145) (I) $\text{Ⅴ}54\ [(q\supset p)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{\mathrm{Ng}}[(p\cdot q)\cdot(p\vee r)]\equiv p\cdot(q\cdot r)$ Ⅰ7(I)

(N) $\text{Ⅲ}54\ [(q\supset p)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{\mathrm{Ng}}[(p\cdot q)\cdot(p\vee r)]\equiv p\cdot(q\cdot r)$ Ⅶ7(N)

(R) $\text{Ⅴ}7\ [(p\supset q)\cdot(p|r)]\xrightarrow{\mathrm{Ng}}[(p\cdot q)\cdot(p|r)]\equiv p\cdot(q\cdot r)$ Ⅰ4(R)

(C) $\text{Ⅲ}7\ [(p\supset q)\cdot(p|r)]\xrightarrow{\mathrm{Ng}}[(p\cdot q)\cdot(p|r)]\equiv p\cdot(q\cdot r)$ Ⅶ4(C)

相反，Ⅲ—Ⅴ(a)类的二元—三元形式的运算，只有在使用转换运算Nd(二元复合运算的否定)时，才会转换为同样的Ⅰ—Ⅶ类运算族群。转换运算Ng，让算式在Ⅲ—Ⅴ(a)类运算族群内部被转换。

若现在我们将应用在Ⅲ—Ⅴ(a)类(参看144和145)同样的二元—三元算式上的转换运算Nd和Ng的运算结果，合并为一个单独的运算，我们则得到了一个归属于Ⅱ—Ⅵ(a)类运算族群的元素：

(146) $$[\bar{p}\cdot(\bar{q}\cdot\bar{r})]\vee[\bar{p}\cdot(q\cdot r)]\equiv[\bar{p}\cdot(q=r)]\quad \text{Ⅱ}25\ (\equiv\text{Ⅰ}8\ \text{Ⅴ}15)$$

以及 $$[p\cdot(q\cdot r)]\vee[p\cdot(q\cdot\bar{r})]\equiv[p\cdot(q=r)]\quad \text{Ⅱ}3\ (\equiv\text{Ⅰ}1\ \text{Ⅴ}14)$$

Ⅲ.然而，我们还记得(§21)Ⅲ—Ⅴ(a)类族群的运算不能转换为Ⅳ(f)类族群运算的等值形式，然而，只有Ⅲ—Ⅴ(a)类族群的二元—三元算式中，合取(·)或不相容(|)的置换运算，在肯定或否定的(=或W)等值运算时，可以转换为Ⅱ—Ⅵ类运算，准确说来应该是转换为Ⅱ—Ⅵ(a)类运算(147)：

(147) (I) $\text{Ⅴ}54\ [(q\supset p)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{P\cdot=}[(q\supset p)=(p\vee r)]\equiv p\cdot(q=r)$ Ⅵ25(I)

(N) $\text{Ⅲ}54\ [(q\supset p)\cdot(p\vee r)]\xrightarrow{P\cdot=}[(q\supset p)\,\mathrm{W}\,(p\vee r)]\equiv p\cdot(q=r)$ Ⅱ25(N)

(R) $\text{Ⅴ}7\ [(p\supset q)\cdot(p|r)]\xrightarrow{P\cdot=}[(p\supset q)=(p|r)]\equiv p|(q=r)$ Ⅵ3(R)

(C) $\text{Ⅲ}7\ [(p\supset q)\cdot(p|r)]\xrightarrow{P}[(p\supset q)\,\mathrm{W}\,(p|r)]\equiv p\cdot(q=r)$ Ⅱ3(C)

因此，我们发现置换运算将Ⅲ—Ⅴ(a)类族群置换为Ⅱ—Ⅵ(a)类运算。但是，我们还发现，对于一个设定的Ⅲ—Ⅴ(a)类算式，该置换运算的结果是，转换运算Nd和Ng相结合的结果的反演。例如，运算Ⅴ54的Nd和Ng，得到了运算集合Ⅱ25，然而运算

Ⅴ74的是Ⅵ25。因此，我们还要看到，命题(141)和(143)支持着Ⅲ—Ⅴ(a)类运算和Ⅳ(f)类运算之间的对等关系。

另一方面，若我们将这些等值算式$(q\supset p)=(p\vee r)$等，进行转换运算Nd和Ng，我们会看到Ⅱ—Ⅵ(a)类运算。例如，运算Ⅵ2，$[(q\supset p)=(p\vee r)]$的Nd得到$[p\cdot(q=r)]$Ⅱ25，还有Ng，也同样如此。因此，这种情况下，我们有Nd=Ng=N。

Ⅳ. 最后，Ⅳ(f)类运算可以转换为Ⅱ—Ⅵ(c)类、Ⅲ—Ⅴ(b)类、Ⅲ—Ⅴ(c)类以及Ⅳ(e)类等运算族群的元素，具体的转换方法，我们将在后续各自族群的分析中展示。至于Ⅲ—Ⅴ(a)类运算，当对其进行同类转换或其他类似转换时，则会得到Ⅲ—Ⅴ(b)类、Ⅲ—Ⅴ(c)类、Ⅳ(b)类以及Ⅳ(c)类等运算族群的运算。

§27 Ⅳ(e)类族群的转换

Ⅳ(e)类族群的24个运算，其形式为$p=(q\vee r)$，$p=(q\supset r)$，等，会产生一些非常有意思的转换运算的集合。但是，鉴于同样的算式$p=(q\vee r)$，可以书写为一系列等值形式：$p=(q\cdot r)$，$p\,W(q\cdot r)$，$p\,W(q\vee r)$，等等，所以我们即将谈论的转换运算，不再具有前一节分析时的简洁性。此外，这些转换运算，不再只是教育指导上的意义，从某些观点出发：它们展示了这些等值形式并不是完全等同的重言式，因为在相同转换运算下，这些等值形式得到的结果并不是一样的。

Ⅰ. 首先，我们可以写下所有Ⅳ(e)类运算，在一元—二元形式下的算式，其中二元复合运算是合取(或一个相关的否定，抑或一个非蕴涵关系)。于是，自然只需要用一个合取或其反演(·或|)置换分量运算(=或W)，以获取Ⅰ—Ⅷ类族群的一个运算：

(148) (I) Ⅳ35 $[p=(q\cdot r)]\xrightarrow{P.=}p\cdot(q\cdot r)$ Ⅰ1(I)

(N) Ⅳ36 $[p\,W(q\cdot r)]\xrightarrow{P|W}p|(q\cdot r)$ Ⅷ1(N)

(R) Ⅳ5 $[p=(\bar{q}\cdot\bar{r})]\xrightarrow{P.=}p\cdot(\bar{q}\cdot\bar{r})$ Ⅰ8(R)

(C) Ⅳ66 $[\bar{p}\,W(\bar{q}\cdot\bar{r})]\xrightarrow{P|W}\bar{p}|(\bar{q}\cdot\bar{r})$ Ⅷ8(C)

通过转换运算Pα(一元运算的置换)，Ⅰ—Ⅷ类中的8+8个运算，分别有3个等值形式，然而，同样的转换运算Pα在Ⅳ(e)类族群内部，产生的算式是不等值的，于是得到了18个Ⅰ—Ⅷ类算式(其中有16个区别算式)对应24个Ⅳ(e)类运算。但是，对于可对应2个Ⅳ(e)类运算的这18个Ⅰ—Ⅷ类算式的每一个运算，其中一部分运算属于复合运算为析取关系(或不相容或其反演)的子族群，另一部分运算属于复合运算为蕴涵关系的子族群。例如，对于运算Ⅰ4 $p\cdot(q\cdot r)$，即可对应运算Ⅳ66 $[p=(q\cdot r)]$，又可以对应运算Ⅳ27 $[r=(p\cdot q)]$，也就是说$[p=(q\vee r)]$或$[r=(p\supset q)]$。

Ⅱ. 另一方面，所有的形式为一元—二元的Ⅳ(e)类运算，可以使用转换运算Pαα(置换分量运算和复合运算)：这样可以得到一个从属于Ⅱ—Ⅵ(a)类的运算。但是，鉴

于Ⅳ(e)类一元—二元算式的多重等式形式，从Ⅳ(e)类到Ⅱ—Ⅵ(a)类或反过来的转换运算，只有在对初始运算有确定的形式时，我们才可以产生一个运算组。例如，运算Ⅳ5 $[p=(q\vee r)]$，通过转换运算 Paα 得到$[p\vee(q=r)]$，即$[p=(q\,W\,r)]$ Ⅵ 26，但是，运算Ⅳ5的逆运算为运算Ⅳ66，书写为$[p\,W(q\vee r)]$置换为$[p\vee(q\,W\,r)]$，即$[p=(q=r)]$，这是运算Ⅵ 26的形式，但是这不是运算Ⅵ 26的逆运算。相反，若我们对于分量运算保留肯定的等值关系(=)，并且若我们在复合运算中同样去使用合取关系(·)及其反演关系(|)，我们会得到：

(149)
$$(\mathrm{I})\ \text{Ⅳ}5\ [\bar{p}=(\bar{q}\cdot\bar{r})]\xrightarrow{\mathrm{P}a\alpha}\bar{p}\cdot(\bar{q}=\bar{r})\quad \text{Ⅱ}\ 25(\mathrm{I})$$
$$(\mathrm{N})\ \text{Ⅳ}66\ [\bar{p}=(\bar{q}|\bar{r})]\xrightarrow{\mathrm{P}a\alpha}\bar{p}|(\bar{q}=\bar{r})\quad \text{Ⅵ}\ 25(\mathrm{N})$$
$$(\mathrm{R})\ \text{Ⅳ}35\ [p=(q\cdot r)]\xrightarrow{\mathrm{P}a\alpha}p\cdot(q=r)\quad \text{Ⅱ}\ 3(\mathrm{R})$$
$$(\mathrm{C})\ \text{Ⅳ}36\ [p=(q|r)]\xrightarrow{\mathrm{P}a\alpha}p|(q=r)\quad \text{Ⅵ}\ 3(\mathrm{C})$$

自然，所有其他形式下，具有同样的分量运算，且复合运算中也有一对顺—逆运算符号时，其转换模式也是同样的；例如：

(150)
$$(\mathrm{I})\ \text{Ⅳ}5\ [p=(q\supset r)]\xrightarrow{\mathrm{P}a\alpha}[p\supset(q=r)]=[p\supset(q\,W\,r)]\quad \text{Ⅵ}\ 3(\mathrm{I})$$
$$(\mathrm{N})\ \text{Ⅳ}66\ [p=(q\supset r)]\xrightarrow{\mathrm{P}a\alpha}[p\supset(q=r)]=p\cdot(q=r)\quad \text{Ⅱ}\ 3(\mathrm{N})$$
$$(\mathrm{R})\ \text{Ⅳ}35\ [p=(q\supset r)]\xrightarrow{\mathrm{P}a\alpha}[p\supset(q=r)]=[p\supset(q\,W\,r)]\quad \text{Ⅵ}\ 2?(\mathrm{R})$$
$$(\mathrm{C})\ \text{Ⅳ}36\ [p=(q\supset r)]\xrightarrow{\mathrm{P}a\alpha}[p\supset(q=r)]=p\cdot(q=r)\quad \text{Ⅱ}\ 2?(\mathrm{C})$$

如我们所见，第二个运算组和第一个运算组一样，既包括转换运算 I、N、R、C，也包括转换运算 Paα，只是并没有得到相同的结果：尽管$[p=(q\supset r)]$也等价于$[p=(q\cdot r)]$，因为这两个算式都代指$[p=(q\vee r)]$，可是转换运算 Paα，一处得到的结果是运算Ⅱ25，另一处得到的结果是运算Ⅵ 3：这是因为(=)和(·)的置换不同于(=)和(⊃)的置换，尽管这两对的组合(=)和(·)或(=)和(⊃)给Ⅳ5的这组四位运算提供了等值的算式。

Ⅲ. 通过算式的转换(121乙)，我们可以给Ⅳ(e)类运算一个一元—二元运算的形式，其中分量运算为等值运算(=)，复合运算为等值运算(=)和合取运算(·)或其逆运算(|)。例如：

(151)
$$\text{Ⅳ}5\ [p=(q\vee r)]\equiv[(p=\bar{q})=(\bar{q}\cdot r)]\equiv[(p=q)=(\bar{q}|\bar{r})]$$
$$\text{Ⅳ}66\ [p=(q\cdot r)]\equiv[(p=q)=(\bar{q}\cdot r)]\equiv[(p=\bar{q})=(q|r)]$$
$$\text{Ⅳ}26\ [q=(p\supset r)]\equiv[(p=q)=(p\cdot r)]\equiv[(p=\bar{q})=(p|r)]$$
$$\text{Ⅳ}17\ [p=(q\supset r)]\equiv[(p=q)=(q\cdot r)]\equiv[(p=\bar{q})=(q|r)]$$
$$\text{Ⅳ}40\ [q=(p|r)]\equiv[(p=q)=(p\cdot\bar{r})]\equiv[(p=\bar{q})=(p|\bar{r})]$$

等等。

然而，只需要在这些一元—二元算式(151)中，使用转换运算 Paβ[置换分量运算(=)和第二个组合运算(·或|)]，即可获得Ⅱ—Ⅵ(c)类族群中的4+4个运算：

(152)

(Ⅰ) Ⅳ5 $[(p=q)=(q\cdot r)]\xrightarrow{P_{\alpha\beta}}[(p=q)\cdot(q=r)]=[(pWq)\cdot(qWr)]$ Ⅱ16(Ⅰ)

(N) Ⅳ66 $[(p=q)=(q\ r)]\xrightarrow{P_{\alpha\beta}}[(p=q)\ (q=r)]=[(pWq)\ (qWr)]$ Ⅵ16(N)

(R) Ⅳ35 $[(p=q)=(q\cdot r)]\xrightarrow{P_{\alpha\beta}}[(p=q)\cdot(q=r)]=[(pWq)\cdot(qWr)]$ Ⅱ16(R)

(C) Ⅳ36 $[(p=q)=(q\ r)]\xrightarrow{P_{\alpha\beta}}[(p=q)\ (q=r)]=[(pWq)\ (qWr)]$ Ⅵ16(C)

根据转换运算Pm(运算中项的置换)，Ⅱ—Ⅵ(c)类中的每个运算都包括3种等值形式。于是，这里就有了(4+4)×3=24个运算。从另一方面说，根据转换运算Pm，Ⅳ(e)类中的24个运算也是很清楚的。于是，每一个Ⅱ—Ⅵ(c)类的运算都可对应到一个Ⅳ(e)类的运算。

Ⅳ. 至于Ⅳ(e)类的24个运算和Ⅲ—Ⅴ(a)类的48个运算之间的关系，自然由转换运算P.— 和P∧ 来确定。因为Ⅳ(e)类的每个运算，可以有两种等值的算式p—$(q\vee r)$以及pW$(q\vee r)$，随之而来的是和Ⅲ—Ⅴ(a)类的48个运算之间产生的二值—单值的对应：

(153) 形式Ⅰ 形式Ⅱ

(Ⅰ) Ⅳ[illegible] p [illegible] $(q\vee r)$ $\xrightarrow{P.-}$ $[p\cdot(q\vee r)]$ Ⅲ1(Ⅰ) (Ⅰ) Ⅳ[illegible] $[\bar{p}W(q\vee r)]\xrightarrow{P\wedge}[p\ (q\vee r)$ Ⅴ3(Ⅰ)

(N) Ⅳ66 $p\,W(q\vee r)\xrightarrow{P\wedge}p\ (q\vee r)$ Ⅴ1(N) (N) Ⅳ66 p [illegible] $(q\vee r)\xrightarrow{P.-}[p\cdot(q\vee r)]$ Ⅲ5[illegible](N)

(R) Ⅳ3[illegible] p [illegible] $(q\ r)\xrightarrow{P.-}[p\cdot(q|r)$ Ⅲ[illegible]6(R) (R) Ⅳ[illegible] $p\,W(q\ r)\xrightarrow{P\wedge}p\ (q\ r)$ Ⅴ22(R)

(C) Ⅳ36 $p\,W(q\ r)\xrightarrow{P\wedge}p\ (q\ r)$ Ⅴ6(C) (C) Ⅳ36 p [illegible] $(q\ r)\xrightarrow{P}p\cdot(q\ r)$ Ⅲ22(C)

因此，我们看到Ⅳ(e)类运算的形式Ⅱ，— 日由置换运算P.—进行置换，就可转换为Ⅲ—Ⅴ(a)类运算的表达式，该表达式与形式Ⅰ转换的结果也是NRg的关系：

(153乙) $[\bar{p}|(q\vee r)]=\mathrm{NRg}[p\cdot(q\vee r)]$，等等

(参看表105)。

Ⅴ. 所以，Ⅳ(e)类运算，可以通过置换运算P.—，转换为Ⅲ—Ⅴ(a)类族群运算，并且Ⅲ—Ⅴ(a)类运算，在二元—三元算式的形式下，本身也是可以转换的，它们会转换为Ⅳ(f)类运算，其中使用的转换运算是Rα或Rβ等(参看表129)。于是，对于二元—三元形式下的Ⅳ(e)类运算，也是可以通过应用在复合运算α中的转换运算P.—，将其转换为Ⅳ(f)类运算。于是产生了转换运算的结果为等值形式下的Ⅳ(f)类运算(参看表125)。因为，我们有：

(154) (Ⅰ) Ⅳ5 $[(p=\bar{q})=(\bar{q}\cdot r)]\xrightarrow{P.-\alpha}[(p\cdot\bar{q})=(\bar{q}\cdot r)]$ Ⅳ34(Ⅰ)

(N) Ⅳ66 $[(p=q)W(q\cdot r)]\xrightarrow{P\wedge\alpha}[(p\cdot q)W(q\cdot r)]$ Ⅳ37(N)

(R) Ⅳ35 $[(\bar{p}=q)=(q\cdot\bar{r})]\xrightarrow{P.-\alpha}[(\bar{p}\cdot q)=(q\cdot r)]$ Ⅳ9 (R)

(C) Ⅳ36 $[(p=q)W(q\cdot r)]\xrightarrow{P\wedge\alpha}[(p\cdot q)W(q\cdot r)]$ Ⅳ62(C)

然而，若我们将(154)中的这一个转换和(153)中的两个转换作比较，我们发现下面情况(借助于表129)：

1. IV(e)类的一个运算，经由P. 转换产生的两种，属于III—V(a)类的两个运算形式I和II，若我们将其变为二元—二元形式，在NPαβ(否定N源自形式I为肯定时，形式II为否定这一情况，反之亦然)关系下，两种形式之间是相互联系的。例如：

(155)　$\mathrm{V}53\ [p\cdot(q\vee r)]=[(q\supset p)\cdot(p\ r)]\xrightarrow{NP\alpha\beta}\mathrm{III}1\ [(p\ q)\ (r\supset p)]$

$\equiv[p\cdot(q\vee r)]$，等

2. 一个IV(e)类运算的转换运算P. 。得到一个IV(f)类运算结果，和同样的IV(c)类运算转换P. 下，产生的III—V(a)类运算结果之间，支持着转换运算P_γ(或P_δ等)的关系，因为一个IV(c)类二元—二元形式下的运算中项，和这个运算的一元—二元形式中的一元运算不能对应，根据具体情况，这之间的转换关系包括Rα、Rβ、R等。例如：

(156)　$\mathrm{IV}31\ [(p\cdot q)\ (q\cdot r)]=[(p\supset q)\cdot(q\vee r)]\xrightarrow{RP_\gamma}\mathrm{V}63\ [(q\supset p)\cdot(p\ r)]$

$\equiv[\bar{p}|(q\vee r)]$

§28　IV(c)类和IV(d)类族群的转换

Ⅰ. 对于IV(c)类的6个运算，形式为$p\cdot(q\ r)$，IV(d)类的6个运算，形式为$p\cdot(q*r)$，首先可以通过应用在IV(c)类或形式为$p\cdot(q\ r)$的IV(d)类运算的置换运算Pαα，对二者进行相互转换。因为一个算式，比如$p\cdot(q*r)$等值于“和r相关的p的肯定”(符号$p[r]=(p\cdot r)\vee(p\cdot r)$)，这里$*$是连接$q$和$r$的16个二元运算的任何一种形式。例如：

(157)
$$p\cdot(q*r)\equiv p[q\cdot r]\equiv p\cdot(q\cdot r)\vee p\cdot(q|r)$$
$$p\cdot(q*r)\equiv p[q\vee r]\equiv p\cdot(q\vee r)\vee p\cdot(q\cdot r)$$
$$p\cdot(q*r)\equiv p[q=r]\equiv p\cdot(q=r)\vee p\cdot(q\,\mathrm{W}\,r)$$，等等

然而，自然，在运算$p\cdot(q\ r)$(IVc)和运算$p\cdot(q\ r)$(IVd)之间存在着可能的转换关系，该关系由置换Pαα(分离运算和复合运算的置换)确定。

(158)　(I) $\mathrm{IV}15\ p=q[r]\xrightarrow{P\alpha\alpha}p[q=r]=[p\cdot(q*r)]$　　IV1 (I)

(N) $\mathrm{IV}56\ \bar{p}=q[r]\xrightarrow{P\alpha\alpha}\bar{p}[q=r]=[p|(q*r)]$　　IV70(N)

(R) $\mathrm{IV}15\ \bar{p}=\bar{q}[r]\xrightarrow{P\alpha\alpha}\bar{p}[\bar{q}=r]=[p|(q*r)]$　　IV70(R)

(C) $\mathrm{IV}56\ p=\bar{q}[r]\xrightarrow{P\alpha\alpha}p[\bar{q}=\bar{r}]=[p\cdot(q*r)]$　　IV1 (C)

从运算转换的观点出发，这组转换特别地重要，因为，在IV(c)类运算中，我们有R=I以及C=N，在IV(d)类运算中，我们反过来有R=N以及C=I。然而，我们注意到，在逆运算IV15 $p=q[r]$为$p=q[r]$时，是以完整的形式书写互反的(R对I以及C对N)，也就是说，通过反演置换运算Pαα命题的符号，确实得到运算IV70中的R=N以及

运算Ⅳ1中的C-I。至于 p q r 反演为 $p \mathrm{W} \bar{q} \bar{r}$，转换运算 Paα 得到运算 $p[q \mathrm{W} r]$，该运算等值于 $p[q-r]$；这一组不能适用于分量运算为(—)的Ⅳ(c)类运算。按照这个条件，Ⅳ(c)类中6个运算和Ⅳ(d)类中6个运算构成一个单独的结构，其中的转换包括I，N(2)×Pu(3)×Paα(2)=12个元素。

Ⅱ. Ⅳ(d)类中形式为 p $(q*r)$ 和 $p \cdot (q*r)$ 的6个运算，分别可以通过置换运算Paα转换为O—Ⅷ类运算，通过复合运算(α)中的置换运算P . .转换为I—Ⅶ类运算：

(159)

$$(\mathrm{I})\ \mathrm{IV}1\ [p \cdot (q*r)] \xrightarrow{\mathrm{Pa}\alpha} [p*(q=r)] \qquad \mathrm{VIII}(\mathrm{I})$$

$$(\mathrm{N})\ \mathrm{IV}70\ [p=(\overline{q*r})] \xrightarrow{\mathrm{Pa}\alpha} [p \,\bar{*}\, (q=r)] \qquad \mathrm{O}(\mathrm{N})$$

$$(\mathrm{R})\ \mathrm{IV}70\ [\bar{p}=(\bar{q}*\bar{r})] \xrightarrow{\mathrm{Pa}\alpha} [\bar{p}*(\bar{q}=\bar{r})] \qquad \mathrm{VIII}(\mathrm{R})$$

$$(\mathrm{C})\ \mathrm{IV}1\ [\bar{p}=(\overline{\bar{q}*\bar{r}})] \xrightarrow{\mathrm{Pa}\alpha} [\bar{p} \,\bar{*}\, (\bar{q}=\bar{r})] \qquad \mathrm{O}(\mathrm{C})$$

事实上，p $(q*r)$ $(p \cdot o) \vee p \cdot (q*r)$ Ⅳ70，以及(*) o。另一方面，$(q*r)$ $(q*r)$。因此这个运算组重新(如I 8)给了一个R—N和R—I之间交叉转换的例子。我们另外还有：

(160)

$$(\mathrm{I})\ \mathrm{IV}1\ [p \cdot (q*r)] \xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot\,\cdot(a)}} [p \cdot (q \cdot r)] \qquad \mathrm{I}1(\mathrm{I})$$

$$(\mathrm{N})\ \mathrm{IV}70\ [p|(q*r)] \xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot\,\cdot(a)}} [p|(q \cdot r)] \qquad \mathrm{VII}1(\mathrm{N})$$

$$(\mathrm{R})\ \mathrm{IV}70\ [\bar{p} \cdot (\bar{q}*\bar{r})] \xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot\,\cdot(a)}} [\bar{p} \cdot (\bar{q} \cdot \bar{r})] \qquad \mathrm{I}8(\mathrm{R})$$

$$(\mathrm{C})\ \mathrm{IV}1\ [p\ (q*r)] \xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot\,\cdot}} [p\ (q \cdot r)] \qquad \mathrm{VII}8(\mathrm{C})$$

尽管 $q*r$ $q*r$，且反运算(R对I以及C对N)还是应该被完整写出来(所有命题的符号的改变)。

Ⅲ. Ⅳ(c)类运算中的6个算式，自然情况下，通过用在分量运算(a)中的置换运算P. .可以得到Ⅱ—Ⅵ(b)类的12+12个运算。因为，我们有 p $q[r]$ p $q[r]$，然而Ⅱ1 $p \cdot q$ r 是运算Ⅱ28 $p \cdot q$ r（运算Ⅱ1的R)的一个顺运算。另一方面 p $q[r]$ 等价于 $p \mathrm{W} \bar{q} \bar{r}$，然而 $p \cdot \bar{q} \bar{r}$ 又是 p $q[r]$ 的区别运算。这里就是Ⅱ—Ⅵ类的12+12个运算对阵Ⅳ(c)类的6个运算，于是我们有：

(161)

形式Ⅰ			形式Ⅱ		
(I) Ⅳ p q r	$\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a)}}$ $p \cdot q$ r	Ⅱ1(I)	(I) Ⅳ15 $p \wedge \bar{q} \bar{r}$	$\xrightarrow{\mathrm{P}_{\mathrm{W}(a)}}$ p $q[r]$	Ⅵ28(I)
(N) Ⅳ6 $p \wedge q$ r	$\xrightarrow{\mathrm{P}}$ p q r	Ⅵ1(N)	(N) Ⅳ6 p q r	$\xrightarrow{\mathrm{P}}$ $p \cdot q$ r	Ⅱ28(N)
(R) Ⅳ1 p q r	$\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a)}}$ $\bar{p} \cdot \bar{q} \bar{r}$	Ⅱ28(R)	(R) Ⅳ1 $p \wedge \bar{q} \bar{r}$	$\xrightarrow{\mathrm{P}_{\mathrm{W}(a)}}$ p $\bar{q}[r]$	Ⅵ11(R)
(C) Ⅳ6 $p \wedge \bar{q}$ r	$\xrightarrow{\mathrm{P}}$ p $q[r]$	Ⅵ28(C)	(C) Ⅳ6 p q r	$\xrightarrow{\mathrm{P}}$ $p \cdot q[r]$	Ⅱ11(C)

我们发现，Ⅳ(c)类的两种运算，正好对应了Ⅱ—Ⅵ(b)类的8个运算。

Ⅳ. 现在，我们给Ⅳ(c)类运算一个二元—三元的运算形式，即：

(162) $\{p=q[r]\}\equiv\{p[r]=q[r]\}=[(p=r)=(q=r)]$

若我们在算式$[(p=r)=(q=r)]$上，使用转换运算 Nd 和 Ng，我们只会得到结果 N。若反过来我们在复合运算中，用$(\cdot)$替换$(=)$，即$P_{\cdot=(qp)}$，我们将$[(p=r)=(q=r)]$转换为$[(p\cdot r)=(q\cdot r)]$，它是属于Ⅱ—Ⅵ(a)类的一个运算$r\cdot(p\,\mathrm{W}\,q)$的一个等值算式。于是我们有：

(163)

(I) Ⅳ15 $[(p=r)=(q=r)]\xrightarrow{P_{\cdot=(qp)}}[(p\cdot r)=(q\cdot r)]\equiv[r\cdot(p\,\mathrm{W}\,q)]$ Ⅵ15(I)

(N) Ⅳ56 $[(p=r)\,\mathrm{W}\,(q=r)]\xrightarrow{P_{\mathrm{W}(qp)}}[(p\cdot r)\,\mathrm{W}\,(q\cdot r)]\equiv[r\cdot(p\,\mathrm{W}\,q)]$ Ⅱ17(N)

(R) Ⅳ15 $[(p=r)=(q=r)]\xrightarrow{P_{\cdot=(qp)}}[(p\cdot r)=(q\cdot r)]\equiv[r\cdot(p\,\mathrm{W}\,q)]$ Ⅵ20(R)

(C) Ⅳ56 $[(p=r)\,\mathrm{W}\,(q=r)]\xrightarrow{P_{\mathrm{W}(qp)}}[(p\cdot r)\,\mathrm{W}\,(q\cdot r)]\equiv[r\cdot(p\,\mathrm{W}\,q)]$ Ⅱ26(C)

另一方面，同样的应用在分量运算(a)中的转换运算$P_{\cdot=}$，得到的是属于Ⅱ—Ⅵ(c)类的运算元素：

(164)(I) Ⅳ15 $[(p=r)=(q=r)]\xrightarrow{P_{\cdot=(a)}}[(p=r)\cdot(q=r)]$ Ⅱ7(I)

(N) Ⅳ56 $[(p=r)\,\mathrm{W}\,(q=r)]\xrightarrow{P_{\mathrm{W}(a)}}[(p=r)|(q=r)]$ Ⅵ7(N)

(R) Ⅳ15 $[(p=r)=(q=r)]\xrightarrow{P_{\cdot=(a)}}[(p=r)\cdot(q=r)]$ Ⅱ7(R)

(C) Ⅳ56 $[(p=r)\,\mathrm{W}\,(q=r)]\xrightarrow{P_{\mathrm{W}(a)}}[(p=r)|(q=r)]$ Ⅵ7(C)

在这两种情况中，我们都有 R=I 以及 C=N。我们还记得(§19)Ⅱ—Ⅵ(c)类运算族群包括 8 个区别运算形式，其中有 2 个表达式有两个(=)复合运算，还有 6 个表达式有两个(W)复合运算。同样，我们可以将Ⅳ(c)类的 3 对运算中的每一个，用两种等值形式表示，比如$[(p=r)=(q=r)]$以及$[(p\,\mathrm{W}\,r)=(q\,\mathrm{W}\,r)]$。结果是，Ⅳ(c)类的 3 对运算对应的，要么是运算Ⅱ7 和运算Ⅵ7，要么是Ⅱ—Ⅵ类中 12、16 或 19 中间的某一对运算中的某一个；因此，在Ⅵ(c)类的 6 个运算和Ⅱ—Ⅵ(c)类的 8 个运算之间，正好也对应起来。

Ⅴ. 现在，我们在两个复合运算 α 或 β 中的一个上使用转换运算$P_{\cdot=}$；于是，就有了，我们将Ⅳ(c)类的 6 个运算，转为Ⅳ(e)类的 24 个运算！因为：

(165)

(I) Ⅳ15 $[(p=r)=(q=r)]\xrightarrow{P_{\cdot=}}[(p\cdot r)=(q=r)]\equiv[q=(r\supset p)]$ Ⅳ13(I)

(N) Ⅳ56 $[(p\,\mathrm{W}\,r)=(q=r)]\xrightarrow{P_{|\mathrm{W}}}[(p|r)=(q=r)]\equiv[q\,\mathrm{W}\,(r\supset p)]$ Ⅳ58(N)

(R) Ⅳ15 $[(\bar{p}=\bar{r})=(\bar{q}=\bar{r})]\xrightarrow{P_{\cdot=(a)}}[(\bar{p}\cdot\bar{r})=(\bar{q}=\bar{r})]\equiv[\bar{q}=(p\supset r)]$ Ⅳ45(R)

(C) Ⅳ56 $[(\bar{p}\,\mathrm{W}\,\bar{r})=(\bar{q}=\bar{r})]\xrightarrow{P_{|\mathrm{W}(a)}}[(p|\bar{r})=(\bar{q}=\bar{r})]\equiv[q=(p\supset r)]$ Ⅳ26(C)

以及

(166)

(Ⅰ) Ⅳ15 $[(p \ \ r) \ \ (q - r)] \xrightarrow{P_{=(\beta)}} [(p \ \ r) \ \ (q \cdot r)] \ \ [p \ \ (r \supset q)]$ Ⅳ8(Ⅰ)

(N) Ⅳ56 $[(p \ \ r) \ \ (q \mathrm{W} r)] \xrightarrow{P_{\mathrm{W}(\beta)}} [(p \ \ r) \ \ (q \ \ r)] \ \ [p \mathrm{W} (r \supset q)]$ Ⅳ63(N)

(R) Ⅳ15 $[(p - r) \ \ (q \ \ r)] \xrightarrow{P_{\cdot=(\beta)}} [(p \ \ r) \ \ (\bar{q} \cdot r)] \ \ [p \ \ (q \supset r)]$ Ⅳ54(R)

(C) Ⅳ56 $[(p \ \ r) \ \ (q \mathrm{W} r)] \xrightarrow{P} [(p - r) \ \ (q \ \ r)] \ \ [p \mathrm{W} (q \supset r)]$ Ⅳ17(C)

但是我们也有：

(167)

(Ⅰ) Ⅳ15 $[(p \mathrm{W} r) \ \ (q \ \ r)] \xrightarrow{P} [(p \ \ r) \ \ (q \ \ r)] \ \ [q \ \ (p \vee r)]$ Ⅳ12(Ⅰ)

(N) Ⅳ56 $[(p \ \ r) \ \ (q \ \ r)] \xrightarrow{P} [(p \cdot r) \ \ (q \ \ r)] \ \ [q \mathrm{W} (p \vee r)]$ Ⅳ59(N)

(R) Ⅳ15 $[(p \mathrm{W} r) \ \ (q \ \ r)] \xrightarrow{P_{\mathrm{IW}(\alpha)}} [(p \ \ r) \ \ (q \ \ r)] \ \ [q \ \ (p \ \ r)]$ Ⅳ31(R)

(C) Ⅳ56 $[(\bar{p} \ \ r) \ \ (\bar{q} \ \ \bar{r})] \xrightarrow{P_{\cdot=(\alpha)}} [(\bar{p} \ \ r) \ \ (\bar{q} \ \ \bar{r})] \ \ [\bar{q} \mathrm{W} (p \ \ r)]$ Ⅳ40(C)

并且

(168) Ⅳ15 $[(p \ \ r) \ \ (q \mathrm{W} r)] \xrightarrow{P_{\mathrm{IW}(\beta)}} [(p \ \ r) \ \ (q \ \ r)] \ \ [p \ \ (q \vee r)]$ Ⅳ5

等等。

于是，我们发现，若我们将Ⅳ(c)类运算的二元　二元形式，转换为一元　二元形式（建立在分配D基础上的表达），转换运算P.　。和P.　，所得结果，都是Ⅳ(c)类运算，表述为初始运算，处于Pu转换关系中：举例说明，运算Ⅳ15，从P.　。中得到 $q \ \ (r \supset p)$，从P.　中得到 $p \ \ (r \supset q)$，两个算式等值于 q 和 p 的置换运算，同样，运算Ⅳ15在 $[(p \mathrm{W} r) \ \ (q \ \ r)]$ 和 $(p \ \ r) \ \ (q \mathrm{W} r)]$ 这两种形式下，从 P_{W}。中得到 $q \ \ (p \vee r)$，从 P_{W}，中得到 $p \ \ (q \vee r)$，两个算式再一次等值于 $q \ \ (p \vee r)$ 内部 q 和 p 的置换运算。于是，我们可以如下书写：

(169) $$D[P_{\cdot=(\alpha)}] = PuD[P_{\cdot=(\beta)}]$$

其中D表示从二元　二元形式到一元　二元形式的转换，并且Pu是一元复合运算的置换。

最后我们需要注意，若我们在运算Ⅳ15 $(p \ \ r) \ \ (q \ \ r)$ 中使用转换P　。以及P、　，我们会得到(167)和(168)中同样的结果（参看170）。

(170) Ⅳ15 $[(p \ \ r) \ \ (q \ \ r)] \xrightarrow{P_{\supset=(\alpha)}} [(p \supset r) \ \ (q \ \ r)] \ \ [q \ \ (p \vee r)]$ Ⅳ12

并且 Ⅳ15 $[(p - r) \ \ (q \ \ r)] \xrightarrow{P} [(p \ \ r) \ \ (q \supset r)] \ \ [p - (q \vee r)]$ Ⅳ5

因此，转换运算Pu（命题169）在转换运算P　=（α 和 β）中同样也起了作用。

与之相反，置换运算 $P_{\cdot=}$（α 和 β），将Ⅳ(c)类运算族转换为其本身结构：

(171) Ⅳ15 $p-q[r]$ $[(p-r)-(q-r)]\xrightarrow{P_{\cdot=(a)}}[(p*r)\ \ (q\ \ r)\ \ \ r\ \ q[p]]$ Ⅳ28

并且 Ⅳ15 $p=q[r]$ $[(p-r)-(q=r)]\xrightarrow{P.}[(p\ \ r)\ \ (q*r)\ \ \ r\ \ p[q]]$ Ⅳ21

于是转换运算 P. 本身产生的置换运算 Pu，在应用到(α)和(β)中时，只会产生一种置换，即从 $q[p]$ 到 $p[q]$。

§ 29 Ⅳ(b)类族群的转换

Ⅰ. Ⅳ(b)类族群的两个运算Ⅳ29 $[p\ \ (q\ \ r)]$ 和Ⅳ42 $[p\ W(q\ \ r)]$，首先是可以通过在分量运算(a)中替换运算 P. ，转换为Ⅱ－Ⅵ(a)类的 12＋12 个运算。因为，我们有：

(172) (Ⅰ) $[p=(q=r)]\xrightarrow{P_{\cdot=(a)}}[p\cdot(q=r)]$ Ⅱ3 (Ⅰ)

(N) $[p\ W(q=r)]\xrightarrow{P_{|W(a)}}[p|(q=r)]$ Ⅵ3 (N)

(R) $[\bar{p}=(\bar{q}=\bar{r})]\xrightarrow{P_{\cdot=(a)}}[\bar{p}\cdot(q=r)]$ Ⅱ25(R)

(C) $[\bar{p}W(\bar{q}=\bar{r})]\xrightarrow{P_{|W(a)}}[\bar{p}|(q=r)]$ Ⅵ25(C)

并且

(Ⅰ) $[p\ W(q\ W r)]\xrightarrow{P_{|W(a)}}[p|(q\ W r)]$ Ⅵ8 (Ⅰ)

(N) $[p=(q\ W r)]\xrightarrow{P_{\cdot=(a)}}[p\cdot(q\ W r)]$ Ⅱ8 (N)

(R) $[\bar{p}W(\bar{q}W\bar{r})]\xrightarrow{P_{|W(a)}}[\bar{p}|(q\ W r)]$ Ⅵ26(R)

(C) $[\bar{p}=(\bar{q}W\bar{r})]\xrightarrow{P_{\cdot=(a)}}[\bar{p}\cdot(q\ W r)]$ Ⅱ26(C)

Ⅳ29 和Ⅳ42 两个单独的运算产生的两个等量形式，孕育出Ⅱ－Ⅵ(a)类的 8 个不同的运算。另一方面，在一九运算的置换运算(Pa)时，我们获得了 3 组等值于Ⅳ29 和Ⅳ42 的算式，还有 3 组不等值于Ⅱ－Ⅵ(a)类的运算；这里共有 3×8＝24 个运算。

Ⅱ. 现在在复合运算(α)上使用置换运算 P. ，我们可将运算Ⅳ29 和Ⅳ42 转换为Ⅳ(e)中的 24 个运算：

(173) (Ⅰ) $[p=(q=r)]\xrightarrow{P_{\cdot=(a)}}[p=(q\cdot r)]$ Ⅳ35(Ⅰ)

(N) $[p\ W(q=r)]\xrightarrow{P_{\cdot=(a)}}[p\ W(q\cdot r)]$ Ⅳ36(N)

(R) $[\bar{p}=(\bar{q}=r)]\xrightarrow{P_{\cdot=(a)}}[\bar{p}=(\bar{q}\cdot\bar{r})]$ Ⅳ5 (R)

(C) $[\bar{p}W(\bar{q}=\bar{r})]\xrightarrow{P_{\cdot=(a)}}[\bar{p}W(\bar{q}\cdot\bar{r})]$ Ⅳ66(C)

并且

$$(\mathrm{I})\ [p=(q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\mathrm{W}(a)}}[p=(q|r)] \qquad \mathrm{IV}17(\mathrm{I})$$

$$(\mathrm{N})\ [p\ \mathrm{W}\ (q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{|\mathrm{W}(a)}}[p\ \mathrm{W}\ (q|r)] \qquad \mathrm{IV}54(\mathrm{N})$$

$$(\mathrm{R})\ [\bar{p}=(\bar{q}\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{|\mathrm{W}(a)}}[\bar{p}=(\bar{q}|r)] \qquad \mathrm{IV}63(\mathrm{R})$$

$$(\mathrm{C})\ [p\ \mathrm{W}\ (q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\mathrm{W}(a)}}[\bar{p}\ \mathrm{W}\ (q|r)] \qquad \mathrm{IV}8\ (\mathrm{C})$$

于是,我们再次从仅仅Ⅳ29 和Ⅳ12 两个运算的两个等值形式中,得到 8×3(Pu)=24 个Ⅳ(e)类运算。

Ⅲ.通过转换运算 $\mathrm{P}_{\cdot=}$,自然可以得到Ⅳ(d)类中的 6 个运算结果:

(174) $$(\mathrm{I})\ [p=(q=r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a)}}[p=(q*r)]\equiv[p\cdot(q*r)] \qquad \mathrm{IV}1\ (\mathrm{I})$$

$$(\mathrm{N})\ [p\ \mathrm{W}\ (q=r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a)}}[p\ \mathrm{W}\ (q*r)]\equiv[p\cdot(q*r)] \qquad \mathrm{IV}70(\mathrm{N})$$

$$(\mathrm{R})\ [\bar{p}=(\bar{q}=\bar{r})]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a)}}[\bar{p}=(\bar{q}*\bar{r})]\equiv[\bar{p}\cdot(q*r)] \qquad \mathrm{IV}70(\mathrm{R})$$

$$(\mathrm{C})\ [p\ \mathrm{W}\ (q=r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a)}}[p\ \mathrm{W}\ (q*r)]\equiv[p\cdot(q*r)] \qquad \mathrm{IV}1\ (\mathrm{C})$$

我们注意到成对运算Ⅳ29 和Ⅳ12 中,我们有 R=I 以及 C=N,也对应转换为一对运算Ⅳ1 和Ⅳ70,后一组中间我们有相反的对应关系 R=N 以及 C=I。只需将这个转换运算通过 3 个(Pu)转换进行翻倍,就能得到Ⅳ(d)类中的 6 个运算了。

Ⅳ.最后,只需要结合(173)和(173)中的转换运算,就可以将Ⅳ(b)类的两个运算转换为Ⅲ—Ⅴ(a)类中的 48 个运算:

(175)

$(\mathrm{I})\ [p=(q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a,a)}}[p\cdot(q|r)]$ Ⅲ56(I) $\qquad (\mathrm{I})\ [p\ \mathrm{W}\ (q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a,a)}}[p|(q|r)]$ Ⅴ22(I)

$(\mathrm{N})\ [\bar{p}\ \mathrm{W}\ (q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a,a)}}[\bar{p}\ (q|r)]$ Ⅴ56(N) $\qquad (\mathrm{N})\ [p=(q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a,a)}}[p\cdot(q|r)]$ Ⅲ22(N)

$(\mathrm{R})\ [p=(q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a,a)}}[p\cdot(q|r)]$ Ⅲ1(R) $\qquad (\mathrm{R})\ [p\ \mathrm{W}\ (q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a,a)}}[p\ (q|\bar{r})]$ Ⅴ53(R)

$(\mathrm{C})\ [p\ \mathrm{W}\ (q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a,a)}}[p|(q|r)]$ Ⅴ1(C) $\qquad (\mathrm{C})\ [p=(q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a,a)}}[p\cdot(q|r)]$ Ⅲ53(C)

我们还有:

(175 乙)

$(\mathrm{I})\ [p=(q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a,a)}}[p\cdot(q|r)]$ Ⅲ7 (I) $\qquad (\mathrm{I})\ [p=(\bar{q}\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{=\cdot(a,a)}}[p\cdot(\bar{q}|r)]$ Ⅲ2 (I)

$(\mathrm{N})\ [p\ \mathrm{W}\ (q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a,a)}}[p\ (q|r)]$ Ⅴ7 (N) $\qquad (\mathrm{N})\ [p\ \mathrm{W}\ (q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{=\cdot(a,a)}}[p|(q|r)]$ Ⅴ2 (N)

$(\mathrm{R})\ [p=(q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a,a)}}[p\cdot(q|r)]$ Ⅲ54(R) $\qquad (\mathrm{R})\ [p=(q\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{=\cdot(a,a)}}[p\cdot(q|r)]$ Ⅲ55(R)

$(\mathrm{C})\ [\bar{p}\ \mathrm{W}\ (\bar{q}\ \mathrm{W}\ r)]\xrightarrow{\mathrm{P}_{\cdot=(a,a)}}[\bar{p}|(\bar{q}|r)]$ Ⅴ54(C) $\qquad (\mathrm{C})\ [\bar{p}\ \mathrm{W}\ (q\ \mathrm{W}\ \bar{r})]\xrightarrow{\mathrm{P}_{=\cdot(a,a)}}[\bar{p}|(q|\bar{r})]$ Ⅴ55(C)

因此，通过两个置换运算P. 或P ，在分量运算(a)和复合运算(α)中的替换，两个运算Ⅳ29和Ⅳ12得到了Ⅲ—Ⅴ(a)类族群中的16个运算。现在只需要，按照置换运算Pu的规则，重复该转换方法，即可获得16×3=48个Ⅲ—Ⅴ(a)类的区别运算，然而Ⅳ(b)类中的两个运算在一元运算的置换中依旧等值于自己本身的运算。

(175)和(175乙)中的转换运算在复合运算(α)是(∨)时，是不能自然成立的。若该运算为(—)那么可将(—)置换为(•)加入运算P. 或P ，自然可以得到Ⅰ—Ⅶ类的8+8个运算。但是对于后面这层转换运算就没有继续拓展的必要了。

§30 Ⅳ(a)类和Ⅲ—Ⅴ(c)类族群的转换

我们还记得，有两个族群的运算不能书写为单一元—二元运算或单二元—一元运算的形式，因为这些运算需要一个从一元—二元的算式，它们分属于族群Ⅲ(c)类和Ⅳ(a)类，并且它们分别包括8+8个和8个运算。从运算机理的分析研究来看，对这两个族群的转换运算的研究是很有教育指导意义的。

Ⅰ.首先，这两个族群完全可以互相转换，尽管它们各自的表面形式都不相同。我们要使用的转换运算乍看之下相当费解，但是简化下来，最后我们所要考虑的，就是几个非常简单的运算操作。为更好地理解这一部分，我们首先回忆一下Ⅳ2、32、18和7这4个运算，以及其4个逆运算Ⅳ69、54、53和64，后面这些运算同时也是前者的互反运算；再者Ⅲ23、19、14和13这4个运算反过来也有4个响的互反运算(Ⅲ26、26、33和45)，Ⅲ(c)类中的这8个运算，另一方面也对应于了Ⅴ(c)类中的8个逆运算。现在我们将Ⅳ2、32、18和7这4个运算和Ⅲ23、19、14和13这4个运算(参看表114和112)置于一个可比较的形式下，以便于确定两组运算之间是何种转换构成(→)：

(176) Ⅲ23 $[p=(q|r)]\cdot[q|(p\supset r)]\rightarrow[p|(q|r)]\cdot[q|(r\supset p)]$ Ⅳ2

Ⅲ19 $[p=(q|r)]\cdot[\bar{q}|(\bar{p}\supset r)]\rightarrow[p|(q|r)]\cdot[\bar{q}|(r\supset p)]$ Ⅳ32

Ⅲ14 $[\bar{q}=(r|p)]\cdot[\bar{r}|(\bar{q}\supset p)]\rightarrow[q|(r|p)]\cdot[\bar{r}|(p\supset q)]$ Ⅳ18

Ⅲ13 $[r=(p|q)]\cdot[p|(r\supset q)]\rightarrow[r|(p|q)]\cdot[p|(q\supset r)]$ Ⅳ7

$\downarrow\quad\downarrow\ \downarrow\qquad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\qquad\downarrow\quad\downarrow\ \downarrow\qquad\downarrow\ \downarrow\quad\downarrow$

(176乙)

Ⅲ(c) $[x=(y|z)]\cdot[y|(\overline{x\supset y})]\rightarrow[x|(y|z)]\cdot[y|(z\supset x)]$ Ⅳ(a)

于是，我们可发现，Ⅲ(c)类运算向Ⅳ(a)类运算的转换关系，反之亦然，这里包括：

① 对于第一个一元—二元运算(我们称之为UBⅠ)，在于否定一元运算x(即Nx)，以及交换等值关系(=)和不相容关系(即P =)；

② 对于第二个一元—二元运算(我们称之为UBⅡ)，在于置换(x⊃z)和(z⊃x)即：

(177) $[\text{Ⅲ}((c)\rightarrow\text{Ⅳ}(a)]=\{(Nx+P_{|-})\text{UB Ⅰ}\}+\{[P_{(x\supset z)\cdot(z\supset x)}]\text{ UB Ⅱ}\}$

若现在我们反过来进行置换运算，我们发现其中的转换是一样的(参看178)。

(178) Ⅲ50 (Ⅲ23的R) $[p\supset(q\supset r)]\cdot[q\supset(r\supset p)]\rightarrow[p\supset(q\supset r)]\cdot[q\supset(p\supset r)]$ Ⅳ69 (Ⅳ2的R)

Ⅲ26 (Ⅲ19的R) $[p\supset(q\supset r)]\cdot[q\supset(r\supset p)]\rightarrow[p\supset(q\supset r)]\cdot[q\supset(p\supset r)]$ Ⅳ39 (Ⅳ32的R)

Ⅲ53 (Ⅲ14的R) $[q\supset(r\supset p)]\cdot[r\supset(p\supset q)]\rightarrow[q\supset(r\supset p)]\cdot[r\supset(q\supset p)]$ Ⅳ53 (Ⅳ18的R)

Ⅲ13 (Ⅲ15的R) $[r\supset(p\supset q)]\cdot[p\supset(q\supset r)]\rightarrow[r\supset(p\supset q)]\cdot[p\supset(r\supset q)]$ Ⅳ61 (Ⅳ17的R)

其中，我们只注意到从$(x\supset z)$到$(z\supset x)$的转换关系，在这里表现为$(z\supset x)\rightarrow(z\supset x)$，这也是等值的(换质位法)。

至于逆运算，自然也是同样的转换运算：只需要将表(176)和(178)中的分量运算(·)换为其否定(|)即可。但是，当Ⅲ(c)类运算的反演和互反(Ⅴ类的N和Ⅲ类的R)彼此分明，各不相同时，我们反过来，在Ⅳ(a)类运算中，有了N＝R，即：

(179) $[p|(q|r)]|[\bar{q}|(r\supset p)]\equiv[p|(q|\bar{r})]\cdot[q|(p\supset r)]$，等等

因此，在16个Ⅲ—Ⅴ(c)类运算和16个Ⅳ(a)类运算(其中只有8个为区别运算)之间，存在一个二值—单值的对应关系，而且在每种情况中，该对应由一种转换运算确定(177)。

但是，这种复杂的转换是如何构成的呢？至少对于第二个一元—二元运算(UB Ⅱ)中，从Ⅱ缩涵到不相容的这种罕见的置换运算，是什么让其起作用的呢？若我们参考命题(138)和(138乙)中得出的注意要点(以及命题141)——注意，我们在每一章节中，都可以重复每个我们已经研究过的转换运算——我们在右边设定这样的一个转换，只是用来在一个范式中，加入或删除某些三位运算，以对应转换为另一个的算式。然而，对比这些范式，我们发现，确切说来，它们只在一个单一的三位运算的添加或删除上有所区别(常数表180中以斜体展现)。

(180) Ⅲ(c)类运算 Ⅳ(a)类对应的运算

Ⅲ23 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(\bar{p}\cdot q\cdot r)]$	Ⅳ2 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$
Ⅲ19 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$	Ⅳ32 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$
Ⅲ14 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot\bar{r})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r)]$	Ⅳ18 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)\vee(p\cdot\bar{q}\cdot r)]$
Ⅲ13 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$	Ⅳ7 $[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$

在互反运算R的情况中，加入Ⅳ(a)类中的三位运算，自然是常数表(180)中的三位运算的互反：对于运算Ⅳ69来说，和运算Ⅲ50相比，是$(p\cdot q\cdot r)$(因为和运算Ⅲ23相比，我们在运算Ⅳ2中有$p\cdot q\cdot r$)等等。至于Ⅴ类中的8个逆运算，每个运算中间都比Ⅳ(a)类的8个运算中多一个三位运算；然而，这个多出来的三位运算，自然是和我们刚刚在Ⅲ23到Ⅳ2或Ⅲ19到Ⅳ32等的转换中看到的增加部分一样，但是，这一次是在Ⅳ(a)类运算对应的反演中进行的添加。例如，运算Ⅳ69(Ⅳ2逆运算)在转换全运算Ⅴ23(Ⅲ23的逆运算)时，需要添加$(p\cdot q\cdot r)$；同样运算Ⅳ39(Ⅳ32的逆运算)转换为Ⅴ19(Ⅲ19的逆运算)时，需要添加$(\bar{p}\cdot q\cdot r)$。

于是，从转换(177)出发，带上该转换的完整形式(命题176乙)，我们很容易就可以演算出这个需要增加的三位运算。事实上，这个增加的三位运算就是$(Nx+P\quad)$

UB Ⅰ,也就是从$[x=(y|z)]$到$[x=(y\,z)]$的转换。从这方面看,只需要演算出这两个算式,就可以了解,除了第一个算式,三位运算$(x \cdot y \cdot z)$所构成第二个算式的部分:

(181)

$$[x=(y|z)]\equiv[(x \cdot y \cdot z)\vee(x \cdot \bar{y} \cdot z)\vee(x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z})\vee(\bar{x} \cdot y \cdot z)]$$

$$[x=(y\,z)]\equiv[(x \cdot y \cdot z)\vee(x \cdot y \cdot z)\vee(x \cdot y \cdot z)\vee(x \cdot y \cdot z)\vee(x \cdot y \cdot z)]$$

而且,的确,若我们对比常数表(180)和(176),我们发现,每种情况下,增加的三位运算,都等值于$(x \cdot y \cdot z)$(自然要考虑到 x、y 和 z 一一对应的是表(176)中的每个运算)。

至于$y\,(x\supset z)$和$y\,(z\supset x)$之间的关系,我们有(181乙)

(181乙) $$[\bar{y}|(\overline{x\supset z})]\equiv[(x \cdot y \cdot z)\vee(x \cdot y \cdot \bar{z})\vee(x \cdot \bar{y} \cdot z)\vee(\bar{x} \cdot y \cdot z)\vee(\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z})\vee(\bar{x} \cdot y \cdot z)\vee(\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z})]$$

$$[\bar{y}|(z\supset\bar{x})]\equiv[(x \cdot y \cdot z)\vee(x \cdot y \cdot \bar{z})\vee(x \cdot \bar{y} \cdot z)\vee(\bar{x} \cdot y \cdot z)\vee(\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z})]$$

这里的关系,在于$y\,(x\supset z)$中最后两个三位运算的删除。但是,因为在Ⅲ(c)类的算式中,在$y\,(x\,\overline{\supset}\,z)$和$x\,(y\,z)$的合取中,它们已经被减去了,于是在Ⅲ(c)类运算向Ⅳ(a)类运算转换的过程中,只有(181)中的关系涉入其中

Ⅱ.至于Ⅲ—Ⅴ(c)类运算族群的其他转换,我们自然可以通过第三个一元一二元运算的否定:$p|(q \cdot r)$被否定为$p \cdot (q \cdot r)$等,这样将其转换为Ⅰ—Ⅶ类族群运算。但是,研究置换为这个族群的48个Ⅲ—Ⅴ(a)类运算的转换运算更有意思。事实上,这里我们只需要在第二个一元一二元运算(UBⅡ)上,使用转换运算Nh(是我们在后面要讲述的NhⅡ),就可获得一个Ⅲ—Ⅴ(a)类族群的运算(参看182)。

(182)

(Ⅰ) Ⅲ19 $[p=(q \cdot r)] \cdot [\bar{p}\,(\bar{q} \cdot \bar{r})] \xrightarrow{\text{NhⅡ}} [p=(q \cdot r)] \cdot [p|(q\vee r)] \equiv [\bar{p} \cdot (q|r)]$ Ⅲ56(Ⅰ)

(N) Ⅴ1 $[p\,(q \cdot r)] \cdot [p\,(q \cdot r)] \xrightarrow{\text{NhⅡ}} [p\,(q \cdot r)] \cdot [p\,(q\vee r)] \equiv [p \vee (q \cdot r)] \vee [p \cdot (q\vee r)] \equiv [p\,(q\,r)]$ Ⅴ56(N)

(R) Ⅲ26 $[\bar{p}=(\bar{q} \cdot \bar{r})] \cdot [p\,(q \cdot r)] \xrightarrow{\text{NhⅡ}} [\bar{p}=(\bar{q} \cdot \bar{r})] \cdot [\bar{p} \cdot (q|r)] \equiv [p \cdot (q\vee r)]$ Ⅲ1(R)

(C) Ⅴ26 $[p\,(q \cdot r)] \cdot [p\,(q \cdot r)] \xrightarrow{\text{NhⅡ}} [p=(q \cdot r)] \cdot [p \cdot (q\,r)] \equiv [p \vee (q \cdot r)] \vee [p \cdot (q\,r)] \equiv [p\,(q\vee r)]$ Ⅴ1(C)

因此,这就是Ⅲ—Ⅴ(c)类的8+8个运算,这些运算由置换Pu扩充3倍,于是正好得到3×16=48个Ⅲ—Ⅴ(a)类运算。

然而,我们有看到这些构成运算的重要意义。表(182)右边部分,即转换运算NhⅡ的结果,事实上,我们还可以用以下形式表示,通过运算常数表(233)中的排列序号,演绎每个一元一二元算式,这里将运算Ⅳ35称为x,运算Ⅴ1称为y(参考§34节):

(183)	(Ⅰ)(Ⅳ25)•(Ⅴ1)≡(Ⅲ56)	(Ⅰ)	即	(Ⅰ)$x \cdot y\equiv Cy$	(Ⅰ)
	(N)(Ⅳ36)∨(Ⅲ1)≡(Ⅴ56)	(N)		(N)$Nx\vee Ny\equiv Ry$	(N)
	(R)(Ⅳ5)•(Ⅴ56)≡(Ⅲ1)	(R)		(R)$Rx \cdot Ry\equiv Ny$	(R)
	(C)(Ⅳ66)∨(Ⅲ56)≡(Ⅴ1)	(C)		(C)$Cx\vee Cy\equiv y$	(C)

因此，表(183)中的每一栏表示的是 INRC 转换群的关系，然而横向的每条线演绎的是这里的一般特性，即若 $x \cdot y = z$，那么 $x \vee y = z$，以及若 $x \vee y = z$，那么 $x \cdot y = z$。这里需要补充的是，在特殊情况下 $z = Cy$，于是 $z = Ry$，$Rz = Ny$ 以及 $Cz = y$。

Ⅲ. 若Ⅲ—Ⅴ(c)类运算可以转换为Ⅲ—Ⅴ(a)类运算，从这个角度出发，Ⅳ(a)类运算也是可以转换为作为Ⅲ—Ⅴ(a)类运算的近亲的Ⅳ(f)类运算的。这里只需要交换复合运算 UBⅠ和 UBⅡ(我们将其书写为 PαβⅠ—Ⅱ，抑或简化为 Pαβ)，并且否定 UBⅡ的二元运算(我们将其书写为 NdⅡ)(参看 184)。

(184)

(I) Ⅳ32 $[p \, (q \, r)] \cdot [q \, (p \, r)] \xrightarrow{P\alpha\beta NdⅡ} [p \, (q \, r)] \cdot [q \, (p \cdot r)] = [(p \supset r) \, (r \supset q)]$ Ⅳ38(I)

(N) Ⅳ39 $[p \, (q \, r)] \cdot [q \, (p \, r)] \xrightarrow{P\alpha\beta NdⅡ} [p \, (q \, r)] \cdot [q \, (p \cdot r)] = [(p \supset r) \cdot (r \supset q)]$ Ⅳ33(N)

(R) Ⅳ39 $[\bar{p} \, (\bar{q} | \bar{r})] \cdot [q | (p | \bar{r})] \xrightarrow{P\alpha\beta NdⅡ} [p \, (q \, r)] \cdot [q \, (p \cdot r)] = [(r \supset p) \, (q \supset r)]$ Ⅳ52(R)

(C) Ⅳ32 $[p \, (q \, r)] \, [q \, (p \, r)] \xrightarrow{P\alpha\beta NdⅡ} [p \, (q \, r)] \, [q \, (p \cdot r)] = [(r \supset p) \cdot (q \supset r)]$ Ⅳ19(C)

我们同样可以直接从Ⅳ(a)类运算转换为Ⅲ—Ⅴ(a)类运算，只是这里没有进行强调的必要。

Ⅳ. 最后，Ⅳ(a)类运算也是可以接受其他系列的转换运算的，这里我们只介绍两种。首先是转换运算 NhⅠ或 NhⅡ，可将Ⅳ(a)类运算变为Ⅳ(e)类：

(185)

Ⅳ32 $[p \, (q | r)] \cdot [q \, (p \, r)] \xrightarrow{NhⅠ} [p \, (q \cdot r)] \cdot [q \, (p \, r)] = [q \cdot (r \subset p)]$ Ⅳ13

Ⅳ32 $[p \, (q \, r)] \cdot [q \, (p \, r)] \xrightarrow{NhⅡ} [p \, (q' r)] \cdot [q \, (p \cdot r)] = [p - (q \cdot r)]$ Ⅳ35

第二种，是用( )替换分量运算(a)中的(•)，以使从Ⅳ(a)类运算变为Ⅱ—Ⅵ(a)类运算：

(186) Ⅳ32 $[p \, (q | r)] \cdot [q \, (p \, r)] \xrightarrow{P_{\cdot = (\,)}} [p \, (q \, r)] \cdot [q \, (p \, r)] = [r \cdot (p - q)]$

我们看见，Ⅲ—Ⅴ(c)类和Ⅳ(a)类算式的复杂形式，并不能阻止它们进入运算族群之间相互转换的一般循环圈。

§ 31 Ⅲ—Ⅴ(b)类族群的转换

Ⅲ—Ⅴ(b)类族群的 48 个运算(唯一一个我们在Ⅲ—Ⅴ类中还没有检验的运算族类)，形式为 $(p \, q) \cdot (q \vee r)$ 或 $(p \, q) \cdot (q \supset r)$，一般在转换中产生三元—二元运算的形式。

1. 发生在分量运算(a)和第一个复合运算(a)，即( )或(∨)之间的置换运算，得到Ⅳ(f)类的 24 个运算：

(187)　(I) Ⅲ5 $[(p=q)\cdot(q\vee r)]\xrightarrow{P_{a\alpha}}[(p\cdot q)=(q\vee r)]$　Ⅳ9 (I)

(N) Ⅴ5 $[(p=q)|(q\vee r)]\xrightarrow{P_{a\alpha}}[(p|q)=(q\vee r)]$　Ⅳ62(N)

(R) Ⅲ36 $[(\bar{p}=\bar{q})\cdot(\bar{q}\vee\bar{r})]\xrightarrow{P_{a\alpha}}[(\bar{p}\cdot\bar{q})=(\bar{q}\vee\bar{r})]$　Ⅳ34(R)

(C) Ⅴ36 $[(\bar{p}=\bar{q})|(\bar{q}|\bar{r})]\xrightarrow{P_{a\alpha}}[(\bar{p}|\bar{q})=(\bar{q}|\bar{r})]$　Ⅳ37(C)

但是，Ⅲ—Ⅴ(b)类族群的48个运算，只对应上Ⅳ(f)类的24个运算，因为这前两个得到的结果都是Ⅳ(f)类的运算：

(188)　(I) Ⅴ24 $[(q\,\mathrm{W}\,r)|(p\vee q)]\xrightarrow{P_{a\alpha}}[(q|r)\,\mathrm{W}\,(p\vee q)]$　Ⅳ34(I)

(N) Ⅲ21 $[(q\,\mathrm{W}\,r)\cdot(p\vee q)]\xrightarrow{P_{a\alpha}}[(q\cdot r)\,\mathrm{W}\,(p\vee q)]$　Ⅳ37(N)

(R) Ⅴ44 $[(\bar{q}\,\mathrm{W}\,\bar{r})|(p|q)]\xrightarrow{P_{a\alpha}}[(\bar{q}|\bar{r})\,\mathrm{W}\,(p|q)]$　Ⅳ9 (R)

(C) Ⅲ14 $[(\bar{q}\,\mathrm{W}\,\bar{r})\cdot(p|q)]\xrightarrow{P_{a\alpha}}[(\bar{q}\cdot\bar{r})\,\mathrm{W}\,(p|q)]$　Ⅳ62(C)

所以，Ⅳ(f)类中的每个运算，都有两个等值形式，例如，运算Ⅳ34的$(p\cdot q)(q|r)$和$(q|r)\,\mathrm{W}\,(p\vee q)$，对应上Ⅲ—Ⅴ(b)类中的两个区别运算。

Ⅱ. 鉴于Ⅲ—Ⅴ(a)类运算和Ⅳ(f)类族群的亲密关系，Ⅲ—Ⅴ(b)类运算同样也能推演出Ⅲ—Ⅴ(a)类运算。这一部分，只需要置换Ⅲ—Ⅴ(b)类算式中复合运算(α)中的(=)和(⊃)或(W)和(⊂)即可。

(189)

(I) Ⅲ50 $[(p=q)\cdot(q\vee r)]\xrightarrow{P_{=\supset(\alpha)}}[(p\supset q)\cdot(q\vee r)]$　Ⅴ40(I)

(N) Ⅴ5 $[(p=q)|(q\vee r)]\xrightarrow{P_{=\supset(\alpha)}}[(p\supset q)|(q\vee r)]$　Ⅲ40(N)

(R) Ⅲ36 $[(\bar{p}=\bar{q})\cdot(\bar{q}\vee\bar{r})]\xrightarrow{P_{=\supset(\alpha)}}[(p\supset q)\cdot(q|r)]=[(q\supset p)\cdot(\bar{q}\vee\bar{r})]$　Ⅴ16(R)

(C) Ⅴ36 $[(\bar{p}=\bar{q})|(\bar{q}|\bar{r})]\xrightarrow{P_{=\supset(\alpha)}}[(q\supset p)|(\bar{q}|\bar{r})]$　Ⅲ16(C)

同样，我们还有：

(189乙)　Ⅲ24 $[(q\,\mathrm{W}\,r)\cdot(p\vee q)]\xrightarrow{P_{\mathrm{W}\subset(\alpha)}}[(r\supset q)\cdot(p\vee q)]$　Ⅴ46

因此Ⅲ—Ⅴ(b)类的48个顺运算形式，二值—单值地对应上Ⅲ—Ⅴ(a)类的48个顺运算形式。

Ⅲ. 我们很快就可以看到，怎样从Ⅱ—Ⅵ(c)类算式转换为Ⅳ(f)类。既然可以转换为Ⅳ(f)类的Ⅲ—Ⅴ(b)类运算，可以直接通过置换运算$P_{=\vee(p)}$转换为Ⅱ—Ⅵ(c)类运算：

(190)　(I) Ⅲ5 $[(p=q)\cdot(q\vee r)]\xrightarrow{P_{=\vee(p)}}[(p=q)\cdot(q=r)]$　Ⅱ7B(I)

(N) Ⅴ5 $[(p=q)|(q\vee r)]\xrightarrow{P_{=\vee(p)}}[(p=q)|(q=r)]$　Ⅵ7B(N)

(R) Ⅲ36 $[(\bar{p}=\bar{q})\cdot(\bar{q}\vee\bar{r})]\xrightarrow{P_{=\vee(p)}}[(p=q)\cdot(q=r)]$　Ⅱ7B(R)

(C) Ⅴ36 $[(\bar{p}=\bar{q})|(\bar{q}\vee\bar{r})]\xrightarrow{P_{=\vee(p)}}[(\bar{p}=\bar{q})|(q=r)]$　Ⅵ7B(C)

Ⅲ—Ⅴ(b)类中的运算(I)区别于互反运算(R)，所以这类互反运算对应的是Ⅱ—Ⅵ(c)类的非区分互反运算，这里仅限于置换运算 $P_{=\vee\beta}$，并不包括 $P_{\wedge}$。

Ⅳ. 最后，自然是否定运算 Ng 对族群进行自身转换，然而，这里的否定运算 Nd 或 Nh 会将族群转换为Ⅰ—Ⅶ类运算：

(191)

(I) Ⅲ5 $[(p=q)\cdot(q\vee r)]\xrightarrow{Nd}[(p=q)\cdot(q\cdot r)]\equiv[p\cdot(q\cdot r)]$ Ⅰ8(I)

(N) Ⅴ5 $[(p=q)\ (q\vee r)]\xrightarrow{Nd}[(p=q)\ (q\cdot r)]\equiv p|(q\cdot r)]$ Ⅶ8(N)

(R) Ⅲ36 $[(p=q)\cdot(q|r)]\xrightarrow{Nd}[(p=q)\cdot(q\cdot r)]\equiv[p\cdot(q\cdot r)]$ Ⅰ1(R)

(C) Ⅴ36 $[(p=q)\ (q|r)]\xrightarrow{Nd}[(p=q)\ (q\cdot r)]\equiv[p\ (q\cdot r)]$ Ⅶ1(C)

这里的3个转换运算 Pm 产生 $(8+8)\times 3=48$ 个Ⅲ—Ⅴ(b)类区别运算，对应的48个算式，其中有24个等值于Ⅰ—Ⅶ类的其他16个算式

§32 Ⅱ—Ⅵ类，Ⅰ—Ⅶ类和O—Ⅷ类族群的转换

我们已经将Ⅲ—Ⅴ类和Ⅳ类这3个族群的大部分的转换运算进行了验证。然而，在Ⅱ—Ⅵ(c)类的4×4个运算和Ⅳ(f)类以及Ⅱ—Ⅵ(a)类的24个运算之间，还有两个有意思的转换运算。

Ⅰ. 事实上，我们刚刚发现，Ⅲ—Ⅴ(b)类算式通过转换运算 Pα(命题187和188)转换为Ⅳ(f)类运算，该转换运算归根结底就是，对分量运算(α)上安置等价符号(=)的操作。我们也已经看到了，通过置换复合运算(β)中的(∨)和(·)，从Ⅲ—Ⅴ(b)类运算到Ⅱ—Ⅵ(c)类运算的可行性。于是，现在只需要将这两个置换运算合为一个，以便直接从Ⅱ—Ⅵ(c)类转换为Ⅳ(f)类：

(192) $$[P\alpha]+[P_{=\vee(\beta)}]\equiv P\alpha(\alpha\beta)$$

这里 Pa(αβ) 表示分量运算和两个复合运算之间的置换运算。其中，我们需要将反演 $x\ y$ 表达为 $x\vee y$ 的形式，并且我们要将(α)和(β)中的符号换位(详见193)。

(193)

(I) Ⅱ7A $[(p=q)\cdot(p=r)]\xrightarrow{Pa(\alpha\beta)}[(\bar{p}\cdot\bar{q})=(p\cdot r)]$ Ⅳ46(I)

(N) Ⅵ7A $[(p=q)\ (p=r)]\equiv[(p=q)\vee(p=r)]\xrightarrow{Pa(\alpha\beta)}[(p\vee q)=(p\vee r)]$ Ⅳ25(N)

(R) Ⅱ7A $[(p=q)\cdot(p=r)]\xrightarrow{Pa(\alpha\beta)}[(p\cdot q)=(p\cdot r)]$ Ⅳ57(R)

(C) Ⅵ7A $[(p=q)\ (p=r)]\equiv[(p=q)\vee(p=r)]\xrightarrow{Pa(\alpha\beta)}[(p\vee q)=(p\vee r)]$ Ⅳ14(C)

算式Ⅱ—Ⅵ7B和Ⅱ—Ⅵ7C，同样也会产生运算Ⅳ37，31，62和9以及运算Ⅳ38，

33、52 和 19 这两组四位运算，而算式Ⅱ—Ⅵ 16 A、Ⅱ—Ⅵ 19B 和Ⅱ—Ⅵ 19 C 推演出的四位运算分别是：运算Ⅳ 11、60、51 和 2；运算Ⅳ 4、67、5 和 16 以及运算Ⅳ 3、68、65 和 6。Ⅱ—Ⅵ(c)类算式的形式中，包括一个(W)和一个( )，和转换运算并不对立，所有的(p W q)的算式，都可以表示为(p q)或($p-q$)。即使如此，这里也有两种可能，(p q)或(p q)：其中一个，可以像(193)中那样得到Ⅳ(f)类运算结果，而另外一个(在 W 和 的情况下)，可以将Ⅱ—Ⅵ(c)类算式转换为Ⅱ—Ⅵ(a)类算式。例如，[(p W q)・(p r)]等值于[(p q)・(p r)]或[(p q)・(p r)]。然而，在转换运算 Pa(αβ)之后，算式[(p・q) (p・r)]等值于运算Ⅳ 51，而算式(p・q) (p・r)等值于运算Ⅳ 3[p (q r)]。这里要去了解Ⅱ—Ⅵ(c)类和Ⅵ(f)类族群之间的近亲关系，自然意义不大，特别是，如我们在表(193)中所见，逆运算(N 和 C)获得了运算Ⅳ 25 和Ⅳ 14 乙的形式(q p p)r 以及 p)q r)p)，然而顺运算(I)和(R)得到是Ⅳ(f)类非乙的形式。

Ⅱ. Ⅱ—Ⅵ(c)类算式同样也可以如我们之前所见，转换为Ⅱ—Ⅵ(a)类运算，这里感谢转换运算 Pa(αβ)，且这一转换过程中，没有可以产生Ⅳ(f)类运算结果的情况可能：

(194)　(I)$[(p=q)\cdot(p=r)]\xrightarrow{\mathrm{Pa}(\alpha\beta)}[(p\cdot q)=(p\cdot r)]$　Ⅵ8 (I)

(N)$[(p\,\mathrm{W}\,q)\cdot(p\,\mathrm{W}\,r)]\xrightarrow{\mathrm{Pa}(\alpha\beta)}[(p\cdot q)\,\mathrm{W}\,(p\cdot r)]$　Ⅱ8 (N)

(R)$[(p\quad q)\cdot(p\quad r)]\xrightarrow{\mathrm{Pa}(\alpha\beta)}[(p\cdot q)\quad(p\cdot r)]$　Ⅵ26(R)

(C)$[(p\,\mathrm{W}\,q)\cdot(p\,\mathrm{W}\,r)]\xrightarrow{\mathrm{Pa}(\alpha\beta)}[(p\cdot q)\,\mathrm{W}\,(p\cdot r)]$　Ⅱ26(C)

另一方面，我们看到(命题 152)Ⅱ—Ⅵ(c)类到Ⅳ(e)类运算的转换关系，并且我们记得(命题 149 和 151)，Ⅳ(e)类向Ⅱ—Ⅵ(a)类和Ⅳ(f)类，以及Ⅲ—Ⅴ(a)类(命题 153)的转换。所以，这整个运算族群的集合，建构了一个特别紧密的互反关系体系。最后，我们不要忘了还有Ⅱ—Ⅵ(c)类和Ⅳ(c)类(命题 164)族群之间的关系。

Ⅲ. 对于Ⅱ—Ⅵ(b)类族群内部的运算，我们已经看到，它们可以转换为Ⅳ(f)类运算(命题 139—142)，也可以转换为Ⅳ(c)类运算(命题 161)。所以，我们还需要展示，怎样置换它的分量运算(・)和复合运算( )，以使转换为Ⅳ(d)类运算，这里的条件是，反演需要以($\bar{x}\vee\bar{y}$)而非($x|y$)的形式呈现：

---

① 这里的原因，我们在§21 中已经看过，Ⅲ—Ⅴ(a)类族群中的 18 个运算，由转换运算 R_a 和Ⅳ(f)类族群联系起来，当我们将分量运算中的(・)和( )用( )和(∧)替换时，就转变为Ⅱ—Ⅵ(a)类族群的运算。同样可以参看命题(147)。然而[(p・q) (p・r)] (p q) (p r)]和(p・q) (p・r)]≡[($q\supset p$)=(p r)]之间是 R_a 的相互转换关系。

(195) (I) Ⅱ 1 $\{p\cdot q[r]\}\xrightarrow{P_{a\alpha}}\{p[q\cdot r]\}\equiv p\cdot(q*r)$ Ⅳ1 (I)

(N) Ⅵ 1 $\{p\vee q[r]\}\equiv p\vee q[r]\xrightarrow{P_{a\alpha}} p[q\vee r]\equiv p\cdot(q*r)$ Ⅳ70(N)

(R) Ⅱ 28 $\{p\cdot\bar{q}[r]\}\xrightarrow{P_{a\alpha}}\{p[q\cdot r]\}\equiv\bar{p}\cdot(q*r)$ Ⅳ70(R)

(C) Ⅵ 28 $\{p\vee\bar{q}[r]\}\equiv p\vee q[r]\xrightarrow{P_{a\alpha}} p[q\vee r]\equiv p\cdot(q*r)$ Ⅳ1 (C)

事实上 $p[q\cdot r]$，意指$\{[p\cdot(q\cdot r)]\vee[p\cdot(\bar{q}\cdot r)]\}\equiv$Ⅳ1；同样 $p[q\vee r]\equiv p\cdot(q\vee r)\vee p\cdot(q\cdot r)$ 等等。此外，在Ⅳ(d)类族群中，我们有 R=N，然而在Ⅱ—Ⅵ(b)类运算的I,N,R,C四个转换是各不相同的。

Ⅳ、对于Ⅱ—Ⅵ(a)类族群里的运算，它们可以转换为Ⅲ—Ⅴ(a)类(命题146—147)，可以转换为Ⅳ(e)类(命题149)，可以转换为Ⅳ(c)类(命题163)，可以转换为Ⅳ(b)类(命题172)，可以转换为Ⅳ(a)类(命题186)，还可以转换为Ⅱ(c)类(命题194)，当然它也可以转换为Ⅰ—Ⅶ类，方式是转换运算 P…：

(196) Ⅱ3 $[p\cdot(q=r)]\xrightarrow{P_{\cdot=(a)}}[p\cdot(q\cdot r)]$ Ⅰ1，等等

至于Ⅰ—Ⅶ类和0—Ⅷ类运算族群，它们本身就可相互转换，并且我们已经看过相当多的例子了(命题135—137，144，148，159，160，191以及196)。

我们刚刚展示了14个运算族群之间由一个转换至另一个的35种转换运算，然而，这张清单还没有细数清楚。所以，现在需要研究的是，是否这些特殊情况，也可以上升应用至囊括所有的一般常规性的转换的运算中。

第七章 转换的独特系统

在对 256 个三元运算从一部分到另一部分的转换的逐步研究中，我们发现每种情况中，延伸出来越来越多的运算集合，都遵从着运算组的法则。考虑到运算组群的结构以及格点框架的结构，我们想要探究是否可以将整个 256 个三元运算设置为一个独有的转换结构，并确定该结构的属性。

对该研究的实施，我们有两点可行之处。第一个可行之处在于，从一元—二元或二元—二元复合算式出发，将其简化为一个独有的(同质或异质)转换运算的集合结构，我们可以用这些转换运算，将一类运算转换为另一类。第二个可行之处在于，从同样的这些运算的选言范式(运算结果之和)出发，以合并或分解的名义，在构成这些三元表达式的元素或一位运算($p \cdot q \cdot r$)，($p \cdot q \cdot r$)之间，演绎这些转换。

§33 一元—二元和二元—二元算式内部的同质和异质转换的一般构成

现在，我们需要解决的问题是，鉴于我们所使用转换的构成并不是同质的，而是分为 3 种，并且就只有第二种看起来排除了任何一种一般的常规构成：

1. 两种同质转换可获得一个同质转换，归属于一个 4 位运算组：例如，RN = C，RC = N，等等。

2. 两种异质转换反过来可以得到一个同质换转：例如，Nh Rα = I(命题 36)，Rα Rβ = R(命题 31 乙和 48)，以及若运算式为缩涵的形式：Pm̄ = R(命题 85)。

3. 两个异质转换一般情况下结果是一个异质转换。这一构成本身可以是常规构成，亦或多或少的有些特殊构成。常规构成的例子：Pα Pαβ = Pαβ Pβ(命题 83)。特殊构成的例子：若 α = (∨) 且 β = (·)，我们有 Pαα = NR(命题 67)，以及 Nh D = CD Nh(命题 46)；若 α 和 β 分别是( )和(W)，我们有 Pαβ = Nh(命题 102)，等等。

所以，为组建一个任意转换的序列，有必要考虑，(当然)不光有其可行或禁止的结合性、交换性以及分配性，还有除了这里的一般法则之外，构成体系应该遵守的所有特殊法则。所以，注定这个构成一直是可行的，可是条件是需要考虑所有的转换，没有一个例外，其中包括那些只改变算式形式还保留相同符号的转换。只是这些逐步的构成复杂且艰涩；所以，为掌握其运用，需要得出其一般的框架结构。

然而，对我们的256个三元——二元或一元——二元算式组成的这些运算进行转换（即将这256个算式从一个转换为另一个，或只是一个形式到另一个形式的等值转变），最后，这都是对于这些复合运算的二元（或一元）范式的改变，有的是在本身的元素上的改变，有的是结合的形式上的改变。而分量运算的转换，甚至是用一种新的方式，连接复合运算的范式的元素。所以，是在被考虑的二元或一元运算的范式内部中，来进行替换的规则里面，我们来研究，运算组成的三元——二元或一元——二元算式的同质甚至是异质转换。

为研究这些替换，我们从对这些可行的运算分类和编号（用其编号来对其进行标记更加方便）开始，其中有可行的一元运算（我们用U1到U6进行标记）以及可行的不同的成对运算（我们用D1到D16进行标记），这些成对运算由二元复合运算的范式构成。因为，我们有6个一元可能以及12个二元可能：

(196)

一元元素：U1≡p； U2≡$\bar{p}$； U3≡q； U4≡$\bar{q}$； U5≡r； U6≡$\bar{r}$。

二元元素（成对运算或二重运算）：

元素±p,q……D1≡$p \cdot q$ D2≡$p \cdot \bar{q}$ D3≡$\bar{p} \cdot q$ D4≡$\bar{p} \cdot \bar{q}$

元素±p,q……D5≡$p \cdot r$ D6≡$p \cdot \bar{r}$ D7≡$p \cdot r$ D8≡$p \cdot r$

元素±q,r……D9≡$q \cdot r$ D10≡$q \cdot \bar{r}$ D11≡$\bar{q} \cdot r$ D12≡$\bar{q} \cdot r$

然而，我们知道，在考虑这些二元的3个命题集合中某一个的0、1、2、3或4个元素时，对于每一个（这16个二元运算），我们会得到16种可能的组合：例如，对于集合p,q D1∨D2∨D3≡($p \vee q$)；抑或对于集合q,r D10∨D11∨D12≡($\bar{q} \vee \bar{r}$)；等等。另一方面，通过连接集合p,q中和集合p,r中的某些元素，我们会得到一个A格（运算中项为p）的三元——二元算式；通过连接集合p,q中和集合q,r中的某些元素，我们会得到一个B格（运算中项为q）的三元——二元算式；通过连接集合p,r中和集合q,r中的某些元素，我们会得到一个C格（运算中项为r）的三元——二元算式。每个集合都有这16个元素组成的集合中共有的一部分，于是我们有：

(196乙) (±p,q)·(±p,r)＝16×16＝256个A格组合

(±p,q)·(±q,r)＝16×16＝256个B格组合

(±p,r)·(±p,r)＝16×16＝256个C格组合

但是在这768个不同的规范算式组合中，只有256个算式的三元运算的结果是不同的，鉴于此，对于可能的组合集合，有三分之二的算式，等值于另外的三分之一部分。因为，我们有以下等值情况：

(197) 成对运算（二重运算） 三位运算(Tr)

(D1×D5)≡(D1×D9)≡(D5×D9)≡($p \cdot q \cdot r$)≡Tr 1

(D1×D6)≡(D1×D10)≡(D6×D10)≡($p \cdot q \cdot r$)≡Tr 2

(D2×D5)≡(D2×D11)≡(D5×D11)≡($p \cdot q \cdot r$)≡Tr 3

$$(D2\times D6)\equiv(D2\times D12)\equiv(D6\times D12)\equiv(p\cdot q\cdot r)\equiv Tr\ 4$$
$$(D3\times D7)\equiv(D3\times D9)\equiv(D7\times D9)\equiv(p\cdot q\cdot r)\equiv Tr\ 5$$
$$(D3\times D8)\equiv(D3\times D10)\equiv(D8\times D10)\equiv(p\cdot q\cdot \bar{r})\equiv Tr\ 6$$
$$(D4\times D7)\equiv(D4\times D11)\equiv(D7\times D11)\equiv(p\cdot q\cdot r)\equiv Tr\ 7$$
$$(D4\times D8)\equiv(D4\times D12)\equiv(D8\times D12)\equiv(p\cdot q\cdot r)\equiv Tr\ 8$$
$$(D1\times D2)\equiv(D1\times D3)\equiv(D1\times D4)\equiv(D1\times D7)\equiv(D2\times D7)$$
$$\equiv(D2\times D8)\equiv(D3\times D12),\text{等等}\equiv O$$

所以这里有 24 个非零组合只得到 8 个不同的结果。于是，对于所有的由多个三位运算组成的三元算式也将同样如此。例如：

(198) $$(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\equiv[(D1\times D5)+(D1\times D6)]$$
$$\equiv[(D1\times D9)+(D1\times D16)]$$
$$\equiv[(D5\times D9)+(D6\times D10)]$$

若算式是二元—二元的形式，既不要弄混(D1×D5)也不要弄混(D1×D10)。

于是，在 768 个可实现的结合中，只有 276 个可以得到不同的结果。

至于一元—二元的算式，我们有：

(199) $$(U1\times D9)\equiv(U3\times D5)\equiv(U5\times D1)\equiv(p\cdot q\cdot r)\equiv Tr\ 1$$
$$(U1\times D10)\equiv(U3\times D6)\equiv(U6\times D1)\equiv(p\cdot q\cdot r)\equiv Tr\ 2$$
$$(U1\times D11)\equiv(U4\times D5)\equiv(U5\times D2)\equiv(p\cdot q\cdot r)\equiv Tr\ 3$$
$$(U1\times D12)\equiv(U4\times D6)\equiv(U6\times D2)\equiv(p\cdot q\cdot r)\equiv Tr\ 4$$
$$(U2\times D9)\equiv(U3\times D7)\equiv(U5\times D3)\equiv(p\cdot q\cdot r)\equiv Tr\ 5$$
$$(U2\times D10)\equiv(U3\times D8)\equiv(U6\times D3)\equiv(\bar{p}\cdot q\cdot \bar{r})\equiv Tr\ 6$$
$$(U2\times D11)\equiv(U4\times D7)\equiv(U5\times D4)\equiv(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot r)\equiv Tr\ 7$$
$$(U2\times D12)\equiv(U4\times D8)\equiv(U6\times D4)\equiv(\bar{p}\cdot \bar{q}\cdot \bar{r})\equiv Tr\ 8$$

所以，这些结果和表(197)中结果一致，这使得正向的顺运算组合数量没有变化。

于是，通过两张表，我们可以很容易对任何一个二元—二元或一元—二元的运算进行操作。我们可以有，例如：

(200) $$\bar{p}\cdot(q\supset r)\equiv p\cdot[(q\cdot r)\vee(q\cdot r)\vee(\bar{q}\cdot r)]$$
$$\equiv[U2\times(D9+D11+D12)]\equiv[Tr5+Tr7+Tr8]$$

抑或：

(201)
$$[(p\vee q)\ (r\supset p)]\equiv[\overline{(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)}]\cdot[\overline{(p\cdot r)\vee(p\cdot r)\vee(p\cdot r)}]$$
$$[(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)]$$
$$\equiv[\overline{(D1+D2+D3)\times(D5+D6+D8)}]$$
$$\equiv[\overline{Tr1+Tr2+Tr3+Tr4+Tr6}]\equiv[Tr5+Tr7+Tr8]$$

因为，三位运算 1 到 4 和 6 的否定，是三位运算 5，7 和 8 的集合。

因此，在三元—二元或二元—三元形式下的256个三元运算的集合，也是可以简化为表(197)和(199)中抽出的两个运算组合，每个同质或二元的转换，可以将一个运算转换为另一个，于是也可以被看作在一个假定的算式中U或D的内部组成的替换，(参照前面表中预设的情况)这样的替换可能产生，也可能不产生三位运算结果的替换，即在这样的构成组合中产生的三位运算。这就是我们即将简要展示的需要考虑到的转换：

N，R和C：

假设一个算式，比如$[p\cdot(q\cdot r)]$，来自(U1×D9)。其否定运算N则在于用这个集合以外的组合部分替换(U1×D9)，即(U1×D9)的非等值部分，也就是：

(202)

$$p\cdot(q\cdot r)=(U1\times D9)\xrightarrow{N}(U1\times D10)+(U1\times D11)+\cdots+(U2\times D12)\equiv[\overline{p\cdot(q\cdot r)}]$$

其互反运算R，则在于用由与初始组合符号相反的U和D构成的组合替换(U1×D9)：

(203) $$(U1\times D9)\xrightarrow{R}(U2+D12)\equiv\bar{p}\cdot(\bar{q}\cdot\bar{r})$$

对射运算C，则是由替换初始算式的互反R以外的部分的U和D构成。

Ng，Nd和Nh：

假设同样的算式$p\cdot(q\cdot r)$，只是，我们要将其视为$(p\cdot q)$和$(q\cdot r)$的组合的结果，即(U1×D9)的结果。转换运算Ng则是在于替换(D1)为其在$(p\cdot q)$形式下的补充部分，即在集合$(p\cdot q)$形式下(参见表196)。于是我们有：

(204) $$[(p\cdot q)\cdot(q\cdot r)]\equiv(D1\times D9)\xrightarrow{Ng}[(D2+D3+D4)\times D9]\equiv[(\overline{p\cdot q})\cdot(q\cdot r)]$$

因此，是用三位运算Tr1$(p\cdot q\cdot r)$替换三位运算Tr5$(p\cdot q\cdot r)$来获得运算的结果。

以此类推，转换Nd则是同样的替换用在D9上而不是D1上：

(205)

$$[(p\cdot q)\cdot(q\cdot r)]\equiv(D1\times D9)\xrightarrow{Nd}[(D1)\times(D10+D11+D12)]\equiv[(p\cdot q)\cdot(\overline{q\cdot r})]$$

转换Nh则是同样的替换同时发生在两个运算上：

(206) $$(D1\times D9)\xrightarrow{Nh}[(D2+D3+D4)\times(D10+D11+D12)]\equiv[(\overline{p\cdot q})\cdot(\overline{q\cdot r})]$$

这里进行的置换运算是三位运算Tr3、4、6、7和8对Tr1而得到的结果。

Rg，Rd，Cg，Cd以及Ch：

这五个转换，很简单，是将刚刚我们在R和C的用法讲解用到复合运算的一个或两个中(Ch的情况里)。

Ra和Ca：

这两个基于分量运算而非复合运算中进行的转换运算，在于转换U或D的组合的模式，准确说来这里没有替换，而是增添或删减：这里要么是用部分替代整体，要么是用整体替代部分。

例如：

(207) $[p\cdot(q\cdot r)]\equiv(U1\times D9)\xrightarrow{Ca}[p\vee(q\cdot r)]=[U1\times D9]+[U1\times(D10+D11+D12)]+[U2\times D9]$

这里在初始的三位运算 Tr1 中添加了三位运算 Tr2,3,4 和 5。

置换运算 Paβ：

假设算式$[(p=q)\cdot(p\vee r)]\equiv[(D1+D4)\times(D5+D6+D7)]$。置换运算 Paβ 则在于替换 D 对应为$(p,r)$集合的(D1+D4)(表 196)，以及替换 D 对应为集合(p,q)的(D5+D6+D7)。(D1+D4)的对应运算(指的是同样符号的 D)是 D5 和 D8，(D5+D6+D7)的对应运算是(D1+D2+D3)。于是我们有了：

(208) $[(p=q)\cdot(p\vee r)]\equiv[(D1+D4)\times(D5+D6+D7)]$

$\xrightarrow{Pa\beta}[(D1+D2+D3)\times(D5+D8)]\equiv[(p\vee q)\cdot(p=r)]$

从结果来看，该转换是用三位运算 Tr1,3 和 7 替换三位运算 Tr1,2 和 7

置换运算 Paα 和 Paβ：

同样的算式$[(p=q)\cdot(p\vee r)]\equiv[(D1+D4)\times(D5+D6+D7)]$，根据 Paα 进行转换，得到$[(p\cdot q)\vee(p\vee r)]$；根据 Paβ 进行转换，得到$[(p=q)\vee(p\cdot r)]$。于是替换运算也在于运算元素的增加或删减，即整体(=或∨)与部分(·)之间的置换关系：

(209) $[(D1+D4)\times(D5+D6+D7)]\xrightarrow{Pa\alpha}[(D1)\times(D5+D6+D7)+(D4\times D8)]$

(210) $[(D1+D4)\times(D5+D6+D7)]\xrightarrow{Pa\beta}[(D1+D4)\times D5+(D1+D4)\times(D6+D7+D8)]+[(D2+D3)\times D5]$

置换运算 Pa(αβ)：

同样的办法。

置换运算 Pn：

置换运算 Pn 进行的是，一个一元或二元算式向一个二元或一元等值算式的转换，或反之亦然。该置换运算可以有两种类型：第一种类型包括一个一元或二元运算的一对 D。例如：

(211) $[p\cdot(q\cdot r)]\equiv[U1\times D9]\xrightarrow{Pn}[D1\times D9]\equiv[(p\cdot q)\cdot(q\cdot r)]$

$[p\cdot(q=r)]\equiv[U1\times(D9+D12)]\xrightarrow{Pn}[(D1+D2)\times(D9+D12)]\equiv[p[q]\cdot(q=r)]$

在这种情况中，转换 Pn 和 Nh 等是可以交换的。

第二种类型，相反，包括一个对初始算式的对运算，变为新的对运算 D 的替换：

(212)

$[p\cdot(q\vee r)]\equiv[U1\times(D9+D10+D11)]\xrightarrow{Pn}[(D2+D3+D4)\times(D6+D7+D8)]\equiv[(p=q)\vee(p\cdot r)]$

第二种类型的转换运算 Pn 和 Nh 等不能交换。例如，我们有 Nh Pn ≠ C Pn Nh(参看命题 46)。(206)和(212)类的置换法则可以在这些情况中，用来确定 Pn Nh 和 Nh Pn 的

结果。

置换运算 Pm：

运算中项 m 的置换，在于置换集合(p,q)、(p,r)或(q,r)中的一个或多个成对运算 D（参看表 196，196 乙和 197），成对运算对应（即有相同的符号）同样这三个命题集合中的另外一个集合。在某些情况中，置换运算 Pm 产生的结果等值于它的初始的运算。

(213) $$[(p=q)\cdot(p\vee r)]\equiv[(D1+D4)\times(D5+D6+D7)]$$

$$\xrightarrow{P_{Ab}}[(D1+D4)\times(D9+D10+D11)]$$

因为，我们有$(D1\times D5)=(D1\times D9)$；$(D1\times D6)=(D1\times D10)$等（参看表 197）。

一般情况下，与之相反，置换运算 Pm 会改变结果。

置换运算 Pu：

成对的 U 之间的替换，或不成对的 U 之间的替换。

转换运算 Ru、Ru′、Rm 等（参看命题 112 到 120 以及 126，127）：

Ru 是用一个成对的 U 替换对应的（同一个命题）不成对的 U；Rm 是在运算中项上的置换；Ru′在于，根据和 U 的组合，替换初始运算的一对运算 D，代之为新的一对运算；等等。转换Rn是转换 Rm 的补充。因此，这些就是置换运算的一些个别简单情况，具体选择哪一个，则由 D 和 U 或 D 和作为运算中项的命题来决定。

置换运算$P_{\supset\vee}$，$P_{\cdot=}$，$P_{\cdot\cdot}$等：

这里涉及的是 D 和同样的命题集合(p,q)、(p,r)或(q,r)中的另外一个的组合的置换。例如：

(214) $$P_{\supset\vee}\equiv[(D1+D3+D4)\rightarrow(D1+D2+D3)]$$

$$\text{或 }[(D5+D7+D8)\rightarrow(D5+D6+D7)]\text{ 等}$$

总之，很明显，我们使用的所有转换，有的构成了我们的族群内的运算族，有的则构成了跨族群运算组，这些运算族可以简化为，构成 256 个被研究的三元——二元或一元——二元算式的、一元运算或二元范式的内部简单替换。因此，我们可以——这是第一种解决方案——设计出一个像替换结构的二元运算的独有结构，一个运算向另一个运算的转换，就是由被研究的运算的一元或二元组成部分的内部之间的替换来构成。

但是，若这样的一个替换系统非常的严密，并且若它可以将之前的转换集合囊入一个单独的网状结构中，在阐明其特别之处的同时，我们还要做到两点，以获得 256 个三元运算的完整结构。第一点，这里所涉及的替换，准确说来并不是全部的替换，只是元素对元素的替换，因为有时它只是部分对整体的替换（命题 207，209，210，211），这些，事实上，是增加或删减的演算操作，而不是替换。第二点，这个替换系统是建立在分量元素之间的组合之上的，而并不是直接建立在构成产生的结果（三位运算 Tr 1 到 8）上的。相反，这里是很容易绘制出一个三位运算之间可行的替换常数表：例如常数表 233 和 239 就是，其中通过一个或多个组成部分（表 239 中，最高一栏是 0 到 1234，抑或左边一列是 0 到 5678）的三位运算替换，每个基础算式，都可以从一个转换到另一个；于是，

我们发现了这些替换集合演绎的，不再是构成格点框架结构的组合。然而，我们很容易对这个网状结构和 INRC 转换群进行协调，只需要将所有的转换都简化为合并(∨)或分解(·)即可，具体详情，下节分解。

§ 34 运算(∨)，(·)，(∨)以及(·)下，任意一个三元算式向另一个三元算式的转换

将一对运算 D 或一元运算 U 进行一个到另一个的转换，归根结底是其运算结果 Tr 的替换。现在，我们在(选言的)三元范式内部，二位运算 Tr 本身之间，验证一下这个替换系统。该系统中，最普遍的转换应该是从一个三元算式(范式)转换为另一个，方法是通过合并或删除(二位运算 Tr 的)分量运算的元素。

事实上，我们已经多次注意到(参看命题 138 和 138 乙，以及 111)，从第三章到第六章所使用的转换，可简化为，所涉范式内部的二位运算 Tr 或多或少的是简单地增加(或删除)演算，甚至是转换运算，尽管Ⅲ—Ⅴ(c)类族群的成对一元—二元运算，其表面看起来复杂，在转换为类似的Ⅱ(a)类族群类的运算时，如我们所见(命题 180)，简化为在一个单独的二位运算中的简单地增加或删减演算。

然而，我们饶有兴趣地发现这些转换运算，一旦变现为遵守运算群(I、N、R、C)法则的复合运算①的形式时，其直观的证据就消失了。我们可以从一个最基本例子来看(215)。

(215)

(I) Ⅰ1 $[p\cdot(q\cdot r)]\vee$ Ⅰ2 $[p\cdot(q\cdot\bar{r})]\equiv$ Ⅱ1 $(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot\bar{r})\equiv p\cdot q[r]$ (I)

(N) Ⅶ1 $[p|(q\cdot r)]\cdot$ Ⅶ2 $[p|(q\cdot r)]\equiv$ Ⅵ 1 $\{p|q[r]\}$ (N)

(R) Ⅰ8 $[\bar{p}\cdot(\bar{q}\cdot\bar{r})]\vee$ Ⅰ7 $[\bar{p}\cdot(\bar{q}\cdot r)]\equiv$ Ⅱ 28 $\{\bar{p}\cdot\bar{q}[r]\}$ (R)

(C) Ⅶ8 $[p|(q\cdot r)]\cdot$ Ⅶ7 $[p|(q\cdot r)]\equiv$ Ⅵ 28 $\{p|q[r]\}$ (C)

事实上，我们发现，若两个运算的合并 $x\vee y$，得到第三个运算，逆运算，也就是其否定的连比($\bar{x}\cdot\bar{y}$)，或者说其逆运算的合取，得出逆运算 N(运算Ⅵ 1 与Ⅶ1 和Ⅶ2 有部分相同的构成，它是运算Ⅱ1 的逆运算，而Ⅱ1 又是运算Ⅰ1 和Ⅰ2 的合并)。另一方面，互反的合并($Rx\vee Ry$)得到互反运算 R(运算Ⅱ28，Ⅱ1 的 R)。最后，互反运算否定的连比或逆运算的合取($R\bar{x}\cdot\bar{R}y$)得到对射运算 C(运算Ⅵ 28 是Ⅱ1 的 C)。

然而，我们必须注意到，当两个拥有共同的元素(三位运算)的运算，合并上第一个

① 例如$[p\cdot(q\vee r)]\vee[p\cdot(q\cdot\bar{r})]=p\cdot(q\ast r)$，抑或还有$(r\supset p)\cdot(r\vee q)\cdot\{p\cdot q[\bar{r}]\}=p\cdot(q\vee r)$，等。

时，情况完全一致，而不是像运算Ⅰ1和Ⅰ2这般分离开来。例如，我们可以合并Ⅱ1［$(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$］和Ⅱ2［$(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$］为一个，结果是Ⅲ1［$(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)\vee(p\cdot q\cdot r)$］，这里完全遵守转换组I、N、R、C的法则：

(216)　(I) Ⅱ1 $\{p\cdot q[r]\}\vee$ Ⅱ2 $\{p\cdot r[q]\}\equiv$ Ⅲ1 $[p\cdot(q\vee r)]$　(I)

(N) Ⅵ1 $\{p|q[r]\}\cdot$ Ⅵ2 $\{p|r[q]\}\equiv$ Ⅴ1 $[p|(q\vee r)]$　(N)

(R) Ⅱ28 $\{\bar{p}\cdot\bar{q}[r]\}\vee$ Ⅱ27 $\{\bar{p}\cdot\bar{r}[q]\}\equiv$ Ⅲ56 $[\bar{p}\cdot(q|r)]$　(R)

(C) Ⅵ28 $\{p|\bar{q}[r]\}\cdot$ Ⅵ27 $\{p|r[q]\}\equiv$ Ⅴ56 $[p|(q|r)]$　(C)

此外，当然，若这些构成在两个运算中可行，这两个运算还是作为某个集合一般方式中，我们对于两个运算 x 和 y，或三个运算 x、y_1 和 y_2，且 z 为这些构成的结果，几个运算之间有以下关系：

(217)　$(x)\vee(y)\equiv z$　(I)　和　$[(x)\vee(y_1)]\cdot(\bar{y_2})\equiv(z)$　(I)

$(Nx)\cdot(Ny)\equiv(Nz)$　(N)　　$[(Nx)\cdot(Ny_1)]\vee(y_2)\equiv(Nz)$　(N)

$(Rx)\vee(Ry)\equiv(Rz)$　(R)　　$[(Rx)\vee(Ry_1)]\cdot(\overline{Ry_2})\equiv(Rz)$　(R)

$(Cx)\cdot(Cy)\equiv(Cz)$　(C)　　$[(Cx)\cdot(Cy_1)]\vee(Ry_2)\equiv(Cz)$　(C)

或　$(NRx)\cdot(NRy)\equiv(Cz)$

若如同例子中一样，一个算式构成中，有3个运算，只需要结合表(215)和(216)，将运算Ⅱ1看作 x，Ⅱ2看作 y_1，以及Ⅰ2看作 y_2，于是：

(217乙)　(I)(Ⅱ1 ∨ Ⅱ2 = Ⅲ1) · ($\overline{\text{Ⅰ}2}$) ≡ Ⅱ2　(I)

(N)(Ⅵ1 · Ⅵ2 = Ⅴ1) ∨ (Ⅰ2) ≡ Ⅵ2　(N)

(R)(Ⅱ28 ∨ Ⅱ27 = Ⅲ56) · ($\overline{\text{Ⅰ}7}$) ≡ Ⅱ27　(R)

(C)(Ⅵ28 · Ⅵ27 = Ⅴ56) ∨ (Ⅰ7) ≡ Ⅵ27　(C)

运算(Ⅲ1)·(Ⅰ2)可以延展为两种等值方式：删除Ⅲ1(它是Ⅱ1和Ⅱ2的合并)中间的Ⅰ2，抑或删除Ⅲ1和Ⅵ2(逆运算即Ⅰ2的否定)之间相同的部分

这样，我们就拥有了一般类的转换运算，这些转换可以让我们建构256个三元运算集合的系统，接着衍生出结构，以及整体的运行法则。在这3个运算中为真的情况，在256个三元运算中依旧如此，这些都统一在一张四重行列对查常数表中，其中包括了我们即将要解释的(217)中的所有三元运算的特性。

§35　4个一元运算，16个二元运算和256个三元运算的逻辑加法和逻辑乘法的四重行列对查常数表

为更好地理解256个三元运算集合的系统结构，需要定位至其运算过程，甚至是其

产生缘由中，即导出这条构成法则，使得(217)的特性同时应用到所有的运算中，不管这些运算为何种类型(一元的、二元的等等)，以及让一元运算常数表转换为二元运算常数表，并以此类推。因为(217)的特性完全通用，也可以记入在常数表的形式下，对于 4 个，16 个，256 个，65 536 个，……等运算，该常数表都是一样的。

Ⅰ. 一元运算：

(218)

O	p
p	$(p\vee\bar{p})$

四个一元运算分别是 p、p、$(p\vee p)$以及 O(=$p\cdot p$)。为应用(217)的特性，我们可以构建一个四重行列对称常数表，比如，其中分置在上面和左边的各个元素相加(∨)，到干涉点 ↘∨，再比如，分置在右边和下面的各个元素相乘，到干涉点 ↖·。因为，我们有：

(219)　　$p\vee\bar{p}\equiv(p\vee\bar{p})$ 并且 $p\cdot\bar{p}\equiv O$

其中这个方格的对角线，展现了以下特性：

① 对角线↘上的各个元素有 R=I 以及 C=N。因为，$(p\vee p)$的互反 R 是$(p\vee p)$，同时 O 的互反还是 O；

② 对角线↗上的各个元素有 R=N 以及 C=I。因为，p既是 p 的逆运算 N，也是它的互反 R。

Ⅱ. 二元运算：

我们从命题 q 出发，把它安置在之前的 4 个一元运算中。于是，我们有了：q、q、$(q\vee q)$以及 O。然后，用 p 与这 4 个可能相乘。我们有：

(220)　　$p\cdot[(o)\vee(q)\vee(q)\vee(q\vee q)]=[(o)]\vee[(p\cdot q)]\vee[(p\cdot q)]$
$\vee[(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})]$

于是，这里有以下 4 个二元运算：O，$(p\cdot q)$、$(p\cdot q)$以及 $p[q]$；也就是说，除了 O 以外，所有的二元运算都特地借助了 p(与p相反)的参与。

现在，让我们用p同样与这 4 个运算相乘：

(221)　　$p\cdot[(o)\vee(q)\vee(q)\vee(q\vee q)]=[(o)]\vee[(p\cdot q)]\vee[(p\cdot q)]$
$\vee[(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})]$

于是，这里有以下 4 个二元运算：O，$(p\cdot q)$、$(p\cdot q)$以及$p[q]$；也就是说，除了 O 以外，所有的二元运算都特地借助了p(与 p 相反)的参与。

现在我们可以在(218)的模型基础上，绘制出一张四重行列对查常数表[1]。该行列对查表的前两组运算是(220)和(221)：我们将(220)放置在方格的上边线，(221)放置在方格的左边线，但是在安置(221)的每个元素时，要和(220)中的元素次序排列一致，后安置的这一列是前安置一列的互反。这两个行列就这样确定了，我们将(220)和(221)中的元素一个对一个加起来(∨)。于是我们得到了这样一个完整的方格(222)，同时，我们发现常数表中安置在右边和下面的两队新的对查行列，之间存在的是乘法关系：从下面一栏对应的地方来看，因为，从右边一列和下面一行的这些元素中任意选择两个，其中相同的部分构成了方格中的这个点( )。

(222)

O	$p \cdot \bar{q}$	$p \cdot q$	$p[q]$
$\bar{p} \cdot q$	$p \cdot \cdot q$	$q[p]$	$p \cdot q$
$p \cdot q$	$\bar{q}[p]$	$p \cdot q$	$q \supset p$
$\bar{p}[q]$	$p \quad q$	$p \quad q$	$p \cdot q$

所以，常数表(222)展示了以下这些主要特性：

(1) 在所有属于一个方格的元素中，其中这 4 个角：$(p \,\mathrm{W}\, q)$、$(p \vee q)$、$(p \quad q)$以及$(p * q)$是最上面一行和最左边一列中所涉及的元素的加法运算的结果。例如：

(223)
$$(p \,\mathrm{W}\, q) \equiv (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$$
$$(p | q) \equiv (p \cdot q) \vee \{p[q]\}$$
$$(p \vee q) \equiv (p \cdot q) \vee p[q]\text{，等等}$$

(2) 在所有属于一个方格的元素中，其中这 4 个角：(o)、$(p \cdot q)$、$(p \cdot q)$以及$(p \cdot q)$是最下面一行和最右边一列中所涉及的元素的乘法运算的结果。例如：

(224)
$$(p \,\mathrm{W}\, q) \equiv (p \vee q) \cdot (p | q)$$
$$\mathrm{O} \equiv p[q] \cdot p[q]$$
$$(p \cdot q) = (q \supset p) \cdot \bar{p}[q]\text{，等等}$$

(3) 一个元素的逆运算 N 是它和中心( )相对的方格的对称处：$(p * q)$和(o)，$(p \cdot q)$和$(p \quad q)$、$(p \quad q)$和$(p \,\mathrm{W}\, q)$，等等。于是，我们证实了(217)中的特性：$(\mathrm{N}x) \cdot (\mathrm{N}y) = (\mathrm{N}z)$。例如：

---

[1] 这些常数表和维特根斯坦(Wittgenstein)的真值表(table de valeur de verite)构成差不多。

(225)　　若$(p \text{ W } q)=(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)$，则$(p=q)=(p\supset q)\cdot(q\supset p)$

　　若$(p * q)=p[q]\vee \bar{p}[\bar{q}]$，则 $O=p[q]\cdot \bar{p}[\bar{q}]$

等等。

④ 一个元素的互反运算 R 是其与对角线↘相对称的位置；例如，$(p\cdot \bar{q})$对$(\bar{p}\cdot q)$，$(p\vee \bar{q})$对$(\bar{p}\vee q)$，等等。于是，我们证实了(217)中的特性：$(Rx)\vee(Ry)=(Rz)$。例如，

(226)　　若$(q\supset p)=p[q]\vee(\bar{p}\cdot \bar{q})$，则$(p\supset q)=q[p]\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$，等等。

⑤ 一个元素的对射运算 C 是其与对角线↗相对称的位置；例如，$(p\cdot q)$和$(q\supset p)$，o和$(p*q)$，$(p\cdot q)$和$(p\mid q)$，等等。于是，我们又证实了(217)中的特性：$(Cx)\cdot(Cy)=(Cz)$。例如：

(227)　　若$(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)=(p \text{ W } q)$，则$(q\supset p)\cdot(p\supset q)=(p=q)$

⑥ 4 个构成对角线↗上的元素，组建了成对的运算，比如 N=R 和 C=I。例如$\bar{q}[p]$既是$\bar{q}[p]$的逆运算 N，也是它的互反 R。

⑦ 4 个构成对角线↘上的元素，组建了成对的运算，比如 R=I 和 C=N。例如，$(p \text{ W } q)$的 R 就是$(p \text{ W } q)$，并且其 C 就是逆运算$(p=q)$。

⑧ 作为之前的某一个等值算式，考虑到代数的等式关系，我们可以改变这里的一个$(\vee x)$的元素，将其倒置变为$(\cdot\,\bar{x})$的形式。例如：

(228)　　$\{(q\supset p)=p[q]\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})\}\equiv\{(q\supset p)\cdot(\overline{\bar{p}\cdot q})=p[q]\}$

因为，$(q\supset p)$和$(p\vee q)$之间相同的部分是$p[q]$。

⑨ 同样，我们可以在之前的一个等值算式中，改变一个$(\cdot\, x)$的元素，将其倒置变为$(\vee\,\bar{x})$的形式。例如：

(229)　　$(p=q)=[(q\supset p)\cdot(p\supset q)]\equiv[(p=q)\vee(q\mid p)]=(p\supset q)$

因为，$(p=q)\vee(\bar{p}\cdot q)$得到结果$(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot \bar{q})$，即$(p\supset q)$

⑩ 若我们有，例如$(p \text{ W } q)=(p\vee q)\cdot(p\mid q)$以及$(p \text{ W } q)=(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)$，于是，我们可推演出$(p\vee q)\cdot(p\mid q)=(p\cdot \bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)$。运算(8)和(9)也可以应用到这样的等值关系：

(230)　　$(p\vee q)\cdot(p\mid q)=(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)\equiv(p\vee q)\cdot(p\cdot q)=(p\cdot \bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)$

$\equiv(p\cdot q)=(p\cdot q)\vee(p\cdot \bar{q})\vee(\bar{p}\cdot q)$

$=\{(q\supset p)=[(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})]\}=$等等

所以从(8)到(10)的运算，概括总结了常数表自身的边界上的元素的加法与乘积运算。但是在(228)到(230)中，只涉及完全分离或对应删除的元素间的加法运算。当其中的元素只有部分分离时，演算会更加复杂，我们将在(§38)的二元运算中再回过头来分析。

Ⅲ. 三元运算：

现在，我们先从 q 和 r 两个运算出发，根据衍生出常数表(222)的构成法则，安置这两个运算。于是我们得到了 16 个二元运算：o；$(q \cdot r)$；$(q \cdot r)$；等等。这群二元运算中 r 扮演的是 q 在常数表(222)中的角色，而 q 在这里则是占据着前面 p 的位置。将这里展示的 16 个(q,r)的运算和 p 相乘：于是除了 o，我们得到了 15 个三元运算，所有的三位运算都是其范式构成，这些范式都包括了和p相反的 $\bar{p}$。即：

(231)

$[p \cdot (o) =]\, o$； Ⅰ1 $[p \cdot (q \cdot r)]$； Ⅰ2 $[p \cdot (q \cdot \bar{r})]$； Ⅰ3 $[p \cdot (\bar{q} \cdot r)]$；

Ⅰ4 $[p \cdot (\bar{q} \cdot \bar{r})]$； Ⅱ1 $\{p \cdot q[r]\}$； Ⅱ2 $\{p \cdot r[q]\}$； Ⅱ3 $[p \cdot (q = r)]$；

Ⅱ8 $[p \cdot (q \mathbin{W} r)]$； Ⅱ9 $\{p \cdot r[q]\}$； Ⅱ11 $[p \cdot q/r]$； Ⅲ1 $[p \cdot (q \vee r)]$；

Ⅲ2 $[p \cdot (r \supset q)]$； Ⅲ7 $[p \cdot (q \supset r)]$； Ⅲ22 $[p \cdot (q | r)]$；

以及Ⅳ1 $[p \cdot (q * r)]$

现在，再将这同样的 16 个(q,r)的运算和$\bar{p}$相乘。除了 O 以外，我们得到 15 个三元运算，这些三位运算的范式构成，都特地借助了$\bar{p}$(与 p 相反)的参与：

(232) $[\bar{p} \cdot (o) =]\, o$；Ⅰ5、6、7 和 8；Ⅱ23、24、25、26、27、28；Ⅲ53、54、55 和 56；Ⅳ70。

这里的 16 个运算和(231)中形式一致，唯一不同的是用$\bar{p}$替代了 p，自然构成了(231)的这些运算的互反，因为每个三元运算都有一个(且唯一的一个)互反运算，而$\bar{p}$是 p 的 R。

于是我们可以建构出一张方格的常数表，其中最上面的由(231)中的元素按设定的顺序占据。再在常数表纵向方向的左边安置(232)中的元素，顺序是一一对应到(231)的互反 R。然后，将(231)和(232)中的元素两两相加(∨)。这样我们就得到了一个有 256 个三元运算的常数表(参看表 233)。

该常数表的特性和表(222)是一致的。为更便捷地描述这里的情况，我们用 G1 表示位于方格最上面的这些元素(运算)的集合［即命题(231)中的这些元素］；用 G2 表示位于左边的这些元素的集合［即命题(232)中的这些元素，包括 O，它同时出现在了 G1 和 G2 中］；同样我们用 G3 表示方格最下面的这些元素(这些是 G1 的逆运算 N)以及 G4 表示位于右边的这些元素(这些是 G2 的逆运算 N)。于是，我们有了：

256个三元运算的四重行列对查常数表

① 在这张常数表中的所有元素，除了G1和G2，都是位于最上面一栏的元素G1与最右边一列的运算G2逻辑加法结合(∨)的结果。例如：

(234) $$Ⅴ28\,[\bar{r}|(p\vee q)]\equiv Ⅱ2\,\{p\cdot r[q]\}\vee Ⅲ55\,[\bar{p}\cdot(q\supset r)]$$

$$Ⅳ51\,[(q\supset p)\cdot(p|r)]\equiv Ⅱ9\,\{p\cdot\bar{r}[q]\}\vee\{Ⅱ28\,\bar{p}\cdot\bar{q}[r]\}$$

等等。

② 该常数表上的所有元素，除了G3和G4，都是位于最下边一栏的元素G3和位于最右边一列的元素G4进行合取(共同部分)运算所得结果。例如：

(235) $$Ⅴ28\,[\bar{r}|(p\vee q)]\equiv Ⅵ9\,\{p|\bar{r}[q]\}\cdot Ⅶ6\,\{\bar{p}|(q\cdot\bar{r})\}$$

$$Ⅳ51\,[(q\supset p)\cdot(p|r)]\equiv Ⅵ2\,\{p|r[q]\}\cdot Ⅵ23\,\{p|q[r]\}$$

③ 一个元素的逆运算N是其与方格中间的点对称的元素：例如，Ⅳ27和Ⅳ14；Ⅲ48和Ⅴ48；Ⅰ1和Ⅷ1；等等。

④ 一个元素的互反R是其与方格对角线↘对称的元素：例如，Ⅰ1和Ⅰ8；Ⅱ13和Ⅱ6；Ⅲ17和Ⅲ30；等等。

⑤ 一个元素的对射C是其与对角线↗对称的元素：例如，Ⅲ56和Ⅴ1；Ⅰ1和Ⅷ8；等等。

⑥ 位于对角线↗上的16个元素构成了比如R＝N以及C＝I的成对运算。例如，Ⅳ1[p·(q∗r)]的互反是Ⅳ7[p·(q∗r)]，同等于其逆运算[p·(q∗r)]；同样的情况出现在Ⅳ32和Ⅳ33之间；等等。这16个元素构成了Ⅳ(a)类、Ⅳ(b)类和Ⅳ(c)类族群，即8+2+6＝16个元素。

⑦ 对角线↘上的16个元素构成了比如R＝I以及C＝N的成对运算。这些运算构成了运算族群0—Ⅷ类、Ⅱ—Ⅵ(c)类以及Ⅳ(c)类，即2+8+6＝16个运算。

⑧ G1的元素是G3中元素的逆运算N，但是，按照(3')的推演，每个G1的元素和其逆运算G3的元素都是以常数表的中间为点对称分布的。于是我们有这样的一个结论，对于给定的一行，比如以Ⅰ1为上端Ⅴ22为下端的这一行，上端的元素($G1_n$)和下端的元素($G3_n$)之间支持这样的关系：

(236) $$G1_n = N\alpha\ N\beta\ G3_n$$

这里Nα是分量运算(·)或(∨)的否定，Nβ是二元复合运算的否定(比如Ⅰ1和Ⅴ22对应的$q\cdot r$和$q\vee r$)。因为β运算本身就是在G1和G3行中间对称分布的，鉴于二元运算G1和G3与常数表中间对称的关系(参看③)，我们于是得到了(236)中的结论。

⑨ 以此类推，我们同样有：

(237) $$G2_n = N\alpha\ N\beta\ G4_n$$

这就是为什么在命题(234)和(235)中，运算Ⅱ2和Ⅲ55的组合得到结果Ⅴ28，这两个运算和Ⅵ9与Ⅶ6之间就是NαNβ的关系，而Ⅵ9与Ⅶ6的合取，同样也得到了结果Ⅴ28(同样的关系也出现在Ⅱ9和Ⅱ28与Ⅵ2和Ⅵ23之间)。

于是，在二元运算$(x\vee y)$中，得到结果运算z，同样$(x\cdot y)$也得到结果运算z；

为了解这个关系，在 r、x、y 以及 y 不是出于 G1 到 G4 的 4 边时，是否依旧为真。于是，我们需要预先研究一下，在这个常数表中的任意两个元素，而不只是 G1 到 G4 这些边界上的元素，在组合(∨)或乘积(·)的运算中会得出怎样的结果。换言之，现在我们需要进行运算生成的研究，让我们在常数表(233)中，所有的元素之间，构建普遍的组合或反演合取的运算。然而，对于二元运算常数表(222)，只有在个别情况中，我们可以概括这些在小点Ⅱ中的 8°到 10°中可以模糊看见的演算过程。

Ⅳ. 为更便捷地得到这些一般的常规运算，我们可以像之前做的那样[表(196)到(199)]，替换一元运算或成对的二元运算，再标上序号，而不再是这些命题或是这些成对的运算，而是三位运算($p \cdot q \cdot r$)等，且这些三位运算是我们所要建构的那些组合的运算结果。这样我们就把常数表(233)转化为一个由三元选言范式的编号组成的常数表，其中的关键是：

(238)	0≡(无三位运算)	$5 \equiv (\bar{p} \cdot q \cdot r)$
	$1 \equiv (p \cdot q \cdot r)$	$6 \equiv (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r})$
	$2 \equiv (p \cdot q \cdot \bar{r})$	$7 \equiv (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r)$
	$3 \equiv (p \cdot \bar{q} \cdot r)$	$8 \equiv (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r})$
	$4 \equiv (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r})$	$12 \equiv (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r})$ 等

这里的符号(12)代表的是多位 n°1 和 2(而不是序号 12)。

于是，我们有了完全等同于(233)的常数表(239)，只是，这里是用范式和数字符号表示出来的。

我们先从例子出发，比如运算编号 17，表示 1+7[$=(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)$]=Ⅱ16，再比如，我们运算 28 的组合(∨)，即 2+8[$=(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)$]=Ⅱ13。于是，我们有 1+2+7+8(按照整体的编号顺序)，即标识为 1278[$=(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)$]，交叉点为第 12 行第 78 列(Ⅱ1 和Ⅱ28)。于是我们发现 1278≡Ⅳ15。

然而，我们也可以研究，在哪些运算中，运算Ⅳ15 是共有的部分。根据命题 23.5(即常数表的一般特性，小点 2°下面作了具体解释)，自然是运算Ⅵ23 和Ⅵ14。因为Ⅵ23=123478 且Ⅵ14 -- 125678，也就是说，这两个运算彼此都有 1278，但是运算 1278 也可作为与它相差不大的运算的共有部分，并且这些运算也包含在 1278 和Ⅵ23 或Ⅵ14 之间：事实上，沿着右边 1278 所在的这一列，我们有 12378(即 1+2+3+7+8)即运算Ⅴ47，它也包括三位运算 1、2、7、8。同样，继续沿着 1278 所在这一行往下走，我们有 12678，即Ⅴ37(=1+2+6+7+8)。于是，运算Ⅳ15，不光是Ⅵ23 和Ⅵ14 的，也是Ⅴ47 和Ⅴ37 的共有部分，且后面的关系更为接近。

256个二元运算的选言范式的四重行列对合常数表

图例说明：0 = 无一位运算　1 = $(p.q.r)$　2 = $(p.q.\bar{r})$　3 = $(p.\bar{q}.r)$　4 = $(p.\bar{q}.\bar{r})$　5 = $(\bar{p}.q.r)$　6 = $(\bar{p}.q.\bar{r})$　7 = $(\bar{p}.\bar{q}.r)$　8 = $(\bar{p}.\bar{q}.\bar{r})$

(I 1)	(I 2)	(I 3)	(I 4)	(II 1)	(II 2)	(II 3)	(II 8)	(II 9)	(II 14)	(III 1)	(III 2)	(III 7)	(III 22)	(IV 1)
1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234
(II 7)	(II 13)	(II 22)	(II 22)	(III 6)	(III 11)	(III 15)	(III 26)	(III 30)	(III 40)	(IV 5)	(IV 9)	(IV 19)	(IV 39)	(V 53)
18	28	38	48	128	138	148	238	248	348	1238	1248	1348	2348	12348
(II 6)	(II 12)	(II 17)	(II 21)	(III 5)	(III 10)	(III 14)	(III 25)	(III 29)	(III 39)	(IV 4)	(IV 8)	(IV 18)	(IV 38)	(V 54)
17	27	37	47	127	137	147	237	247	347	1237	1247	1347	2347	12347
(II 5)	(II 11)	(II 16)	(II 20)	(III 4)	(III 9)	(III 13)	(III 24)	(III 28)	(III 38)	(IV 3)	(IV 7)	(IV 17)	(IV 37)	(V 55)
16	26	36	46	126	136	146	236	246	346	1236	1246	1346	2346	12346
(II 4)	(II 10)	(II 15)	(II 19)	(III 3)	(III 8)	(III 12)	(III 23)	(III 27)	(III 37)	(IV 2)	(IV 6)	(IV 16)	(IV 36)	(V 56)
15	25	35	45	125	135	145	235	245	345	1235	1245	1345	2345	12345
(III 21)	(III 36)	(III 46)	(III 52)	(IV 15)	(IV 25)	(IV 31)	(IV 45)	(IV 51)	(IV 61)	(V 47)	(V 41)	(V 31)	(V 16)	(VI 23)
178	278	378	478	1278	1378	1478	2378	2478	3478	12378	12478	13478	23478	123478
(III 20)	(III 35)	(III 45)	(III 51)	(IV 14)	(IV 24)	(IV 30)	(IV 44)	(IV 50)	(IV 60)	(V 48)	(V 42)	(V 32)	(V 17)	(VI 24)
168	268	368	468	1268	1368	1468	2368	2468	3468	12368	12468	13468	23468	123468
(III 18)	(III 33)	(III 43)	(III 49)	(IV 12)	(IV 22)	(IV 28)	(IV 42)	(IV 48)	(IV 58)	(V 50)	(V 44)	(V 34)	(V 19)	(VI 26)
158	258	358	458	1258	1358	1458	2358	2458	3458	12358	12458	13458	23458	123458
(III 19)	(III 34)	(III 44)	(III 50)	(IV 13)	(IV 23)	(IV 29)	(IV 43)	(IV 49)	(IV 59)	(V 49)	(V 43)	(V 33)	(V 18)	(VI 25)
167	267	367	467	1267	1367	1467	2367	2467	3467	12367	12467	13467	23467	123467
(III 17)	(III 32)	(III 42)	(III 48)	(IV 11)	(IV 21)	(IV 27)	(IV 41)	(IV 47)	(IV 57)	(V 51)	(V 45)	(V 35)	(V 20)	(VI 27)
157	257	357	457	1257	1357	1457	2357	2457	3457	12357	12457	13457	23457	123457
(III 16)	(III 31)	(III 41)	(III 47)	(IV 10)	(IV 20)	(IV 26)	(IV 40)	(IV 46)	(IV 56)	(V 52)	(V 46)	(V 36)	(V 21)	(VI 28)
156	256	356	456	1256	1356	1456	2356	2456	3456	12356	12456	13456	23456	123456
(IV 35)	(IV 55)	(IV 65)	(IV 69)	(V 37)	(V 27)	(V 23)	(V 12)	(V 8)	(V 3)	(VI 19)	(VI 15)	(VI 10)	(VI 4)	(VII 5)
1678	2678	3678	4678	12678	13678	14678	23678	24678	34678	123678	124678	134678	234678	1234678
(IV 34)	(IV 54)	(IV 64)	(IV 68)	(V 38)	(V 28)	(V 24)	(V 13)	(V 9)	(V 4)	(VI 20)	(VI 16)	(VI 11)	(VI 5)	(VII 6)
1578	2578	3578	4578	12578	13578	14578	23578	24578	34578	123578	124578	134578	234578	1234578
(IV 33)	(IV 53)	(IV 63)	(IV 67)	(V 39)	(V 29)	(V 25)	(V 14)	(V 10)	(V 5)	(VI 21)	(VI 17)	(VI 12)	(VI 6)	(VII 7)
1568	2568	3568	4568	12568	13568	14568	23568	24568	34568	123568	124568	134568	234568	1234568
(IV 32)	(IV 52)	(IV 62)	(IV 66)	(V 40)	(V 30)	(V 26)	(V 15)	(V 11)	(V 6)	(VI 22)	(VI 18)	(VI 13)	(VI 7)	(VII 8)
1567	2567	3567	4567	12567	13567	14567	23567	24567	34567	123567	124567	134567	234567	1234567
(V 22)	(V 7)	(V 2)	(V 1)	(VI 14)	(VI 9)	(VI 8)	(VI 3)	(VI 2)	(VI 1)	(VII 4)	(VII 3)	(VII 2)	(VII 1)	(VIII)
15678	25678	35678	45678	125678	135678	145678	235678	245678	345678	1235678	1245678	1345678	2345678	12345678

借助于常数表(23[illegible])这个如此便捷的演算工具(我们重申,该常数表只是对常数表233的一个简单转述),我们现在可以总结之前我们留在Ⅰ下面悬而未解的问题:G1到G4中,元素之间的内部关系,以及整个常数表中,任意元素之间的一般运算关系。所以,我们继续罗列这张常数表的特性(参看Ⅲ下面的1到[illegible])。

⑬ 我们首先验证,转换群INRC的运算法则,也就是说,应用在([illegible]值的)任意两个命题的运算之间的组合,以及由此合定的这些转换(命题217中)。以命题240作为例子,我们可以验证如下:

(240)

(Ⅰ)17 [≡ Ⅱ 6 $r \cdot (p = q)$] ∨ 38 [≡ Ⅱ 18 $q \cdot (p = r)$] ≡ 1 378 [≡ Ⅳ 25 $(q \supset p) \cdot (p \supset r)$]　(Ⅰ)

(N)234 568 [illegible]　(N)

(R)28 [illegible]　(R)

(C)134 567 [illegible]　(C)

即,综合起来:

(Ⅰ) 17 ∨ 38 = 1 378(Ⅰ)

(N) 234 568 · 124 567 = 2 456(N)

(R) 28 ∨ 16 = 1 268(R)

(C) 134 567 · 234 578 = 3 457(C)

因为17∨38=1 378。另外与整个二位运算12 345 678集合相比,234 568是17的补充(即逆运算N)(从常数表中,可以直接从17对应中心处的对称点找到),然后124 567是38的补充N(这也可以通过对称看到),然而,234 568与124 567的共有部分是2 456,它是1 378的补充(即N)。至于互反运算R,28是17的互反,因为8是1的R且2是7的R(28是17的R,同样从常数表上也可以看到,因为28是17与对角线\的对称);我们同样有38的互反为16,因为1是8的互反,且6是3的互反(同样也可以从常数表上,与对角线\相关的对称关系中看到)。然而28∨16=1 268,它正好是1 378的R(因为,互反关系1=8,2=7以及3=6,抑或从对称关系来看)。至于对射关系,134 567是28的对射而234 578是16的对射;然而二者共有的部分是3 457,即1 268的补充(另一方面17和134 567以及38和234 578也是彼此与对角线/的对称关系)。

所以,对于整张常数表中(和G1到G4的加法运算和乘法运算的结果相反),任何元素之间的一个二位运算的组合运算(∨),或找到其共有部分的运算(·)都是可行的,这些运算遵循转换群INRC的运算法则(这一点证实了命题217)。

现在,我们同样可以在集合内部与边界G1到G4之间进行演算,具体验证过程,我们逐一进行。

① G1的集合中,首先包括除O以外的4个元素1,2,3,4,其中每一个只能由自己和O的组合产生(即1=1∨0或1=1;2=2∨0或2=20;等等),所以这里,除了O,没有共有部分。但是两两相加,则会得到G1中的其他元素:即:

(241)　　1(Ⅰ1)∨2(Ⅰ2)=12(Ⅱ1)，　1(Ⅰ1)∨3(Ⅰ3)=13(Ⅱ2)，等等

至于这些加法的结果(12到34)，它们是1—4彼此之间的结合，或这些结果彼此的结合，G1中最后5个元素，其中包括1234(Ⅳ1)，囊括了这里所有的元素：

(241乙)　　12(Ⅱ1)∨3(Ⅰ3)=123(Ⅲ1)，　12(Ⅱ1)∨4(Ⅰ4)=124(Ⅲ2)，等等

以及　　12(Ⅱ1)∨34(Ⅱ14)=13(Ⅱ2)∨24(Ⅱ9)=等等=1234(Ⅳ1)

② 集合G3是G1的逆运算。首先，这里由Ⅷ=12 345 678、O的逆运算囊括了所有。然后运算Ⅶ1到Ⅶ4，即运算Ⅰ1到Ⅰ4的逆运算，每一个运算就是Ⅷ每次从1到4中少一个的结果：

(242)　　12 345 678(Ⅷ)·1(Ⅰ1)=2 345 678(Ⅶ1)，等等

Ⅶ类中两个元素共有的部分是Ⅵ类的一个元素，Ⅵ类中两个元素共有的部分是Ⅴ类的一个元素，最后元素(Ⅳ7)是G3中每个元素共有的内容：

(242乙)　　2 345 678(Ⅶ1)·1 345 678(Ⅶ2)=345 678(Ⅵ1)，等等

345 678(Ⅵ1)·245 678(Ⅵ1)=45 678(Ⅴ1)，等等

45 678(Ⅴ1)·15 678(Ⅴ22)=等等=5 678(Ⅳ70)

③ 至于G2中的元素，它们是G1的互反运算R，它们和G1一样遵循同样的逻辑加法运算原则，产生出表中的结果。最后G4是G3的逆运算N，所以G2的互反运算R是G1的对射C。

因此，这些元素G的系统结构，即这4个集合，G1到G4，是整个常数表的衍生母线，其本身就遵循共同的加法(∨)和乘法(·)的组合原则，并且因为自身的情况，还遵守着转换群INRC的运算法则，所以才有了§34中构成法则的运用。

§36　常数表的上下"边界"

若256个二元运算的整张常数表(239)或(233)值是根据转换群INRC构建的，那么其中就不会显示出其他的特性了。为更好地进行后续描述，我们引入"格"(lattices)这个词，首先，我们先介绍以下几个定义。

我们将包含其他两个运算的最小元素，称为"上边界"并用符号BS表示：比如说，Ⅱ2(12)是Ⅰ1(1)和Ⅰ2(2)的BS，并且Ⅰ1是1和O的BS。任意两个元素的BS都是单义确定的。我们用BJ来表示"下边界"的意思，即反过来表示两个运算共同包含的最大元素：比如说Ⅰ1(1)和Ⅰ2(2)的BJ是O，但是运算Ⅲ24(236)和运算Ⅲ25(237)的BJ是Ⅱ8(因为，23是236和237的共有内容)。对于任意元素的成对运算来说，其BJ也是单义确定的。

反过来，我们用"更大的和"(符号gs)来称呼(O、Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ等)类中的两个元素，同时拥有一个BS的最高的、但BS自己本身除外的元素：比如，运算Ⅰ1和Ⅰ2是Ⅱ1的gs。

还有，gs 不一定必须是不相交的两个元素：比如说 128(Ⅲ6)的 gs 不是 1(Ⅰ1)和 28(Ⅱ13)，而是 12(Ⅱ1)和 28(Ⅱ13)；所以这些 gs 也是单义确定的，其获取的方式如下：任何一个元素，比如 1 245(Ⅳ6)，为得到其 gs，只需要回到 1 245 所在的这一列，一直到整个一列中都包含的第一个元素(这里是 124 即运算Ⅲ2)，再从右向左横向沿着 1 245 所在的这一行，直到整一行中都包含的第一个元素(这里是 245 即运算Ⅲ27)。与之对应，我们用"更小的积"(符号 pm)来表示两个元素，它们是(Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ等)类运算中最低的，彼此之间有一个起着 BJ 作用的运算项，BJ 本身除外；举例说明，对于 1 24 = BJ，其 pm 就是 12 458(即Ⅴ44)和 12 345(即Ⅴ…)。同样 pm 也是单义确定的，为获取它们，只需要从设定的 BJ 出发，沿着 BJ 所在的竖列向下走，再从 BJ 所在的横排由左向右进行，一直到遇见的囊括所有的第一个元素所在的点，它们就是 pm 的全部组成部分。此外，我们还有 gsv 和 pmv，这是 gs 和 pm 在常数表纵向栏中上下定位的点，而 gsh 或 pmh 则是 gs 或 pm 在横向上定位的点。最后，我们概括代之为 s 和 m 以表示任意运算的和或积。

Ⅰ. 按照以上所说的这些定义，我们首先想知道，对于两个给定的运算 x 和 y，其下界 BJ 和上界 BS 之间有哪些关系。在这样的情况中，我们考虑的是两条不同的界线，而元素 x 和 y 同时担任着 s 和 m 的作用(有时是 gs 和 pm，非必须如此)；于是 x，y $(s=m)$。(参看图 2)

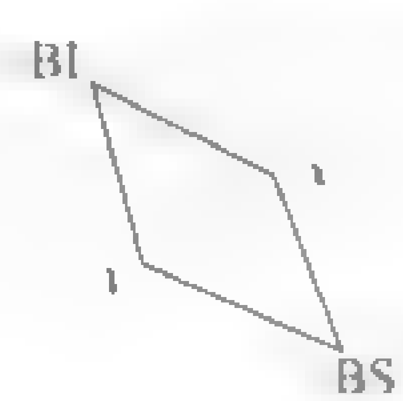


图 2 $(x, y=s=m)$

即，举例说明 $y=178$(Ⅲ21)$[(p\supset q)\cdot(q\supset r)]$，且 $x=138$(Ⅲ11)$[(p\supset r)\cdot(q\supset p)]$，其 BJ 则是 18(Ⅱ7)$[(p\supset q)\cdot(q\supset r)]$，且 BS 则是 1378(Ⅳ2)$[(q\supset p)\cdot(p\supset r)]$。首先，我们要注意 138 和 178，并不是 18 的 pm，因为，若 178 正好是 18 的 pmv，那么，18 的 pmh 是 128，而不是 138。另一方面，138 和 178 也不是 1378 的 gs，后者的 gs 是 127 和 378；所以，这里的 x 和 y 是任意的 s 和任意的 m。然而，在它们和它们的下边界和上边界之间，存在一个通用的集合关系。首先，我们自然有：

(243) $\quad (\mathrm{BJ})\vee(x)=(x),\quad (\mathrm{BJ})\vee(y)=(y),\quad (\mathrm{BJ})\vee(\mathrm{BS})=(\mathrm{BS})$

以及(244) $\quad (\mathrm{BS})\cdot(x)=(x),\quad (\mathrm{BS})\cdot(y)=(y),\quad (\mathrm{BS})\cdot(\mathrm{BJ})=(\mathrm{BJ})$

其中：

(245) $\quad (x\cdot y)=(\mathrm{BJ})\cdot(\mathrm{BS})$ 且 $(x\vee y)=(\mathrm{BJ})\vee(\mathrm{BS})$

然而，因为运算$(\vee)$是$(\cdot)$的对射，我们尤其还有：

(246) $\quad (x\vee y)=\mathrm{Ca}(x\cdot y)$，即 $(\mathrm{BS})=\mathrm{Ca}(\mathrm{BJ})$

我们还记得，Ca 是分量运算(a)的对射运算 C，和整个算式的对射运算 C 不一样，C

Ca Ch(命题 31 丙)。只有在二元运算($p \cdot q$)和($p \vee q$)中，对射运算 C 和 Ca 相同，因为，此时 p 和 q 的 Ch 依旧是 p 和 q，即 Ca Ch＝Ca＝C。相反，在一元、三元或三元一二元，以及一般的 n 元算式中，Ca 和 C 是不同的。同样分量运算的互反运算 Ra 也是和互反运算 R 有区别的，其关系是 R＝Rh(命题 31 乙)。但是，我们总会有 Na＝N(命题 31)。也就是说，两个算式 x 和 y，其 BJ 和 BS 之间形成了一个转换群，不是 INRC，而是 I Na Ra Ca。因为，我们有：

(247)　　(I) $x \cdot y(=\mathrm{BJ})$　　且　　(I) $x \vee y(=\mathrm{BS})$

　　(Na)$(x|y)=x \vee y$　　　　(Na)$x \cdot y$

　　(Ra)$\bar{x} \cdot \bar{y}$　　　　(Ra)$(x|y)=\bar{x} \vee y$

　　(Ca)$x \vee y(=\mathrm{BS})$　　　　(Ca)$x \cdot y(=\mathrm{BJ})$

于是，我们注意到：

(248)　　Na(BJ)＝Ra(BS)　以及　Na(BS)＝Ra(BJ)

此外，我们有转换群所有的常用转换：

(249)　　$\mathrm{Na}(x \cdot y)=\mathrm{Ra\ Ca}(x \cdot y)$　以及　$\mathrm{Na}(x \vee y)=\mathrm{Ra\ Ca}(x \vee y)$

　　$\mathrm{Na\ Ra\ Ca}(x \cdot y)=(x \cdot y)$　以及　$\mathrm{Na\ Ra\ Ca}(x \vee y)=(x \vee y)$

等等。

在我们选定的例子中，(247)中的转换可得到：

(249 乙)

BJ：

(I) $x \cdot y \equiv (138) \cdot (178) \equiv 18$ (Ⅱ 7)

(Na)$x \vee y \equiv (24\,567) \vee (23\,456) \equiv 234\,567$ (Ⅵ 7)

(Ra)$\bar{x} \cdot \bar{y} \equiv (24\,567) \cdot (23\,456) \equiv 2\,456$ (Ⅳ 46)

(Ca)$x \vee y \equiv (138) \vee (178) \equiv 1\,378$ (Ⅳ 25)

BS：

(I) $x \vee y \equiv (138) \vee (178) \equiv 1\,378$ (Ⅳ 25)

(Na)$x \cdot y \equiv (24\,567) \cdot (23\,456) \equiv 2\,456$ (Ⅳ 46)

(Ra)$x \vee y \equiv (24\,567) \vee (23\,456) \equiv 234\,567$ (Ⅵ 7)

(Ca)$x \cdot y \equiv (138) \cdot (178) \equiv 18$ (Ⅱ 7)

于是，我们看见，任意两个元素 x 和 y，其 BJ 和 BS 构成了一个和 IRNC 转换群同类的群集，条件是，这里要引入这些边界 BJ 和 BS 或元素 x 和 y 的否定。

因此，我们可以同样考虑一下元素($x \cdot y$)或($x \cdot y$)，即非共同部分以及它们的否定($x \vee y$)和($x \vee y$)。一般情况下，在我们选定的例子中，它们指的是：

(250)　$(x \cdot y) \equiv [x \cdot (\mathrm{BJ})] \equiv (138) \cdot (23\,456) \equiv [(138) \cdot (234\,567)] \equiv 3$

(250 乙)　$(x \cdot y) \equiv [y \cdot (\mathrm{BJ})] \equiv (24\,567) \cdot (178) \equiv [(178) \cdot (234\,567)] \equiv 7$

(251)　$(x \vee y) = (x \cdot y) \vee [(BJ) \vee y] = (138) \vee (23\,456) = [(18) \vee (23\,456)]$

$$= 1\,234\,568$$

(251 乙)　$(x \vee y) - (\overline{x \vee \bar{y}}) = [(BJ) \vee \bar{x}] = (24\,567) \vee (178)$

$$= [(18) \vee (24\,567)] = 1\,245\,678$$

于是，我们发现了如下的一般关系：

(252)　$x \vee y(BS) = x \cdot y(BJ) \vee (x \cdot y) \vee (x \cdot y)$

抑或(252 乙)　$x \cdot y(BJ) = x \vee y(BJ) \cdot (x \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee y)$

以及(253)　$(\overline{x \cdot y})(=\text{Na BJ}) = \bar{x} \cdot \bar{y}(=\text{Na BS}) \vee (x \cdot \bar{y}) \vee (\bar{x} \cdot y)$

还有：

(254)　$(\text{Na BS}) \vee (BJ) \equiv (\bar{x} \cdot \bar{y}) \vee (x \cdot y) \equiv (x \vee \bar{y}) \cdot (x \vee y)$

以及(254 乙)　$(\text{Na BJ}) \equiv (x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) \equiv (x \cdot \bar{y}) \vee (\bar{x} \cdot y)$

也就是说，(252)中的上边界等值于 BJ 加上非共有的部分，而(253)中 BJ 的逆运算，则等值于 BS 的逆运算加上非共有的部分。举例说明：231 567(Na BJ) = 2 456(Na BS) ∨ 3 ∨ 7。于是，得到结论命题(254)：举例说明，2 456(Na BS) ∨ 18(BJ) = (1 234 568) • (1 245 678) ≡ 124 568[$\equiv (x \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee y)$]。

但是，从理论的观点出发，常数表(239)还展示一个非常有趣的特性，这里让人想起了逻辑关系中的“相似性”。

我们可以用 4 个关系：$\overset{a}{\rightarrow}$、$\downarrow b$、$\overset{c}{\leftarrow}$ 以及 $\uparrow d$ 来表示 4 个运算项 BJ、x、BS 和 y 之间的位置关系。另外，这四个运算项两两之间的距离，我们用 $+nh$ 表示从一个到另一个转换过程中，横向从左到右移动的 n 个元素($-nh$ 则是同样的从右往左的移动)，我们用 $+nv$ 表示纵向的上升移动的 n 个元素($-nv$ 则是同样的下降的移动)。

$$\begin{tikzcd} BJ \arrow[r, "a"] & x \arrow[d, "b"] \\ y \arrow[u, "d"] & BS \arrow[l, "c"] \end{tikzcd}$$

图 3

于是我们发现，如例所示，在这里 BJ = 18，x = 138，y = 178 以及 BS = 1378，四个关系分别是 $a = +5h$，$b = -4v$，$c = -5h$ 以及 $d = +4v$。换言之，我们有(纯距离上)：

(255)　$$a + b = c + d$$

抑或(考虑到对应的符号)$(a+b)+(c+d)=0$，这反过来又证实了，我们从 x 或 y 出发，到 BJ 和 BS 之间的距离是一样的。尽管这样的关系呈现的形式有些或多或少的复杂，该关系一直都为真。

该形式最简单的状态是，同一行或同一列中的移动。即，举例说明，x = 13(Ⅱ1)且 y = 9(Ⅰ4)，这是两个位于 G1 上的元素，于是，我们有了 BJ = 0 且 BS = 134(Ⅲ7)，于是，这里的距离关系就是：$a = -6h$，$b = +7h$，$c = -9h$ 以及 $d = -4h$，同样得到 7 + 6 = 9

+4。抑或 x 2 567(Ⅳ52)且 y 1 568(Ⅳ33)。其 BJ 是 56(Ⅱ23)且其 BS 125 678(Ⅵ11)。于是，这里的距离关系就是：a $4v+2h$，b $+3h$ $1v$，c $4h+2v$ 以及 d $1h+3v$。于是，结果是$(a+b)=5v+5h$ 以及$(c+d)=-2h+5v$。

(255)中的相似性在关系项上，演绎了对于元素的(O，Ⅰ，Ⅱ，…，Ⅷ)类相对普遍的特性：不同的类别(二位运算数目的不同)，在 BJ 和运算项 x 和 y 中的一个之间，以及另一个和 BS 之间是相同的。这里，我们用符号 $\xrightarrow{n}$ 表示在二位运算范式数量上的差异：

(256) $(BJ\xrightarrow{n}x)=(y\xrightarrow{n}BS)$ 或 $(BJ\xrightarrow{n}y)=(x\xrightarrow{n}BS)$

比如$(O\xrightarrow{2}13)$ $(1\xrightarrow{2}134)$，因为 O 里面没有二位运算，13(Ⅱ1)中有两个，1(Ⅰ1)中有 1 个，以及 134(Ⅲ7)中有 3 个。若 x 和 y 中包括同等数量的二位运算，例如，在运算 138 和 178 的例子中，我们同样有$(18\xrightarrow{1}138)$ $(178\xrightarrow{1}1\ 378)$又或者$(56\xrightarrow{2}2\ 567)$ $(1\ 568\xrightarrow{2}125\ 678)$。当 BJ 和 x 或 y 一致时，我们自然有：

(256 乙) 若 BJ x，则 y BS，因为$(BJ\xrightarrow{O}x)$ $(y\xrightarrow{O}BS)$

举例说明，对于 x 5 且 y 56，则我们有 BJ 5 且 BS 56 (256)的这个特性直接来自(243 244)，没有什么神秘性：这里不需要再回过头去进行讨论，其中一部分 x，减去共有的部分($x \cdot y$)，等值于整体($x \vee y$)减去另外一部分(减去 y，即也减去 $x \cdot y$)。例如，138 减去共有部分(BJ 18)得到 3，即只有一个二位运算；而 178 加上 3 得到 1378，即，这里重新有了个不同的二位运算；但是，准确说来，这里说的是同样的一个二位运算(3)！

于是，演示(255)的相似性就变得很简单了。我们将 BJ 和 x 之间二位运算数量的不同，称之为 $n1$；x 和 BA 之间的不同，称之为 $n2$；BS 和 y 之间的不同，称之为 $n3$；以及 y 和 BJ 之间的不同，称之为 $n4$。于是我们有了(参照 256)：

(257) $n1=n3$ 且 $n2=n4$，其中 $n1+n2=n3+n4$

然而，在一个元素和另一个之间，加上或减去一定数目 n，再确定的二位运算，对应到(239)的范式常数表中，就是在横向上的$(+nh)$或纵向的$(+nv)$可能的运行轨迹集合，其中每个运算都是根据自己的情况，遵从着(256)中法则的。这里的运行轨迹，不是由简单的加法或乘法规则决定的，否则(255)的相似性也太显而易见了，而是由 G1 和其互反 G2(或 G3 和其互反 G4)之间的组合决定的。于是，若我们在 G1 集合中选择一个 x，在互反 G2 集合中选择一个 y，我们则总会得到对应的(257)中的 $n1$，$n2$，$n3$ 和 $n4$，分别对应轨迹 a，b，c 和 d，于是 a c 且 b d(比如：若 x 3 且 y 7，于是我们有了 a $+3h$ 以及 c $3h$；b $2v$ 以及 d $+2v$)；正是这样，才确保了反射运算 $nh+n'v$ $n'v+nh$。当我们对待任意的一个 x 和 y 时，我们要确定从 x 和 y 出发到其 BJ 和 BS 之间的运行路径，则不再必须有 a c，也不再必须有 b d，因为 x 不再必须和 BJ 位于同一行，y 也不再必须和 BS 同行(x 也不再必须和 BS 同列，抑或 y 也不再必须和 BJ 同

列）。但是我们总是有 $a+b=c+d$，因为，任意一个元素到另一个之间的运行轨迹，是可以简化为从 G1 和 G2 出发的轨迹的（例如从 18 到 37，中间经过 28 和 38，得到 $+2h-1v$，而其中经过了 8、0、1、2、3、38 得到 $-1h-1v+3h-2v=+2h-1v$），抑或简化至从 G3 和 G4 出发的轨迹。

因此（255）到（257）的相似性，只展现了常数表（233）和（239）中同样的原则：从运算分析的观点来看，了解这些常数表的结构，其中还有非对称转换关系的乘积表，以及其相似性①的基本特性，这是非常重要的。

Ⅱ. 现在我们分析一下，在 x、y、BJ 和 BS 之间三种特殊情况：这里 x 和 y 一个是另一个的 N、R 或 C②，即这里在常数表中，它们是与中心或与对角线的对称关系。

在 $y=Nx$ 这种情况中（比如 $x=2358$ 且 $y=1467$），自然 BJ 总是 O，而 BS 总是Ⅷ，于是我们总是会有，不只是 $a+b=c+d$（命题 255），我们还有 $a=c$ 且 $b=d$：

(258) 若 $y=Nx$，于是 BJ＝O 且 BS＝Ⅷ

在 $y=Rx$ 的情况中（比如 $x=138$ 且 $y=168$，这里 BJ＝18 且 BS＝1 368），于是两个边界 BJ 和 BS 必然位于对角线↘上，也就是说，这里的每一个元素都与其互反运算一致。因为，两个互反运算的共有二位运算必然都是偶数（0、2、4、…、8），而任何一个二位运算都不是其本身的互反（O 除外），若它们不为空，则它们一个对另一个的互反必然是成对出现的，也就是说，BJ 就是其自身的互反。至于两个互反运算的组合（BS），重新组成了一个新的偶数的二位运算，它是成对运算的互反，因为构成这个运算的就是其本身：

(259) 若 $y=Rx$，于是 R(BJ)＝BJ，且 R(BS)＝BS

这种情况下，我们有 $a=d$ 以及 $b=c$。

最后，在 $y=C(x)$ 的情况中（例如 $x=1\,356$，且 $y=1\,257$，这里 BJ＝15，且 BS＝123 567），于是 BJ 是 BS 的 C（C 不只是 Ca）。因为，若 x 和 y 是对射关系，二者与对角线↙是对称关系。在这种情况中，其 BJ 和 BS 之间也是这样的关系，因为对射是互反 R 的逆运算 N；然而，互反关系下的 x 和 y 的 BJ 和 BS，彼此之间是对称关系，反演关系下的 x 和 y 的 BJ 和 BS 是对等的。若 x 和 y 是对射关系，其 BJ 和 BS 之间，也只能与对角线↙产生相互对称的关系，因为 x 和 y 也是这样的，而且，我们有 $a+b=c+d$（命题 255）。因此 BJ 和 BS 是一个对另一个的 C：

(260) 若 $y=Cx$，于是 BJ＝C(BS) 且 BS＝C(BJ)

在这个情况中，我们在 a、b、c 和 d 之间有一个奇怪的关系：若 $a=nhn'v$，则 $c=n'hnv$，并且，若 $b=n''hn'''v$，则 $d=n'''hn''v$。因为，在所举的例子中 a（15 和 1 356 之间的距离）是 $5h6v$，而 c（123 567 和 1 257 之间的距离）是 $6h5v$；同样 b（1 356 和 123 567 之间

① 参看《逻辑通论》，第 179－180 页。

② 我们这里说的是 N、R 或 C，而不再是在（246）中的 BJ 和 BS 时的 Na、Ra 或 Ca。

的距离)是 5h1v，而 d(1 257 和 1 之间的距离)是 4h5v！

于是，从相似性的角度(255)出发，我们有：

(261)　　若 $x=\mathrm{N}(y)$，则 $a=c$ 且 $b=d$

　　　　若 $x=\mathrm{R}(y)$，则 $a=d$ 且 $b=c$

　　　　若 $x=\mathrm{C}(y)$，则 $a=nhn'v$ 且 $c=n'hnv$；$b=n''hn'''v$ 且 $d=n'''hn''v$

换言之，这里 4 个运算项：BI、x、BS 以及 y，在 $x=\mathrm{N}(y)$ 的情况中，4 点构成了一个平行四边形，其中等量关系存在于大边($a=c$)和小边($b=d$)之间(图 4)；在 $x=\mathrm{R}(y)$ 的情况中，4 点构成了一个类菱形，中心不对称，其中两两之间的等量关系存在于小边($a=d$)和大边($b=c$)之间(图 5)；最后在对射关系的情况中，同样的 4 个运算项构成了一个梯形，但是这里平行的两条边是虚的(BI 和 BS 之间，或 x 和 y 之间的关系，是图 6 中虚线位置)；这里的 4 个关系 a、b、c 和 d 对应的是，不平行的两边以及梯形的对角线，其中交叉的数目 $nhn'v$ 和 $n'hnv$ 对应的是，成对的 a 和 c 或 b 和 d。

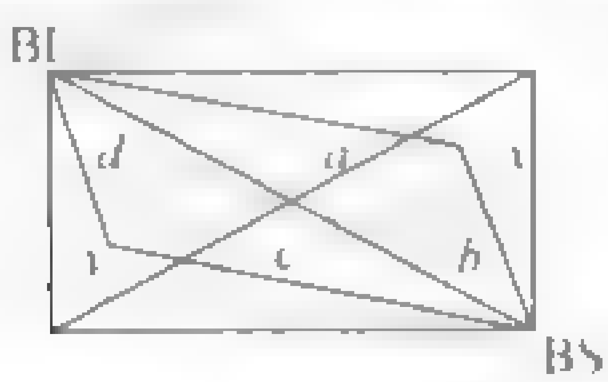


图 4

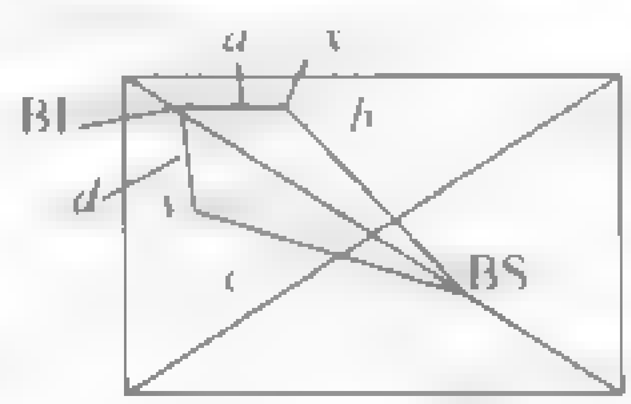


图 5

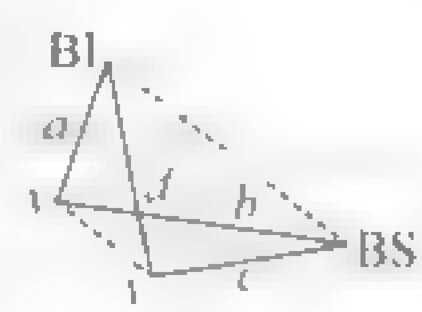


图 6

通过分析这些特殊情况，其中 x 和 y 是反演、互反或对射的关系，我们看见，有多少个相似性关系(255)可以深深地对应上 256 个二元运算构成的集合的结构，特别是对应于转换群 INRC。(对于相似性或“逻辑比例”和转换群 INRC 之间的关系，参看《附录Ⅰ》部分，第 1575 页。)

注意：相似性(255—257)不是逻辑网中专属的，同样也对应于格点结构的一般特性①。假设 x 和 y 是任意两个元素，$x\cdot y$ 即其 BI，$x\vee y$ 即其 BS。我们称 $x/x\cdot y$ 为“商集合”，该集合包括的元素在 $x\cdot y$ 和 x 之间，即 $x\cdot y\leqslant \cdots \leqslant x$，还有 $(x\vee y)/y$ 也是“商集合”，该集合中包括的元素在 y 和$(x\vee y)$之间，即 $y\leqslant \cdots \leqslant (x\vee y)$。于是我们有了 $x/x\cdot y$ 和 $(x\vee y)/y$，构成了两个同类的子网，即这里的元素中运算项彼此对应②。例如，对于我们的运算 28 和 17($x\cdot y=1$ 且 $x\vee y=1\ 278$)，我们有：$x\cdot y \ldots x=2$ 和 8 且 $y \ldots (x\vee y)=127$ 和 178。于是，我们可以在这些子网上，建构出相似性的演算，而不用在常数表(233)③上推演“距离”了。

---

① 若我们将 x 定为元素 1 3 6，且 y 定为 1 2 7，这个交叉自然也是一样的。

② 该辅助定理的概括推广归功于 O. 欧尔(O. Ore)。参看赫尔莫斯(Hermes)和科特(Kothe)，《协件理论，数学知识百科全书》(*Theorie der Verbände*, *in Enzykl. der math. Wissensch.*)第 I 卷，第 5 册(1939 年)公式 5，第 13、10 页。

③ 准确说来，对于图 4 应该是一个菱形，因为其 4 边是对等的。

在这个 xy、x 和 y（$x+y$）的同构性上，还有 Jordan（约当）定理的演示，它证实了“主线”的对等[一个戴德金网(reseau de Dedekind)中的两个元素之间逐步的距离]；这里(256)的相似性只是一种个别情况。

我们还注意到，在全部为正数的格结构中，相同的相似性（抑或商集合的同构性）对应的，准确说来，是一个“比例关系”。因为，我们知道全部数字构成了一个格结构，其中 BS＝最小公倍数(PPCM)且 BJ＝最大公约数(PGCD)。假设 x＝数字 4 且 y＝数字 6，于是我们有 BS＝数字 12 且 BJ＝数字 2。这里的比例关系是：BJ：x＝y：BS(2：4＝6/12)或 $x\times y$＝BJ×BS(4×6＝2×12)。

有趣的是，我们发现，对于整个数字领域中的比例关系(BJ：x＝y：BS)，准确说来，也对应逻辑运算领域中（另外建立在 247 运算组上）一个简单的相似性(BJ ⇀ x)≃(y ⇀ BS)（命题 256）。这里，我们在逻辑和数字的结构上，有了一个共有运算机理的新例子，但是不同之处还是一直都存在的，比如在集约量（排除部分到整体的关系）和外延量（分量彼此之间的关系①）之间；从这一点来看，比例衡量的概念，正好是逻辑的相似性，但是其中 a、b、c、d 是由外延的数和加入的共有单位数②来量化的。

Ⅲ. 我们还需要思考，在 x、y、BJ、BS 集合和另外一个相似的集合 x'、y'、BJ′和 BS′之间，有何种关系，比如 x' 和 y' 可能是 x 和 y 的 N、R 或是 C。我们再拿出初始的例子，其中 x＝138(Ⅲ1)且 y＝178(Ⅲ21)。于是，我们推演出 x' 和 y'＝x 和 y 的 I、N、R 或 C 的 4 种可能的常数表(262)。

(262)

(I)x＝138(Ⅲ1)	y＝178(Ⅲ21)	BJ(x,y)＝18(Ⅱ7)	BS(x,y)＝1 378(Ⅳ27)
(N)N(x)＝24 567(Ⅴ11)	N(y)＝23 456(Ⅴ21)	BJ(Nx,Ny)＝2 456(Ⅳ46)	BS(Nx,Ny)＝234 567(Ⅵ17)
(R)R(x)＝[illegible]	R(y)＝[illegible]	BJ(Rx,Ry)＝[illegible]	BS(Rx,Ry)＝[illegible]
(C)C(x)＝23 457(Ⅴ20)	C(y)＝34 567(Ⅴ6)	BJ(Cx,Cy)＝3 457(Ⅳ57)	BS(Cx,Cy)＝234 567(Ⅵ17)

然而，Ⅳ46 是Ⅳ27 的逆运算 N；Ⅳ11 是Ⅳ77 的 R，也是Ⅳ27 的 C。另一方面，Ⅱ7 是自己的互反，并且Ⅵ7 也是如此。所以，我们发现 x 和 y 的逆运算的 BJ 是 x 和 y 的 BS 的逆运算；然而 x 和 y 的逆运算的 BS 是 x 和 y 的 BJ 的逆运算。相反，x 和 y 的 R 的 BJ 和 BS 是 x 和 y 的 BJ 和 BS 的 R。最后 x 和 y 的 C 的 BJ，等于 x 和 y 的 BS 的 C；且 x 和 y 的 C 的 BS，就是 x 和 y 的 BJ 的 C。

于是，我们可以用以下方式进行概括：

(263)	BJ(Nx, Ny)＝N BS(x, y)	BS(Nx, Ny)＝N BJ(x, y)
	BJ(Rx, Ry)＝R BJ(x, y)	BS(Rx, Ry)＝R BS(x, y)
	BJ(Cx, Cy)＝C BS(x, y)	BS(Cx, Cy)＝C BJ(x, y)
其中	BJ(Cx, Cy)＝N BS(Rx, Ry)	BS(Cx, Cy)－N BJ(Rx, Ry)

① 参看我们的《逻辑通论》，第 72 页。

② 参看皮亚杰和英海尔德的《儿童的空间概念》，巴黎（法兰西大学出版社），第七章。

并且　　BJ(Cx, Cy)=R BJ(Nx, Ny)　　BS(Cx, Cy)=R BS(Nx, Ny)

等等。

于是，我们看到了，在转换群 INRC 的转换中，有多少个可以应用在 256 个三元运算所在的格结构中的 BJ 和 BS 的概念里。这些现象都是很自然而然的，因为 BJ，BS，x 和 y，从一开始就构成了转换群 I，Na，Ra 以及 Ca(命题 247)。

§ 37　逻辑的相加之和与相乘之积之间的关系

现在，我们探讨一下互反的问题，该问题我们刚刚在 § 36 的 I 和 Ⅲ 中有讨论到，我们想要确定一个给定的元素的和、与积 m 之间的关系(特别是在 § 36 一开始，我们定义的 gs 和 pm 之间的关系)，该元素既有 BS 的身份，又有 BJ 的身份(和 BS 有关是因为 gs，和 BJ 有关是因为 pm)(对比图 2，参看图 7)。

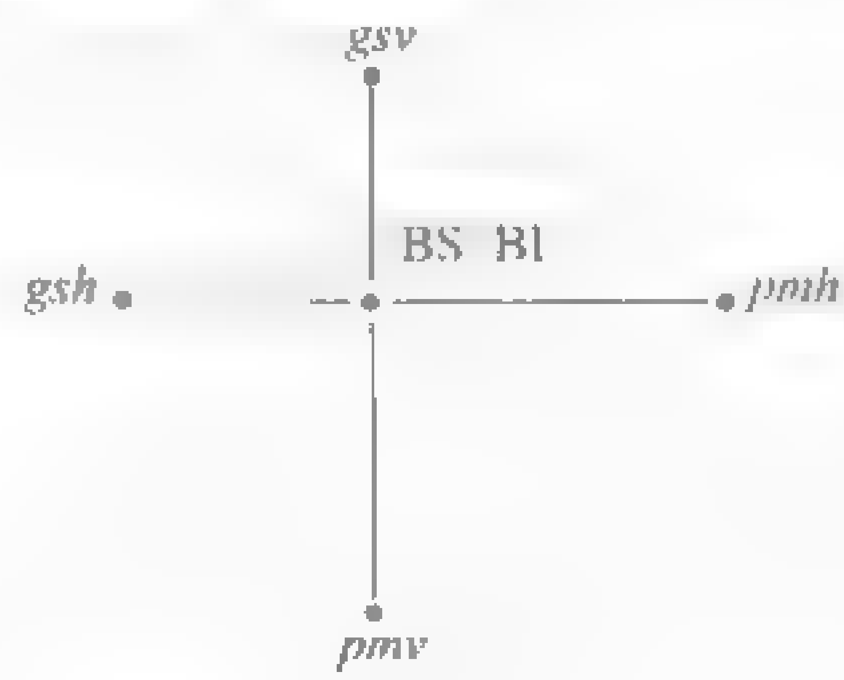


图 7

I. 我们从一个任意的元素开始，比如 1 268(Ⅳ 11)[$(p\supset q)\cdot(r\supset p)$]或[$(p\cdot q)|(p\vee r)$]。其 gs 和 pm 分别是：

$$gs\ 1\,268(\text{Ⅳ}\,11)=\begin{cases}126(\text{Ⅲ}\,4)[q\cdot(r\supset p)]=[(p\cdot q)|(q\supset r)]=gsv\\ 268(\text{Ⅲ}\,35)[\bar{r}\cdot(p\supset q)]=[(p\vee r)|(q\supset r)]=gsh\end{cases}$$

$$pm\ 1\,268(\text{Ⅳ}\,14)=\begin{cases}12\,368(\text{Ⅴ}\,48)[(p|q)|(p\,\mathrm{W}\,r)]=[(p\,\mathrm{W}\,r)|(q\supset r)]=pmh\\ 12\,678(\text{Ⅴ}\,37)[(p\,\mathrm{W}\,q)|(p\vee r)]=[(p\,\mathrm{W}\,q)|(q\supset r)]=pmv\end{cases}$$

我们在其中看到部分常规关系的存在。首先，gs，按照定义内容，在 BS∩BJ=BSJ 中(因此，我们称呼该元素既有 BS 的功能也有 BJ 的功能)，且 BSJ 也是 pm 的内容，于是，我们很清楚地知道，每一个 gs 都是 pm 中这一个元素和另一个元素中的内容，我们对此表述如下：

(264)　　$(gsv)\vee(pmv)=(pmv)$　且　$(gsv)\vee(pmh)=(pmh)$

(264 乙)　　$(gsh)\vee(pmv)=(pmv)$　且　$(gsh)\vee(pmh)=(pmh)$

因为，我们发现 126(gsv)既是 12 368(pmh)也是 12 678(pmv)中的内容；同样 268(gsh)也是作为内容，同时出现在 12 368 和 12 678 当中。

第二点,因此,从 gs 到 pm 的转换,总是在于三位运算的一个简单的加法运算。确实,若 BSJ 包括一定数量的三位运算 Tn(包括 O 和Ⅷ之间),我们有:

(265) 若 BSJ = Tn,则 gs = Tn − 1 且 pm = Tn + 1

因为,这源于 gs 和 pm 的相同定义,属于直接低于 BSJ 的(O、Ⅰ、Ⅱ等)一个类别的首位元素,而第二个是直接高于一个类别;两者之间的区别在于两个三位运算。然而,pm 不能是 gs 的逆运算,因为它们彼此包含。除了它们成了彼此的对射 C 这种情况之外(这里我们可以回到Ⅲ中查看),这时它们属于另外一个运算族群了。

因此从 gs 到 pm 的转换,是由运算族群和族群之间的转换来确定,这部分的转换,我们在第六章里面已经分析过了,至少通过这里的这些转换,可以将其简化为三位运算的简单的加法运算,没有减法(或简化为减法,没有加法)。在我们所举的例子中,这里的 gs 是Ⅲ4 和Ⅲ35(Ⅲ — Ⅴ(a)类族群),而 pm 是Ⅴ48 和Ⅴ37(Ⅲ — Ⅴ(b)类族群),于是,这里的转换运算,按照我们之前更深入的分析(命题 189),则是保有二元——二元算式中的一个运算:对于 gsv 和 pmh 的($p|q$)或($q\supset r$)以及对于 gsh 或 pmv 的($p\vee r$)或($q\supset r$)。在另外的情况中,一个运算是反演,或是作为变换式的内容,等等。但是,这里总会对应上(命题 264)中两个增加的三位运算的增添或删减,根据第六章的概要内容,这是从 gs 到 pm 可能的直接正向转换,反之亦然。

自然,在被认作是 BSJ 的元素和其 gs 和 pm 之间同样如此。在我们所举的例子中,在运算Ⅳ14 =(p q)($p\vee r$)和其由常数表(129)确定的 gs,即运算Ⅲ4 和Ⅳ35,其中Ⅲ4 保留了(p q),在Ⅳ35 中保留了($p\vee r$)。至于属于Ⅳ(f)类族群的Ⅳ14 到其属于Ⅲ — Ⅴ(b)类族群的 pm 的转换,则是由表(187)和(188)来完成。

最后,若我们的加法之和 s 与乘法之积 m 属于不同的等级,情况依旧如此,这里 s 和 m,不仅限于 gs 和 pm,于是可以增添或删减的三位运算的数目,自然也是可以变动的。我们将在§39"前位"关系中讲到。

Ⅱ. 当元素 BSJ 是在常数表(233)或(239)的一个对角线上的运算式 gs 和 pm 之间,呈现出两个需要我们注意的地方。另外,这些关系仅仅建构了(259)和(260)的互反关系。我们从对角线↘开始,这里的元素是成对的运算,比如 R — I 以及 C — N。这种情况下,gs 和 pm 呈现出 3 个恒定的特性:彼此分别对应互反;都只属于两个族群Ⅰ — Ⅶ类和Ⅲ — Ⅴ(b)类,以及我们总会有 α(或 β)pm = α(或 β)gs 或 pm = Nα Nα(或 β)gs。

为了明白其间的道理,我们要回溯到对角线↘上,它是由除了 O 和Ⅷ之外的 8 个Ⅱ — Ⅵ(c)类和 6 个Ⅳ(c)类运算构成,也就是说,其中 8 个运算的形式是(p q)·(q r),另外 6 个形式是 p $q[r]$,即(p q)·(q r)。这些运算的内部对称,解释了这些构成的近似,或其 pm 本身,也应该是对称关系的,即与对角线有同等的距离。然而,我们已经知道(在§35 的小点 4°下)与对角线↘的对称关系的元素之间有互反关系,于是我们有:

(266) 对角线↘:(gsh) = R(gsv) 以及 (pmh) = R(pmv)

例如，运算Ⅱ18 对应的有 gs，运算Ⅰ1 和Ⅰ8(—R)，以及 pm，运算 128 和 178，即Ⅲ6 和Ⅲ21(—R)；运算Ⅳ24(1 368)对应的有 gs，运算Ⅲ9(136)和Ⅲ45(368—R)，有 pm，运算Ⅴ27(13 678)和Ⅴ(12 368=R)；等等。

因为(除 O 和Ⅷ外)对角线上的元素都只属于Ⅱ—Ⅵ(c)类和Ⅳ(c)类，以及这些 gs 和 pm 都彼此成对地对应互反，所以它们必须也只属于两只族群：Ⅰ—Ⅶ类对应Ⅱ—Ⅵ(c)类，以及Ⅲ—Ⅴ(b)类对应Ⅳ(c)类。事实上，Ⅱ(c)类的运算都是(且只有它们是)由两个彼此互逆的二元运算Ⅰ(1 到 8)构成的。于是Ⅱ7，12，16 以及 19 的 gs 都是Ⅰ类，而Ⅱ7，12，16 以及 19 的 pm 则(根据 N 对称)都是Ⅶ类。至于形式为 p—q[r]或(p—q)·(q—r)的Ⅳ(c)类运算，其 gs 只能是Ⅲ类，并且保有至少一个等值的二元运算(—)，所以就是Ⅲ(c)类，形式为(p—q)·(q∨r)或(p—q)·(q⊃r)。于是，同理推演它们的 pm 是属于Ⅴ(c)类。至于Ⅱ(c)类的 pm 以及Ⅵ(c)类的 gs，也只能属于Ⅲ—Ⅴ(b)类族群，因为，同样作为Ⅲ类或Ⅴ类运算，并且还要保有一个等值关系(—)。最后运算 O 的 gs 是运算 O，pm 是Ⅰ类运算，以及运算Ⅷ的 pm 为运算Ⅷ，gs 是Ⅶ类运算。

因此，若我们用 n 和 n′来表示两个不同的运算，于是我们有了：

(267)　　[gs(Ⅱc)类]—[Ⅰ类 n]∨[Ⅰ类 n′]以及[pm(Ⅵc)类]

=[Ⅶ类 n]·[Ⅶ类 n′]

[pm(Ⅱc)类]—[(Ⅲb)类 n]∨[(Ⅲb)类 n′]以及[gs(Ⅵc)类]

=[(Ⅴb)类 n]·[(Ⅴb)类 n′]

[pm(Ⅳc)类]—[(Ⅲb)类 n]∨[(Ⅲb)类 n′]以及[pm(Ⅳc)类]

=[(Ⅴb)类 n]·[(Ⅴb)类 n′]

最后，若我们将 pm 和 gs 置于合适的 α 和 β 的二元—三元算式形式下，我们总会得到：

(268)　　α(或 β)pm→α(或 β)gs，若 α(pm)=α(gs)

或(268 乙)　　α(或 β)pm→Nαα(或 β)gs，若 α(pm)=Nα(gs)

因为，若分量运算(α)在从 gs 到 pm 的转换中没有变化[在Ⅱ—Ⅵ(c)类中的运算就是这种情况]，我们能在 pm 上找到 gs 的一个复合运算 α 或 β。比例说，运算Ⅱ8 的 gs 是运算Ⅰ1 和Ⅰ8，其中Ⅰ1 的形式是Ⅰ1[(p—q)·(q·r)]，Ⅰ8 是[(p—q)·(q·r)]。而运算Ⅱ18 的 pm 是 128(Ⅲ16)和 178(Ⅲ21)，即[(p—q)·(r⊃q)]和[(p—q)·(q⊃r)]，运算Ⅱ8 本身也是[(p—q)·(q—r)]。所以在从 gs 到 pm 的转换中，一直保有着等式(p=q)。

反过来，当分量运算(α)在从 gs 到 pm 的转换中，反演过来[在Ⅳ(c)类中的运算就是这种情况]，我们这里所进行的正是转换运算 Nα Nα(或 Nβ)。例如，运算Ⅳ15(1 278)[(p=q)=(q=r)]，其 gs 和 pm 分别是：

gs1 278(Ⅳ15)=127(Ⅲ5)[(p—q)·(q∨r)]∨278(Ⅲ36)[(p—q)·(q—r)]

pm1 278(Ⅳ15)=12 378(Ⅴ47)[(p W q)·(r⊃q)]·12 678(Ⅴ37)[(p W q)·(q⊃r)]

于是，我们在 pm 上看到 gs 的等式（$p-q$）的逆运算（p W q），即我们在这进行的是 Nα 的转换运算。还有其他的等值情况，或其逆运算为 β 或 Nβ（按运算中项进行置换），但是，在对角线↘的情况中，总是分量运算的等式（α 或 β）在保留（268）或进行逆运算（268 乙）。

因此，我们发现对角线↘上的元素的 pm 和 gs 呈现出同样的特性 Na Nβ，以及当 s 和 m 属于 G1 到 G4 中的元素时（参看命题 236 和 237）情况也是如此。因为 G1 和 G4 上的元素不是某个既定元素的 gs 和 pm，而是这个 gs 和 gm（最小的和与最大的积）。由此可见，它们自然也展现了（264）的特性，该特性对所有的 s 和 m 都为真。

(269)　　$(s)\vee(m)=(m)$　所以　$(ps)\vee(gm)=(gm)$

于是，我们发现常数表（239）的同一列或同一行的尽头有同样的一个复合运算（a）（即 p 或 $\bar{p}$）。至于其他的，比如一列或一行的两端总是运算，总是属于同一族群（参考 G1 到 4 的布置），以及若分量运算（a）为逆运算，我们对 G 可以像对角线↘一样，进行 Na Nβ 的转换。所以展示从 s 到 m 的组合中（269）出现的两个特性，族群的同质性解释了其共同的关系 Na Nβ（或 a）。

Ⅲ．至于对角线↙上的元素的 gs 和 pm，它们也呈现出相似的特性，但是该特性和对射运算（C）有关。我们记得，因为该对角线上的 16 个元素都属于Ⅳ类运算族群（8 个Ⅳa 类，2 个Ⅳb 类以及 6 个Ⅳd 类），它们构成了成对运算 C—I 以及 R—N。因此，其 gs 和 pm 之间支持以下关系：一方面的 gsv 和 pmh，另一方面的 gsh 和 pmv，分别位于与对角线相同的距离的位置，即分别彼此互为对射关系；gs 和 pm 都属于两个单独的运算族群Ⅲ—Ⅴ(a)类和Ⅲ—Ⅴ(c)类。

因为，对角线↙上的元素本身和其对射结果对等，它们分解产生的 gs，或抽出其有部分得到的 pm，必然也是彼此的对射；然而，因为分别属于Ⅲ类和Ⅴ类，所以这里它们呈现出一种交叉的对称[①]：gsh 是 pmv 与对角线↙的对称（这一点我们在 § 35 的⑤小点中分析过，显示出对射关系），且 gsv 也是 pmh 的对称。于是我们有了：

(270)　　对角线↙：$(gsh)=C(pmv)$　以及　$(gsv)=C(pmh)$

比如，1 256（Ⅳ10）$[q\cdot(p*r)]$，其 gs 和 pm 分别是：

gsh 1 256（Ⅳ10）＝256（Ⅲ31）$[q\cdot(p|r)]$

gsv 1 256（Ⅳ10）＝125（Ⅲ3）$[q\cdot(p\vee r)]$

pmv 1 256（Ⅳ10）＝12 568（Ⅴ39）$[\bar{q}|(p\vee r)]$

pmh 1 256（Ⅳ10）＝12 356（Ⅴ52）$[\bar{q}|(p|r)]$

抑或还有 1 235（Ⅳ2）$[(p\vee q)\cdot(p\vee r)\cdot(q\vee r)]$，其 gs 和 pm 分别是：

① 参看，命题（261）和图 6。

gsh 1 235(Ⅳ2)＝235(Ⅲ23)[$\bar{p}=(q \cdot r)$]·[$p|(\bar{q} \cdot \bar{r})$]

gsv 1 235(Ⅳ2)＝123(Ⅲ1)[$p \cdot (q \vee r)$]

pmv 1 235(Ⅳ2)＝12 358(Ⅴ50)[$p=(\bar{q} \cdot \bar{r})$]|[$p|(q \cdot r)$]

pmh 1 235(Ⅳ2)＝12 345(Ⅴ56)[$p|(q|r)$]

鉴于从对射关系出发的 gs 和 pm 之间的交叉关系，还因为（除了Ⅳ29 和Ⅳ42 以外）该对角线上的所有元素都只归属于两个运算族群Ⅳ(a)类和Ⅳ(d)类，于是，gs 和 pm 也必然只会归属于两个运算族群（对照可看Ⅳ29 和Ⅳ42 的 gs 和 pm 的情况）。然而，我们在这里发现了一些很奇怪的结果：(1) 所有Ⅳ(e)类运算的 gs 和 pm 都是Ⅲ—Ⅴ(a)类运算；(2) Ⅳ(a)类运算本身的 gs 和 pm 是Ⅲ—Ⅴ(a)类运算，Ⅳ2 及其逆运算Ⅳ69 除外；(3) Ⅳ(a)类中两个运算，即Ⅳ2 和Ⅳ69 的 gs 和 pm 分别是一个Ⅲ—Ⅴ(a)类运算和一个Ⅲ—Ⅴ(c)类运算；(4) 最后Ⅳ(b)类的两个运算本身（即Ⅳ29 和Ⅳ42）的 gs 和 pm 是Ⅲ—Ⅴ(c)类运算。于是我们有了（参考 267）：

(271)

[gs(Ⅳ(b)]＝[Ⅲ(c)n]∨[Ⅲ(c)n']以及[pm(Ⅳ(b)]＝[Ⅴ(c)n]·[Ⅴ(c)n']

[gs(Ⅳd)]＝[Ⅲ(a)n]∨[Ⅲ(a)n']以及[pm(Ⅳd)]＝[Ⅴ(a)n]·[Ⅴ(a)n']

[gs(Ⅳ52,53,64,39,18,7)]＝[Ⅲ(a)n]∨[Ⅲ(a)n']以及[pm(id)]＝[Ⅴ(a)n]·[Ⅴ(a)n']

[gs(Ⅳ2 和 69)]＝[Ⅲ(a)n]∨[Ⅲ(c)n']以及[pm(Ⅳ2 和 69)]＝[Ⅴ(a)n]·[Ⅴ(c)n]

然而，事实可能正好是运算Ⅳ2 和运算Ⅳ69 的 gs 或 pm 成了Ⅲ(c)类运算（并不是Ⅲ—Ⅴ(c)类中任意某个运算，准确说来是运算Ⅲ23 和运算Ⅲ50），这绝不是一个意外的结果：我们还记得（表 112 和 115）在Ⅲ—Ⅴ(c)类运算族群中，除了运算Ⅲ23 和运算Ⅲ50，其他运算都可以互相转换，同样的情况也出现在Ⅳ(a)类族群中运算Ⅳ2 和运算Ⅳ69 与族群内其他运算之间。此外（表 176、178 和 180），我们还知道，运算Ⅲ23 可直接转换为运算Ⅳ2，且运算Ⅲ50 可直接转换为运算Ⅳ69。至于Ⅲ—Ⅴ(c)类运算中，其他没有在对角线↗上的元素的 gs 和 pm 中现身的运算，它们所组成的 s 和 m 与Ⅳ(a)类运算相距甚远，不同于Ⅳ2 和Ⅳ69。

Ⅳ. 作为结尾，我们还需注意，转换组 INRC 应用在 gs 和 pm 中的方式，一般常规情况即可（不只是针对于对角线上的运算）。我们可以任意选择一个运算 x，比如Ⅱ6 [$r \cdot (p \vee q)$]，于是确定其 gs 和 pm，以及其逆运算 Nx [$\bar{r} \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$]Ⅵ6，互反运算 Rx [$\bar{r} \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$]Ⅲ13 以及其对射运算 Cx [$r \vee (p \cdot q)$]Ⅵ13。于是，我们得到以下关系：

(272)

	gsh	gsv	pmh	pmv
x 17(Ⅱ6)	7(Ⅰ7)	1(Ⅰ1)	127(Ⅲ5)	178(Ⅲ21)
Nx 234 568(Ⅵ6)	34 568(Ⅴ5)	23 456(Ⅴ21)	1 234 568(Ⅶ7)	2 345 678(Ⅶ1)
Rx 28(Ⅱ13)	8(Ⅰ8)	2(Ⅰ2)	128(Ⅲ6)	278(Ⅲ36)
Cx 134 567(Ⅵ13)	34 567(Ⅴ6)	13 456(Ⅴ36)	1 234 567(Ⅶ8)	1 345 678(Ⅶ2)

然而，Ⅲ6是Ⅲ21的R，Ⅲ36是Ⅲ1的R，Ⅰ2是Ⅰ7的R以及Ⅰ8是Ⅰ1的R。于是，一般情况下，我们有：

(273) $gsh\ (x)=\mathrm{N}\ pmh \qquad (\mathrm{N}x)=\mathrm{R}\ gsv \qquad (\mathrm{R}x)=\mathrm{C}\ pmv\ (\mathrm{C}x)$

$gsv\ (x)=\mathrm{N}\ pmv \qquad (\mathrm{N}x)=\mathrm{R}\ gsh \qquad (\mathrm{R}x)=\mathrm{C}\ pmh\ (\mathrm{C}x)$

$pmh\ (x)=\mathrm{N}\ gsh \qquad (\mathrm{N}x)=\mathrm{R}\ pmv \qquad (\mathrm{R}x)=\mathrm{C}\ gsv\ (\mathrm{C}x)$

$pmv\ (x)=\mathrm{N}\ gsv \qquad (\mathrm{N}x)=\mathrm{R}\ pmh \qquad (\mathrm{R}x)=\mathrm{C}\ gsh\ (\mathrm{C}x)$

这里只是转换群INRC的不同转换（命题240）在常数表（233和239）中的二种对称关系NRC中的一个简单应用。但是，这样的汇聚结果并不是什么偶然：在256个二元运算独有的系统中，在格结构中提取的运算群的结构中（也可以参看命题263）显示出了其中紧密的组合关系。我们将在第八章中继续对其研究。

§38 演算的法则

我们已经知道（命题228到230），在一个逻辑方程式中，若逻辑加法运算产生在两个完全不相交的元素之间（$x \vee y$，其中$x \cdot y=0$），我们可以用这运算来改变方程式端边的某一项，即将（$\vee x$）变为（$\cdot x$）抑或将（$\cdot x$）变为（$\vee x$）。这样的转换在二元运算中自然也是成立的。

(274) $$\{[p\cdot(q\cdot r)]\vee[\bar{p}\cdot(\bar{q}\cdot\bar{r})]\equiv[(p=q)\cdot(q=r)]\}$$
$$\equiv\{[(p=q)\cdot(q=r)]\cdot[\bar{p}|(\bar{q}\cdot\bar{r})]\equiv[p\cdot(q\cdot r)]\}$$

即：

(274乙) $$\{[(\mathrm{I}\,1)\vee(\mathrm{I}\,8)]\equiv(\mathrm{II}\,7)\}\equiv\{[(\mathrm{II}\,7)\cdot(\overline{\mathrm{I}\,8})]\equiv(\mathrm{I}\,1)\}$$
$$\text{或}(1\vee 8\equiv 18)\equiv(18\cdot\bar{8}\equiv 1)$$

我们也有

(275) $$\{[(p=q)\cdot(q=r)]\equiv[p|(q\vee r)]\cdot[p|(q|r)]\}$$
$$\equiv\{[(p=q)\cdot(q=r)]\vee[p\cdot(q|r)]\equiv[\bar{p}|(q\vee r)]\}$$

即：

(275乙) [Ⅱ7] [(Ⅲ53)•(Ⅲ22)] Ⅱ7]∨(Ⅲ22) Ⅲ53]

抑或还有（从常数表239中得到的更简单的表达）：

(275丙) (18) [(12 348)•(15 678)] [(18)∨(234)] (12 348)

同样，结合(274)中的第一枝和(275)中的第二枝，得到：

(276) (1∨8) [(12 348)•(15 678)] — 1—[(12 348)•(15 678)•(8)] —等等

我们一下就明白了这些运算的意义：因为，运算项（Ⅱ7）是作为两个完全不相交的元素（Ⅰ1和Ⅰ7）的BS，即这里BJ＝0，所以，在已经了解BS和一个元素（BS中的补充部分）时，很容易就可以找到这些元素中的另外一个的。即：

(277)　若 BJ＝0，则[$(x\vee y)=(BS)$]＝[$(BS\cdot y)=(x)$]＝[$(BS\cdot x)=(y)$]

同样，若运算项(Ⅱ7)是两个元素(Ⅴ53 和Ⅴ22)的 BJ，并且其 BS 为Ⅷ，那么，在知道 BJ 和其中一个元素后(这里元素的否定即在Ⅷ中补充的部分)，也是很容易就能找到另外一个的：

(278)　若 BS＝Ⅷ，则[$(x\cdot y)=(BJ)$]＝[$(BJ\vee x)=(y)$]＝[$(BJ\vee y)=(x)$]

但是命题(277)和(278)只在个别情况中适用，因为，大多数情况中，我们既没有 BJ＝0 也没有 BS＝Ⅷ。于是，我们需要推导出这两个运算的一般常用形式。

在这里，我们需要引进一个新的概念：即 BS 中的补充运算。在命题(277)的情况中，逆运算 BS·y 得到结果 x，因为 y 是 x 在 BS 中的补充。但是，当 x 和 y 并不是完全不相交时(换言之当 BJ 不为空时)，y 不再是 BS 中 x 的补充。因此，这里我们需要引进 G. 伯格曼(G. Bergmann)设定的一个概念，名为"第一类的补充元素"(element complementaire de premiere espece)①。若 $x<BS$，我们用 x' 称呼这个元素，即：

(279)　$$(x\cdot x')=0 \quad 且 \quad x\vee x'=BS$$

同样，若 $y<BS$，也会有一个 y'，会有以下关系：

(279 乙)　$$(y\cdot y')=0 \quad 且 \quad y\vee y'=BS$$

不论 BJ 是否为空，我们总会有两个元素 x 和 y：

(280)　$$(x\vee y)=(x\cdot y')\vee(x\cdot y)\vee(x'\cdot y)$$

即(280 乙)　$$BS=BJ\vee x'\vee y'$$(参看图 8)

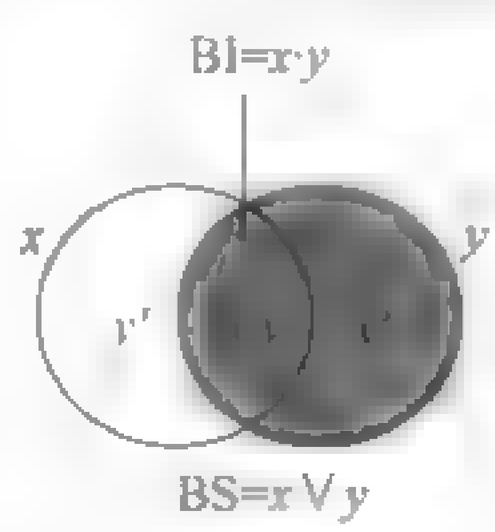


图 8

我们注意到，命题(280)[其中(280 乙)只是对其的演绎]等值于一个析取运算(∨)本身的(选言)范式。此外，我们还发现，命题(280)和(252)是同一对等的，因为 $x'=(x\cdot y)$ 且 $y'=(x\cdot y)$(命题 250)，以及 $x'=(x\vee y)$ 且 $y'=(x\vee y)$(命题 251)。

这样，很容易就可以概括出，当我们既没有 BJ＝0 也没有 BS＝Ⅷ时，命题(277)和(278)的情况。我们先进行加法组合，只要我们用 x 和 y 的补充形式替换算式 x 和 y [来自(280 乙)]，加法组合完全可以转换：

(281)　$$x=(BJ\vee y') \quad 且 \quad y=(BJ\vee x')$$

其中：

---

① 这种在类别和关系的群集中，我们称呼"第二"类别和关系相对应。参看《逻辑通论》，第 104 页和第 145 页。

(282)　$[(BJ \vee y') \vee (BJ \vee x') = BS] \equiv [(BS \cdot x') = x] \equiv [(BS \cdot y') = y]$

例如：$x = \mathrm{II}7[(p \dot{-} q) \cdot (q \dot{-} r)]$ 且 $y = \mathrm{II}13[r \cdot (p \dot{-} q)]$。此时，$BJ = \mathrm{I}8[p \cdot (q \cdot r)]$ 且 $BS = \mathrm{III}6[(p \dot{-} q) \cdot (r \supset q)]$；$x'$ 则是 $BS \cdot (\mathrm{II}7) = (128 \cdot 18 = 2) = \mathrm{I}2[p \cdot (q \cdot r)]$，而 y' 则是 $BS \cdot (\mathrm{II}13) = (128 \cdot 28 = 1) = \mathrm{I}1[p \cdot (q \cdot r)]$。于是我们有了：

(282 乙)　$(\mathrm{III}6)[(p \dot{-} q) \cdot (r \supset q)] \cdot (\mathrm{I}2)[p \cdot (q \cdot r)] \equiv \mathrm{II}7[(p \dot{-} q) \cdot (q \dot{-} r)]$

且　$(\mathrm{III}6)[(p \dot{-} q) \cdot (r \supset q)] \cdot (\mathrm{I}1)[p \cdot (q \cdot r)] \equiv \mathrm{II}13[\dot{r} \cdot (p \dot{-} q)]$

抑或，更为简单的方式：

(282 丙)

$[18 \vee 28 = 128] \equiv [(8 \vee 1) \vee (8 \vee 2) = 128] \equiv [(128 \cdot 2) = 18] \equiv [(128 \cdot 1) = 28]$

至于乘法运算组合，同样只需要展现出算式完整的形式，以便进行倒转。于是[借助于(279)和(280 乙)]我们有了：

(283)　$x = x \cdot \bar{x}'$，　$y = y \cdot \bar{y}'$　以及　$BJ = BJ \cdot (\bar{x}' \cdot \bar{y}')$

其中①

(284)　$[(x \cdot \bar{x}') \cdot (y \cdot \bar{y}') = BJ \cdot (\bar{x}' \cdot \bar{y}')] \equiv [(BJ \vee x') = y] \equiv [(BJ \vee y') = x]$

同样的例子 $x = \mathrm{II}7$ 且 $y = \mathrm{II}13$。于是 $\bar{x}' = \overline{\mathrm{I}2} = \mathrm{VII}2$ 且 $\bar{y}' = \overline{\mathrm{I}1} = \mathrm{VII}1$，这样就有了：

(284 乙)　$[(\mathrm{II}7 \cdot \mathrm{VII}2) \cdot (\mathrm{II}13 \cdot \mathrm{VII}1) = \mathrm{I}8 \cdot (\mathrm{VII}2 \cdot \mathrm{VII}1)] \equiv [(\mathrm{I}8 \vee \mathrm{I}2) = \mathrm{II}13]$
$\equiv [(\mathrm{I}8 \vee \mathrm{I}1) = \mathrm{II}7]$

抑或，更为简单的方式：

(284 丙)　$[(18 \cdot 1\,345\,678) \cdot (28 \cdot 2\,345\,678) = 8 \cdot (1\,345\,678 \cdot 2\,345\,678)] \equiv [8 \vee 2 = 28]$
$\equiv [8 \vee 1 = 18]$

因为 $\bar{x}'$ 和 $\bar{y}'$ 既没有给方程式(283)中加上什么，也没有减去什么，所以我们可以干脆表达如下：

(285)　$[(x \cdot y) = BJ] \equiv [(BJ \vee x') = y] \equiv [(BJ \vee y') = x]$

但是，(284)中完整的形式告诉了我们 x' 和 y' 出现在方程式第二个端边的原因，从 $(BJ \cdot \bar{x}')$ 到 $(BJ \vee x')$ 的逆运算，以及从 $(BJ \cdot \bar{y}')$ 到 $(BJ \vee y')$ 的逆运算。

所以(277)和(278)中的逆运算是完全普遍存在的。事实上，我们注意到(277)是(282)的一个特例，其中 $x' = y = x$ 且 $y' = x = y$（因为 $BJ = 0$），还有(278)是(284)的一个特例，其中 x' 等值于 x 且 y' 等值于 y（因为 BS 是Ⅷ）。

我们只需要注意，算式的完全可逆性使得从其他元素出发，只能返回到一个元素（因此可以从一个系统的等值关系，转换为可演算的方程式②），这里需要重视的不仅仅

① 这里的元素 $\bar{x}'$ 和 $\bar{y}'$（x' 和 y' 的否定）对应的是 G.伯格曼的"第二类的补充元素"：$x' \vee BS = \bar{x}$ 且 $\bar{x}' \cdot BS = x$。

② 建立在运算群(247)和其推论(248)到(254)的基础之上。

是 4 个运算项 (x)、(y)、$(x \cdot y = BJ)$ 以及 $(x \vee y = BS)$，而是 6 个运算项，其中还要包括 (x') 和 (y')，没有 (x') 和 (y')。这样就衍生出一个通用的理论问题：格结构，它表述了(BJ)和(BS)的结合；运算群的结构，它保证了系统的可逆性，同时也让建立在其基础之上的代数方程的转换的使用变为可能，这两个结构之间关系的理论问题，我们将在第八章继续分析。

§39 运算(∨)，(·)，(∨)，(·)和蕴涵的构成

对于命题间集合系统(222)和(233)，以及在第一、二章中的分析构成，我们只强调了组合运算(∨)或合并运算(·)以及其逆运算，而对于在构成中更为复杂的蕴涵运算(⊃或⊂)，并没有进行大量的使用。所以我们需要演示一下，在我们研究至此的转换系统中，蕴涵运算是怎样包含在其中的，以及它在其中所起的作用（前面的章节 §38 中已经提出了一些假设）。

假设，因为一个转换最根本的问题在于，将一个运算 x 和另外一个运算 y 组合起来，其上边界为 BS，我们在这里称之为 z，于是：

(286) $$x \vee y = z (= BS)$$

然后，我们总是有这样的一层关系，将 y 分解为 $xy \vee x'$，其中 xy 是 x 和 y 的共有部分（xy 可为 0 或空），且其中 x' 是第一类的补充元素（命题 279 和 280），即 $x' = z \cdot \bar{x}$。于是我们可以用等值的命题，来替换前面的命题(286)（这里 xy 包含在 x 里）：

(286 乙) $$x \vee x' = z$$

于是我们立刻发现，该等量关系等值于蕴涵关系 $x \supset z$ 和 $x' \supset z$。因为：

(287) $$x \supset z \equiv x \cdot z \vee x' \cdot z (= \bar{x} \cdot z) \vee \bar{x} \cdot \bar{z}$$

$$x' \supset z = x' \cdot z \vee x \cdot z (= \bar{x}' \cdot z) \vee \bar{x}' \cdot \bar{z}$$

抑或 $$[x \vee x' = z] \equiv [x \cdot z \vee x' \cdot z \vee (\bar{x} \cdot \bar{x}') \cdot \bar{z}]$$

我们发现这 3 个命题都是等值的，因为若 $x \vee x' = z$，且 $x' = \bar{x} \cdot z$，$x \cdot z$，$x' \cdot z$，以及 $\bar{x} \cdot \bar{x}' \cdot \bar{z}$ 是一个单独的相同运算项。

于是 BS 中的元素所有组合运算，都可以等值为一个蕴涵系统，一个运算和其包含运算之间的任何关系都是蕴涵。例如，二元合取 $(p \cdot q)$ 是包含在二元蕴涵 $(p \supset q) = (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$ 里面的。在这种情况下 $x = (p \cdot q)$，$z = (p \supset q)$，于是 $x' = [(\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})] = \bar{p}[q]$。我们同样可以记为：

(288) $$(p \cdot q) \vee \{\bar{p}[q]\} = (p \supset q)$$

抑或(288 乙) $$(p \cdot q) \supset (p \supset q) = (p * q)$$

因为从运算 $(p \cdot q) \vee \bar{p}[q] = (p \supset q)$ 可以得出 $[(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})] \vee$

$[(p\cdot q)\cdot p[q]\cdot(p\cdot\bar{q})]\}=[(p\supset q)\vee(p\cdot q)]=(p*q)$。

这两个命题是完全等值的。我们至此所说的一切命题项的组合($\vee$)或乘积结果($\cdot$)，都可以用蕴涵的表达书写出来。

但是$(p\cdot q)\supset(p\supset q)$这个关系，表达的到底是什么呢？特别是类似的蕴涵关系$o\supset(p\supset q)$表达的又是什么呢？于是，我们有了以下推演：

(289) $[(0)\supset(p\supset q)]=[0\cdot(p\supset q)]\vee[o(=p*q)\cdot(p\supset q)]=(p\supset q)]$

$\vee[o(=p*q)\cdot(p\supset q)]=p\cdot q=(p*q)$

此外，我们还有：

(289 乙) $(p\cdot q)\supset(p*q)=(p*q)$

因此：

(289 丙) $(p\cdot q)\supset[(p\supset q)\vee(p\cdot\bar{q})]$

蕴涵关系$(p\cdot q)\supset(p\supset q)$常常可以用一组词来表示其关系："部分蕴涵整体"，而蕴涵关系$o\supset(p\supset q)$表示的正是部分为空的情况下也有同样的蕴涵关系，换言之(我们有时也这样转述)假蕴涵真。然而，尽管有著名的罗素公理(axiome de Russell)$p\supset(p\vee q)$，在没有任何预知的情况下，我们还是不能接受这两个解释。鉴于(286 乙)和(287)或(288)和(288 乙)的等值关系，我们可以更加简单地说，所有的元素蕴涵这样的一个可能：可以和其他元素组合构建一个包含它在内的一个整体。因为，部分(甚至部分为空)蕴涵整体——被忽略的是，这种蕴涵的结果总是$(p*q)$(或$p*q*r$，等等)——的是关于整体系统的预设；然而，这样的结果表示，若我们想，$(p\cdot q)\supset(p\supset q)$是"总为真"；该结果必然也表示("当且仅当蕴涵"总为真")$(p\cdot q)\supset(p\supset q)$等值于$(p\supset q)\vee(p\supset q)$，因为$(p*q)=(p\supset q)\vee(p\cdot q)$，而$(p\cdot q)\supset(p\supset q)$①在其他的运算项中，在确定了部分$(p\cdot q)$蕴涵整体$(p\supset q)$，我们就可以支持一个任意元素和其他元素得到的整体集合之间的关系：整体通过部分而被蕴涵的关系，可以分解为一个各种可能的加法运算。因为，若可以确认$(p\cdot q)\supset(p\supset q)$为真(命题 288 乙)，则可以确认$(p\cdot q)\supset[(p\supset q)\vee(p\supset q)]$也为真(命题 288 丙)，这一点明显缓和了$(p\cdot q)\supset(p\supset q)$为真的负荷量！

这里有一点必须注意——正是这一点让蕴涵的使用变得些许微妙——我们并不会给一个确定的蕴涵关系一个明确的意义，而是只讨论其结果的功能。蕴涵关系$p\supset q$得到结果$(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$，其中包括一个限制意义，即没有模糊性。相反$(p\cdot q)\supset(p\supset q)$得到的结果是$(p*q)$，这里没有明确的内涵，只是说：要么$(p\cdot q)$结合$(p\cdot q)$以及$(p\cdot q)$得到结果$(p\supset q)$，要么这里既没有$(p\supset q)$也没有$(p\cdot q)$。这里不再

① 参看(288)和(288 乙)的演算。

是关于通常词语意义上的蕴涵，不用这个术语，我们还是可以通过两个命题之间的合取来形成结论，说同样的这两个命题之间具有协调性蕴涵关系(此外若"假蕴涵真"这也是合理的)。

最好的证据是，部分相对于整体的互反蕴涵，正如罗素的逻辑学对亚里士多德的反驳一样，并不为假，但是被前者所蕴涵，并且我们也只限于在其结果的范围内当其为真。该结果只和(288 乙)中的结果不同，但是连接它的几个运算之间，需要从格和群两方面来分析其关系。

我们将命题(288)表述为以下形式：

(290) $$(p\supset q)=p[q]\vee(p\cdot q)$$

从中，我们可以得到：

(290 乙) $$(p\supset q)\cdot(\overline{p\cdot q})=p[q]$$

然而，所有的等量关系($x\cdot y=z$)等值于等量关系($x=y\supset z$)或($x\supset y=z$)，因为$x\cdot y$是$x\supset y$的逆运算，z又是z的逆运算。因此我们有了：

(291) $$(p\supset q)\supset(p\cdot q)=p[q]$$

演算直接确定的是：因为$p[q]=(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$，即$(p\cdot q)\vee(p\supset q)$；然而，$x\vee y=x\supset y$，也就是说，方程式(291)的两个端边是等值相同的。

但是$(p\supset q)\supset(p\cdot q)=p[q]$指代的是什么意思呢？我们刚刚看到，若$(p\cdot q)=x$，且$(p\supset q)=z$，运算项$p[q]$构成了第一类的补充元素$x'$，因为$x\vee x'=z$。现在是，互反蕴涵$z\supset x$得到运算项$p[q]$，它是$p[q]$的否定，因此，根据伯格曼的术语[参看命题(281)和注释]，它构成的是"第二类的补充元素"x'。然而，正是在这里有一个完全通用的关系：若整体z通过部分x被蕴涵等价于组合$x\vee x'=z$；那么，部分x通过整体z的互反蕴涵，则得到结果x'，该结果等值于$(z\vee x)$。因为，等量关系$x\vee x'=z$(286 乙)。我们得出了互反的等值关系：

(292) $$\bar{x}\cdot x'=z$$

其中(参看图 9)：

(292 乙) $$x'=\bar{z}\vee x\quad 或\quad \bar{x}'=z\supset x$$

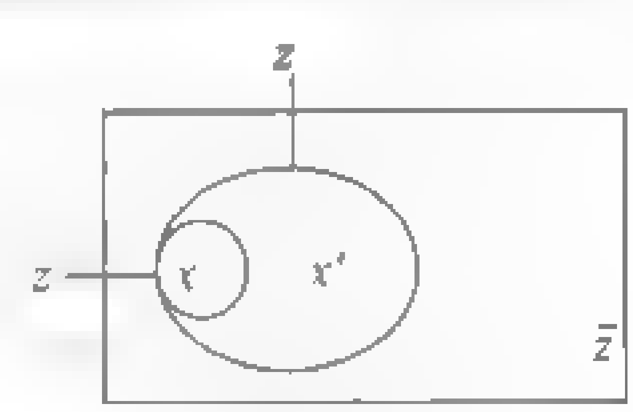


图 9 $x'=\bar{x}\cdot z$ 和 $x'=x\vee z$

于是，若我们有：

(293) $$(x\supset z)=[(x\vee x')=z]$$

其互反必然得到：

(294) $$(z\supset x)=[(x\cdot x')=z]-[x'=(z\vee x)]$$

确实，运算$z\supset x$得到结果$(zx)\vee(zx)\vee(zx)$。然而，若$z=x\vee x'$，我们有$zx=x$以及$zx=0$；至于zx，该运算想等值于z。于是，我们正好有了$z\supset x=x\vee z$，准确说来，就是x'。

另外几个例子，我们一直假设$z=(p\supset q)$：若$x=(p\cdot q)$，我们有$(x\vee x'=z)=(p\cdot q)\vee q[p]=(p\supset q)$。然而$(p\supset q)\supset(p\cdot q)=q[p]$，$q[p]$的逆运算。若$x$

$(p \cdot q)$，我们有 $(x \vee x' = z) = [(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)]$。然而 $(p \supset q) \supset (p \cdot q)$ 得到结果 $(p \mathrm{W} q)$，$(p = q)$ 的逆运算；等等。

一般情况下，我们可以总结，若一个（二元的，三元的，等等）运算 z 是由一些（成对命题，三位命题，等等）元素 $a, b, c, \cdots$ 构成，若 $z = a \vee b \vee c \vee \cdots$，我们有：

(295) $$z \supset a = \bar{a}' = a \vee \bar{z}$$

$$z \supset b = \bar{b}' = b \vee \bar{z}$$

$$z \supset c = \bar{c}' = c \vee \bar{z}$$

$$\cdots$$

$$z \supset a \vee b = (\bar{a}' \cdot \bar{b}') = (a \vee b) \vee \bar{z}$$

$$z \supset a \vee c = (\bar{a}' \cdot \bar{c}') = (a \vee c) \vee \bar{z}$$

$$\cdots$$

$$z \supset z = z \vee \bar{z} = 1(p * q * r\text{；等等})\text{以及 } z \supset o = (\bar{o}') = o \vee \bar{z} = \bar{z}$$

于是，蕴涵的组合就是：

(295 乙) $(z \supset a) \vee (z \supset b) \vee (z \supset c) \vee \cdots \vee [z \supset (a \vee b)] \vee \cdots = 1(p * q * r\text{；等等})$

若由全部到部分的蕴涵关系对应上简单的包含关系，那么由部分到全部的互反蕴涵关系，则对应了在部分的集合中对整体的包含关系（y 包含了 0 和其本身）。每个由部分到整体的部分蕴涵，是回归到对这个部分以及其在整体下补充的否定来进行确认；换言之，该蕴涵等值于一个从整体到考虑到本身的部分的简化[①]：$(z \supset x) = (\bar{z} \vee x)$。若从命题为真的观点出发，部分对整体的蕴涵一直为真（但是，这里我们有之前提到的意义层面的局限），而其互反只有几次可以为真，因此后面这一个(295)，从以上的这些运算的蕴涵关系来看，还是值得注意的。但就这一点，还有一个其他可行的蕴涵形式，我们在接下来的一节中继续讲解②。

---

① 因为 $(z \supset x) = [(z \cdot x) \vee (\bar{z} \cdot x)]$，以及若 $z = x \vee x'$，我们有 $(z \supset x) = [(z \cdot x) \vee (o) \vee (\bar{z} \cdot \bar{x})]$，即，在这两种情况下 $(z \cdot x) \vee (\bar{z} \cdot \bar{x})$，于是 $x \vee \bar{z}$（参看图 9）。

② 我们要补充，除了整体对部分或部分对整体的蕴涵关系，我们还有计算两个完全不相交的部分之间的蕴涵关系，即 $x \vee y = z$，且 $x \cdot y = o$。于是，我们有了 $x \supset \bar{y} = x$，以及 $y \supset \bar{x} = y$。因为 $x \supset \bar{y} = (x \cdot y = o) \vee (\bar{x} \cdot y) \vee (\bar{x} \cdot \bar{y}) = \bar{x}$。举例说明，$(p \cdot q) \supset (p \mathrm{W} q) = (p \cdot \bar{q})$，以及 $(p \wedge q) \supset (p \cdot q) = (p \cdot q)$。抑或还有 $(123 \supset 4) = (o) \vee (123 \cdot 4) \vee (\overline{123} \cdot 4) = 45678(\overline{123})$。若 x 和 y 是一个对另一个的逆运算，即 $y = \bar{x}$，我们有 $x \supset y = y$。若 $(x \cdot y)$ 的共有部分为非空，且共有部分既不与 x 重合，也不与 y 重合，最后我们自然有 $x \supset y = y \vee (\bar{x} \cdot \bar{y})$。在更早些时候，还没有呈现蕴涵时，这些含义作为有限真值，其具体意义是由其结果来决定的。

§40 “前位”关系和基于16个二元算式或256个三元算式所有类别的运算

作为补充，我们有必要简要地强调一下，“前位”(precede)关系的逻辑的和认识论的趣旨，它是格的最一般化的关系，我们用$\twoheadrightarrow$这个符号来表示。这个关系存在于BJ以及元素x和y之间，其中BJ是共有的部分，有(BJ $\twoheadrightarrow x$)以及(BJ $\twoheadrightarrow y$)；还有在x和y以及它们的BS之间有($x \twoheadrightarrow$ BS)以及($y \twoheadrightarrow$ BS)；但是，按照定义，该关系也存在于x和它本身之间，即($x \twoheadrightarrow x$)。因为，我们总是会有(即使是$z=x$)：

(296) $$x \twoheadrightarrow z，若\ x \vee z = z$$

因此，我们同样有，若$s(x)$是x的和(即这个元素中x是并集)以及$m(x)$是x的积(这些元素中有x的参与，换言之这些元素包括x)：

(297) $$s(x) \twoheadrightarrow x \twoheadrightarrow m(x)$$

例如：pⅠ1是Ⅱ1的s的一个元素，Ⅳ1是Ⅱ1的m的一个元素，我们有Ⅰ1$\twoheadrightarrow$Ⅳ1。

于是，用准确的逻辑语言表述，这个关系($\twoheadrightarrow$)构成的是什么呢？若我们在常数表(222)和(233)中的元素之间的关系上，应用罗素公理的$p \supset (p \vee q)$，我们就可以说($\twoheadrightarrow$)是被简化为了蕴涵关系：$(p \cdot q \cdot r) \supset (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)$，即Ⅰ1⊃Ⅱ1。但是，若[Ⅰ1⊃Ⅱ1]确实总为真(其结果是Ⅷ)，我们刚刚看到了，互反的蕴涵关系[Ⅱ1⊃Ⅰ1]也不是总为假(其结果是Ⅶ2)，且简单地用符号表示为：若$(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)$蕴涵$(p \cdot q \cdot r)$，则$(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r})$简化为$(p \cdot q \cdot r)$。

因此($\twoheadrightarrow$)关系比蕴涵关系更为普遍，它表示了“被包含于”的事实。换言之，Ⅰ1 $\twoheadrightarrow$ Ⅱ1表示“Ⅱ1包含Ⅰ1”抑或“Ⅱ1的事实中包括Ⅰ1的事实的可能”。然而，若这个意义，在所涉及命题的真值立场上，并没有向我们呈现足够的重要性(无论是什么内容)，那么，在我们在运算之间言说的蕴涵的意义上，它作为纯粹的运算机制(它实现命题运算却不受真值限制)，它还是能够实现特定作用的。然而，这样的一个关系，也许从逻辑上来看，并没有什么重要性，但是对于心理学和认识论(§41)而言，在表达一个给定素材的运算构成上，一定有所展现。

鉴于此，我们可以设想任何一个构成($\twoheadrightarrow$)的关系，在二元运算构成模式上的(⊃)，(∨)，(·)，(*)等等，可以看作否定，即元素的补充，不是与$(p * q)$或者与$(p * q * r)$(Ⅷ)之间的关系，而是与16个二元运算或256个三元运算等这样的整个级别之间的关系。于是我们在此将穷举的构成作为研究的重点，即穷尽整个所处的运算级别①。因

① 穷举构成建立在“是里面的内容”这个关系上的，我们“包含”对应到总是为真的构成或一般跨命题演算的“重言式”逻辑。

此，我们会有以下计算式，我们用$\neg$表示余集，以及用$(\overset{\supset}{\twoheadrightarrow})$或$(\twoheadrightarrow)$抑或$(\overset{*}{\twoheadrightarrow})$来表示实施在运算$(\supset)$或( )抑或$(*)$模式下的构成，我们用$m(x)$或$m(y)$来表示$x$或$y$的乘积：

(298) $[x \overset{\supset}{\twoheadrightarrow} y] \equiv [m(x) \cdot m(y)] \vee [\neg m(x) \cdot m(y)] \vee [\neg m(x) \cdot \neg m(y)]$

(299) $[x \twoheadrightarrow y] \equiv [m(x) \cdot \neg m(y)] \vee [m(x) \cdot m(y)] \vee [\neg m(x) \cdot \neg m(y)]$

(300) $[x \overset{*}{\twoheadrightarrow} y] \equiv [m(x) \cdot m(y)] \vee [m(x) \cdot \neg m(y)] \vee [\neg m(x) \cdot m(y)]$
$\vee [\neg m(x) \cdot \neg m(y)]$

等等。

例如（我们从常数表(222)中的二元运算开始），$[(p \cdot q) \overset{*}{\twoheadrightarrow} (p|q)]$推演情况如下：

(301) $[(p \cdot q) \overset{*}{\twoheadrightarrow} (p|q)] \equiv [m(p \cdot q) \cdot m(p|q)] \vee [m(p \cdot q) \cdot \neg m(p|q)]$
$\vee [\neg m(p \cdot q) \cdot m(p|q)] \vee [\neg m(p \cdot q) \cdot \neg m(p|q)]$

然而 $m(p \cdot q) \equiv \{(p \cdot q) \vee p[q] \vee q[p] \vee (p \vee q) \vee (p \equiv q) \vee (q \supset p)$
$\vee (p \supset q) \vee (p * q)\}$

而且 $\neg m(p \cdot q) \equiv \{(o) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (p \mathbin{W} q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$
$\vee \bar{q}[p] \vee \bar{p}[q] \vee (p|q)\}$

同样$m(p|q) \equiv [(p|q) \vee (p * q)]$而$\neg m(p|q) \equiv$剩下的14个二元运算。

于是，我们有了以下关系：

(1)$m(p \cdot q) \cdot m(p|q) \equiv (p * q)$

(2)$m(p \cdot q) \cdot \neg m(p|q) \equiv m(p \cdot q)$中的8个元素，$(p * q)$除外

(3)$\neg m(p \cdot q) \cdot m(p|q) \equiv (p|q)$

(4)$\neg m(p \cdot q) \cdot \neg m(p|q) \equiv \neg m(p \cdot q)$中的8个元素，$(p|q)$除外

所以$(\overset{*}{\twoheadrightarrow})$关系是完全穷举的，而$(\twoheadrightarrow)$关系中还去掉了元素$(p * q)$。

现在我们来验证$[(p \supset q) \overset{\supset}{\twoheadrightarrow} (p \cdot q)]$的关系：

(302) $[(p \supset q) \overset{\supset}{\twoheadrightarrow} (p \cdot q)] \equiv [m(p \supset q) \cdot m(p \cdot q)] \vee [\neg m(p \supset q) \cdot m(p \cdot q)]$
$\vee [\neg m(p \supset q) \cdot \neg m(p \cdot q)]$

然而 $m(p \supset q) \equiv [(p \supset q) \vee (p * q)]$

而且 $\neg m(p \supset q) \equiv$另外14个二元运算

于是，我们有了

(1)$m(p \supset q) \cdot m(p \cdot q) \equiv [(p \supset q) \vee (p * q)]$

(2)$\neg m(p \supset q) \cdot m(p \cdot q) \equiv (p \cdot q) \vee p[q] \vee q[p] \vee (p \vee q) \vee (p \equiv q) \vee (q \supset p)$

(3)$\neg m(p \supset q) \cdot \neg m(p \cdot q) \equiv$剩下的8个二元运算

因此，这种情况下运算$(\overset{\supset}{\twoheadrightarrow})$也是穷举的，然而互反$(p \cdot q) \overset{\supset}{\twoheadrightarrow} (p \supset q)$情况并非如此，

因为$[\neg m(p\cdot q)\cdot m(p\supset q)]$结果为O。

我们同样有：

(303) $$[(o)\overset{\vee}{\twoheadrightarrow}(p\cdot q)]=[m(o)\cdot m(p\cdot q)]\vee[m(o)\cdot\neg m(p\cdot q)]\vee[\neg m(o)\cdot m(p\cdot q)]$$

然而$m(o)\equiv 16$个二元运算，于是$\neg m(o)=O$。

因此$[m(o)\cdot m(p\cdot q)]$包括$(p\cdot q)$在内的8个二元运算，而$[m(o)\cdot\neg m(p\cdot q)]$ 8个不包括$(p\cdot q)$在内的二元运算。因此这个运算也是穷举的。

于是，利用(239)这个范式的常数表，我们很容易在二元算式中使用同样的这些运算。例如，我们有

(304) $$(123)\overset{\prime}{\twoheadrightarrow}(1)\quad[m(123)\cdot m(1)]\vee[\neg m(123)\cdot m(1)]\vee[\neg m(123)\cdot\neg m(1)]$$

然而$m(123)$ 123和1234列，然后$\neg m(123)$其他的14列。同样$m(1)$ 1，12，13，14，123，124，134以及1234列，然后$\neg m(1)$剩下的8列。于是，我们有了：

(1) $m(123)\cdot m(1)=m(123)$

(2) $\neg m(123)\cdot m(1)$ $m(1)$中的8列，其中123和1234列除外

(3) $\neg m(123)\cdot\neg m(1)\equiv$剩下的8列

因此，这个运算也是穷举的。

需要注意，同样的这些非穷举的运算，它们遵守着INRC转换群中的某些法则。

为简化演示，我们专门举一个二元运算的例子：

(305)(I)$[(p\cdot q)\overset{\cdot}{\twoheadrightarrow}(p\supset q)]$ $(p\supset q)\vee(p*q)$

(N) $[(p\cdot q)\twoheadrightarrow(p\supset q)]$ 16个二元运算，除$(p\supset q)$和$(p*q)$以外

(R)$[(p\cdot q)\overset{\cdot}{\twoheadrightarrow}(q\supset p)]$ $(q\supset p)\vee(p*q)$

(C)$[(p\cdot q)\twoheadrightarrow(q\supset p)]$ 16个二元运算，除$(q\supset p)$和$(p*q)$以外

这里14个(N)是2个(I)的余集，14个(C)和2个(R)之间，也是如此关系。14个(C)是14个(N)的R，2个(R)和2个(I)之间，也是如此关系。

自然可以反过来进行，所有同样的运算，可以让该演算应用到$s(x)$以及$s(y)$上。运算间完整的蕴涵关系(命题302和304)，在这些构成中是唯一需要注意的地方，这里得到的结果不再是"$(p\supset q)$包含$(p\cdot q)$"，而是回过头来说"$(p\cdot q)$是$(p\supset q)$里面的内容"。除了它们这些表面的注意点之外，作为关系考虑时，这些运算还可以简化为同样的"前位"(↠)或"后继"(↞)关系的构成(参看§44)。

§41　65 536个四元运算等的四重行列对查常数表

在寻求导出256个三元运算集合系统的属性和所及范围之前，我们还需要承认并

展示这样的一个系统的普遍性，它不仅限于只有二个命题。我们在(§3?)中已经看到，我们怎样从4个一元组合 p、$\bar{p}$、$o(=p\cdot\bar{p})$ 以及 $p\vee\bar{p}$，转变到16个二元运算的常数表(用 p 和 $\bar{p}$ 与四个组合 o、q、$\bar{q}$ 以及 $q\vee\bar{q}$ 相乘)。我们接着展示了怎样用 p 和 $\bar{p}$ 与16个(q，r)的组合进行乘法运算，于是，我们得到了256个三元运算常数表的母元素(G1和G2)。于是，这里我们只需要进行同样的操作，就可以得到65 536个四元运算。

假设，这里由3个命题 q、r 和 s，我们将给它们256个可能的三元运算形式：$q\cdot(r\cdot s)$；$q\cdot(r\cdot s)$；$q\cdot(r\cdot s)$；…；$q\cdot(r\cdot s)$；$q\cdot(r\cdot\bar{s})$；…；$q\cdot r[s]$；…；$q\cdot(r\vee s)$；…等等一直到 $q*(r*s)$]。然后将这256个区分运算[即常数表(233)中的运算]与 p 相乘，于是，我们得到了一个新的方格表的上边(G1)。同样，将这256个正向的顺运算与 $\bar{p}$ 相乘，我们得到了255个新的运算(O是G1和G2两个集合中共有的运算)，我们将其在常数表的左边(G2)纵向排列，顺序是每一个运算对应上G1，使得G1上每个运算的互反都对应在G2上。于是，我们就有了65 536个四元运算常数表的母元素。我们在用G1的反演安置在方形的最下边(G3)，顺序是与G1呈中心对称位置关系。同样G2的逆运算得出G4的元素，分置在方格的右边(与G2呈中心对称关系且与G3为互反关系)。成对的G1和G2之间的加法运算(V)得到了常数表中间的元素集合，然而成对的G3和G4之间的乘积(·)，会在共有的部分得到同样的元素。

于是，所有的元素总共有256×256 [=] 65 536个。每个对角线上有256个元素，其中一条上面的元素有R-I以及C-N的关系，另一条上则是R-N以及C-I的关系。该常数表的一般特性和常数表(233)和(239)将是一致的。毫无疑问，我们有必要建构出这张新表，下面(306)只是我们勾勒的一个简单的示意图。

(306) (Nº 1)	(Nº 2)	(Nº 3)	(Nº 4)	(Nº 255)	(Nº 256)
O	$p\cdot[q\cdot(r\cdot s)]$	$p\cdot[q\cdot(r\cdot\bar{s})]$	$p\cdot[q\cdot(\bar{r}\cdot s)]$ …….	$p\cdot[\bar{q}\mid(\bar{r}\cdot\bar{s})]$	$p\cdot[q*(r*s)]$
(Nº 511) $\bar{p}\cdot[\bar{q}\cdot(\bar{r}\cdot\bar{s})]$	2 + 511	3 + 511	4 + 511……….	255 + 511	
(Nº 510) $\bar{p}\cdot[\bar{q}\cdot(\bar{r}\cdot s)]$	2 + 510	3 + 510	4 + 510……….	255 + 510	
(Nº 509) $\bar{p}\cdot[\bar{q}\cdot(r\cdot\bar{s})]$	2 + 509	3 + 509	4 + 509……….	255 + 509	
					$\bar{p}\mid[\bar{q}\cdot(\bar{r}\cdot s)]$
	(2 + 257)			255 + 257	$\bar{p}\mid[\bar{q}\cdot(\bar{r}\cdot\bar{s})]$
(Nº 257) $\bar{p}\cdot[q*(r*s)]$	$p\mid[\bar{q}\mid(\bar{r}\cdot\bar{s})]$	……	…………	$p\mid[q\cdot(r\cdot s)]$	$p*[q*(r*s)]$
					(256 + 257) = nº 65536

很明显，我们后面还可以用 p 和 $\bar{p}$ 继续翻倍这65 536个运算 q、r、s、t。这样，我们就有了65 536×65 536 [=] 4 294 967 296个运算；以此类推。

第八章　二值运算系统的属性群、格或群集

这部分的写作目的在于，借助于二值运算的案例，来探讨256个三元运算的运算机制①。现在我们需要总结并探寻我们刚刚在第七章中描述的集合系统是由什么构成的。

§42　问题的提出

二值逻辑的运算，显然与理智的真实运算维系着某种关系。然而，后者建构了一个独有的运算结构，以最简单的命题为平台层层递进，这些命题建构出了分级或一系列的关系，一直到 n 个命题之间纯粹的范式连接。该结构可以做到与众不同，是建立在科学思维的层面上的，通过否决某些规则，加入新的公理（多值逻辑），还有不排除运算的基础结构的独特性，于是该结构自然会导致这些区别的产生，同时该结构的生成可以从关于心理发展的分析来进行追踪研究。

我们诚然愿意再探究一次，但是这一次，考虑到先前关于256个三元运算的数据，我们要探究这样的一个系统是由什么构成的。

很清楚地可以看到，这个系统非常接近，首先，群的概念，因为在每个新的转换出现的时候，这里包括表(233)中的逻辑加法(∨)和逻辑乘法(·)，我们都能看到基础的4种转换INRC群。其次，我们都相当熟悉的布尔代数，命题的二值逻辑算式构成的"环"，也就是说，由一个类似的运算伴随的一个族群（加上非共同部分，合取共同的部分）。于是，我们可以假设，思维真正运算的结构是一个群结构，这一观点已经有人支持了，特别是G. 朱维(G. Juvet)②。

然而，若群结构实际上表现为理性运算的更基础的集合的组织化形式，那么它就具有可逆性③，可是，这里有两个背景状况阻止我们将其看作可以说明的充分条件。此

① 参看§34。

② 参看G. 朱维：《公理和组群理论，内心集会活动，科学心理学系列》(L'axiomatique et la théorie des groupes, *Actes du Congrès intern. de Phil. scient.*)，第Ⅵ卷，赫尔曼出版社出版(Hermann)，1936。

③ 毫无疑问，可逆性是智慧运算的最普遍的心理学准则。参看我们的《智慧心理学》(科林出版社出版)。

外，这两个背景状况事实上只有一个可行。第一个是，某些运算在逻辑上是必不可少的，但是，它们不能放入转换之中，即使是群的转换①：比如，自嵌套关系 $p \supset p \cdot p$。第二个是一些当代数学家已经放弃的观点，即在一个独立的群中，最一般性的运算基本原理，可以被部分地转移到另一个他们认为同样重要的结构中，更精确地说，是一个嵌套以及自嵌套的系统：即“格”或“网”②。

我们说，若一个系统是由格构成的，必须满足下面 3 个条件③：

1. 系统中的任何一对元素 x、y，对应一个且只有一个系统元素 xy，即：

(307)　$$(x \cdot y)z = x(y \cdot z),\quad x \cdot y = y \cdot x \quad \text{以及} \quad x \cdot x = x$$

2. 系统中的任何一对元素 x、y，对应一个且只有一个系统元素 $x+y$，即：

(308)　$$(x+y)+z = x+(y+z),\quad x+y = y+x \quad \text{以及} \quad x+x = x$$

3. 等值关系 $x \cdot y = x$ 会得出 $x+y=y$，反之亦然：

(309)　$$[x \cdot y = x] \supset [x \vee y = y] \quad \text{以及} \quad [x \vee y = y] \supset [x \cdot y = x]$$

若我们有 $x \cdot y = x$，我们也可以说 x“前位于”y（对此我们可以表达为 $x \twoheadrightarrow y$）。

于是，很明显表(233)构成了一个网，并且我们已经从上确界($x \vee y$)和下确界($x \cdot y$)出发，了解了其中的主要关系。因此，我们可以下结论说，思维运算的基本结构就是格吗？然而，这里再次有两个困难拦住了我们，毫无疑问，它们的难度之前的疑问是一样的。

第一个困难是，在一个逻辑运算系统中，不只有格，还有可逆性的群。确实，所有的格都有一定的可逆性，但是需要在二元运算的特别原则的形式下才能实现：若 x 前位于 y（我们记作 $x \twoheadrightarrow y$），于是我们有 $x+y=y$；于是，按照二元性，对这个关系，我们有如下结论：$y \twoheadrightarrow x$ 对应于 $x \cdot y = y$（从 $\twoheadleftarrow$ 到 $\twoheadrightarrow$ 和从 $+$ 到 $\cdot$ 的替换）。

然而，这是一个互反关系，而非反演或否定的关系（这个关系，我们将在§ 4[illegible] 节中讲到）。所以，不是所有的格都会构成一个群，也不是所有的群都会构成一个格（相反一个群的一些子群集合会构成一个格）。格和群之间的关系是要复杂得多的。我们在高度一般化的网的集合中，区分出一个特别的分级：“戴德金结构”的分割（“对偶群”，Dualgruppe），其特征是有这样的关系：$[x \vee (y \cdot z)] \supset [(x \vee y) \cdot z]$。后者包含了其自身从而形成了一种特殊的网，其特征呈现为这种关系：$(x \cdot z)+(y \cdot z)=(x+y) \cdot z$。最后，在后者中还有这样一种特殊种类，其特征是整体被“补集”（即一个元素的否定）定义：比如，布尔代数，我们刚刚回溯过，其特征构成了环。因此，一个格要构成一个有

① 参看后面的§43。

② 如我们所见，布尔巴基学派(Les Bourbaki)分出了三大类结构：他们将群归并进“代数结构”，网归并进“次序结构”。

③ 参看 V. 格里文科(V. Glivenko)，《结构的一般理论》(*Theorie general des structure*)，赫尔曼出版社，1938。

着特别是可逆性特点的逻辑运算系统，还缺少很多东西。

第二个困难存在于，每次我们力求在最一般性的数学结构中建立逻辑运算时，这些结构——特别是在网的例子中——就会大大地超出了逻辑运算的限制性系统，我们假设存在一种源自格式的循环，如下所述。我们将一个非常一般化的结构称为X(这里是格，同时对群也为真)。然后，我们指出该结构X包括一系列越来越受限制的子结构Y，Y′等等。在一定数量的规定之后，我们限定了一个特定的集合Z，而这个集合本身是符合逻辑的。路上的一个人，比如说，是一个心理学家，他在沉思，若不是用系统Z中的运算，数学家该用什么建构他的常规的系统X呢？对于一个逻辑学家，他是不用烦恼去寻找，因为在那些最一般化的形式下定义的结构中，即使是对于格(或群)的定义，一定有一系列的逻辑关系存在。

例如，我们可以定义一个格[用与命题(277)—(279)等价的形式]，从与“前位”关系相同的概念出发：x 前位于 y——抑或，反过来，我们抽出这里的基本关系($x \cdot y = x$ 和 $x \vee y = y$)中的 $x \rightarrow y$。在这两种情况中，关系“x 前位于 y”或“y 后继于 x”是一个可传递的不对称的关系，并且，在这两种情况中，我们通过嵌套关系，使得这个关系有了结构的联系，正是这些嵌套显示出格的特征。难道这不正是这些关系逻辑和类别逻辑蕴涵了格的理论吗？更別说，也正是关系逻辑和类别逻辑使得G. 伯克霍夫(G. Birkhoff)，O. 欧尔(O. Ore)，V. 格里文科(V. Glivenko)等人，可以去建构他们的严密的推论系统的命题。假如我们说，格本身是一件事，在某些特殊情况下，它包含了逻辑，而那些给定条件或描述格的命题又是另外一件事，是它建构了逻辑的形式，却与这些命题的内容没有关系，也就是说，在这种情况下，只和格自己有关系，难道真是这样么？然而，难道格(或群，若我们从这个概念中产生逻辑系统)本身是一个内容，其中包括了它自己在特定情况下的形式，而逻辑是一个无关乎其内容的形式，难道它还要从别处获得自己的内容吗？

为避免这样的悖论，只有一个解决办法，B. 罗素在建构自己的关于类型的理论时，也遇到了相似的悖论：在形式化进程中区别出连续的不同阶段，例如，这些阶段中的一个阶段的特有“形式”，可以当作那些上面阶段上的“内容”，但是，我们却不能一次说完所有的形式和内容的，如果那样，就好像形式化是一个状态，而不是一个进程①。

然而，从这一点来看(而且对于这个问题的回溯，让我们回到了逻辑运算的唯一系统问题上了)，很明显，为建构一个严密推论的命题系统，需要预先对客体进行分类，在这些客体之上建构起命题，并在其间建立了一定数量的关系。这样的分类或系统关系已经是——自然是——命题的内容，但是，这里的内容，在能够成为可以产生一个跨命

① 参看我们的《逻辑通论》，第一章，§2。

题的转换之前，首先需要根据其本身的内容被判定为真或为假。然而，这些分类的以及关系的结构从一开始就介入了最一般化结构（比如格和群的结构）的建构中。于是，这里就没有矛盾了，如果有一个循环，在这些结构的特殊情况下，寻找该结构的逻辑，再返回到原来的结构中（或者作为这个循环来描述这些结构），这都是没有缺陷的；但是，这里有一个条件，即不要将逻辑建立在一个单独的水平上。相反，我们需要在结构内部去区分不同结构变化的复杂性；这些可能被看作比所说的一般性结构更为基础的存在，于是它们可以先于并进入这些结构的建构中，然而，另外一些可能更为复杂，并且只有在特殊情况中，才可以在一般性结构中找到它们。

因此，为获得逻辑运算的唯一系统，需要尽可能地从最基础的结构——即类别化的或关系链的结构——出发，并与诸如表(222)和(233)中的系统的基础结构所指示的连续进程相结合。然而，唯一可以确定的是，这些结构的共同元素在形式的等级中处于不同水平，并且因此而形成了它们与群结构或格结构之间的关系。

因此，这样的分析不可能是一个简单公理化的结果：通过有效性，而形成运算本身的世系关系，也就是说，处于最底层的运算机制，其公理从来都不是反省性的，亦不是不完全强制性的形式化。

§43　命题系统与类别化或系列化的基础性结构之间的关系

1. 我们从分类集合的结构出发，毫无疑问这应该是最简单的结构：类别化。假设有一个类别 A 被嵌入另一个类别 B 中，后者本身也是属于 C 部分，如此等等，再假设有类别 A′、B′等等，这些类别便有了如下关系：$A+A'=B$，$B+B'=C$ 等等，以及 $A\times A'=O$，$B\times B'=O$ 等等：

(310)　　$A+A'=B, B+B'=C$ 等等，以及 $A\times A'=O, B\times B'=O$ 等等

这样的一个系统是格的母源，因为 B 是 A 和 A′的上确界 BS，C 是 B 和 B′的 BS；等等。此外，这些“第二类别”A′、B′等对应于其所属网的“第一类互补元素”。相反，所有的下确界 BI 都为空，除非在包含情况下，有：$A\times B=AB$，$A\times C=AC$，$B\times C=BC$，等等。所有这里我们没有呈现为一个完整的格，而只是一个半格[①]。

这个系统同样也是群的母源，因为这些非共有的部分 A、A′、B′、C′等等，可以用联合与逆转的方式进行合并或分解，只要这个系统所包含的同一运算（中性集合）只有 O。

① 参看《逻辑通论》，第 95 页。

但是运算 $A+A=A$，$A+B=B$，$A\times A=A$，$A\times B=A$，这些体现了系统中“格”的特征并不属于群①。

类别化系统既不是一个格，也不是一个群，而是一个半格，是这样一个系统，只有其中非共有部分才构成了一个群(或因为二元性而拥有的共有部分，而不是非共有部分)。于是，我们开始思考，这个基础系统——我们在后面称之为简单类别化——和表(222)，(233)，(306)等之间有什么关系。

为此，我们还要引入另外两个基础性系统，它们派生于所谓的类别化。我们将简单类别化中的类别 A 称之为 $A\alpha$，并且将它的互补类别 A' 分解为不相交的类别 $A\beta$，$A\gamma$ 等。于是，每个类别 $A\alpha$，$A\beta$，$A\gamma$ 都有一个在 B 下的互补类别 A'；其中：$A\alpha+A'\alpha=A\beta+A'\beta=A\gamma+A'\gamma$ 等等 $=B$。这样，我们又有了 $A\alpha\times A\beta=0$，$A\alpha\times A\gamma=0$，$A\beta\times A\gamma=0$，但是 $A'\alpha A'\beta$ 或 $A'\alpha A'\gamma$ 等等是不为空的。我们将这个合成称为一个替代(vicariance)：

(311) $$A\alpha+A'\alpha=A\beta+A'\beta=\text{等等}=B$$

另一方面，我们可以将这两个简单类别化的元素彼此相乘，诸如：$A_1+A'_1=B_1$，$B_1+B'_1=C_1$ 等等，以及 $A_2+A'_2=B_2$，$B_2+B'_2=C_2$ 等等。

(312) $$B_1\times B_2=A_1A_2+A_1A'_2+A'_1A_2+A'_1A'_2=B_1B_2$$

于是，我们得到的一个二位行列对应表，例如 B_1B_2 有 4 个元素，C_1C_2 有 9 个，等等：

(312 乙)

	A_2	A'_2	B'_2	$C'_2\cdots\cdots$
$A_1\cdots\cdots$	A_1A_2	$A_1A'_2$	$A_1B'_2$	$A_1C'_2\cdots$
$A'_1\cdots\cdots$	A'_1A_2	$A'_1A'_2$	$A'_1B'_2$	$A'_1C'_2\cdots$
$B'_1\cdots\cdots$	B'_1A_2	$B'_1A'_2$	$B'_1B'_2$	$B'_1C'_2\cdots$
$C'_1\cdots\cdots$	C'_1A_2	$C'_1A'_2$	$C'_1B'_2$	$C'_1C'_2\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

所以，该表所展示的是，在简单类别化 $A_1+A'_1=B_1$ 中的每个基础类别(A_1；A'_1；B'_1；C'_1)和简单类别化 $A_2+A'_2=B_2$ 中的每个基础类别(A_2；A'_2；B'_2；C'_2)之间，两两合成的情况。我们将这个系统称之为：类别的二值—单值乘法。从一般结构来看，这个结构

① 确实，我们承认环的存在，也认可“等幂”元素的群的存在，具体说来，诸如 $A+A=A$(与之相反的是 $A+A=2A$ 或 $A\times A=A^2$)。例如纽曼(1942)就曾构建了一个环的抽象结构，他借助的是直接合并布尔代数和布尔环与非结合的可行性[参看 G. 伯克霍夫(G. Birkhoff)，《格理论》(*Lattice theory*)，第二版，第155—158页]。在逻辑结构中，幂等性对应于一个运算，同时也对应于其他运算。然而这个运算则不能用组合的方式和顺运算以及逆运算进行组合，比如，$A+(A-A)=A$ 并且 $(A+A)-A=0$。这就是为什么这样分解的一个系统不是一个群，准确说来：群进入了主项，并被限制在一个不相交的部分集合中(A，A'，B'等等)。

只是两个半格的乘法组合，因为这些简单类别化只是半格。但是，这种乘法组合的结果是将初始的结构转换成为一个更加接近完整的格的结构，因为运算(310)缺少了形成一个格所必要的下确界，我们就用其本身的乘法运算把缺少的部分给带进去。

Ⅱ. 于是，我们可以通过乘法运算(312)而得到表(222)，我们用命题 p 对应 A_1，用命题 $\bar{p}$ 对应 A'_1，用命题 q 对应 A_2，命题 $\bar{q}$ 对应 A'_2。我们首先注意到(312)中的 4 个组合对应了命题的 4 个基础组合 $p * q$ ＝ $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$。于是，我们建构了一个新的表，其中我们设置了两个行列对查，不仅包含两个类别 A_1A_2 和 $A_1A'_2$ 和两个类别 A'_1A_2 和 $A'_1A'_2$（参看 312），还包括了类别 O 以及两个组合 A_1B_2 和 A'_1B_2，也就是说①：

(313)　　$A_1B_2 = A_1A_2 + A_1A'_2$　以及　$A'_1B_2 = A'_1A_2 + A'_1A'_2$

于是，我们得到了 4 个类别的两个行列对查，这样我们可以同时进行两两之间的加法运算（方向是 ↘）和（在 B_1B_2 下面的）互补部分的乘法运算（方向是 ↖）。从表(314)中我们可以立即看到它是如何与表(222)的运算项彼此对应的：

(314)

O	$A_1A'_2$	A_1A_2	$A_1B_2(=A_1[A_2])$
A'_1A_2	$A_1A'_2+A'_1A_2$ $(=A_1 \mathrm{W} A_2)$	$A_1A_2+A'_1A_2$ $(=A_2B_1$ 或 $A_2[A_1])$	$A'_1A_2+A_1B_2$ $(=A_1 \vee A_2)$
$A'A'_2$	$A_1A'_2+A'_1A'_2$ (A' | A)	$A_1A_2+A'_1A'_2$ (A　A)	$A_1B_2+A'_1A'_2$ (A　A)
A'_1B_2 $(=A'_1[A_2])$	$A_1A'_2+A'_1B_2$ $(=A_1 \mid A_2)$	$A_1A_2+A'_1B_2$ $(=A_1 \supset A_2)$	$A_1B_2+A'_1B_2$ $(=A_1 * A_2)$

换言之，为了从 4 个类别的(312)过渡到表(314)，我们从集合(312)出发建构了“部分的集合”，通过将这 4 个类别的 n 到 n 进行组合，其中也包括了 O 和全部(即 16 种组合)。我们因此得到了一个四位运算的行列对查表，既是可加性的又是可乘性的，这正是表(222)的形成原因。

Ⅱ乙. 至于 256 个三元运算表(233)或(239)，很容易进行同样的乘法运算 $B_1 \times B_2 \times B_3$：

(315)　　$B_1 \times B_2 \times B_3 = A_1A_2A_3 + A_1A_2A'_3 + A_1A'_2A_3 + A_1A'_2A'_3 + A'_1A_2A_3 + A'_1A_2A'_3 + A'_1A'_2A_3 + A'_1A'_2A'_3$

我们将这 8 个三元类别标号为 1，2，3，…，8；我们立刻就可以发现它们对应的是表

---

① 若我们使用符号关系 $p[q]$ ＝ $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$，我们可以将 A_1B_2 表示为 $A_1[A_2]$ 以及 A'_1B_2 表示为 $A'_1[A_2]$。

(239)中的8个三位运算$(p \cdot q \cdot r)$，$(p \cdot q \cdot r)$，等等。于是沿着表的最上面一行分布了前4个类别，并加上O，接下来是它们的两两组合（如12，等等），然后是3，3的组合（123，等等）。于是我们有了：

(316)　　O；1；2；3；4；12；13；14；23；24；34；123；124；134；234以及1234

这里对应了表(239)的顶边(G)；我们对三元类别5—8进行同样的操作，于是我们就有了表(239)的左边界(G)。于是，只需将这31个三元类别两两相加，就可以得到一张和表(233)和(239)的项一项对应的表。

Ⅲ.从结构的世系关系——这个问题我们会在§44节中进行讨论——来看，我们还需要理解从乘法集合(312)或(315)到"由表(314)（或对应的单元运算表）构成的"部分集合的转换，这可能被看作是类别化本身的种概括化，而这是由替代(311)构成的。我们从命题(312)的4个类别的乘法运算出发，再将其中的每一个（乘法）看作一个基础类别，于是，我们可以确定如下：

(317)　　$A_{\mathrm{I}} = A_1A_2$，　$A_{\mathrm{II}} = A_1A'_2$，　$A_{\mathrm{III}} = A'_1A_2$　以及　$A_{\mathrm{IV}} = A'_1A'_2$

若我们按照(315)中的模式用各种可能的方式[按照(311)的替换]对这4个基础类别进行"分类"，于是我们可以得到：

1级 O

4级 A（A_{I}到A_{IV}）

6级 B（$B_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}}$，$B_{\mathrm{II}} = A_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{III}}$，等等）

4级 C（$C_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}} + A_{\mathrm{III}}$，$C_{\mathrm{II}} = A_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}} + A_{\mathrm{IV}}$，等等）

1级 D（$D = C_{\mathrm{I}} + C_{\mathrm{II}} = C_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{III}} =$ 等等）

同样对于对应于(315)的8个基础类别A_{I}到A_{VIII}，我们会得到256个组合，等等。

因此"部分的集合"只是类别化的概括化，它致力于用同样的始发元素，绘制出所有可能的类别化的表，其中引入了替换为媒介。

Ⅳ.在探讨这些结合的意义之前，我们另外展示一下，我们在类别的二值乘法运算，表(312乙)中已经发现的与转换群INRC等值的关系。

我们首先要注意，在(315)简单类别化中，A的互补项是：

(318)　　$\bar{A} = A' + B' + C' +$ 等等

然而A'只是A在B下面的互补项；以及B'是B在C下的互补；如此等等。这就是为什么我们在形成对应如：p与A'_1的对应以及q与A'的对应时（参看小点Ⅱ），我们必须将自己限制在整体类别B中。

这就是说，编号为1，2，3和4的类别A_1，A'_1，B'_1和C'（在下面它们的组合中，总是将这些编号安置在左边）构成了表(312乙)乘积的第一个集合；编号为1，2，3和4的类别A_2，A'_2，B'_2和C'（总是放置在右边）构成了乘积的第二个集合。通过组合左边的$n^{\circ}1$到4和右边的$n^{\circ}1$到4，于是，表(312乙)就转变为了编号的排列，形式为(319)。于是，我们可以将后继的转换与INRC群进行类比[应用在表(222)，(233)或(239)中的]：

(319)

	1	2	3	4
1……	11	12	13	14
2……	21	22	23	24
3……	31	32	33	34
4……	41	42	43	44

① 类别 A A 的否定 N 或反演(与补部分)是A A 。反过来,我们称呼一个给定元素 n n 的 SN 为半反演,其中它们的编号是 $n'_1 n'$ 分别加上 n n ,从而得到 55、即,举例说明,类别 A A (11),其 SN 将是 C′C′(44),因为 11 + 44 = 55。这个排序编号的加法运算的意义是纯粹逻辑的:因为这些嵌套关系(包含)AB;BC 以及 CD,基础等级的编号 A 1,A′ 2,B′ 3 以及 D′ 4 也因此表达了对应的上确界,A,B,C,D 的包含次序。说 A A 是 C′C′ 的 SN,即是断言两个类别 A A 和 C′C′ 在各自行上的和,对应于 D′D′或D D 的行,若整体类别等级是 D D 。同样,说 B′A′(32)是 A′B (23)的 SN,因为 32 + 23 = 55,即是断言这两个类别所在行的组合等值于 D′D′或D D 的行,即被认定为整体类别的 D_1D_2 的互补类别②。

一般情况下,当 n n 序列中的类别 XY 是乘法类别 Z Z 的一部分,则 XY 的半反演将是行 $n'n'$ 中的一个类别 XY,若 $(n\ n) + (n'\ n')$ 得到 $n''n''$(这里 n'' n''),即类别 $Z'_1Z'_2$ 的行:

(320)　　$SN(XY)n_1n_2=(XY)n'_1n'_2$　若　$(n_1n_2)+(n'_1n'_2)=n''_1n''_2(Z'_1Z'_2)$

然而,我们发现,表(312 乙)或(31)中的元素,分别成对地是彼此的 SN,且这样的事情发生在与表中心对称分布的成对的两个元素之间:22 和 33;13 和 12;12 和 13;11 和 41;等等。

② 一个类别 A A 的互反 R 是通过其分量运算中各单项的逆运算获得,即:R(A A) (A A)。另一方面,我们说,两个元素之间有半互反 SR,当其中一个元素所在的行,通过调换左边的号码和构成另一个所在行的右边号码而获得;举例说明,12 和 21,即 A A′调换为 A′A ;抑或 C B′的 SR 是 B′C′通过 13 对 31 的调换;等等。

一般情况下,若一个类别 XY 属于行 n n',其 RS 将是行 n'_1n 中的另一个类别 XY(抑或其本身,若 $n_1n'_2=n'_1n_2$):

(321)　　$SR(XY)\ n_1n'_2=(XY)\ n'_1n_2$

① 即"初始类别"A,B,C,D。参看《逻辑通论》,第 104 页。

② 若整体类别被认定为(D D),则其互补就是 D D′,实际上就是在下一个序列中对自身的否定($\overline{D_1D_2}$),因为下一个序列就是"整体"。

然而，我们在表(322乙)或(309)中看到一个元素的半互反 SR，总是与该元素相对于对角线↘对称的，即 12 和 21；13 和 31；14 和 41；等等。

此外，我们注意到，在与表(222)和(233)的互反 R 中新的类比，位于对角线↘上的元素都是自己本身的半互反：11,22,33 以及 44(因为行之间的交换发生在同一行中)。

(6) 类别 A_1A_2 的对射(即 $A_1 \times A_2$)是由 $A_1 + A_2$ 来定义的(这里是 × 和 + 的交换)。所以表(319)中元素的对射即：

$$C(11)=11+12+13+14+21+31+41$$

$$C(21)=21+22+23+24+11+31+41$$

$$C(12)=12+22+32+42+11+13+14$$

……

$$C(44)=41+42+43+44+34+24+14$$

换言之，每个元素都位于垂直的列和(水平的)行的交叉点上，其对射就是这一列和这一行中所有元素的组合。

我们还发现，对射，一如往常，还是互反 R 的逆运算，即 C=NR。因为 A_1A_2(11)的互反是 $A_1'A_2'$，即，既不属于 A_1 行的元素，也不属于 A_2 列的元素的集合；对射则刚好相反，是 A_1 行的元素和 A_2 列的元素的集合。

也就是说，我们以此类推，对于一个给定的所在行是 n_1n_2' 的元素的半对射，称为 SC，则该元素的所在行是 $n_1''n_2'''$，例如 (n_1+n_2''') 和 $(n_2'+n_1'')$ 得到结果 $n_1''''n_2''''$(这里 n'''' n'''')，也就是，类别 Z'Z' 所在的这一行，即所有所选类别的互补类别。

(322)　　SC(XY)n_1n_2' = (XY)$n_1''n_2'''$，若 $(n_1+n_2''')(n_2'+n_1'')$ = $n_1''''n_2''''$(Z'Z')

例如，若被设定的元素是 A_1B_2'(=13)，其半对射则是 $A_1'C_2'$(=24)，因为 $(n_1=1)+(n_2'''=4)=5$，且 $(n_2'=3)+(n_1''=2)=5$，这里(1+4)(3+2)=55。

于是，我们看见半对射 SC 是半互反 SR 的半反演 SN，因为我们交换了 A'C'(=24)到(42)，并且 13+42=55；然而交换行是半互反的特性，并且 55 下的互补部分($D_1'D_2'$行，整体类别 D_1D_2 的否定)是半反演本身。

另一方面，我们发现，一个既定元素的半对射SC是其相对于对角线↙的对称：即 31 和 42(因为 31+42=55)；21 和 43(因为 21+43=55)；11 和 44；22 和 33；12 和 34(因为 12+34=55)，等等。

最后，我们发现所有在对角线↙上的元素都和本身的半对射SC对等，因为它们本身的行交换之和得到了 55；比如 41+14=55。相反，同样的这些元素的半反演 SN 等同于它们的半互反 SR；比如 41 的半反演 14 也是其半互反。

从这些发现中，我们首先总结得到的是，3 种转换 SN，SR 以及 SC，加上同一性转换 I，构成了一个与转换群 INRC 类似的群。因为我们有：

(323) $$(SR)(SC)=(SC)(SR)=SN$$

$$(SN)(SR)=(SR)(SN)=SC$$

$$(SN)(SC)=(SC)(SN)=SR$$

以及(324) $$(SN)(SC)(SR)=(SR)(SN)(SC)=\text{等等}=I$$

例如 $$(12\xrightarrow{SN}43\xrightarrow{SC}21\xrightarrow{SR}12),$$

也就是 $$(A_1A_2')\xrightarrow{SN}(C_1'B_2')\xrightarrow{SC}(A_1'A_2)\xrightarrow{SR}(A_1A_2')$$

抑或 $$(34\xrightarrow{SN}21\xrightarrow{SC}43\xrightarrow{SR}34)$$

也就是说 $$(B_1'C_2')\xrightarrow{SN}(A_1'A_2)\xrightarrow{SC}(C_1'B_2')\xrightarrow{SR}(B_1'C_2')$$

若我们从比如表(312 乙)或(319)中的 16 个元素转换到 9 个、4 个或到 25 个、36 个元素等，我们自然也会看到同样的转换 I，但是对于 SN 和 SC 则具有不同的意值，因为这两个转换和所选择的整体类别有关(B_1B_2 有 4 个，C_1C_2 有 9 个，D_1D_2 有 16 个，E_1E_2 有 25 个元素，等等)。

然而，这个群需要注意的是，若同一个元素的 SN 和 SC 根据所涉的类别，而改变了意值，相反，作为建立在简单的交换之上的半互反 SR 还是保持不变，因为与对角线↖相对的对称不会随着表的增加而改变(该对角线与另外一条对角线对称或表的中心对称相反，它并不会移动，只是简单地增加长度)。

例如，无论被考虑的类别 Z_1Z_2 如何扩展，元素 $A_1'A_2$，其 SR 总是 A_1A_2'；同样对于类别 B_1A_2(即 A_1A_2 和 $A_1'A_2$ 的组合)，总是有 SR 为类别 A_1B_2(因为 A_1A_2 是其本身的互反，然后 $A_1A_2+A_1A_2'=A_1B_2$)。然而元素 $A_1'A_2$ 的 SN，抑或其 SR 的 SN(即 SC)会随着系统一的整体类别的最终行的变化而变换意值。

V. 若我们可以提出一个如(312)或如(314)这样的乘法运算表，类似于(222)或(233)这样的跨命题运算表，并且只要类别化乘法像(312 乙)一样已经包含了群 I、SN、SR、SC，其中还有半互反 SR，那么，无论所考量的整体类别如何，我们都能了解(255)、(257)和(261)相似的原因：因为，这些关系，准确说来是建立在表(233)或(222)母线加

① 需要条件，自然也是这样，有一个方格表，即整体类别的 n_1n_2 行是 $n_1=n_2$。若被选的整体类别中 $n_1<n_2$，需要用另外可能的组合补充完整的乘法表，直到 $n_1=n_2$。

② 对于不成对的奇数的方格(3、5 等)，存在一个中心元素，它是自己的 SR、自己的 SC 甚至是自己的 SN。最后一个概念并不矛盾(因为这可以是一个自己本身↘的运算)，因为它表示的仅仅只是占据可能的 n_1n_2 行中线位置的这个元素。

③ 至于 INRC 转换群本身，它若被应用在表(312 乙)以及整体类别的集合整体上，则自然会超出这些表的限制，因为 A_1A_2 的否定↘，即，表示其他可能的类别的集合，即从整个推理论域出发的 A_1A_2 的互补部分，而不只是嵌套接合的 B_1B_2 或 C_1C_2 等类别下的互补。这就是为什么，若我们想将表(222)、(233)等的结构与类别的基础性结构对比，需要考虑的是转换群 I、SN、SR、SC，也是因为同样的限制原因，这也表示这是类别和其乘法运算的基础特质。

法集合(G1 和 G2)或乘法集合(G3 和 G4)的互反的基础上的。

然而相似性的概念是建立在关系逻辑上的——我们之前试图另外展示的逻辑的基本结构准确地建立在互反关系之上[1]。于是，这建立在以下两者的联系基础上，一方面是我们刚刚所讨论的(小点Ⅰ至Ⅳ中的)属性，另一方面是关系的乘法运算中专属的相似性。

然而，我们可以将类别化(310)所对应上可传递的不对称性关系的系列性或连贯性的结构(通过关系 $\xrightarrow{a}$，$\xrightarrow{a'}$，$\xrightarrow{b'}$或 $\xrightarrow{b}$，$\xrightarrow{c}$等，将类别 A、A′、B′等，替换为 B、C 等)：

(325) $$(\xrightarrow{a}+\xrightarrow{a'})=\xrightarrow{b},\quad(\xrightarrow{b}+\xrightarrow{b'})=\xrightarrow{c},\quad(\xrightarrow{c}+\xrightarrow{c'})=\xrightarrow{d}\text{，等等}$$

再与形式(325)中的两个系列相乘，其一为($a_1+a'_1=b_1$，等等)对应的方向是↓，其二为($a_2+a'_2=b_2$，等等)方向是→，于是我们可以构成一个可传递的非对称的乘积表(326)，与表(312 乙)同构。

(326)

	$\xrightarrow{r_2}$			
$r_1\downarrow$	a_1a_2	$a_1a'_2$	$a_1b'_2$	$a_1c'_2$
	a'_1a_2	$a'_1a'_2$	$a'_1b'_2$	$a'_1c'_2$
	b'_1a_2	$b'_1a'_2$	$b'_1b'_2$	$b'_1c'_2$
	c'_1a_2	$c'_1a'_2$	$c'_1b'_2$	$c'_1c'_2$

这里的每个运算 a_1a_2，$a_1a'_2$，等，表示的是：

(327) $$a_1\times a_2=a_1\downarrow\xrightarrow{a_2},\quad a_1\times a'_2=a_1\downarrow\xrightarrow{a'_2}\text{，等等}$$

其中放入可交换性是：

(328) $$a_1\downarrow\xrightarrow{a_2}=\xrightarrow{a_2}\downarrow a_1$$

这一点保证了相似性(图 10)：

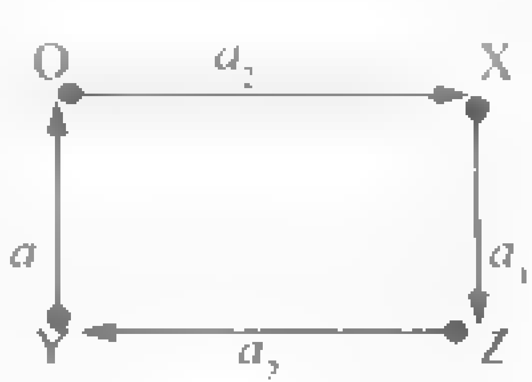


图 10

(329) $$(\mathrm{O}\xrightarrow{a_2}\mathrm{X})(\mathrm{X}\downarrow a_1\mathrm{Z})=(\mathrm{O}\downarrow a_1\mathrm{Y})(\mathrm{Y}\xrightarrow{a_2}\mathrm{Z})$$

正是这样的一种相似性，建立在互反性 $a_1a_2=a_2a_1$ 的基础上，这是与表(222)和(233)的相似性(235)中所具有的关系的基础系统的固有特征。

---

① 参看《逻辑通论》，§ 16—17。

§44 逻辑运算所构成的集合的结构的世系关系

从前面一节(§43)的分析中，我们可以得出3个结论：1)存在比格更基础性的结构，比如类别结构(310)或非对称关系的串联结构(325)，这里不包含其他的下确界，只有元素本身和每个上确界 A×B＝A 或 O(A×A′＝O)的组合；2) 两个半格(312 或 325)彼此相乘，就已经构成了(除了由两个不相交的部分的结合运算，或共同部分的乘法运算下，组成的双群(bigroupe)之外)一个 I，SN，SR 以及 SC 的转换群，该群预兆了跨命题逻辑的 INRC 转换群；3)很容易就可以从(312)或(326)的这些乘法运算中过渡到(222)或(233)的结果，只需要根据所有的组合，即这些半格的乘法运算的结果(即构成这些“部分的集合”)，对其进行加法运算。

于是这里有两处可以进行的说明。第一，类别化(310)或序列化(325)可以被认作格的退化，在特殊情况，如戴德金网，以及在同时拥有分配性和确定的互补性的子集内部(参看§42)，准确地说，逻辑的集合的结构只能在格中探寻。第二点，相反，类别或关系的基础性结构构成了初始结构，它们具有自足性，同时也具有所有的二值逻辑的结构共有的特性。正是这些共有的特性构成了逻辑特有的运算结构。

我们已经在§42中提到了最初说明中的主要难点：一个具体逻辑的运算(类别化，关系链等等)预先加入到所有一般性结构的建构中，于是变成了比它自己本身还要基础性的结构。现在我们可以加上，若存在比格更简单的结构，这就是不能作为原因，来将格看作更为一般的结构的表达了：这些更为简单的结构中，有相继性的嵌套关系、加法关系(310 和 325)或乘法关系(312 和 326)，然而格是建立在“部分的集合”之上的，其中得到的是嵌套的乘积关系。

因此我们要探寻的是逻辑运算的特有结构，而不是在一个特殊情况下的结构，诸如可以应用在数、射影几何的元素、凸面体等上面的格，而是要在逻辑运算的各个等级层面上的共同特点里面，从只构成了半格的类别化或关系链，到跨命题运算的一般性运算表，联合成为一个单独的格结构和群结构。

然而，这些共有的特点，准确地显示了在一个独有系统中，结合部分进入整体的嵌套关系和逆反性的重要性，以便了解格和群的主要观点。若不将元素归为整体是不能进行推理的：格的“上确界”，也是逻辑运算的最一般的特征之一。但是若不能找到结合的元素，即没有逆运算，同样也是不能进行推理的。于是，在格内部，从由$(x+y)$组合构成的上确界到其具有部分组成的下确界之间，怎样界定元素x或y呢？在命题(282)和(284)中，我们已经看到：这些边界的(功能)首先是进行区分，其次也实现联合，不是将y加入到x中，抑或反过来，而是构成“第二互补元素”x'或y'。然而，这些元素精确地等值了，在类别化(310)或序列化(325)中的“第二”类别或关系，即 A′对 A(或a'对

a），B′对B（或b'对b），等等。但是，我们也已经看到，一个建立在这些元素上的演算，已经允许在这些类别或关系的乘法运算中，进行一个准确说来是群的建构（323和324）。所以，逻辑运算的基础性结构必然会将所有的来自格的嵌套和群的可逆性联合为一个独有的整体。

Ⅱ. 在描述类别和关系的最基础的结构时，我们已经以“群集”[1]的名义进行过研究，试图将这两个不同且独立于整个逻辑结构的部分，融为一个独有系统，即“跨命题的”逻辑元素（类别或关系）α、β、γ等。我们依旧可以表示一些结构，比如类别化的结构（310），可传递的非对称性关系序列，抑或类别或关系的乘法运算（312）和（326）等，我们可以将它们简化为下面的有5种形式构成的加法运算：

(330)

(1)顺运算：$\alpha+\alpha'=\beta,\beta+\beta'=\gamma$，等等

(2)逆运算：$-\alpha-\alpha'=-\beta,\beta-\alpha=\alpha',\beta-\alpha'=\alpha$，等等

(3)一般的同一性运算：0，即$\alpha-\alpha=0$以及$\alpha+0=\alpha$

(4)特殊的同一性运算：$\alpha+\alpha=\alpha,\alpha+\beta=\beta$

(5)限制在同类符号的元素中的组合：$(\alpha+\alpha')+\beta=\alpha+(\alpha'+\beta)$或限制在非共有部分的组合：$\alpha+(\beta-\alpha')=(\alpha+\beta)-\alpha'$

抑或乘法运算：

(330乙)

(1)顺运算：$\alpha_1\times\alpha_2=\alpha_1\alpha_2,\alpha_1\times\alpha_2'=\alpha_1\alpha_2'$，等等

(2)逆运算：$\alpha_1\alpha_2:\alpha_1=\alpha_2,\alpha_1\alpha_2:\alpha_2=\alpha_1$

(3)一般的同一性运算：Z＝1，即$\alpha:\alpha=Z$以及$\alpha\times Z=\alpha$

(4)特殊的同一性运算：$\alpha\alpha=\alpha,\alpha\beta=\alpha$

(5)限制在同类符号的元素中或限制在非共有部分的组合。

一个计算法则确保了这些组合，以及从一个方程式端边到另一端的转换，也调和了专属于群的可逆性运算（决定了系统独有的一般化同一性）和（4）的特殊同一性，特殊同一性的特性是部分在整体中的嵌套，有的决定了运算的顺序（诸如：在重言式之前的简化，等等），有的决定了（4）的重言式在两边的意值[2]。

然而，这个群集的代数也是可以应用在跨命题运算中的，其中，若我们把α、α'、β等，看作一个命题或（二元的、三元的，等等）跨命题的关联，我们会看到同样的基础运算以及同样的演算法则（参看§38）。

因此，我们相信，“群集”呈现出一种混合的特征，同时来自群和格，它构成了一个自然的基础结构，展现了命题运算系统的主要特点，比如那些来自表（222）和（233）的特

① 《逻辑通论》，§10，第Ⅲ小点。

② 《逻辑通论》，第96—103页。

点，还包括了类别的和关系的最简单的结构性特性。

（群集）还不能算是一个群，因为特殊同一性的必然介入，它从一开始就包含了群的结构，这也是为什么，从表(312 乙)以及(314)或(222)中，在转换群 INRC 的形式下，我们又得到了一个可与转换群 I、SN、SR 和 SC 相提并论的机构。

（群集）也不能一下子就构成一个格，因为它缺少一个完整的边界系统，以及缺少严格的可逆性，但是从一开始，它就要么具有了上确界要么是下确界，而且结果是可以实现一个完整的网的结构，只要我们把关于类别和关系的群集抽离为一个单独的群集，它构成了独立于跨命题内容的命题之间的联系。

Ⅲ. 于是（二值的）逻辑运算的群集的提出，产生了一个在运算系统之间的联系的问题。这个问题存在于格和复杂关系的群之间，比如，某些格包括一些运算项的元素，这些元素同样也属于某一群或某一个环，然而所有的群及其子群（"一个群的所有子群的集合"）已经构成了一个格了。所以，当下有几个美国作者提出将格看作是一个比群更一般化的结构，也就是说嵌套关系要先于可逆转性的关系。确实，并不是所有的格都必然有一个元素对应于一个互补元素（否定），并且，当一个格中的所有元素都有一个互补元素，因此，并不必须要存在"第二类互补元素"（对应到类别的加法集合中的第二类别 A′，B′等等）。

然而，一个结构只呈现出了两种"边界"中的一种类型，例如由类别的加法群集构成的半格，看起来属于一个比格本身更一般性的系统；但是集合的格包括至少一种边界，而不必有两种。而这种系统包括了第二类互补元素（A′、B′、C′等等），以及作为群所特有的否定（或逆运算）。

数理逻辑为理智逻辑所有可能的运算提供了运算表，对应于思想的真实活动，（我们）很有根本性的必要去考量这些运算以及运算系统，而且是最基础的运算系统（必须是，抑或是元素和整体不要区分开）。但是，摆在我们面前有如此多的困难，怎样才能实现这个目标呢？

看起来并没有那么多困难，不是只有纯公理性的办法，数理逻辑家们给我们展示了严密且丰富的手段，提供给了我们足够的可以寻求到的解决之道。当我们注意到，在数学和逻辑之间特别是整数和类别系统之间的关系这个关键问题上，要求最严格的思维得到了一些看起来对立的结论，我们只能采取怀疑，在正式剖析结构的世系关系时，不是对公理方法效力的怀疑，而是鉴于运算本身的分析或鉴于结构演变的研究，对公理方法的专一性进行怀疑。

事实上，我们在这里提出的问题，完全不同于公理学家们所关心的问题：他们探寻的是哪些命题的真实性是支持一个系统存在的充分且必要条件。相反，我们在思考的只是，一个系统的一般运算是哪些，这些运算之间的发生性世系关系是什么。对于心理学家来说，运算准确说来是一些动作，尽管是内化的，因为其相互关系和相互依存所形成的结构，同样也是思维结构的显现，因为思维准确说来是内化动作的系统。所以，这

里不需要过多的公理，抑或是命题的真假，我们这里关心的是运算之间的世系关系。正如 F. 恩里克斯(F. Enriques)曾经在一个关于几何原则的崇高研究中说过的，我们可以在形式性定义和发生性定义之间进行选择，最后得到的结果是，在形式结构或——准确说来——是在公理与发生性的或运算的结构之间进行选择。

我们选择了后者。我们希望可以更接近于最基础的部分——这并不是表示可以独立在外，因为所有的运算和结构都是有连带关系的——并且我们想要发掘怎样从这个基础阶段(或不是很混合的部分)进入更加混杂阶段。

从这样的观点出发，我们可以将运算之间前位的基础关系作为运算分析的指导方向(参看§16)。在一个完整的网中，有 16 个二元运算的格，这种前位性和专属于格的前位性概念(↠)重合。例如($p \cdot q$)前位于 $q[p]$，后者又前位于($p \supset q$)：

(331) $$(p \cdot q) \twoheadrightarrow q[p] \twoheadrightarrow (p \supset q)$$

这也就是说蕴涵关系($p \supset q$)必须以合取关系($p \cdot q$)为前提，因为后者对前者有前位性。

在这个已经完成的系统中，相继性关系并不一定会显示出发生性的意义，否则其意义就是或多或少地是单一的或复合的意义(用联合 ∨ 来实现)。相反，若我们可以勾勒出一张结构和其运算构成的图表，其中用类似的方式展现一个运算的构成，或由运算或更基础构成所决定的构成，这样的相继性关系准确说来就有了发生性的意义。

这一点，我们在§35—38 以及§45 中，所得到的结果，就可以让我们在区分性运算结构之间，建立 3 个甚至是 4 个关系的系列。

首先我们假设系统 x 前位于系统 y，当 x 回过头来，作为复合元素，x 加上其他元素则可构成 y。

我们先从格的立场出发，来描述这个系列：

1. 该系统，我们没有找到任何前位存在的关系，这是 $A+A'=B$，$B+B'=C$ 等类别的加法群集的系统(命题 310)。此外我们还揭示了它所对应的那些基础运算。只能结合要么完全不相交(A 和 A'，或 A、A'以及 B'，等等)要么属于嵌套关系(A+B 或 A+A)的元素，基础的加法运算(+)对应的是运算(∨)而非(W)，但是对于任意两个元素 x 和 y 只有一条边界：上确界(因为下确界 AA' 简化为 0，而 AB 简化为 A)。

2. 后继的关系是二值一单值的类别乘法运算(312)，或多或少地受类别的加法运算。我们可以在两个类别之间设置替代关系(311)。的引导。该运算，以及加法运算，都是在类似两个系列之间，让其中一个系列的每一个类别与另一个系列的每一个类别(310)发生联合；但是该运算必须以加法运算为前提，在这些联合本身的加法运算的形式下进行。还有，因为加法(1)的组合与联合形式，表(312 乙)才显示出了边界上的一个新特点。我们在这个表或其他相似的表上找到被乘数 A_1、A'_1、B_1 等等或 A_2、A'_2、B'_2 等等，以及结果 A_1A_2、$A_1A'_2$ 等等。我们发现每个结果 A_1A_2 或 B_1B_2 等，是两个被乘数的下确界。另一方面，我们可以将结果两两相加，然后我们又可以得到一条上确界的结

果：比如说 $AA' + AA' = BA'$。我们也可以将两个被乘数相加而得到一个被乘数：$A + A' = B$。最后我们可以将两个被乘数相加，在结果中得到它们的上确界：$A_1 + A' = AA_1 + AA' + AB' + \cdots + A'A + B'A + \cdots$；抑或将结果的两个和相乘，在结果中得到它们的下确界：$(AA' + AA') \cdot (AA' + AA') = (AA')$。但是，被乘数不是结果的集合中的一部分，同一列或同一行的元素之间的结果除外，两个结果的下确界为空。这反过来告诉我们这个表并不是兼具加法性和乘法性的，还有，若两个被乘数之间的下确界作为一般状态显现，抑或两个结果之间的上确界保持一般状态，这个系统还只是个半格，因为缺少了两种形式的概括化，以及系统的所有元素的概括化（相反，我们用乘法运算的逆运算，即除法运算，可将结果转变为被乘数，但是这里得出的依旧是格的运算）。

2. 于是，运算系统（312 乙）的后继关系是表（311），这里保有了乘法运算（因此也有加法运算），此外，还在两个后续的类别 B 和 B' 的乘法运算的基础结果，与它们的两两的合并，其间引入了这层运算关系。于是，新的运算元素就是这个组合，该元素主要用于将运算项两两组合，或一一组合，更多的是用在接连有 3 个或 n 个后续的类别）；其中被乘数被并入一个结果集合中，换言之，运算表兼具加法和乘法的特性，这将上确界和下确界被一般化到每一对元素上。但是这个运算系统，也因此应用到了一个完整的格的序列，因为发生性世系关系，也正好接替了前面的两个系统，因为这里保有了加法和乘法运算。因此唯一的新特点是联合的因素，它是一个简单类别化（310）或两个类别化的结果（312），产生了包含同样元素的所有可能的类别化概念（源于替换的一般化（311），即源于一个"部分集合"的建构）。

3. 最后，从表（311）到表（322）再到其概括化的（2，5）和（3，6），得益于新的运算的引入，该运算旨在让类别的或关系的，因为我们本可以从（322）和（325）开始）命题内运算，对应于跨命题运算，这些跨命题运算只做真值运算，而不考虑命题的内容。然而，这里还涉及另一种世系类型，我们已经另外处理了，它也不在我们现在重新讨论的主题之内（因为该类型取决于逻辑形成的整个过程）。

反过来，我们从群结构的立场来看一看系列1到4：

1. 基础的加法运算构成了一个结构，该结构中（若我们不考虑重言式的加法：$A + A = A$ 以及 $A + B = B$）包括一个有两种转换的群：该运算（不相交的部分的加法）以及其逆运算，其中同一运算（零元素集合）仅有一个，就是 0。相反，完备系统，或类别的加法集合（310）包括，除了和"一般性的同一运算"的加法（$A + 0 = A$）之外，还有可以获得同样结果的"特殊的同一运算"的加法 $A + A = A$，等等。于是，我们是否可以这么说，群集（310）包括了双群 $+A$ 和 $-A$，作为后续关系，包括了其前位存在，这会有助于为群构成一个严格意义上的前位关系的序列？当然不是，因为所分离的部分不是孤立于——除非是抽离——高阶类别的，高阶类别是分离部分的自身联合的嵌套。所以有必要承认，这些基础的系统具有以下两个特征：(a)对于所有的运算都对应一个否定它的逆运算

（其中，我们称之为"一般性的"同一运算，因为所有这些逆运算得到的结果是一样的：A－A＝O；B－B＝O；等等）；(b)对一个所拥有的既定元素的加法运算，得到第一个不变结果（同一运算，我们称之为"特殊的"，因为与每个涉及的元素有个）：B＋O＝B；B＋A＝B；B＋B＝B；但是B＋B′＝C。因此，条件(a)引出了可逆性，这是所有基础运算的特点，条件(b)解释的是嵌套关系的存在，以及其上确界的关系。群的同一运算的唯一性，并不作为初始条件，而是特殊条件：这种情况下，同一性的函数(a)（运算和其逆运算的结果）以及函数(b)（让元素保持不变的操作，其中同一运算是被加数）就彼此同化了，也就是说，这里加法运算中唯一运算项中的元素没有改变，而这里结合的运算项准确说来就是结果(O)，即运算和其逆运算的加法运算；

② 加法群集(1)的后继关系，从可逆性的和群的立场来看，和边界以及格的后继关系一致，即是二值一单值乘法的群集(312乙)。因为，当加法运算（＋）引起非共有部分和其逆运算的加法运算的双群时，乘法运算（×）推动了共有部分及其逆运算的相应的双群。但是这带着两个新的转换群的引入，并不会取消前面的运算，以及其乘法运算，于是结果得到了一个有了4个转换的群；然而，加法运算已经包括了运算的组合以及其逆运算，乘法运算，引进了自己的同时，带着共有部分的联结，一种新的转换可能，用该联结与否定进行融合（加法的逆运算）。这种新的转换，不是别的，正是互反，或者说是运算项的逆运算，类似这样的，不是可以保证其联结的运算：比如成对运算 $x\times y$ 和 $\bar{x}\times\bar{y}$，或 $x\times\bar{y}$ 和 $\bar{x}\times y$，它们之间支持的新的运算关系，既不是加法也不是简单的共有部分的联结，而是用它们的结合构成了一种新的转换。

由此导致了表(312乙)已经包含了一个4种转换的群：INRC转换群，但是以其基础形式I、SN、SR以及SC的形式（命题323—324），只有互反性（加法和乘法的融合）独立于整体类别的外延（运算表的外延）之外；

③ 系统(2)的后继关系，从群的立场来看，和格的后继关系一致，即表(314)或B和B′中的"部分的集合"。在完全保持(1)和(2)的运算机制的同时，该系统(3)中加入了专属于部分集合的构成的联合因子。因此，由此得到了转换群INRC的建立：每个元素，在运算表中，都有自己的逆运算N以及自己的对射C，并且以自身互反R的方式确定了不变性。

④ 最后，只需要从类别系统(314)转变到命题系统(222)，因为转换群INRC已经有了一般性的跨命题的意义。

因此，从完整的格的构成和4种转换群INRC的构成两个方面来看，系统(1)到(4)彼此之间支持可接受的系列承继关系，具有了发生性的意义。事实上，在这两种情况中，一个和类别化群集(310)一样基础的系统，允许通过逐步的乘法运算，构成跨命题运算的格，并且这些运算具备转换群INRC的属性。

我们指出这两个系列并没有什么出人意料的地方，因为跨命题的格的上下确界本身就包括了与INRC运算群相似的运算群I、Na、Ra、Ca（命题247—249）。但是，我们

看到的这些是在介绍否定(或"互补部分")时产生的，而并不是格的一般形式下的特性。

§45 结论：可逆、反演和互反

对集合的结构系谱进行的研究让我们试图形成两个结论：其一是，所有的二值逻辑结构，同时具有群和格的构成法则；其二是，类别的或关系的最基础的结构，已经显示出了这种双重的同质性关系，将这两种特性合进一个独有的系统，其中的运行法则应该在所涉及的世系关系中具有最一般化的特征。

事实上——就是因为这一点，我们才形成了这项研究——从思维的心理结构的立场来看，我们刚刚概述的发生性系列具有一个相当深邃的意义，尤其是，当我们意识到了，群和格，各自从自己的立场出发，为解释这种结构的最基础性特性做出的贡献，而这两者没有任何一个只满足于自身独自的深入研究，而是考虑到了一般性形式(其中必然有一个"第三物")。

群概念的重要性，几乎出现在逻辑和数学的方方面面，这里可以从其结构进行说明，这里集中了理智的最主要的运算机制之一：反演或建立在否定上的可逆——群的每个运算都有一个通过反演转换的逆运算，事实上，这就是思维的功能必不可少的平衡原则(或者，更一般性地表示为充分性理由)。

然而，如我们所见，关于群的概述，像之前一样最近还被认为有些不确定，其至处于有点弱化的状态，若和不断强化的格相比的话，后者从概念上是逻辑数学大厦的第二性的基础平台(但不是主要的)。所以怎样解释格的这个增长的概述呢？值得注意的是在研究这个概念时考虑到运算的心理分析，尽可能地用其抽象的一般形式的检测，若有某些特殊的格形式(特别是其逻辑形式)允许反演的存在(因为有第一种和第二种互补部分的使用)，其一般结构是否认这种运算机制的——相反，这其中必须包含另一种，即互反运算，于是现在需要决定它和反演之间的关系。

第一个需要注意的地方是，若格包括二元性的法则，该法则在一般形式下并不包含任何否定，因为，它在于同时置换(∧)和(∨)，以及关系($x \twoheadrightarrow y$)和($y \twoheadrightarrow x$)(x前位于y和y前位于x)[1]。事实上，(∧)和(∨)的置换就是一个对射关系Ca(命题246)；然而，从构成BJ和BS的群的立场来看(命题248—249)，一个对射关系正是一个互反的逆运算(Ca = Na Ra)；但是我们还是可以用完全顺运算的方式来定义(即没有否定)，像运算(∧)和(+)(或∨和·)的逆向的替代。至于($x \twoheadrightarrow y$)以及($y \twoheadrightarrow x$)的逆向的替代，同样只涉及一个不用借助于否定就可以定义的转换：该转换，可以颠倒x和y的次序，也可

[1] 参看V.格里文科：《结构的一般理论》，赫尔曼出版社，1938年，第8页。同时参看加雷特·伯克霍夫(Garret Birkhoff)，《格理论》，(第二版)，1948，第3页。

以翻转"前位"关系($x \twoheadrightarrow y$)为"后继"关系($x \twoheadleftarrow y$)。

我们应用这个二元性法则两个例子。第一个建立在著名的辅助定理上:若 $A \twoheadrightarrow B$,于是,无论 C 为何,我们都有关系 $AC \twoheadrightarrow BC$。根据二元性,我们在这种情况下有:

(332) $$[(A \twoheadrightarrow B) \supset (AC \twoheadrightarrow BC)] \rightarrow [(A \twoheadleftarrow B) \supset (A+C \twoheadleftarrow B+C)]$$

另一个例子包含边界本身之间的关系。因为,我们总是有:

(333) $$(AB \twoheadrightarrow A)\text{以及}(AB \twoheadrightarrow B), \quad A \twoheadrightarrow (A+B) \quad \text{以及} \quad B \twoheadrightarrow (A+B)$$

其中

(334) $$(AB) \twoheadrightarrow (A+B)$$

二元性的使用,让我们在这种情境下,将(AB)转换为(A+B),反之亦然,以及"前位"关系($\twoheadrightarrow$)转换为"后继"关系($\twoheadleftarrow$)。其中(334)的转换可变为:

(335) $$(A+B) \twoheadleftarrow (AB)$$

于是,我们发现,这两个转换谁都没有否定初始的算式。(332)的第一种情况中,转换运算在意改变次序,作为新的次序下逆向的关系自然也为真,只是对于初始的关系($A \twoheadrightarrow B$),次序是反过来的(即 $A+C \twoheadrightarrow B+C$)。(334)—(335)的第二种情况中,转换被简化为一个简单的关系换算,由于不管 A 和 B 次序如何(334)都为真。

我们接着看专属于格的二元性法则,这里确定没有否定,但是有一个既定的嵌套关系的互反。我们同样通过反演和互反之间的区别来了解这一点:当第一个转换来否定运算本身时,不管关系的顺序为何,与之相反,第二个转换,则要照样反转次序,在涉及的运算中没有否定。换言之,在嵌套的关系中,专属于群的反演是被排除或隔离出去的,是互反在简单地置换嵌套的次序:第一个针对的是运算项,第二个针对的是它们的关系。

但是这个互反,难道它一点也不支持与否定的关系吗?从这一点出发,我们验证了专属于格的二元性法则,在我们对其引入否定时的情况。这种做法是可行的,但不是一般性的,只有当格作为逻辑的一部分时(才成立),因为这时格包括了第二种和第三种的互补。然而,若在关系 $A \twoheadrightarrow B$(包含或蕴涵)中,我们否定 A 和 B,得到其互补的反演关系:

(336) $$(A \twoheadrightarrow B) \rightarrow (\bar{A} \twoheadleftarrow B)$$

同样也可以得到以下等值关系:

(337) $$(A \twoheadrightarrow B) = (\bar{B} \twoheadrightarrow \bar{A})$$

因此我们又发现了换置位法$(p \supset q) = (\bar{q} \supset \bar{p})$,正如,用对关系间的否定来定义互反运算一样:$R(p \supset q) = (\bar{p} \supset \bar{q})$,因此这个关系在关系颠倒时也是等值的:$(p \supset q) = (q \supset p)$。

假如现在我们拒绝这样的运算,并将格和群的二元性法则相结合,我们会得到:

(338) $$[(AB) \twoheadrightarrow (A+B)] \rightarrow [(AB) \twoheadleftarrow (A+B) = (A+B) \twoheadleftarrow (AB)]$$

我们发现(A+B)是(A+B)的互反,以及(AB)是(AB)的互反,由此得出,一般形式

如下①：

(339)　　$[(x \cdot y) \twoheadrightarrow (x+y)] \rightarrow [\mathrm{Ra}(x+y) \twoheadleftarrow \mathrm{Ra}(x \cdot y)]$

(这里 $\mathrm{Ra}=\mathrm{R}$，若 x 和 y 是一元运算的话)。

因此，在它们的一般形式下，群包含了可逆性，以严格的反演(否定)构成，然而格构成了嵌套关系的系统，即包含关系，其中可逆性表现为互反关系。我们诚然可以在某些个别形式的群中加入互反，不如说逻辑群 INRC，以及反演，是通过否定某些个别形式下的格来实现的，比如有逻辑运算特征的格。但是在它们最普遍的结构中，群基于反演，格基于互反，这就解释了为什么它们彼此相对独立，但又有着千丝万缕的联系②。

然而，反演和互反构成了两种基础性的运算机制，显示出理智专有的可逆性。我们一般情况下可以将可逆性定义为一种可以返回起点的可能性。然而，按照我们处理的像这样的运算抑或运算项以及其关系来分的话，这种可能性包括两种情况。运用在运算中，可逆性就是反演，即进行否定，一个运算及其反演的结果为空集运算(或同一运算)：$+A-A=0$。运用在运算项以及其关系中，反过来，可逆性的本质是重返或反转关系，在这种情况下，我们也常常说到"反演"或"反向"关系，但是，这里涉及的是一种完全区别于反演—否定的转换，即，互反：因为一个关系和其互反的结果不是一个空集关系，而是一个等值关系：$(A \twoheadrightarrow B) \cdot (B \twoheadrightarrow A) = (A \rightleftarrows B)$。诚然如此，我们可以用否定的运算项表达互反，而这又表现为两种方式，但是都不会消减为无，这个互反有不可公约性，因为该互反是对应关系的互反，而不是运算上某个运算项的提出或是删除。我们首先可以用否定其运算项的方式展现关系的翻转(命题 336)：$(A \twoheadrightarrow B) = (B \twoheadrightarrow A)$。我们同样也可以将关系看作一个差异性③，然后引入对于差异性的加法运算或减法运算($+a$，等等)：于是我们有了 $+a-a=0$，但是这里的 0 指的是差异性为空，换言之，又是运算项本身之间的等值关系。

总而言之，反演构成的运算旨在安置或删除一些运算项或运算项的集合，而互反关心的是关系中的运算，准确说来：这就是为什么二者对于思维的运算机制必不可少。可逆性的这两种基础形式之间的互补性，同时解释了群和格各自的重要性，以及这两集合机构并不彼此包含，抑或只有部分包含。从逻辑排他性的立场来看，表现了运算整体性的集合结构，应该同时展现出可逆性的两个方面：通过反对一般形式下的所涉群或格，其独创性将正好保证了这种协调。

正是从一点出发，群集概念的提出具有了特定的价值，因为它让我们能够回溯类别的和关系的基础性结构，这些内容仅仅构成了半格或不完善的群。在这个领域内，我们

① 参看命题(247)。

② 至于这些组合，既从属于群又从属于格的系统，参看加维特·伯克霍夫，《格理论》(第二版)，1948，第十三、十四章。

③ 参看我们的《逻辑通论》，第 142 页。

于是用更清晰的方式了解到了(两者具有)相当不同的本质，同时，还有逆反的两种本质形式的互补性[①]，这些都是它们最初始形态下的特征。事实上，我们另外描述的类别的4种群集[②]，它们4者都源自(310)的类别化，准确说来，以反演为其特性，即，它们对于逆运算的删除基于，要么是运算项本身(加法群集)，要么基于嵌套接合的数目[乘法群集，比如(312)]。相反，这4个群集所对应的关系[③]，都源自(325)的系列，属于互反，准确说来，是逆命题的逆运算(像这类关系的反演)。但是，若反演和互反的区别，从一开始就这样设定，根据所涉及的类别进行组合或排除，抑或是对关系进行组合或排除，其中互反表述的是转换的次序，这样可逆性的两种形式的互补，并不会缺少论证。同样，若从一开始，根据存在于类别的群集和关系的群集之间准确的对应，前一个群集基于外延，第二个群集基于内涵。于是，我们就不会惊讶于反演和互反在一开始就呈现出它们彼此区别却又彼此互补的特性了，在后面的结构中，这两者协调配合得越来越紧密(参看§14)，直到融合在一个完整的跨命题结构里，这里既延展了一个完整的格(承认补充部分或不合定的部分)又囊括了一个有4种转换的群(其中准确说来，是N和R)。

---

① complémentarité 的常用意思等同于"complémentaire"＝互补的。

② 《逻辑通论》，第二章。

③ 同上，第三章。

附录 I　逻辑比例式

我们将有4个运算 α、β、γ 和 δ 的整个系统称为(单)逻辑比例式，其展现形式是 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$，并且我们有：(1)$\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$ 以及(2)$\alpha\vee\delta=\beta\vee\gamma$

这样的系统源自群 INRC，因为我们可以有以下表述：

(1)$\frac{\alpha=\mathrm{I}}{\beta=\mathrm{C}}=\frac{\gamma=\mathrm{R}}{\delta=\mathrm{N}}$，例如，$\frac{p\cdot q}{p\vee q}=\frac{p\cdot q}{p|q}$

事实上(1)$\alpha\cdot\delta=\gamma\cdot\beta$，是因为 $\mathrm{I}\cdot\mathrm{N}=\mathrm{R}\cdot\mathrm{C}$，而(2)$\alpha\vee\delta=\gamma\vee\beta$，是因为 $\mathrm{I}\vee\mathrm{N}=\mathrm{R}\vee\mathrm{C}$

单逻辑比例式的特性：从 $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$ 和 $\alpha\vee\delta=\beta\vee\gamma$ 中，我们通过改变等值运算的一个端边到另一个，通过反演$(\cdot x)$为$(\vee x)$，以及从$(\vee x)$到$(\cdot x)$，为(1)和(2)推演并添加了以下(3—10)的8个特性：

(3)$\alpha\cdot\bar{\beta}=\gamma\cdot\bar{\delta}$因为 $\mathrm{I}\cdot\bar{\mathrm{C}}=\mathrm{R}\cdot\bar{\mathrm{N}}(=\mathrm{I}\cdot\mathrm{R})$

(4)$\bar{\alpha}\cdot\beta=\bar{\gamma}\cdot\delta$ 因为 $\bar{\mathrm{I}}\cdot\mathrm{C}=\bar{\mathrm{R}}\cdot\mathrm{N}(=\mathrm{C}\cdot\mathrm{N})$

(5)$\alpha\cdot\bar{\gamma}=\beta\cdot\bar{\delta}$因为 $\mathrm{I}\cdot\bar{\mathrm{R}}=\mathrm{C}\cdot\bar{\mathrm{N}}(=\mathrm{I}\cdot\mathrm{C})$

(6)$\bar{\alpha}\cdot\gamma=\bar{\beta}\cdot\delta$ 因为 $\bar{\mathrm{I}}\cdot\mathrm{R}=\bar{\mathrm{C}}\cdot\mathrm{N}(=\mathrm{R}\cdot\mathrm{N})$

(7)$\alpha\vee\beta=\gamma\vee\bar{\delta}$因为 $\mathrm{I}\vee\bar{\mathrm{C}}=\mathrm{R}\vee\mathrm{N}(=\mathrm{I}\vee\mathrm{R})$

(8)$\bar{\alpha}\vee\beta=\bar{\gamma}\vee\delta$ 因为 $\bar{\mathrm{I}}\vee\mathrm{C}=\bar{\mathrm{R}}\vee\mathrm{N}(=\mathrm{C}\vee\mathrm{N})$

(9)$\alpha\vee\gamma=\beta\vee\bar{\delta}$因为 $\mathrm{I}\vee\bar{\mathrm{R}}=\mathrm{C}\vee\bar{\mathrm{N}}(=\mathrm{I}\vee\mathrm{C})$

(10)$\alpha\vee\gamma=\beta\vee\delta$ 因为 $\bar{\mathrm{I}}\vee\mathrm{R}=\bar{\mathrm{C}}\vee\mathrm{N}(=\mathrm{R}\vee\mathrm{N})$

但是，这10个特性并不是专属于符合群 INRC 的运算法则时的比例式 $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$ 的运算项。事实上，可以将初始比例式转换为遵守同样的(1—10)运算法则的命题，但是这里的运算项可以不符合群 INRC 的结构。可以产生这个结果的转换有以下这些：

若我们有 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$，于是可推演为($x$ 作为一个不包含在内的运算，甚至也没有部分包含，这里我们对其进行合并，或作为一个完全包含在内的运算，我们对其进行减法运算)：

(11)$\frac{\alpha\vee x}{\beta\vee x}=\frac{\gamma}{\delta}$或$\frac{\alpha\cdot x}{\beta\cdot x}=\frac{\gamma}{\delta}$，例如，$\frac{(p\cdot q)\vee(p\cdot q)}{(p\vee q)\vee(p\cdot q)}=\frac{p\cdot q}{p\ q}$(这里 $x=p\cdot q$)

(12)$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma\vee x}{\delta\vee x}$或$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma\cdot x}{\delta\cdot x}$，例如，$\frac{p\cdot q}{p\vee q}=\frac{(p\cdot q)\vee(p\cdot q)}{(p\ q)\vee(p\cdot q)}$(这里 $x=p\cdot q$)

(13)$\frac{\alpha\vee x}{\beta}=\frac{\gamma\vee x}{\delta}$或$\frac{\alpha\cdot x}{\beta}=\frac{\gamma\cdot x}{\delta}$,例如,$\frac{(p\cdot q)\vee(p\cdot q)}{p\vee q}=\frac{(p\cdot q)\vee(p\cdot q)}{(p|q)}$

(这里 $x=p\cdot\bar{q}$)

(14)$\frac{\alpha}{\beta\vee x}=\frac{\gamma}{\delta\vee x}$或$\frac{\alpha}{\beta\cdot\bar{x}}=\frac{\gamma}{\delta\cdot\bar{x}}$,例如,$\frac{p\cdot q}{(p\vee q)\vee(p\cdot\bar{q})}=\frac{p\cdot q}{(p|q)\vee(p\cdot\bar{q})}$

(这里 $x=p\cdot q$)

(15)$\frac{\alpha\vee x}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta\cdot\bar{x}}$或$\frac{\alpha\cdot x}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta\vee x}$,例如,$\frac{(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})}{p\vee q}=\frac{p\cdot q}{(p\ q)\cdot(p\cdot q)}$

(这里 $x=p\cdot\bar{q}$)

(16)$\frac{\alpha}{\beta\vee x}=\frac{\gamma\cdot\bar{x}}{\delta}$或$\frac{\alpha}{\beta\cdot x}=\frac{\gamma\vee x}{\delta}$,例如,$\frac{p\cdot q}{(p\vee q)\vee(p\cdot q)}=\frac{(p\cdot q)\cdot(p\cdot q)}{p\ q}$

(这里 $x=p\cdot q$)

从这些转换中得出我们可以将一个形式为I C R N的比例式转换为一个熟悉的比例式,它可以是一个网的任意两个元素,其下确界BJ和上确界BS(参看命题2.6)是:

(Ⅱ)$\frac{\alpha(=\mathrm{BJ})}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta(=\mathrm{BS})}$,这里$\alpha=\beta\cdot\gamma$并且$\delta=\beta\vee\gamma$

此外,在(Ⅰ)和(Ⅱ)这两个终极形式之间有一系列的中间形式。例如,当$\delta=\mathrm{N}\alpha$且$\gamma=\mathrm{N}\beta$,我们没有$\beta=\mathrm{C}$(或R)α,我们有比例式:

(Ⅲ)$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\mathrm{N}\beta}{\mathrm{N}\alpha}$,例如,$\frac{p}{q}=\frac{\bar{q}}{p}$

我们既没有$\delta=\mathrm{N}\alpha$也没有$\beta=\mathrm{C}$(或R)α等时,对于$\alpha\cdot\delta=0$我们也可以有比例式。例如:

(Ⅲ乙)$\frac{p\cdot q}{p\cdot q}=\frac{q[p]}{p\ \mathrm{W}\ q}$

同样,若结果$\alpha\cdot\delta$不为空,也没有$\alpha=\alpha\cdot\delta$,我们这里也可以有比例式。例如:

(Ⅲ丙)$\frac{p[q]}{p\ \ q}=\frac{p\vee q}{p\supset q}$

互反比例式:我们也可以从INRC群中得出一个我们称之为互反关系的对称比例性,其形式和特性如下所示:

(Ⅳ)$\frac{\alpha}{\beta}\overset{\mathrm{I}}{=}\mathrm{N}\ \ \mathrm{R}\frac{\gamma}{\delta}\overset{\mathrm{R}}{=}\mathrm{C}$,例如,$\frac{p\cdot q}{p|q}\ \mathrm{R}\ \frac{p\cdot q}{p\vee q}$

这里:

(1)$\alpha\cdot\mathrm{R}\delta=\beta\cdot\mathrm{R}\gamma(=0)$

(2)$\alpha\vee\mathrm{R}\delta=\beta\vee\mathrm{R}\gamma(=*)$

(3)$\alpha\cdot\mathrm{C}\beta=\gamma\cdot\mathrm{C}\delta$

(4)$\alpha\vee\mathrm{C}\beta=\gamma\vee\mathrm{C}\delta$

(5)$\mathrm{C}\alpha\cdot\beta=\mathrm{C}\gamma\cdot\delta$

(6)$\mathrm{C}\alpha\vee\beta=\mathrm{C}\gamma\vee\delta$

(7)$\alpha\cdot\mathrm{C}\gamma=\beta\cdot\mathrm{C}\delta$

(8)$\alpha\vee\mathrm{C}\gamma=\beta\vee\mathrm{C}\delta$

(9)$\mathrm{C}\alpha\cdot\gamma=\mathrm{C}\beta\cdot\delta$

(10)$\mathrm{C}\alpha\vee\gamma=\mathrm{C}\beta\vee\delta$

另一方面，当我们有 $\delta=C\alpha$ 以及 $\gamma=C\beta$，但是没有 $\gamma=R\alpha$ 也没有 $\delta=R\beta$ 时，这些运算法则也被证实可行：

$$(\mathrm{V})\ \frac{\alpha}{\beta}=R\,\frac{\gamma=C\beta}{\delta=C\alpha}，例如，\frac{p\cdot q}{p\supset q}=R\,\frac{p\cdot q}{p\vee q}$$

最后，还有一些比例式，我们称之为 RR，当 $\gamma=R\alpha$ 且 $\delta=R\beta$，但是没有 $\delta=C\alpha$ 以及 $\gamma=C\beta$ 时：

$$(\mathrm{VI})\ \frac{\alpha}{\beta}=RR\,\frac{\beta=R\alpha}{\delta=R\beta}，例如，\frac{p}{q}=RR\,\frac{p}{q}\ 或\ \frac{p\cdot q}{p\cdot q}=RR\,\frac{p\cdot q}{p\cdot q}$$

在这种情况下，我们有：

(1)$\alpha\cdot\delta=R(\beta\cdot\gamma)$	(2)$\alpha\vee\delta=R(\beta\vee\gamma)$
(3)$\alpha\cdot C\beta=R(\gamma\cdot C\delta)$	(7)$\alpha\vee C\beta=R(\gamma\vee C\delta)$
(4)$C\alpha\cdot\beta=R(C\gamma\cdot\delta)$	(8)$C\alpha\vee\beta=R(C\gamma\vee\delta)$
(5)$\alpha\cdot C\gamma=R(\beta\cdot C\delta)$	(9)$\alpha\vee C\gamma=R(\beta\vee C\delta)$
(6)$C\alpha\cdot\gamma=R(C\beta\cdot\delta)$	(10)$C\alpha\vee\gamma=R(C\beta\vee\delta)$

在比例式(Ⅳ)的情况中，运算项遵守 INRC 群的运算法则，(Ⅳ)的(1)—(10)点特性以及(Ⅵ)就同时被证实了，因为，在(Ⅳ)的情况中，这些(1)—(10)的等量关系都是自带互反性的，这不是(Ⅴ)情况中比例式自然的情况。

对射比例式：从 INRC 群中，我们另外可以得出一些我们称之为对射关系的比例式：

$$(\mathrm{VII})\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{I}{N}=C\,\frac{\gamma}{\delta}=\frac{C}{R}，例如，\frac{p\cdot q}{p\vee q}=C\,\frac{p\vee q}{p\cdot q}$$

这些运算法则如下所示：

(1)$\alpha\cdot C\delta=\beta\cdot C\gamma(=0)$	(2)$\alpha\vee C\delta=\beta\vee C\gamma(=*)$
(3)$\alpha\cdot R\beta=\gamma\cdot R\delta$	(7)$\alpha\vee R\beta=\gamma\vee R\delta$
(4)$R\alpha\cdot\beta=R\gamma\cdot\delta$	(8)$R\alpha\vee\beta=R\gamma\vee\delta$
(5)$\alpha\cdot R\gamma=\beta\cdot R\delta$	(9)$\alpha\vee R\gamma=\beta\vee R\delta$
(6)$R\alpha\cdot\gamma=R\beta\cdot\delta$	(10)$R\alpha\vee\gamma=R\beta\vee\delta$

当 $\alpha=R\delta$ 以及 $\beta=R\gamma$，但是没有 $\gamma=C\alpha$ 也没有 $\delta=C\beta$ 时，我们也会发现同样的特性：

$$(\mathrm{VIII})\ \frac{\alpha}{\beta}=C\,\frac{\gamma}{\delta}=\frac{R\beta}{R\alpha}，例如，\frac{p\cdot q}{p\cdot q}=C\,\frac{p\cdot q}{p\cdot q}$$

相反，有这一些比例式，我们称之为 CC，其中我们有 $\gamma=C\alpha$ 且 $\delta=C\beta$，但是，没有 $\alpha=R\delta$ 和 $\beta=R\gamma$：

$$(\mathrm{IX})\ \frac{\alpha}{\beta}=CC\,\frac{\gamma=C\alpha}{\delta=C\beta}，例如，\frac{p\cdot q}{p\cdot q}=CC\,\frac{p\vee q}{p\supset q}$$

它们的特性包括：

(1)$\alpha \cdot C\delta = \beta \cdot C\gamma$　　(2)$\alpha \vee C\delta = \beta \vee C\gamma$

(3)$\alpha \cdot R\beta = C(\gamma \vee R\delta)$　　(7)$\alpha \vee R\beta = C(\gamma \cdot R\delta)$

(4)$R\alpha \cdot \beta = C(R\gamma \vee \delta)$　　(8)$R\alpha \vee \beta = C(R\gamma \cdot \delta)$

(5)$\alpha \cdot R\gamma = C(\beta \vee R\delta)$　　(9)$\alpha \vee R\gamma = C(\beta \cdot R\delta)$

(6)$R\alpha \vee \gamma = C(R\beta \vee \delta)$　　(10)$R\alpha \vee \gamma = C(R\beta \cdot \delta)$

在比例式(Ⅶ)的情况中，这里的元素遵循 INRC 群的运算法则，(Ⅸ)中的特性同样也被证实可行，因为我们总有 $x \vee y = C(Cx \cdot Cy)$。

否定比例式：除了前面的形式之外，还有一种否定的形式的比例式。当在 α、β、γ 和 δ 之间没有共有部分，并且我们有 $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta$ ＊时，若这两个条件都满足，于是：

(Ⅹ)$\frac{\alpha}{\beta}$ N $\frac{\gamma}{\delta}$，例如，$\frac{(\underline{p \cdot q \cdot r}) \vee (\underline{p \cdot q} \cdot r)}{(p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (p \cdot q \cdot r)}$　$\frac{(\underline{p} \cdot \underline{q} \cdot r) \vee (\underline{p} \cdot \underline{q} \cdot r)}{p \cdot q \cdot r}$

这种情况下，我们有：

(1)$\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma = 0$　　(2)$\alpha \vee \delta = N(\beta \vee \gamma)$

(3)$\alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \delta = 0$　　(5)$\alpha \vee \beta = N(\gamma \vee \delta)$

(4)$\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta = 0$　　(6)$\alpha \vee \gamma = N(\beta \vee \delta)$

但是这些否定的比例式并没有前面的那些重要，因为它们相对地不是很明确(我们可以随意地调换 α、β、γ 和 δ，等等)。

结论和类似的数字：因此总共有 6 种形式的逻辑比例关系：单式(I)、R、RR、C、CC 以及 N。其中有 3 个直接来自群 INRC，其他的间接产生。

至于类似的数字，可以给其中的两个演示一下：

(Ⅲ)$\frac{p}{q} = \frac{q}{p}$，对应为$\frac{nx}{ny} = \frac{n : y}{n : x}$，例如，$\frac{2 \times 4}{2 \times 3} = \frac{2 : 3}{2 : 4}$

以及(Ⅵ)$\frac{p}{q} = RR\ \frac{p}{q}$，对应为$\frac{nx}{ny} = \frac{x : n}{y : n}$，例如，$\frac{2 \times 4}{2 \times 3} = \frac{4 : 2}{3 : 2}$

从一般情况直至专一定性的形式中，这些逻辑比例式，在思维的心理运算中起着重要的作用，并且也显示出群 INRC 特有的思维意义

附录Ⅱ 关系结果间的逻辑比例式

我们在对类别的乘积集合中所指称的半反演、半互反以及半对射群(命题 200—207)存在于关系的二值—单值乘积群集中(两个区分关系的乘积)。

为证实这个结果,只需要验证在这些关系之间可能的 9 种组合,于是我们注意到了(1)

(1)

	<	=	>
<	<<	=<	><
=	<=	==	>=
>	<>	=>	>>

表(1)

1) 表格中以中心为对称点的元素之间呈现出 SN 的关系(比如 A<<B 和 A>>B):即关系的反转;

2) 表格中以对角线↘为对称线的元素之间的关系为 SR(比如 A<=B 和 A=<B):即关系的调换;

3) 表格中以对角线↙为对称线的元素之间的关系为 SC(比如 A<=B 和 A=>B):调换和反转。

加上同一转换 I,和这 3 种转换一起构成了一个可交换的群:

$$SRSC=SN,\quad SRSN=SC,\quad SCSN=SR\quad 以及\quad SNSRSC=I$$

结果是我们可以在这样的群基础上建立一个逻辑比例式的系统。因为,我们有:

(2)
$$\frac{I}{SR}=\frac{SC}{SN}$$

来计算这样的一个逻辑比例式,需要将关系行编号(正如我们之前对等级进行编号的那样)于是有了表(2),接着对这些位置次序进行加法或乘法的运算(这就让这些次序从存在时,就有自己位置次序的中位线①)。

---

① 此外还有更简单的办法来编号表格(1)或(2)中的 9 个格子:即按照横向或纵向的次序,这样中间的格子就是行 ,并且所有的格子以中心为对称点(即彼此之间关系为 SN),于是有:1+9=2+8=…=5+5=6+4=…=10。其中 I+SR=SR+SC,等等(参看命题 4)。

(3)

	1	2	3
1	11	21	31
2	12	22	32
3	13	23	33

表(2)

在这种情况中，我们有，比如说 12/21=23/32：

(4)　　$I \times SN = SR \times SC$　即　$12 \times 32 = 21 \times 23 = 22$

　　$I + SN = SR + SC$　即　$12 + 32 = 21 + 23 = 44$

(SN 的定义)

$I \times SN(SR) = SC \times SN(SN)$　即　$12 \times 23 = 23 \times 12 = 0$

$I + SN(SR) = SC + SN(SN)$　即　$12 + 23 = 23 + 12$

$I \times SN(SC) = SR \times SN(SN)$　即　$12 \times 21 = 21 \times 12 = 0$

以及　$I + SN(SC) = SR + SN(SN)$　即　$12 + 21 = 21 + 12$

这个例子因此也得出了下面的比例式：

(5)　[illegible]

然而，一如这个系统中其他所有的比例式，该比例式也有一个具体的意义。为具化这些概念，比如，若第一个关系表示的是体积，第二个表示的是重量，我们有："同等重量体积更小"（=密度更大）对"同等体积重量更轻"（=密度更小）和"同等体积重量更大"（=密度更大）对"同等重量体积更大"（=密度更小）是一样的。

需要注意的是，我们可以根据关系的群 ISNSRSC 建立对应的比例式，是被剥夺了具体的指代意义的。例如，若 A_1、A'_1 以及 B'_1 分别是爬行动物的器官、鸟类以及哺乳动物，再有 A_2、A'_2 以及 B'_2 分别是头、躯干以及肢体，这样比例式 $A_1A'_2/A'_1A_2 = A'_1B'_2/B'_1A'_2$ 指的是："爬行动物的躯干是在鸟类的头上就像鸟类的肢体在哺乳动物的躯干上一样"，这是不合逻辑的。但是这个比例式完全是正确的，因为 $A_1A'_2 + B'_1A'_2 = 12 + 32 = 44$，而 $A'_1A_2 + A'_1B'_2 = 21 + 33 = 44$，等等。

相反建立在群 INRC 基础上的类别间的比例式是有含义的，然而同样的比例式 $I/R = C/N$ 在关系中是不能有什么具体的含义的。其中的理由是，在后面一种情况中，比例式不再是基于其本身的关系建立的（如使用群 ISNSRSC）；而是基于关系的类别。以此类推，建立在群 ISNSRSC 上的比例式，在类别的情况中，不是基于这样的类别，而是基于它们在双行列对套的乘法表中的位置关系。相反，建立在群 INRC 基础上的类别间有含义的比例式，正是基于类别的组合而构成的；比如说：

(6)　$$\frac{A_1A'_2}{\bar{A}_1 \times \bar{A}'_2} = \frac{A_1 + A'_2}{\overline{A_1A'_2}}$$

符号一览表

$\equiv$ 全等,恒等

$=$ 逻辑等价,$(p=q)\equiv(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$

$\cdot$ 合取(逻辑积),$(p\cdot q)$

$\vee$ 逻辑析取,$(p\vee q)\equiv(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(p\cdot q)$

$|$ 不相容,$(p|q)\equiv(p\cdot\bar{q})\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$

W 互逆排斥,$(p\ \mathrm{W}\ q)\equiv(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$

$*$ 完全肯定(重言式),$(p*q)\equiv(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$

$p[q]$ p 的肯定,单向肯定①,$p[q]\equiv(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})$

$p\supset q$ 蕴涵关系,$p\supset q\equiv(p\cdot q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$

$q\supset p$ 或 $p\subset q$ 互反逆蕴涵关系,$(p\subset q)\equiv(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$

p,q,r 逻辑命题

x,y,z 运算式

a 分量运算

$\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 复合运算

I 同一转换

N 反演转换(否定、逆运算)

R 互反转换(互反性)

C 对射转换(相关度)

Na 分量运算的反演

Ra 分量运算的互反

Ca 分量运算的对射

Nh 复合运算的反演

Rh 复合运算的互反

Ch 复合运算的对射

Ng 左侧复合运算的反演

① 不要将符号 $p\ q$ 和方括号[ ]混为一谈,[ ]可囊括任何复杂表达式,表达式本身还可包含圆括号(例如,表8)。

Rg 左侧复合运算的互反
Cg 左侧复合运算的对射
Nd 右侧复合运算的反演
Rd 右侧复合运算的互反
Cd 右侧复合运算的对射
D 分配
P 置换
Pα 分量运算和复合运算的置换(一元)
Pαβ 复合运算的置换
Pa(αβ) 分量运算和复合运算的置换
Pu 一元运算置换
Pα 运算(α)的元素置换
Pa 运算(a)的元素置换
Pm 运算中项的置换
P_{AB},等 (p,q 等)运算中项置换
ABC (p,q 等)运算中项的关系格
$P_{\supset\vee}$,等 置换运算(⊃和∨等)
Pn 一元一二元算式对等值的二元一二元算式的转换
O—Ⅷ 类(三位运算范式的编号)
Ⅱ—Ⅵ(a, b, c),等 运算族群
Ru 一元运算式互反(左侧:Rg)
Rb 每个复合运算右侧互反
UB Ⅰ和 UB Ⅱ 一元一二元运算的第一个和第二个算式
Ru′ UB Ⅰ等上的一元算式的互反
$R\bar{u}'$ 不能作为 UB Ⅰ上的一元算式的互反
Rm 作为运算中项命题的互反
$R\bar{m}$ 不能作为运算中项的命题的互反
Pm(或 P_{AB},等) 不能作为运算中项的命题的置换
Rmg 或 Rmd(及 Rmg 或 Rmd) Rm 或 Rm的应用,用于左侧或右侧算式的 m(或)m 上
U1,等,D1,等,及 Tr1,等 单个、成对和三位算式
($\bar{\vee}$)和($\bar{\cdot}$) (∨)和(·)的反演,即合并与不相交的否定
G1 到 G4 常数表(233)的边
BS 一个网状系统的上确界
BJ(图形里的 BI) 一个网转系统的下确界
gs 更大的逻辑和

pm　更小的逻辑乘积

gsv 和 gsh　gs 纵向或横向定位

pmv 和 pmh　pm 纵向或横向定位

s 和 m　任意的逻辑和与逻辑积

a,b,c,d　方位关系

$\mp nv$ 和 $\mp nh$　纵向和横向距离

x' 和 y'　第一种补充元素

x' 和 y'　第二种补充元素

$\twoheadrightarrow$ 和 $\twoheadleftarrow$　“前位”和“后继”关系

$\dot{\twoheadrightarrow}$, $\overset{\supset}{\twoheadrightarrow}$　导出运算

$\urcorner m$　逻辑积的补充部分(余数)

SN, SR 和 SC　半反演，半互反和半对射

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$　逻辑比例式

走向一种意义的逻辑

〔瑞士〕让·皮亚杰　〔阿根廷〕罗兰多·加西亚　著
李其维　译

走向一种意义的逻辑

法文版　*Vers une Logique des Significations*，Geneve：Murionde，1987.

作　者　J. Piaget，R. Garcia

参与此书编辑者有R. Garcia，P. M. Davidson and J. Easley (with R. Garcia，P. M. Davidson and J. Easley)

英文版　*Toward a Logic of Meaning*，Hillsdale，NJ：Lawrence Erlbaum Associates，1991.

英译者　Philip. M. Davidson，Jack Easley

李其维　译自英文

本书中文版曾作为李其维策划的"皮亚杰发生认识论精华译丛"之一种，由华东师范大学出版社出版(2005年)。现按原中文版本收录于本文集，有改动。

内容提要

此书的重要性在于它既回应了心理学对意义和表征的关注，又回应了现代逻辑学对于相干问题的兴趣。这本书是皮亚杰及其发生认识论研究中心的同事在 1978 至 1979 年期间进行的研究的总结，试图重新阐述运算逻辑，并构造一种意义逻辑；运算逻辑会自然地从这种意义逻辑中产生，并对命题逻辑实现一种新的、不再过于依赖外延逻辑的形式化。

本书分为两个部分，第一部分为皮亚杰所写，皮亚杰希望把它与加西亚的研究结果相整合起来，但由于他不幸去世，因此皮亚杰没有时间最终完成这一工作，于是加西亚继续完成了本书的第二部分内容。

皮亚杰希望通过感知运动协调的蕴涵来审视逻辑的最初根源。这样一种逻辑只能是一种意义的逻辑，在这种逻辑中，蕴涵并不限定于语句陈述。根据主体的观点，每一动作或运算都被赋予意义。因此，我们可以先在动作的意义之间处理蕴涵的系统，然后，在运算的意义之间处理蕴涵的系统。只要对动作的意义和动作的因果性加以仔细地区分，那么主体关于动作之链的期望和预期就可以证明早期推理的存在。因此，推理的最初形式是动作的蕴涵，它是一种动作意义之间的蕴涵。皮亚杰由此开创了关于前逻辑的研究。在前逻辑中，形式和内容相对于运算系统而言，还较少分化。在关于对应、基本辩证法和范畴的逻辑等内容的研究中，皮亚杰明白地揭示了运算的基本的形成阶段。皮亚杰深化了他对于儿童理解格式的研究，这种理解使主体在能够说出它们之前，就已能很好地把它们作为认知的工具了。

在本书的第二部分，加西亚重点阐述了皮亚杰对意义逻辑的独到的贡献。这种贡献，只有在发生认识论的框架内才能被充分理解。在逻辑与发生认识论这一章中，加西亚强调指出，皮亚杰之目的主要并不是要对逻辑作出怎样的贡献，而是要发展出一种实现认识论分析的方法。在外延逻辑和内涵逻辑一章中，加西亚努力说明了安德森和贝尔纳普关于逻辑中的相干和必然性的研究成果，清楚地阐明了运算逻辑和相干逻辑之间的相似和不同之处。加西亚认为后者是前者必要的基础，他向我们首次显示该两种逻辑相结合的研究可以获得丰富的成果。最后，加西亚在总的结论一章中，阐明了整个研究的意义，对本书中的全部新的发现作出了权威的解释。他强调了以下新的发现：在动作的水平上和在意义的情景中存在运算的早期形式，尽管它们还不能被整合到成熟结构的整体中，但它们是与命题逻辑的二元运算同型的结构，它们最后构成了 INRC

群。在这方面，我们注意到加西亚把一种二元的属性和整合的功能归于同化的过程，因而揭示了作为陈述逻辑之基础的"一种意义的逻辑必定既是内涵的，又是外延的"。

本书的"总的结论"部分为皮亚杰和加西亚共同撰写，他们之间富有成效的相互启示和合作使得"一种自然逻辑中的意义理论"得以产生。

李其维

谨以本译丛献给已故
我国安亚杰研究的先驱者、
我的恩师左任侠教授

——李其维

目　录

总　　序*

Jachque Vonèche[①]

能够看到这套丛书中文版的问世，实为一大幸事并因此感到十分骄傲（这不仅仅是对于我而言，我想对于全世界的读者来说亦是如此）。这套书的出版应归功于华东师范大学李其维教授的辛勤劳作、不懈努力以及他的非凡才智，当然同时也离不开华东师范大学出版社的鼎力支持。在此，我谨向李其维教授以及参与此丛书编译工作的所有人员表示衷心的感谢！

这套丛书所涉及的是皮亚杰思想中最核心的部分：探寻儿童思维的心理发生和科学概念的历史发展之间的连续性。但这并非其新颖之处。真正新颖之处在于皮亚杰所信奉的观点出现了新的转折。继皮亚杰在之前的发展阶段中提出的结构主义方法之后，这套丛书所提出的新的转换性的深入和扩展（的方法）开阔了我们的视野。

随着时间的推移，皮亚杰自身理性的发展经历了多次变化，在此我们有必要对其进行一番探讨。

当11岁的皮亚杰发表他的第一篇论文的时候，年轻的他本质上还是一名经验论者，他认为人们可以在"自然界这本神奇的大书"中进行直接的观察。他所有关于软体动物分类学的论文都是基于这样一个观点：人们通过观察对生物进行分类得到的是并不令人满意的结果，就像子午线对于地理学家来说可以被改变一样，对于生物的分类，如果情况允许的话，理想的分类界限也可以被改变。

皮亚杰从经验论者转变为进化论者，但不是转变为拉马克或达尔文式的进化论者，这在很大程度上是由于受到了柏格森（H. Bergson）的影响。柏格森是一名笃信生命冲动（柏格森著名的《生命冲动》）的哲学进化论者，他认为这种生命冲动是那些组成各种生命的最重要的、完美的组织原则：生物的、个体（心理）的、社会的以及道德的组织原则。于是，皮亚杰根据世间万物所对应的各种各样的需求将哲学改造得更加接近于实用主义。

---

* 此为李其维策划"皮亚杰发生认识论精华译丛"（华东师范大学出版社，2[illegible]）之总序。

① 雅克·弗内歇（Jachque Vonèche，1939— ）比利时学者，现为瑞士日内瓦大学教授、日内瓦皮亚杰文献档案馆馆长及基金会主任（1993年至今）；皮亚杰生前助手与合作者、日内瓦学派（发生认识论）的代表人物之一。

这种新的立场致使皮亚杰提出了他的第一个平衡化理论。根据这一理论，任何一种进化系统都趋于某种平衡。这种平衡是同一结构中不同部分之间的平衡，或是整体和部分之间的平衡。但是在环境的诱因下，这种平衡会趋于一种不平衡，这种不平衡可能是破坏性的，也可能成为建构新的平衡过程中的一种动力。

因此，为了证明从超验到内在的过程，皮亚杰从生物学转到了心理学，更确切地说是转到了发展心理学。在关于物理因果关系的研究中，皮亚杰发现：儿童由早期服从权威他人（上帝、成人、政府、团体）所宣称的道德规则发展为拥有自发的机制，以及内在的物理规则。与此同时，儿童的道德判断也从对超验规则的他律顺从转变为对互惠和互敬的同伴间社会契约的顺从。

总之，心理的发展就是一个由独裁向民主、由巫术向科学、由教条主义向自由主义、由唯我论向社会化转变的过程，更客观地说应该是一个由主观主义向客观主义转变的过程。这样，平衡的重心就被转移到了不断发展的内部心理结构和宇宙世界的外部结构之间。从这一点来说，心理的个体和心理的环境之间存在着对立。

随着诸如客体永久性、守恒等这些恒定性的发现，皮亚杰自身的发展也进入了一个新的阶段：心理个体让道给那些被称为心理运算的分子结构。至此，皮亚杰由实用的功能主义者变成了结构主义者。

皮亚杰发明的"群集"结构使得他从功能主义向结构主义的转变成为可能。这种结构是一种代数结构，这表明了皮亚杰对普通代数的偏爱，同时也为之后他的理论中出现的布尔巴基结构理论做好了准备。

正如S. 巴贝尔（S. Papert）为《态射与范畴：比较与转换》一书所写的序中所言，"群集"的代数结构和前运算阶段儿童的思维方式十分吻合，布尔巴基的"母结构"与具体运算吻合得最好，而范畴则适合于形式运算。S. 巴贝尔提出了这样一个问题：这些就能说明皮亚杰是个喜欢赶数学时髦的人吗？

对于这一问题的回答是否定的，原因有二：其一，当皮亚杰使用布尔巴基结构的时候，这些结构还没在数学家中间流行起来。那时候，在数学中占主导地位的是原子论理论，比如罗素（B. Russell）所认为的数是"类的类"，以及皮亚诺（Peano）以少量无关联的公理来定义的数。而布尔巴基的方法与上述方法截然不同：他通过列举和观察所有可能的数学行为集合，对数的真实结构进行描述；这更像是心理学的方法而不是原子论的方法，因为它确实符合儿童发展过程中能被观察到的情形。因此，不能说皮亚杰是一个追赶数学时髦的人，因为他并没有追随当时数学的主流。其二，当时，布尔巴基的结构主义和皮亚杰所提倡的任何关于"发生"的假设都是截然对立的。皮亚杰假设，儿童知识的增长与科学知识的增长遵循相同的机制，总的来说，这种假设在当时的数学家和科学家中已经不流行了。

从这些回顾中我们可以得出这样的结论：皮亚杰修改思维的模式，使之与他的众多合作者收集的资料相吻合，这些资料表明儿童思维的发展和科学的发展之间存在着类

似的发展过程。当社会科学领域开始盛行以结构主义作为解释模式的时候，皮亚杰放弃了结构主义，这正是皮亚杰作为一名思想家的高明之处。自从他成为一名心理学家之后，他总是走在时尚的前沿，总是在引领潮流。20世纪初期，当人们仍以儿童在语言习得期所说出的单词数量来衡量儿童言语发展的时候，皮亚杰就已经开始从交流的角度来研究语言了，而且他是最早使用此法的科学家之一。不仅如此，他还引领了这一领域的变革。皮亚杰是一位具有创新意识，并且终身都在创造新范式的思想家。

现在翻译出版的这一套中文版丛书代表了皮亚杰最后一个阶段的创造，一方面，他所提出的态射和范畴，为他的心理发生学资料的形式化处理提供了逻辑数学模型。另一方面，一种意义逻辑在安德森(A. R. Anderson)和贝尔纳普(N. D. Belnap)相干逻辑的基础上得以发展并在某种意义上超越了它们。在这套丛书中皮亚杰又谈到了他所喜欢的主题：科学概念的历史发生和心理发生之间的关系。简言之，对这个问题的讨论围绕着这样一个主题：在发展系统中什么发生了变化，什么保持不变，两个事物之间什么是相同的，什么是不同的，而且(更重要的是)当两个事物被放到一块的时候，它们之间发生了什么，它们是否产生了变化，如果产生了变化，是通过何种方式变化的。对于以上的变化来说，最重要的是一种辩证的变化。就像法国数学家庞加莱(Henri Poincare)所说的那样，如果世上的所有事物都在一夜之间发生了变化，那么第二天早上谁会发现这些变化呢？至少得有一个东西没有变化，才能觉察所发生的变化。就像断言需要反驳，肯定需要否定，变革需要守恒一样，变化也需要稳定性。对于中国人来说，你们比西方人更容易理解这种辩证的对立，在这一点上我就毋庸多言了。这正是皮亚杰整个解释系统的精髓之所在：从平衡理论开始，到随后通过同化和顺化这两个对立的两极而实现的适应，再到后来的由生命本身到知识的延续，这种延续是通过不同的方式来实现的。

但是这套丛书又在皮亚杰原有研究的基础之上加进了一些新的、不同于以往的东西。若对其先前的研究进行反思，那么就可见此处介绍的与之前的研究中提到的有着本质的不同。从某种程度上说它是一种从具体内容到形式的转变。也就是说，它所关注的不再是生命和知识以及科学史和心理发展之间的共同机制，而是力图揭示皮亚杰早期所提出的所有结构和过程是包含于一个简单的同构性的形式结构之中，并且，它证明了皮亚杰的全部研究和平衡化的第三个原则是相吻合的：在事物之内，在事物之间，超越事物之上，这一点在我即将在加拿大出版的一本书的一个章节中已有论述。

这一套最新的丛书实际上是真正跨学科性的、超解释性的，下面我就要对此进行说明。

我们从这套书中编写时间最早的一本书开始，这本有关"矛盾"的书写于1970至1971年。正如让·雅克·杜克莱(J. J. Ducret)在该书的序言中提到的那样，皮亚杰当时的研究目的在于找出心理发展的一般机制，而不再是发展的结构。但是皮亚杰关于矛盾的立场既不属于黑格尔学派，也不同于其他的哲学流派。对于皮亚杰来说，矛盾是肯

定性和否定性之间的一种不完全的补偿。换言之，它是内涵（把某一个给定的集合 a 归于一个给定的类 A）和外延（把一个非 a 的属性归于类 A'）之间的一种不完全的协调。因此有些元素最终既被赋予了 a 的属性又被赋予了非 a 的属性，就比如对于前守恒阶段的儿童来说，在同一时刻液体既具有相同的质量又具有不同的质量（"可以喝的水多或少"）。

对矛盾的超越由两种互补的过程组成：拓展的参照系统和概念的相对化。在守恒任务中，同时考虑两个不同的维度，并能意识到"多"和"少"这两个词语是相对的。这两种过程都受到"平衡化"这一共同机制的调节。当肯定性和否定性之间出现不平衡（用皮亚杰的术语来说就是去平衡）的时候，矛盾就出现了。一旦儿童明白了任何一种肯定都能被一种否定所补偿，他们就能克服矛盾。这就是心理运算中最重要的可逆性原则。

皮亚杰进一步区分了三种类型的矛盾：(1) 完全只关注肯定和对否定的全盘忽视；(2) 对肯定和否定进行协调的最初尝试；(3) 在整个可逆系统中超越矛盾，据此，矛盾被视为是观察或推理过程中的暂时性错误，这种矛盾可以被肯定和否定之间更高的平衡的必然重构所抵消。在思维和科学的过程中都会出现这一过程。

《态射与范畴：比较与转换》这本书是在皮亚杰去世之后才出版的，所以皮亚杰没有对它进行最后的修改。因此，这本书有些内容不是很清楚。这本书主要阐述了有关生物和智慧之形式的一般理论，并指出这种理论是建立在态射和范畴这两种互相协调的数学工具的基础之上的。态射是建立在两个集合之间关系系统之上的一种结构，这两个集合就像数学的群集一样，都有一个或是几个共同的补偿规则。

范畴是拓扑代数的一部分。它们由两个类组成：一类是对象，另一类是态射。态射满足这样的规则，对于给定的三个对象 A、B、C 和两个态射 f_{AB}（从 A 到 B）、f_{BC}（从 B 到 C），有 $f_{BC} \cdot f_{AB}$ 就是一个态射 f_{AC}（从 A 到 C）。态射遵循结合律，且有单位元。

函子把范畴之间的关系联结起来。一个函子可以将一个范畴中的对象与另一范畴中的对象，而且只能是唯一的一个对象联系起来，在态射之间也是这样。简言之，就是通过比较两个对象，它们的关系发生了转换。这种转换有三种类型：内态射、间态射以及超态射的转换。内态射转换是对状态或行为进行经验比较而产生的结果，不包括任何的代数运算成分。间态射的转换是以某种组合的开始为其特征的，如减法（逻辑可逆性的一种形式）。超态射转换是作用于每一态射从而生成每一个态射的范畴（参见前面的数学介绍）而实现的。

因此，除了本质上为超态射的运算逻辑之外，皮亚杰通过代数拓扑而不是布尔巴基的母结构得到了另一用于解释数学群集的态射和范畴的平行系统。那么，这又有什么不同，又有哪些进步的地方呢？它们都是可使运算性转换的群结构具有建构性的好范畴。那么具有建构性又体现在哪些方面呢？为什么它比运算性变换更具有建构性呢？当人们使用布尔巴基母结构模型的时候，低层次的结构和高层次结构之间的转换十分彻底，以至于最初的结构完全融入了最终的结构。这正是皮亚杰在那本关于抽象的著

作里所要解决的一个问题，在此我很冒昧地向读者们推荐这本书。皮亚杰在这本书中指出反省抽象(或是建构性的)抽象反映了一个很重要的问题，因为"它是从低层次的操作或运算的系统中推导出来的，通过对行为或操作的反省，从而保证了其在高水平上的特征，因为只有通过在新水平上的建构才能够弄清之前的建构过程。"(E. E. G. XIV p. 203)。因此建构性抽象中的两个方面和"反省"一词的两种意义是相联系的，它意指反省就像镜子一样，反射什么东西(皮亚杰称之为"物理意义"上的反射)也就是(对什么东西的)思考。某种程度上来说，反省抽象就是将较低水平上的事物投射到较高的水平上去，这并不受水平之迁移的影响。但是如果从思考的形式这一层面来说的话，它会因水平的迁移而彻底发生变化。事实上，新的运算结构比前面的结构更为有力。而且，能同时对这两个方面做出解释的数学模型也只有范畴理论，因为这一理论在最抽象的水平上使用了态射和对象的二分法。

皮亚杰通过态射和范畴解决了长期以来一直困扰着他的一个问题：视为生物适应之两个阶段的生命和智慧之间的延续性问题与日常知识和科学知识之间的延续性问题。

当皮亚杰通过范畴理论为他的建构主义建立起一个可靠的数理逻辑基础之后，为了确立结构主义的建构本质，他就得解决来自另一方面的问题，即必须对建构主义的建构本质进行明确的说明。就此而言，皮亚杰还必须对这一问题进行探讨：态射和范畴是不是或为天生或为后天习得，而不是通过建构而得到的？因此，皮亚杰就开始对现实性、可能性和必然性这三个概念进行研究，其中现实性只是某些可能的转换之有效的现实化或实例化。

而且在《态射与范畴：比较与转换》中，皮亚杰研究的着眼点不再是阶段和结构，而是对过程、程序和机制进行了探讨。此时，程序和机制被设想为有助于解决现实性、可能性和必然性之间的关系的争论。总的来说，知识的非遗传理论(后成理论)以可能性来解释了现实。它们用"本质的直觉"来解释实际的知识，也就是说，一般性、形式或范畴本身就包含着所有已知的可能性。因此发生认识论者的主要任务就是要阐明：一般概念的系统以及理解的形式和范畴，是由个体的行为建构而成的，而不是从外部世界的永久性中得到的。这种观点和先验论相抗衡。另一方面，还需要阐述和证明"普遍性是由经验所致"，我们可以以经验论的形式对其加以理解，其中一般性的范畴是通过日常经验获得的。为了证明经验论的错误，必须同时从两方面进行论述：(1) 范畴是个体的活动的结果，而不是从现实的内部结构中得到的(这些范畴是个体赋予现实的)；(2) 证明这种赋予经历了发展的各个阶段。为什么呢？因为如果范畴仅仅是学习的结果，那么现实的内容就可以从环境中随机的、偶然的遭遇中任意地获得，而不会从一个由简单到复杂的层级清晰的过程中分阶段地获得。因此，皮亚杰理论中的一般系统的阶段功能，就是为了说明知识是建构而来的，这本书对这一点的说明尤为明确。只有对于那些机敏的个体而言，从简单到复杂的变化才是有意义的，因为事物的难易总是相对于主体

和主体世界而言的。

皮亚杰在之前的一本关于"可能性"的著作《儿童概率概念的起源》(皮亚杰、英海尔德,1951)中提到:从婴儿的唯我论开始到儿童的自我中心再到儿童中期的朴素现实主义,其间需要很长的一段时间(对于日内瓦的儿童来说大约是12年)才能发现现实性和可能性之间的关系。正如数学中概率计算一样,偶然性尤其适合理解现实,即有种情形要优于其他可能情况而发生。这是从逻辑运算的角度来说的:归纳、结合性思考……它们只有在形式运算阶段才能得到充分的发展。

新的研究着眼于探讨:对可能性的理解是如何随着年龄的发展而发展,它又是如何与运算结构相联系的。有两种可能的情况:因为数理逻辑结构而产生了对可能性的理解,或者是可能性的发展为心理运算的发展做好了准备。本书论证了后者是正确的。这实际上十分符合逻辑,因为儿童为了实现一个给定的目标而不断地进行尝试,这一过程(在他们心中)调动起了一系列被认为是能够达到目标(或目的)的行动和客体对象。只有当儿童在关于关系的时间系统中对所有的可能性进行组织的时候,相应的数理逻辑结构才会产生。

这些因素使得皮亚杰提出了一种新的格式分类,让·雅克·杜克来在这两卷书的中译本前言中对此进行了介绍。

第二卷书紧接着第一卷的结尾展开,皮亚杰在第一卷的结尾中提出,可能性不能产生于逻辑运算,因为逻辑运算植根于必然性。必然性的发展经历了三个阶段:(1)前必然性或伪必然性,它存在于这样的事实中:儿童意识到仅有一种可能性是有效的;(2)共必然性指的是,认为某些必然性能够通过一些有限的方式引起另外一些必然性;(3)最后一个阶段是无条件的共必然性。第一个阶段相当于将现实同可能性等同起来(现实就是唯一的可能,因此,也就是唯一的必然)。第二个阶段以现实性、可能性和必然性之间的区别为特征,但是这种区别仅仅局限于:现实只是可能性的一种,只有当其他的可能性被排除的时候,它才可能成为必然性,但是由于儿童无法考察所有的可能性,因此它只能是一种有限的必然性形式。最后一个阶段通过对所有可能性(现实的和不现实的)的思考,包括某些可能性会将其否定性排除的原则的思考,满足了实现无条件共必然性的条件。这里,我们可回过头来再看看之前关于矛盾的那本书中提到的关于肯定和否定之间的平衡化理论。

总而言之,我们认为必然性并不是像经验论者所认为的那样,是从现实中抽取出来的,而是产生于个体对可能性、可能性之间的关系及其必然性的建构。也就是说,它同时也排除唯心主义,因为作为一种生物,个体本身就是现实的一部分。从下面这句话我们可以再次看到,皮亚杰喜欢通过一种怎样的方式将生物体同知识联系起来:"现实只有在这样的过程中才能学会认识自身,即产生生命体,并且由此也产生了主体本身,这就又使我们回到了不可避免的循环(螺旋)……"这是关于知识和生物的最基本的循环。对它们而言,其中任何一方的深化就必然会引起另一方的深化。从知识这一方面来说,

客体变得更容易被理解，这样个体就能够掌握他自己的心理结构，这些心理结构反过来又被其所遭遇的各种客体所完善。从生物体这方面来说，它们的器官变得更适于生存，甚至于为了适于生存而产生新的器官，这些器官通过前馈和反馈的反作用，在一种不断循环中创造出许多新的有机的可能性。

皮亚杰晚年在探索新的解释模型过程中，再一次修改了他的运算逻辑，他在同格里兹(J. B. Grize)从1949年到1972年的合作中曾经对其进行过一次修改。每一次的修改都旨在提高实际的推理或思维模型同逻辑模型之间的吻合程度。最初由安德森和贝尔纳普提出，现在被加西亚(R. Garcia)所推崇的衍推逻辑，主要是为了克服命题逻辑中的自相矛盾之处。这些矛盾是源于这样一个逻辑真值表。根据命题逻辑的真值表，若蕴涵 $p \supset q$ 为真，即使 p 为假，下列的条件陈述亦为真："如果月亮是方形的，那么中国在亚洲。"人们马上就会意识到其实这两个命题之间根本没有任何关系。因此皮亚杰引入了意义蕴涵的概念，它指的是当且仅当"关于 q 的一个含义、包含于 p 的意义之中，并且这一普遍含义是可以传递的"，则 $p \to q$（《走向一种意义的逻辑》，法文版第12页）。皮亚杰对三个新的发展水平之间的逻辑一致性进行如下解释：内运算阶段（以前称作感知运算阶段）的前运算不能在即时动作之外的结构中加以结合；在间运算阶段（以前称为具体运算阶段）与超运算阶段（以前称为形式运算阶段）中，儿童可以在运算上组合运算，而不再是在运算中进行运算（就像在具体运算阶段或是间运算阶段）。

在这样的模型中，我们可以在三个不同的逻辑水平上发现可逆性。在内运算阶段，婴儿不断地将一个容器装满，又倒空，通过动作他明白了装入的动作倒过来就是倒出，正如守恒阶段的儿童能够通过所有可能的可逆性形式来解释守恒性：(1)没有增加或减少任何东西；(2)永远可以将动作颠倒过来；(3)不同维度之间的补偿或平衡状态，就像青少年具有的INRC转换群以及16种二元命题逻辑的组合的掌握一样。正因如此，所以皮亚杰认为16种二元命题组合在人类婴儿的动作中就已经存在了。

再者，正如《态射与范畴：比较与转换》中所说的那样，依它们自身而形成的循环是封闭的；因为每一个元素都有意义，所以每一个元素都暗含其他的元素，这一现象体现在人类身上就表现为一些事物引起另外一些事物，如客体、行动或思维等。

非常遗憾的是皮亚杰未完成这本著作就与世长辞了，否则的话，这本书就会像加西亚作序的《心理发生和科学史》一样非同一般，而我做这些介绍也就显得多此一举了。

我们要明白和记住的是，现有的这套丛书以及其他的一些著作：《意义的获得》《理解的获得》《反省抽象研究》《概括化研究》《关于"对应"的研究》，它们代表了皮亚杰研究上新的转折点，而且是一个具有建设性意义的转折点。因为皮亚杰从20世纪冰冷、教条的结构主义（对于结构主义的创立和发展他皆有贡献）转向21世纪新的、一般意义价值的信仰，并且通过对现实进行不断的比较和转换，从人类的行为中寻求这一存在的意义。从这个意义上说，皮亚杰是唯一实现西方哲学史中这一梦想的人。亚里士多德曾经说过："谁能掌握隐喻，谁就是天才。"隐喻就是通过比较而实现的精确的转换，它使得

现实的意义变得更加丰富多彩。皮亚杰根本的隐喻就是"活动"。

我们十分感谢华东师范大学的李其维教授将这些知识精粹介绍给中国读者。这真不愧为一项伟大的成就。

文献总汇

Beth, E. W. & Piaget, *Epistemologie mathematique et psychologie*, E. E. G. XIV Paris: P. U. F., 1961.

Piaget, J., *Essai de logique operatoire*, Paris: Dunod, 1972 Edited by J. B. Grize.

Piaget, J. & B. Inhelder, *La Genèse de l'idee de hazard chez l'enfant*, Paris: P. U. F., 1951.

林敏译 吴国宏校

中译本序言

Jean-Blaise Grize*

阅读本书,有两种方式:一种方式以皮亚杰的认识论为框架——本书第十章就是论述皮亚杰的认识论,这种方式能使我们更好地理解智慧在其发展过程中如何摆脱实际情景的具体内容,到达一种抽象的形式思维。另一种方式是把注意力放在思维在日常活动中的表现,思维不试图发现运算体系,而是联系于本书第一部分的实验章节所揭示的自发过程。

经典数理逻辑作为一种仅仅考虑命题的真值,即作为与命题的意义无关的真和假的命题计算,可以说是外延的。因此,在包含真命题 $3\times4=12$ 的每一个公式中,我们都能用真命题"巴黎是法国的首都"来代替它,而不改变真值。众所周知,这种做法可能导致矛盾。既然 $3\times4=12$ 意味着 $3\times4\neq10$,那么"巴黎是法国的首都"就意味着 $3\times4\neq10$。但是,这仅仅揭示了一个更深刻的问题。事实上,为了行动,必须拥有信息,当然是真实的信息,然而,信息的根基是与之有关的意义,因此,需要一种内容的逻辑,至少需要一种内涵的,也就是非外延的逻辑。

形成概念,有两种方式。或是用内涵定义阐释概念的属性,或是列出符合概念的外延定义的诸事物的清单。因此,人们能说方位基点是"用来确定其他水平点位置的基点",或者说是集合{东,南,西,北}。我们顺便指出,只有内涵定义直接联系于一种可能行动,在这里,是确定一个位置。另一方面,概念的内涵越多,能定义概念的内涵的属性就越少,在1949年的《论运算逻辑》中,皮亚杰已经做出了说明。他指出,与抛物线相比,圆锥曲线包含更多的东西,描述一条抛物线的方程比描述一条圆锥曲线的方程包含较少的条件。他分别暗示 $2ax+y^2=a^2$ 和 $(1-e^2)x^2+2e^2ax+y^2=e^2a^2$,其中的 e 表示离心率。

知识的理解需要以思维过程为出发点,而思维的原则就是推理的原则,这就是为什么皮亚杰一开始就引入有内容意义的概念,塞克斯图斯·恩比里库斯从麦加拉学派那

---

* 让-布莱兹·格里兹(Jean-Blaise Grize)现为瑞士纳沙泰尔(Neuchâtel)大学名誉教授,著名逻辑学家,瑞士日内瓦国际发生认识论研究中心(International Center for Genetic Epistemology)的重要成员及皮亚杰生前的主要合作者之一。其最值称道的工作是与皮亚杰合作,把皮亚杰早年关于心理逻辑的著作《逻辑通论》(*Traité de logique*)重新整理和改写为《运算逻辑试论》(*Essai de logistique opératoire*),对皮亚杰心理逻辑学体系的建立做出了巨大贡献。

里获得的内容意义，即内涵意义的概念。我们能说，"如果 q 的一种意义，被包含在 p 的诸意义中"，那么 p 蕴涵 q。麦加拉学派谈论可能的包含，但是，"包含"一词具有能清楚地表示内涵和外延之间对称的优点。如果"是一个长方形"(rx)的意义表示"是一个四边形"(qx)并且"有直角"(dx)，并且如果"是一个正方形"(cx)的意义被纳入"有等边"(ex)的意义之中，那么"x 是一个正方形"缊涵"x 是一个长方形"。之所以正方形的集合被包含在长方形的集合中，仅仅是因为"是一个长方形或 q，d"的特征类是"是一个正方形或 q，d，e"的特征类的子类，并且在外延和内涵之间有着完全的平行关系。因此，毋庸置疑的是，人们能重新发现形式逻辑的结构，特别是布尔代数的 16 种标准运算，看到思维如何逐渐摆脱一切背景和一切意义，只留下真和假。但是，在皮亚杰看来重要的是，在过程中，是有内容的意义澄清了形式的前后联系，正如正方形和长方形的例子所表明的。

这个事实使作者们想到，安德森(A. R. Anderson)和贝尔纳普(N. D. Belnap)的相干逻辑能用作意义逻辑的模型。然而，这是一种错觉。显然，在经典推理定理并不始终适用的意义上，这种逻辑是外延的。事实上，这个定理表示，如果 q 能通过前提 Δ 的一个类，以及 p 和 Δ 推断出来，那么我们就能推断出"如果 p 那么 q"。安德森和贝尔纳普的相干逻辑把定理限制在下述情况下：p 在推理中是有效的，也就是实际上已经被使用。因此，$p\wedge\neg p\wedge q$ 缊涵 $p\wedge q$，但 $p\wedge\neg p$ 并不缊涵 q，可以说"来自天上"(第十一章)的命题。所以，在这里涉及的相干纯粹是形式的。它仅仅限制真值逻辑的重言式的可接受数目，而没有涉及命题的意义。

但是，另一种阅读方式也是可能的，它将打开个新的视野。事实上，皮亚杰致力于研究难以否认知识源于认知主体的活动的原则。然而，从心理学的观点看，一种具体的动作需要拥有动作所依据的心理表象，需要预料动作的结果。因此，把一种意义给予一个物体，就是在于从构成动作的特征中推断出一个可能的动作，从一个合乎动作的谓项过渡到一种动作的潜在可能性(第一章)。人们还能谈论有内容的意义，不过，是在一种完全与外延性分离的意义上谈论它。例如，如果一块石头被认为是沉重的，那么人们就能用它来镇纸，或用它来打碎门窗的玻璃；同样，如果一个数被认为是双数，那么人们就能把这个数等分为两个数。

这能使我们理解皮亚杰在顺向意义和反向意义之间所做的区分，尽管在我看来必须把这种区分放入时间的维度中，而考察非时间结构如树木结构的研究并不关心时间的维度。克里西波斯，以及在其之后的蒙田，关于这一点创作了一个寓言，跟随其主人的狗的寓言。狗在到达一个交叉路口时，对自己说：如果我跟随我的主人的足迹，那么我将赶上他(将来时，这是意义的顺向方面)；但是，它也对自己说，如果我的主人走这个方向，那么他已经留下他的足迹，这是一种反向意义。我们走向(在这样说的时候)自皮尔斯以来在演绎和外展之间的常用区分。如果我们有一种意义及其前件，$p\rightarrow q$ 和 q，那么我们就能根据来自真值表的一种运算推断出 q，p 因而是 q 的充分条件；如果我们有

意义及其后件,$p\to q$ 和 q,那么我们就能根据不再属于真值表的一种运算推断出 q,q 因而是 p 的必要条件。

所有的一切使我们想到,应该进一步走向一种意义的逻辑。只要我们赞成考虑事物的意义,我们就能更直接地关注人的活动,即推论传递活动的这种独特而十分基本的形式。语言中的词语并非双重地返回弗雷格的含义(sinn)和指称(bedeutung)——皮亚杰因不感兴趣而加以拒绝,但是,词语通过一种同样的运动返回其定义和世界的某种实在性。定义可能是清晰的和严密的,就像在科学概念中那样,因而使必然推理成为可能。至于词语所指的对象,它们是思维能自由地运用,我们得以处理单纯概念的文化单元。词语"三角形"表示几何概念,也指称从百慕大三角区到弗兰克-马松的概念。因此,语言和心理表象向思维敞开整个类比领域,能使我们理解显然不是普遍的规律,但在某种特定的情况下仍具有一种普遍特征,特别是具有一种存在特征的规律。

事物的逻辑(第五章)在与结构的逻辑对比和互补时显现出来了。一切思维的对象都围绕着由内在属性、与其他对象的关系和可能动作的格式构成的诸如方面。一把椅子,能用来坐,能被放在一张桌子前面,能在我们站着的时候靠在它的椅背上。

然而,在同样有效的其他阅读方式中,这两种阅读方式能使我们理解皮亚杰思想的丰富性,他的思想在世纪之交所占据的地位。在世纪之交的年代,逻辑-数学理想的结构主义已经转向作者们对一般意义的重视和给出的推理解释。正如B.英海尔德在法文版前言中明确指出的:"皮亚杰始终在走向一种自然逻辑中的意义逻辑",她补充说:"著作不是平息争论,而是打开新的视野。"

姜志辉 译

发生认识论与逻辑

——《走向一种意义的逻辑》导读

李其维

我（们）必须澄清我的逻辑

——J. 皮亚杰

逻辑开始于推理，而推理主要是意义之间的蕴涵。

——R. 加西亚

对皮亚杰发生认识论的批评，除了“生物学化”和“哲学化”这两顶帽子以外，还有一顶附和人数也不算少的帽子是“逻辑学化”。尽管皮亚杰一再声称他的发生认识论并不是进行一种纯形式的逻辑研究，也并无企图把认知发展的内容本身公理化，如赫尔曾经尝试做的工作。但误解仍是存在的。正如加西亚所说，人们“对发生认识论的另一误解之源是（皮亚杰）对逻辑结构的持久关注”（本书英文版第126页）。不言而喻，逻辑是发生认识论中经常出现的主题。从这个意义上说皮亚杰发生认识论的逻辑色彩甚重，似乎也不为过。因此，澄清“逻辑”在发生认识论中的地位是我们阅读本书首先应具有的前提知识，也是正确评价皮亚杰理论不可回避的要点之一。

一

我们首先从发生认识论的研究对象说起，因为“逻辑”与发生认识论的关系在发生认识论这一学科的研究对象中就紧密地结合在一起了。

人们都知道，发生认识论是研究认知（知识）发展的。认识又被分为所谓逻辑—数学知识和广义物理知识。这两类知识都不是预成于外（经验论）或预成于内（唯理论）的，而是通过主客体相互作用的活动建构起来的。这就是著名的“双向建构说”所阐述的内容。在这个意义上，“皮亚杰的心理学研究——概念形成的心理发生——乃是为理解知识怎样发展提供一种**工具**”（同上）。

可见，发生认识论所关心的是“逻辑和数学的认识论起源”（同上）。并且，它找到了正确的发生源头，同时也找到了适合的研究平台：概念形成的心理发生。大致可以说，这些概念就是康德意义上的各种知性范畴。

这表明，从发生认识论的研究伊始，对象确定之际，它就与逻辑密不可分。因为这些康德意义上的知性范畴本身就是构成逻辑大厦的最基础部分。范畴如何发生发展的问题实际上与认识论的最基本问题之一，即逻辑必然性从何而来的问题密切联系在一起的。而这一问题正如加西亚所说，也是所有知（认）识论的 Achilles 之踵（同上，第127 页）。康德以前的所有经验论和唯理论的回答都是错误的，康德的先验论也并非真正的出路。只有发生认识论才使它能在科学的（心理学的）框架内得以研究。

逻辑的本质到底是什么？从发生认识论的双向建构的立场来看，它们属于形式类知识，是组织经验材料和感性杂多的工具。从经验中产生的知识则是属于内容类知识（广义物理知识）。两类知识同时并共同产生于主、客体相互作用活动的辩证过程。所谓辩证，当指它们互相促进、互为依靠之意。由于本书的重点不在于阐述双向建构的机制本身，所以皮亚杰与加西亚对此着墨不多。但加西亚在本书第十章中的一段话还是非常精要和准确地说明了“逻辑关系是在经验世界被组织的同时由主体建构起来的”这一双向建构的核心的、同时也是“基本的”内容：

主体 S 面对一个确定的情景，在其与 O 的相互作用中，他是运用组织化了的（逻辑）手段（这些手段是在以前经历的情景中已建构成的）去解读情景（经验材料）的。通过这些手段，经验材料成为可观察物，即它们被解释了（这意味着它们多少被组织起来了）。反过来，主体 S 正在面对着的（因而也是正在解释着的）新的情景将有助于建立新的同化手段，即组织者的逻辑。主体借助它们，就能解释其他的情景（同上，第 128 页）。

这一段文字中，涉及了两种组织化，即两种建构：主体本身逻辑手段的组织化和经验材料的组织化。前者为内化建构，后者为外化建构。同时，这段文字中还蕴涵着如下思想：作为同化手段的逻辑的组织化在认识活动中处于主导的（先行的）地位。逻辑扮演着对经验材料的组织者的功能。

如果继续追问，逻辑从何而来？这就要深入到皮亚杰发生认识论的最核心、最基础的概念“活动”之中了。所谓逻辑关系，它反映的是主动动作之间的关系。逻辑关系的发展也就是动作关系的发展。动作之中有逻辑。

逻辑关系既然作为一种内化建构的产物，它本身自然经历着一个发展的过程。但我们不能把此过程与“阶段的神话”挂上钩。皮亚杰承认在逻辑关系的发展中存在着“具有重要性的一些时期”。但他“是从一名发生认识论者的立场上”，而非作为一名逻辑学家这样说的（同上）。换言之，这是一种“对该时期（阶段）认识论的特征化描述，而不是逻辑的特征化描述”（同上，第 130 页）。

因此，不能把阶段与逻辑关系作简单的对应。

这似乎引导我们应该对逻辑决定论（logical determinism）的内涵作新的厘定。正确地理解应该是：主体（儿童）对问题和任务的解决，决定于他所具有的逻辑。逻辑的水平不同，问题和任务的解决方式和程度必然有所不同。这就是逻辑决定论的含义。但逻辑不能决定阶段，因为逻辑会在不同阶段的主体中使用；不同阶段的主体也会使用不

同的逻辑。加西亚指出：

> 在每一时期——在每一阶段——主体运用具有某种特征性的逻辑关系。这些逻辑关系不是一种，而是许多。不是只有一种逻辑结构，而是有许多逻辑结构。它们中的每一个都有其自身（非常复杂）的发展过程；这些发展的线路并不重叠，它遵循如下原则：发展的阶段不是由单一的逻辑关系所建立起来的（同上，第 130 页）。

因此，关于阶段与逻辑的关系，重要的是分清"每一阶段的动作中存在特殊的结构"（逻辑）与"阶段是由一个逻辑结构确定的"这两句话有不同的含义。皮亚杰的阶段论或弗内歇（Jachque Voneche）等人在《皮亚杰精华文选》（*The Essential Piaget*）一书的"导论"中所概括的逻辑决定论当指第一句话的含义。

皮亚杰与加西亚在本书以及在本译从的另一本书《心理发生和科学史》中，采用了新的视角来重新诠释以前的经典阶段（"前运算思维""具体运算"和"假设—演绎推理"）。这种新的视角就是以"内运算""间运算"和"超运算"这三种逻辑—数学关系，来表示和说明阶段的"真正含义"。

运算内的逻辑—数学关系只是一种简单的同一关系和从重复、相似及相等中产生的对应关系。它不涉及转换及其不变性。此时主体也能产生变形的动作，如把物体的集合分为亚集合，对各种不同大小的物体加以序列化等。但这种分类和序列化的活动仅基于熟悉的事物和源于经验的证实，还不是真正地建立在可逆基础上的类概念和序列概念。一言以蔽之，动作还没有成为运算。

运算间的联系则是指运算形成之后，在运算之间表现出的逻辑—数学关系。它导致了所谓"第一批的逻辑-数学结构"，如基于运算的类（集合）概念和序列化概念。

从"内"向"间"的转变，实质是从动作向运算的转变。实现这一转变的关键，皮亚杰认为交换性的逐渐取得优势起到了中心作用，即发生在"达到之点"的变化与发生在"离开之点"的变化是相关的，是可以替换的。这是从动作向运算之发展的最根本的一步。这样，直接的转换与反演的转换就能相协调，从而导致了"超越单方向动作"的运算的产生，并在此基础上，达于对各种守恒的理解（同上，第 132 页）。

最初形成的运算可以建立起特有的"群集"水平的结构。它们是这一时期的定性逻辑中的唯一有效的组织。当然，它们并未为这一时期（阶段）提供定义。因为它们并不是这一阶段唯一的逻辑——尽管群集结构在心理发生水平上具有某种程度的概括性：它可能覆盖从 7 岁到 11 岁这一漫长的时期。

有必要在此着重指出，群集结构模型是研究者（如皮亚杰）事后对该时期儿童的运算所做出的概括，并且又恰巧可以用"群集"这一数学模型对之加以形式化。对主体而言，存在的只是各种逻辑—数学关系，并无群集这种结构。这些逻辑—数学关系表现为可逆性、循环性、传递性、可交换性、有限的结合及互反性等。如前所说，它们是主体同化经验材料的组织者。主体以此作为同化工具去组织经验材料。它们就是此时主体的心理逻辑。

众所周知，群集结构存在一些"著名的局限性"。究根溯源，群集结构的局限性乃是源于以上那些逻辑-数学联系的局限性。这些局限性有：群集水平的运算仍从属于给定的内容，主体虽能协调这些运算但不能超越具体内容而实现进一步的组织化；只能对相邻元素进行运算（加以结合），而不能进行任意两个元素的结合而实现外延的概括化，对分类来说，只能处理二分的分类而不能进行含有相交部分的多重的分类，如此等等。

超运算的联系简言之就是超越具体内容的逻辑-数学关系，即对运算再施以运算，是运算之上的运算。这一过程常伴有反省的对象，达到某种"主题化"。换言之，主体此时不仅"知道怎么做"，还达到了对"知道怎么做"的结构本身的理解。如果说"知道怎么做"的结构只是一种直接的工具的使用，那么对它的理解则实现了超越这一工具意义的主题化了。超运算的联系也会形成逻辑-数学的结构，这些结构同样可以用代数形式（如群、比例、组合等）加以模式化。

"内、间、超"的过渡表明逻辑-数学关系总是向着更紧密的结构方向发展。这就是说，运算一旦形成，它总是演化成为一种随后可以用某种代数形式加以模式化的结构。逻辑-数学关系不可能永远孤立存在。皮亚杰的新的阶段论不能用这些彼此孤立的逻辑-数学关系的独自发展加以解释。必须用这些关系的从"内"到"间"再到"超"的结构之形成和发展予以说明。

但随之而来，我们不能得出这一发展过程是简单线性超越的结论。"每一阶段不能被简单视为前一阶段的自然化的'成长'；每一阶段都要重新组织主体已经使用的全部手段"（同上，第136页）。这里的"手段"指的是作为组织的各种逻辑-数学关系。问题在于：这种重新组织能否以一种"成长的规则系统"来表示？有人曾这样建议（如L. Apostel）。但皮亚杰表示反对。他认为，通过一种本质上是代数的结构分析手段去先验地推断发展（从其最早的开始到"最后的"状态），这样做的话，"它可能导致某种概括化，这种概括化从一种形式化观点来看是有趣的，但它可能不具有发生的意义"（同上）。换言之，对逻辑-数学关系进行结构分析是不能代替发生的经验研究的。

企望用代数分析的规则系统取代"重新组织"的经验过程，实际上混淆了历时性的逻辑认识论的经验研究和同时性的逻辑学研究的界限。从形式 S_n 的阶段向形式 S_m 的阶段过渡的"重组"之路要比人们所设想的漫长复杂得多。它并不遵循形式逻辑学家为之设定的严格路线。"儿童（在行动中）掌握一个结构和运用它进行操作，并不考虑形式逻辑学家的警告"。同时，"逻辑学家也不能把一个认识（knowing）主体在其'逻辑思考'中所做的一切都加以形式化"（同上）。这后一点，不仅涉及逻辑认识论与逻辑学的区隔，而且也表明了心理逻辑学（实际思维的心理逻辑过程）与形式逻辑学的严格界限。

回到逻辑认识论与逻辑学的关系上来。

到底是什么妨碍了在逻辑的心理发生学与逻辑结构的静态分析之间寻找到一种平衡思想的立足之地呢？关键在于我们无法在前者之中找到一种"发生的代数"。因为逻辑的心理发生学（认知发展的理论）研究告诉我们认知发展实际上是一种开放的自组织

系统。认知发展是以结构的非连续性和机能的连续性为其特征的。本书作者之一加西亚对这种结构的非连续性有很好的描述：

> 对儿童的认知成长来说，同化的工具主要是逻辑的关系。一个阶段向下一阶段的过渡不能视作就是把新的元素加到已有的元素之上。每一过渡意指一种先前“阶段”的完全再组织。这又意味着以前的动态的平衡已遭破坏。因此，从一个阶段向下一阶段的过渡理论首先是一种平衡态中断的理论。……对认知系统而言，“失平衡化”表示一种过程，这时主体不能用他目前为止所能建立的同化结构去处理某些问题，于是整个系统进入一种危机状态（同上，第138页）。

上述“再组织”或“重新组织”的过程自始至终受某种连续性的机能支配。在此，皮亚杰所说的“反省抽象”发挥着巨大的作用。反省抽象的对象就是逻辑-数学关系，说到底也就是动作之间或运算之间的某种关系。反省抽象的特点就是对低层次的关系在更高的新水平上重组并取得新的平衡。“正是它（反省抽象）进入到建构新的结构关系过程之中的方式阻止了任何把发展或成长看作是一种连续路线的思想”（同上，第139页）。

反省抽象的“重组”观站在发展的线性连续观的对立面。当然，人们可对以前者描绘实际认知发展的建构过程的真实性提出疑问，不过皮亚杰认为自己新的阶段理论完全符合开放系统的如下特征：系统的进化在不稳定的分支点上实际存在着多种未来演变的可能性，因而无法以一种站在形式逻辑立场上的发生“代数”与之相吻合。用加西亚的话说就是：“心理发生水平上的过程的复杂性几乎未给（任何）一种发生‘代数’留下什么希望。”（同上，第140页）

以上我们简要介绍了皮亚杰的逻辑认识论的主要立场，重点澄清了所谓“阶段神话”与皮亚杰“内、间、超”的新的阶段思想的界限，这也是本书加西亚所写之第十章的主要内容。笔者认为它们十分重要。它们似乎是我们进一步理解皮亚杰从传统的外延逻辑“走向一种意义逻辑”之立场转变的关键和出发点。我们不妨择其要者将上面所说的内容缕列如次：

逻辑认识论的核心问题是回答逻辑-数学关系的起源和发展，发生认识论就是从个体心理发生（实则建构）的角度展现其过程；

这一发生或建构的过程是缓慢的，历时性的；

逻辑-数学关系并非只有一种，它有着多种不同的类型；

认知发展的阶段可由心理上逻辑的水平来决定的（所谓的逻辑决定论），故我们可称这种逻辑为心理逻辑；

但认知发展阶段并非只由一种逻辑-数学关系的线性发展或多种逻辑-数学关系的线性相加所决定的；

各种逻辑-数学关系趋向于内部的协调（反省抽象在此发挥巨大作用），向“一种结

构的核心"会聚,因此,这些逻辑-数学关系是未来结构的部件(组件);

首先出现的是间运算关系的协调,其后是超运算关系的协调,协调的都是逻辑-数学关系;

对以上协调之后的产物,研究者可以选取适当的代数结构予以形式化,但这些代数结构本身并不是主体的,更谈不上主体对它们的意识反映;

作为被协调的逻辑-数学关系,它们扮演主体心理逻辑结构之"部件"的角色。在协调过程中,"部件"得到发展;即在新的水平上被重构(组);

因此,心理逻辑所反映的阶段特征不是由任何某个单一逻辑-数学关系所确定的,而是由主体"运用他迄今已经建立的结构的所有部件能做什么"所确定的;

从孤立的单个逻辑-数学关系(内运算关系)到最后的协调了的逻辑-数学关系(超运算关系),其过程不仅漫长而且理论上存在着发展的丰富多样性,表现为复杂的过程;

心理发生的经验研究与认识论的分析相结合可以为"实际发生的发展路线"提供答案。

二

本书的前九章为皮亚杰及其同事所从事的逻辑认识论的经验研究。它们均围绕一个主题,即逻辑-数学关系的心理发生根源。

根据皮亚杰的同化理论以及两类知识的学说,任何知识(哪怕是最初步、最原始的知识),它也总包含着某种推理的维度。关于世界的物理知识(因果知识)总是以一定的逻辑-数学知识为框架的,这个框架就是主体此时所具有的认识结构(或曰认知格式)。因此,推理之所以能够进行,盖因为主体的认知结构使然。在主体把这些认知结构——它们作为同化格式被使用着——归属于客体的过程中,客体就不再只是"纯"观察物,因为主体把某种对客体的"解释"赋予了客体。这就使客体及其属性以及动作本身获得了意义。一个物体的意义就是用该物体"能做什么"。至于动作本身,它们此时也获得了意义。它们的意义指的是它们会对其所影响到的对象或情景会"导致什么"。因此,无论是动作的意义还是客体的意义,它们都是在主体与外部世界、主体与自己先前具有的逻辑-数学结构的内部世界的相互作用的活动的过程中产生的。客体和动作获得意义的过程也就有推理的参与。

根据以上分析,如果说知识总是包含某种推理的维度,那么这个推理就是意义之间的蕴涵。意义产生于把同化格式归属于客体的主体与客体以及与自己先前认知结构的相互作用的活动中。

同化格式不能孤立存在,它们彼此联系而发挥功能。在格式之间的各种类型的联系中,最一般的一种联系就是所谓蕴涵关系。因此,在格式的应用过程中(把它们归属

于客体)所产生的各种意义之间,其最一般的关系也就是蕴涵关系。

我们一定要注意区分蕴涵关系与因果关系的不同。后者指物体本身在动作之后所产生的结构之间的联系,属于物理知识。而蕴涵关系则是意义之间的联系,属于主体方面,它们能够通过动作被预期。不过,从即时的动作中产生的意义到可被预期的意义其间经历着一个发展的过程。但任何意义都要以某些蕴涵的运用为前提。逻辑的开端即产生于此,即产生于认知格式归属于客体的应用过程之中,更直白地说,产生于动作之中。动作本身无所谓真假,它只能从有效性或有用性(对某一目标而言)的角度予以评价,但对预期中涉及的动作蕴涵来说,则可能是真的或假的。因此,最原始的动作蕴涵就已经在构造一种逻辑了。本书的全部实验都是围绕这一主题而展开的,即:在成熟的、高级的、以命题形式出现的逻辑之前,早在动作水平,就已存在一种建立在动作之间的意义蕴涵基础上的意义逻辑。

如果说,任何逻辑的基础都是推理性的,那么,对意义逻辑来说,它就是自然推理。

关于自然推理,皮亚杰通过经验研究揭示了它们的发展过程:从对一个经验物体的领域做出推理,到预期中的推理(建立在"反省抽象"基础上的动作蕴涵,不限于所谓经验抽象的结果上),再到能提供"理由"的推理,相应地,意义蕴涵也经历了不同水平的发展过程:从"局部的"蕴涵到"系统的"蕴涵再到"结构的"蕴涵(详见本书第七章)。同时,动作蕴涵还表现出三个不同方向的发展路线:前摄蕴涵导致结果的扩大,后摄蕴涵导致条件作用的强化,证明蕴涵导致理由的深化。

动作蕴涵的最重要的发展是随着符号功能的出现而能在命题(陈述)水平上展现原来的蕴涵关系。这时的意义蕴涵就是命题(陈述)之间的意义联系了。问题在于,这种意义蕴涵仍由意义所决定而不是由外延所决定的。这看似同义重复的说法,却是意义蕴涵不同于实质蕴涵的关键所在。意义蕴涵是意义逻辑的核心运算。实质蕴涵由真值表决定,因而是外延性的。而意义蕴涵则表示如下之意:当A的一个意义M包含在B的意义中的时候,并且当这一共有的意义M是传递性的时候,我们才能说A蕴涵B($A \to B$)。对意义蕴涵来说,作为内涵的意义与外延的嵌套相对应,即与部分的真值相对应。在这种情况下,实质蕴涵的"否定"情况只具有相对性。正如本书编者之一JackEasley所指出的,"一个意义的外延是十分不同于一个属性或一个命题的外延的"(同上,第165页)。

除蕴涵之外,意义之间还有多种联系。本书的一个极其重要的研究成果就是揭示了:在意义的背景下,儿童早期的动作与命题逻辑中的16种二元运算竟然存在着同构性!16种二元运算(组合)在动作之间协调的水平上被发现,这表面上似乎与传统的"形式运算"的说法相对立,但只要我们站在反省抽象和结构—建构的立场上,这一现象是很好理解的。我们在儿童早期动作水平上所观察到的只是动作的16种可能的配对组合,换言之,它们是被分离地发现、孤立地存在的,并未形成什么整体的结构。每一种配对组合是分别地根据不同的情景而进行的。从孤立的配对组合到整体的16种二元

运算 INRC 群结构，其间不知要经历多么漫长而复杂的反省与重构！这一过程始于意义之间的相互作用。于是，各种最初分别形成的意义联系就成为未来更高水平结构的“组件”。它们既为具体运算的群集水平的结构，也为命题运算的更高水平的结构提供了准备。最后，命题逻辑水平的逻辑联结词获得了各种可能的解释以及不同的“内涵”。这再次显示动作（意义）逻辑的构成作用及其远远早于外延逻辑的发生学特点（自然地，意义蕴涵较之外延蕴涵也产生得更早）。

皮亚杰在此书中具体研究了几个逻辑联结词的早期进展，其中不乏新颖独到的发现。

如关于“合取”这种类型的逻辑-数学关系。首先，皮亚杰在非常原始的水平上，即在涉及实物之“属性意义”的水平上，区分了两种合取：约束合取和自由合取。约束合取指两种属性必然地相互蕴涵，自由合取则指两种属性的联系并非必然地存在。但不管怎样，属性可以通过前运算的动作水平的合取而相联系。皮亚杰甚至在这两种类型的合取之间，还发现了一种所谓“伪约束”合取，即“配对属性”的现象。“伪约束”合取本质上不是约束合取，它是一种主体自认为必然的而实则并非如此的主观配对的属性联系，因而是“伪”约束合取。例如，在一个系列中，似乎当中元素的“大小”属性被主观认为可以通过“位置”属性的改变而改变。

关于“否定”这一特殊的逻辑关系的发展也值得一提。否定是一种艰难的构造。例如，当主体面对一个白色物体时，你说它是白色的，这似乎较容易，但要认识到它是“非红色”的，则是较难的。因为“红色”不在你的视野，因而不能直接观察得到，需要在心理上表征出来。“否定”必然要以参照物或参照系统的存在为前提。否定的意义是与参照物或参照系统相伴随的。根据参照物（系统）的不同，皮亚杰区分了两种类型的否定，即所谓“近端的”否定和“远端的”否定。“远端的”否定参照的是整个语言所及的范围，这是一种从外延出发的否定。例如，当我们说某种犬是家犬，那么“不是家犬”指的又是什么呢？根据外延逻辑，它可以指“家犬”以外所有动物而并不局限于犬类。但“近端的”否定则是相对于某事物（如某种家犬）之最邻近的嵌套（类）而言的（此例即为“犬”这一类别的集合）。“近端的”否定显然受外延和内涵的双重制约，并且内涵似乎占据主要的地位。皮亚杰在经典群集结构中所采取的立场显然并不是从完全内涵逻辑的角度出发的，因为这些结构中的类运算和关系运算并不只是限于邻近的类或关系。就发展而言，儿童首先建构的是“近端的”否定。

分析至此，我们可以在本文第一部分的概括结论的基础上对皮亚杰的逻辑观作进一步的概括：

任何知识的背后都有逻辑，它们属于形式类的知识；

逻辑的心理发生的根源在意义之中及在意义之间的蕴涵（意义蕴涵）之中；

客体的意义就是“它能被用来做什么”，客体就是其“属性的集合”；

了解客体能被用来做什么，实际就是把客体同化到一个动作格式中去；

以上过程产生的逻辑就是意义逻辑，因此，所谓逻辑的心理发生指的就是意义逻辑的心理发生；

意义逻辑中最基本的逻辑-数学关系是意义蕴涵，其他的逻辑-数学关系，如合取、析取、不相容、互反蕴涵等可以在意义蕴涵的基础上，然后又在蕴涵和否定相结合的基础上被主体建构起来；

意义蕴涵在动作水平的表现就是动作蕴涵，动作蕴涵这一概念被本书作者自认为是"最具独创性的概念"（同上，第166页）；只有通过对动作蕴涵的分析，才能真正揭示逻辑的心理发生；

皮亚杰通过本书中的经验研究，揭示了命题逻辑中的每一种二元运算都有早期的动作对应物——只不过这些对应物是在各自的意义蕴涵的背景中呈现的，尚不具有整体的结构。但它们是未来整体结构的"组件"。从组件到整体结构，这一过程不是简单的相加，而是一系列的自组织的重构。

对这一重构之过程的内构，不能通过逻辑的分析而只能通过心理逻辑学的实证研究予以揭示。

三

在以上的分析中，我们发现，本书自始至终贯穿着作者的另一重要思想：即作者在坦承书中的研究受到当代逻辑学科向意义回归之趋势的影响的同时，作者仍坚持认为：发生认识论的逻辑研究属于逻辑认识论的经验研究范围，它并不承担构筑公理化演绎系统（不管是传统的外延逻辑，还是相干与衍推逻辑）的任务。

逻辑认识论的经验研究是发生认识论的主题，是心理学化的发生认识论的题中应有之义。它属于心理逻辑学研究而非逻辑学研究。而心理逻辑学实质上是思维心理学的研究。皮亚杰从未企图去建构什么公理化的逻辑学系统从而把发生认识论演变成为一门关于纯形式的逻辑学。他曾说过，逻辑在心理学中的地位并不比心理学在逻辑学中的地位要好。因此，所谓"走向一种意义的逻辑"，并不是走向一种形式化（甚至公理化）的意义逻辑——如安德森（A. R. Anderson）和贝尔纳普（N. D. Belnap）等人在其《相干与衍推逻辑》（"Relevance and entailment logic"）中所做的工作，而是从以往注重外延的立场向注重内涵（意义蕴涵）的立场转变。它不是把这些意义蕴涵从相干和衍推的角度予以公理化，而是探索它们的心理发生与发展，回答的是认识论问题而非逻辑形式化的问题。至于这一发生、发展过程本身的形式化，这是心理逻辑学的形式化而根本不是逻辑学的形式化。如前所说，是否存在一种"发生的代数"能够实现心理逻辑学的形式化，这还是一件大可存疑的事。我们的观点是：对生动活泼的实际思维过程是难以形式化的，因为思维情景的无限多样性是难以穷尽的。但一定程度上并不排除对这一丰

富多彩的实际思维过程做出某种概括，如皮亚杰以前从外延逻辑的角度，对所谓具体运算提出群集结构以及对形式运算提出群结构予以形式化的处理。原则上说，对运算从内涵（意义联系）的角度也可做同样的工作，进行新的形式化处理。但令人遗憾的是，本书作为皮亚杰晚年的最后一本著作，这一任务他并没有完成。书中我们见不到堪与INRC 群等相媲美的类似的形式化成果，有的只是"内、间、外"逻辑关系的一般性描述。

尽管逻辑认识论的研究（即发生认识论的心理学研究）与逻辑学研究（以建立公理化的演绎推理系统为己任）的研究目标不同，但我们并不否认两者之间有着紧密的联系。发生认识论不可能去研究构成公理化系统的每一推理规则的个体发生（这似乎也没有必要），但却须对构成这些推理规则的基本的逻辑演算和逻辑关系（如析取、合取、蕴涵等）的心理发生做出说明。否则，逻辑学则成了无源之水。说到底，逻辑学的根源还是在于人的思维活动。只不过从实际思维过程到形式逻辑学的推理规则，要经过多次的概括和抽象，其间最重要的一次概括和抽象就是心理逻辑学层面的概括和抽象。因此，从源头上说，发生认识论的心理逻辑学和形式逻辑学是共同的，它们都要使自己的研究更符合人的真实的思维规律。

那么，从人的真实思维的角度来说，外延逻辑与内涵逻辑何者更为真实呢？对这一问题的思考，应该说逻辑学家似乎比发生认识论者先行了一步。难怪英海尔德承认，皮亚杰关于意义逻辑的当前研究"呼应了现代逻辑学对于相干（relevance）问题被重新唤起的兴趣"（见英海尔德为本书所写的序言）。当然，皮亚杰的心理发生的研究也为逻辑学家新的内涵逻辑提供了发生学的佐证。因此，它们两者实际上结成了某种同盟关系。它们在"意义—内涵"的旗帜下相互为对方提供支持。

逻辑学家为什么会出现这一转向？盖因为外延逻辑—真值函项逻辑存在着重大的局限，即所谓实质蕴涵悖论。根据外延或真值表的分析，本书中举了一个例子："如果所有瑞士人都是穆斯林，那么法国人就是欧洲人"，这一命题也是一个真命题，也是可以接受的。我们甚至也可把"如果 2+2=5，那么雪就是黑的"诸如此类从意义（内涵）的角度来看十分荒诞的命题也视为真命题。显然此类命题实际上不符合人的自然逻辑，因为"甚至一名'外延逻辑学家'对他妻子也不会这样说"（见本书第 1730 页）。比此类荒诞命题更为麻烦和严重的后果是：外延逻辑还会导致如下情况出现，即如果一个理论包含一个矛盾，则任何结论不管它是什么都可以在此理论之内成立！因为根据真值表（它反映只是外延性质），真值形式 $p \cdot p \supset q$ 竟然也是永真式（它的前提就是一个逻辑矛盾）！显然，真正的科学理论是不可能从这种逻辑中产生的。因此，$p \cdot q \supset q$ 这一命题形式的有效性需要从新的角度予以解读——实际上是予以排除。于是，逻辑学家重新引入了"内涵"分析，发展了一种新的逻辑理论。

基于内涵的新的逻辑理论的核心是以"衍推"概念取代了传统的实质蕴涵概念，于是，"$p \supset q$"被解释为"$p \rightarrow q$"，即"p 衍推 q"。衍推要有两个必要条件，即前、后件必须存在某种相干和必然的关系，即 p 和 q 必须具有"某些共同的东西"；欲予形式化的一个

"纯衍推演算"而且是"必然的"。"必然的"概念超越了传统外延逻辑的"有效性"的思想。"必然"源自"相干"，所以，凡在提及"→"这种必然的关系之处，所指就是一种"带有相干的必然性"(本书英文版第146页)。

安德森和贝尔纳普的"相干逻辑"采取了一种不同于刘易斯(C. I. Lewis)在其模态逻辑中引入一个必然蕴涵算子的方法来实现保留带有"相干必然性"的目标，即他们在一个推理系统的基础上来定义"→"。这样的推理系统的出发点就是一个自然演绎系统。逻辑学家可以根据一些规则把自然演绎系统改造成为一个形式系统，并保持使衍推得以成立的"相干而又必然"的特征。于是，$A \to B$ 成立，当且仅当存在一种在演绎上从 A 到 B 联结起来的可能方式。联结 A 和 B 的这些可能方式实际上是一些从 A 到 B 的推演所要遵循的规则。逻辑学家已经证明了这样一种自然演绎系统是等价于这些建立在某些法则基础上的纯衍推演算的。而且它还可以作进一步的构造，其最终产物就是某种相干与衍推逻辑的公理化系统，因此，原来的法则实际上就成了作为构造起点的某种公理。

至于安德森和贝尔纳普的相干逻辑(LE)和皮亚杰的运算逻辑(LO)之间的关系，根据加西亚的分析，它是一种"聚合而非重合"的关系。"聚合"者，当指两者有某些共同的立场；"非重合"当然是更本质的方面，因为两者属于逻辑研究的不同层次和不同领域。

说到"聚合"，可从以下几个方面理解。首先，两者都重视"意义"在逻辑建构中的作用。研究皮亚杰逻辑思想的学者都知道，初版于1949年，再版于1972年的《运算逻辑试论》是一本有关运算逻辑研究的最重要著作。日内瓦学派的著名逻辑学家格里兹(J. B. Grize)参与了此书的再版时的修改。在本书中，加西亚把前后两个版本分别称为LO和LO′。LO和LO′的区别主要在有关"命题逻辑"的部分。后者根据意义逻辑几乎被重新撰写。但依加西亚的观点来看，这一工作并未最后完成。但不管怎么说，这是一次有意识的改变。它至少表达了皮亚杰对传统外延逻辑的不满。

其次，两者建构自己理论的方式都鲜明地反对罗素(B. Russell)的逻辑经验论，都对所谓"逻辑理论的'建筑砖块'就是基本的命题及通过简单'联结词'而构成的命题组合"这一说法表示怀疑。根据逻辑经验论，逻辑联结词表达的似乎只是"语言内部结构"，由此而产生的命题当然就是排斥意义的外延性质的。相反，LO和LE则都把推理视为建造一个逻辑的开始过程。"逻辑开始于推理，而推理主要是意义之间的蕴涵"(同上，第145页)。

当然，在LO和LE各自反对逻辑经验论的相似立场中又同中有异。从根本上说这源于两者的最终目标有别：LO是从逻辑认识论的立场出发的，它旨在通过心理学的经验研究探寻逻辑的心理根源，从动作蕴涵中发现了推理的最原始形式。早在幼儿能预期动作之间存在某种关系之际，逻辑就已开始，这时的逻辑不可能是所谓"纯"外延逻辑；而LE则是完全从构造一个纯形式逻辑系统的需要而离开语言结构转向推理

过程的。只有从推理开始及建立在"可接受的"推理的基础上引入衍推关系，才能避免外延逻辑的破坏性后果。一言以蔽之，在反对"逻辑建立在语言关系基础之上"这一观点上，LO 和 LE 结成了同盟。

再次(这值得我们深入地研究)，LE 的许多实质内容有待于从心理层面上予以证实或两者相互印证。例如，关于各种逻辑联结词所反映的各种逻辑-数学关系，它们完全可能成为 LO 和 LE 的研究的交会点——尽管是来自不同方向的努力。各种逻辑联结词与命题之间的大量可能的衍推相对应，而且十分符合 LO 在心理发生水平上所发现的许多事实。但目前似乎缺少这方面的系统梳理。笔者认为，这或许正是心理逻辑学的研究可能贡献于逻辑学的领域所在。不过要完成这一任务，还须进一步剔除 LO(甚至 LO′)中的"外延"痕迹，用皮亚杰的话说就是必须要"澄清我的(指皮亚杰)逻辑"。在 LO 中，关于 16 种二元命题运算仍是从外延上予以定义的，特别是通过真值表来表示蕴涵定义的。因此，著名的 INRC 群也是完全根据外延分析而得到的。据加西亚看来，这种命题逻辑的表达方式皮亚杰对之从未感到心安理得。尽管如此，他对命题逻辑的解释并不受实质蕴涵之累。因为他一方面保留了对逻辑联结词的外延定义，但同时也对它们做出过类的解释。这种解释是建立在类的包含关系之基础上的，从而为衍推逻辑的"规则"提供了清楚的意义；原本在衍推逻辑中的"规则"，只是某种"禁忌"，即为了自身的形式化而必须设定的条件。但到了 LO 中，皮亚杰则明确地把它们描述为"一个部分与一个整体或其自身的嵌套关系"。应该说，这是皮亚杰的 LO 对 LE 的贡献之一：他使衍推的规则获得了清楚明晰的类解释意义。

关于 LO 和 LE 之间的关系，特别是 LO 的心理发生的研究如何与 LE 的形式化研究相对应以及如何为后者提供证据，这些都值得进一步地探索。如果仅止步于表明在动作的意义联系中可寻找到 16 种二元命题运算的源头，那是远远不够的。心理逻辑学至少在以下两个方面还可以有更大的作为：一是各种复杂的衍推关系是如何从不同的心理情景中产生的，发生学的考查可以反过来成为评价不同的衍推系统之优劣的依据之一；二是对心理逻辑学本身的成果也加以形式化，当然，此形式化并非衍推逻辑的形式化。不过，若能阐明这两种形式化之间的内在联系，则也许更有意义。因此，笔者愿借本书最后一句话也作为本文的结束语："当前应做的工作是要对 LO′做出清楚的形式化。"有志于研究皮亚杰逻辑思想的学者应继续皮亚杰这方面未竟的工作。

序　　言

Bärbel Inhelder

似乎对我而言，此书的重要性在于：它既呼应了当前心理学对意义和表征的关注，又呼应了现代逻辑学对于相干（relevance）问题被重新唤起的兴趣。这本书是皮亚杰及其发生认识论研究中心的同事在 1978 至 1979 年间精心进行之研究的总结性说明。它是皮亚杰晚年所写最后一本著作。

本书既是整个以往系列工作的终结，也是一项新的研究工作的开始，它试图通过以下两个方面重新阐述运算逻辑：构造一种意义逻辑，运算逻辑会自然地从这种意义逻辑中产生；对命题逻辑进行一种新的形式化。之前，这种形式化过于依赖于外延逻辑了。

如同《心理发生和科学史》[1]一书的写作一样，皮亚杰与加西亚（R. Garcia）的合作从这项实验和理论研究的一开始就取得了丰硕的成果。他们通过深入细致地交流各自的观点以及笔记和手稿，在构思这项研究的概念框架的整个过程中相互启示。皮亚杰集中思考在自然逻辑中的一种意义理论，加西亚则以其关于当代逻辑理论的深厚知识使之更为丰富。

本书分为两个部分。第一部分为皮亚杰所写，皮亚杰希望把它与加西亚的研究结果相综合以完成这项工作，但由于他不幸去世，因此皮亚杰没有时间最终完成这一综合，于是加西亚继续了这一工作，最终形成了本书的"总的结论"这一部分内容。

皮亚杰希望通过回到感知运动的动作之间的蕴涵来审视逻辑的最初根源。这样一种逻辑只能是一种意义的逻辑。在这种逻辑中，蕴涵并不限定于语句陈述：根据主体的观点，每一动作或运算都被赋予意义；因此，我们可以先在动作的意义之间来处理蕴涵的系统，然后，在运算的意义之间来处理蕴涵的系统。只要对动作的意义和动作的因果性加以仔细地区分，那么主体关于动作之链的期望和预期就可以证明早期推理的存在。因此，推理的最初形式是动作的蕴涵，它是一种动作意义之间的蕴涵。皮亚杰由此开创了关于"前逻辑"（protologic）的研究。在前逻辑中，形式和内容相对于运算系统而言，

[1] 皮亚杰（Piaget, J.）和加西亚（Garcia, R.），《心理发生和科学史》（*Psychogenesis and the History of Science*，英译者 H. Feider），New York：Columbia University Press，1989，此书亦为本译丛之一种。——中译注

它们还较少分化。在关于对应①、基本辩证法②和范畴的逻辑③这些研究中，皮亚杰明白地揭示了运算的基本的和形成的阶段。皮亚杰深化了他对于儿童理解样式的研究，这种理解使主体在能够说出它们之前，就已能很好地把它们作为认知的工具了。

在本书的第二部分，加西亚重点阐述了皮亚杰对意义逻辑的独到的贡献，这种贡献只有在发生认识论的框架内才能被充分理解。在"逻辑与发生认识论"一章中，加西亚强调指出：皮亚杰之目的主要并不是要对逻辑做出怎样的贡献，而是要发展一种进行认识论分析的方法。我们希望这可以消除所有屡屡出现的对皮亚杰为分析各发展水平上的理性标准而提出的某种形式化工作的误解。

非专业人员在读到"外延逻辑和内涵逻辑"一章时，他们会感激加西亚使他们了解了安德森和贝尔纳普关于逻辑中的相干和必然性的研究成果，也会感激他非常清楚地阐明了运算逻辑和相干逻辑之间的相似和不同之处。加西亚认为后者是前者必要的基础，他向我们首次表明显示该两种逻辑相结合的研究可以获得丰富的成果。

最后，加西亚在其所写的"总的结论"一章中，阐明了整个研究的意义，对本书中的一个部新的发现做出了权威的解释。他强调了以下一种新的发现，它似乎与我们以前从皮亚杰的早期研究中做出的结论相矛盾。这一新的发现是：在动作的水平上和在意义的情景中存在运算的早期形式。尽管它们还不能整合成为成熟结构的整体，但它们是与命题逻辑的16种二元运算同构的。这些结构的片断（部件）是逐渐协调的，它们最后构成了群集，乃至形成了INRC群。在这方面，我们注意到加西亚把一种二元的属性和整合的机能（功能）归于同化的过程，因而揭示了：作为陈述逻辑之基础的一种意义的逻辑必定既是内涵的，又是外延的。

离开结束争论还很远，本书只是开启了新的视角。我们同意加西亚所持的这种完全科学的、因而也是可以修正的认识论的观点，它能够处理和重新诠释像意义问题这样的经典问题。而且，这一分析使我们能够对动作逻辑和与一种意义的属性相联系的各种现象（在儿童的认知活动中）有更好的理解。心理学的广阔领域关注意向(intentions)、目的和有意义的表征。本书自然会对这些问题有所贡献。通过典型的皮亚杰式的跨学科方法研究逻辑（这些研究途径过去已被证明是能产生丰硕成果的），它也将会使逻辑学家、认识论者、心理学家和所有愿意以新方法研究意义的研究者都对本书产生兴趣。

① 皮亚杰(Piaget, J.)：《关于"对应"的研究》(*Recherches sur les correspondances*)（"发生认识论研究"，第37卷，*Etudes d'Epistemologie Genetique*, Vol. 37），Paris: P. U. F., 1980。

② 皮亚杰(Piaget, J.)：《辩证法的基本形式》(*Les formes elementaires de la dialectique*), Paris, Gallimard, 1980。

③ 皮亚杰(Piaget, J.)与恩里克斯(G. Henriques)和阿希尔(E. Ascher)合著：《态射与范畴：比较与转换》(*Morphisms and Categories: To Compare and Transform*)(英译者 T. Brown) Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates，印刷中。（现已出版，此书亦为本译丛之一种。——中译者）

我们深深感谢我们的同事格里兹(J. B. Grize)仔细地阅读了皮亚杰的关于逻辑的手稿，以及 P. M. Davidson 和 J. Easley 对此书英文版的卓越的编辑工作。我们也要感谢 E. Ferreiro 和 S. Dionnet 完成了本书实验部分的编辑工作，D. de Caprona、P. M. Davidson 把本书的第一部分翻译成英文，P. Steenken 对本书的装帧，以及所有“发生认识论国际研究中心”和“皮亚杰文献档案馆基金会”同事们的工作。我还要再次感谢瑞士国家科学基金(Swiss National Fund for Scientific Research)、福特基金(Ford Foundation)，以及皮亚杰心理学和认识论研究基金(Jean Piaget Foundation for Psychological and Epistemological Research)的资助，由于他们的资助才使本书的写作及研究成为可能。

编者前言

皮亚杰在为本书所写的导论中前两句话就提到了运算逻辑和逻辑内涵。关于这两个概念此处稍作赘言也许是适宜的，特别因为皮亚杰对于“运算逻辑”的说法过去一直受到人们的误解。

英海尔德和皮亚杰论及逻辑思维的著作[1]一直受到逻辑学家的批评，批评主要涉及他们对逻辑的使用以及关于儿童逻辑能力的观点。S. 巴贝尔[2]对此说得很好，他写道，“逻辑学家指责皮亚杰之处常常是皮亚杰做得最好的地方。”这就是说，对于最初为其他用途而形成的逻辑思想，皮亚杰发明了对它们的新的用法。他指出，当我们在开始一个新的研究领域时，我们往往别无选择——我们必须使用那些已在别的领域发展完善的现有的手段（工具）。皮亚杰并不把逻辑视作有效推理规则或系统避免错误推理和无效推理的方法，他一直是在运用逻辑的符号表示方法和某些概念作为描述儿童智慧发展的模型[3]，智慧发展是通过那些从技术上来说常常是错误推理的阶段而逐渐进步的。这是为其主要的认识论的目的（他们常受到逻辑学家的忽视），即去解释逻辑推理——特别是关于数、几何和物理学的推理——如何一步一步地从动作中产生其概念而服务的。审视皮亚杰的运算逻辑的另一途径是去注意在为其研究提供基本数据的临床谈话中，儿童所经常运用的逻辑形式，这提示儿童思考一个问题时的新的方法；他们启发性地运用它们，而不只是作演绎的检测推理的有效性，如同在逻辑的形式应用中那样。

在本书中，皮亚杰和加西亚扩展和修正了他们关于运算逻辑的早期工作。他们通过分析在临床谈话中显示的意义联系，以及通过与一种被称之为内涵逻辑的逻辑相结

① 英海尔德和皮亚杰（Inhelder, B., & Piaget, J.），《儿童早期逻辑的发展：分类和系列化》（*The Early Growth of Logic in the Child: Classification and Seriation*）。New York: Harper & Row, 1964；《从儿童到青少年逻辑思维的发展》（*The Growth of Logical Thinking: From Childhood to Adolescence*）。New York: Basic Books, 1958。

② S. 巴贝尔（Papert, S.），“Sur la logique piagetienne,” in *La filiation des structures*《发生认识论研究》，第15卷（*Etudes d'Epistemologie Genetique*, No. 15），Paris, P. U. F., 1963。

③ 皮亚杰所著《运算逻辑试论》（*Essai de logique operatoire*）（Paris: Dunod, 1972）其基本思想之概要可参见皮亚杰另一著作《逻辑学与心理学》（*Logic and Psychology*），Manchester University Press, 1953。

合(这一内涵逻辑源自安德森和贝尔纳普①对Gentzen和其他作者关于自然演绎研究工作的提取)来实现这一目标。

《Webster第二版国际词典》(*Webster's Second International Dictionary*, 1950)对逻辑学中的“内涵”(intension)做出如下定义:“一个概念中所包含或一个术语中所蕴涵的属性、性质或特征的总和;本质(essence)、内容或含义(connotation);因此,三角形的‘内涵’蕴涵或包含‘平面图形’的内涵。”《Webster第三版新国际词典》(*Webster's Third New International Dictionary*, 1970)又加了“与外延相对照”这几个字。要评价Webster所加上的这几个字的全部意义,我们也许应该去阅读许多哲学著作。例如,席尔普(Schilpp, P. A.)在其论述卡尔纳普(Rudolf Carnap)②哲学的著作中,就包括了六位在对待内涵和外延之区分上具有类似学术倾向的哲学家的文章以及卡尔纳普对之的回答。读者如因阅读本书而引起对逻辑问题的兴趣可以去阅读许多其他有裨益的著作。③

对那些熟悉皮亚杰在其先前著作中如何区分内涵和外延的读者来说,以下的进一步说明也许是合适的。例如,在英海尔德和皮亚杰论述早期逻辑的著作(1964)④中,他们研究了儿童对一个类的内涵与其外延的区分。并且,皮亚杰坚持把一个整体与其部

---

① 安德森和贝尔纳普(Anderson, A. R. & Belnap, N. D.):《衍推:相干与必然的逻辑》(*Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*), Princeton: Princeton University Press, 1975。

② 席尔普(Schilpp, P. A.):《哲学家·卡尔纳普的哲学》(*The Philosophy of Rudolf Carnap*), La Salle, IL: Open Court, 1963。

③ 参阅,如伯林(Berlin, I.):"Logical Translation," in H. Hardy (Ed.): *Concepts and Categories: Philosophical Essays*, New York: Viking Press, 1979;卡尔纳普(Carnap, R.):《符号逻辑及其应用》(*Introduction to Symbolic Logic and its Applications*, pp. 40–42, 85–), New York: Dover Publications, 1958;Goddard, L. & Routley, R.:《意义逻辑及背景》(*The Logic of Significance and Context*), Edinburgh: Scottish Academic Press, 1973(第7章);Haack, S.:《逻辑哲学》(*Philosophy of Logics*), Cambridge University Press, 1978, pp. 1–;Quine, W. V. O.:《词与物:客观参照物的语言机制探索》(*Word and Object: an Inquiry into the Linguistic Mechanisms of Objective Reference*), Cambridge, MA: The Technology Press & Wiley, 1960, (pp. 164ff, pp. 212ff);Van Benthem, J. A.:《内涵逻辑手册》(*Manual of Intensional Logic*), Stanford, CA: Center for the Study of Language and Information, 1988;Zalta, E. N.:《内涵逻辑和意象的哲学》(*Intensional Logic and the Metaphysics of Intentionality*), Cambridge, MA: MIT Press, 1988;以及Anderson, A. R. & Belnap, N. D.,前面提到的著作。

④ 英海尔德和皮亚杰(Inhelder, B. & Piaget, J.):《儿童早期逻辑的发展:分类和系列化》(*The Early Growth of Logic in the Child: Classification and Seriation*), New York: Harper & Row, 1964;《从儿童到青少年逻辑思维的发展》(*The Growth of Logical Thinking: From Childhood to Adolescence*), New York: Basic Books, 1958。

分的比较作为"内涵的"定量化"的特征，因为这包含了定性的推理；这种推理与那种在比较元素组成之两个集合时所要求的数学的推理是不同的。因此，这些先前的应用从属于儿童对特别（个别）概念的获得，或者是其特殊推理形式的应用。与此相对照，当前的应用从属于思维本身的基础，因为皮亚杰提出相干（relevance）和内涵作为自然演绎的基础。

对当前皮亚杰的研究来说，其中心问题是发现作为内涵之间一种联系的相干（relevance）起源，以及发现相干在自然逻辑之发展中的作用。在第一章中，皮亚杰向我们显示：一个钩子是如何当一名婴儿在拿起一只卷尾巴玩具猴时与婴儿相联系的。一只钩子其部分意义是，存在着它可以进入其中的圆圈，因此能够支持另一个物体或把这两个物体紧密地联在一起。玩具猴的卷尾巴的部分意义是：它能够把玩具猴与某种支持物相联结，这两个物体的内涵就是彼此相干的，并且与想要得到玩具的儿童的意图也是相干的。加西亚然后向我们揭示安德森和贝尔纳普的衍推逻辑是如何适合于皮亚杰对儿童行为之分析的。

皮亚杰在其逝世的那一年（1980）曾写道："我们最近的工作……是关于可能性和必然性的研究，随后是关于一种意义逻辑之构造的研究，它们提供了一种更清楚的证据支持建构主义的理论及其对新的概念和运算之个体形成的解释。"其中的一些证据是：意义逻辑是一种描述"不断扩大的"平衡过程的自然工具，这一过程将导致更丰富的建构，"在发展的所有水平上，都存在动作或意义之间的蕴涵，因而存在着辩证的联系，这种联系导致主体超越他已经获得的东西。"同样重要的是：内涵的形式避免了外延逻辑和实质蕴涵的悖论，根据后者，"p 蕴涵 q 不管 p 和 q 之间的关系是什么，不需要在它们的意义之间存在任何意义上的联系"。④

在编辑本书时，我们不止一次地对那些我们所熟悉的情景进行内涵的而不是外延的思维时，所要求的视角的变化而感到吃惊。例如，当皮亚杰说，在对一个纽扣构成的图形进行数数时，可能的第二个元素的数目是纽扣的数目两倍——因为数数有两个可能的方向——他就是把"第二个元素"作为一种内涵，这种内涵是不同于它的外延的。读者在第一次遇到各种著名的内涵定义时可能经历过类似的困惑（"morning star"并不意指如"evening star"同样的事情；"等角三角形"的内涵是不同于"等边三角形"的内

① 皮亚杰（Piaget, J.）和英海尔德（Inhelder, B.）：《儿童对物理量的建构和发展：守恒和原子论》（*The Child's Construction of Quantities: Conservation and Atomism*），London: Routledge & Kegan Paul, 1975，第 18—21 页。

② 皮亚杰（Piaget, J.）：《发生认识论的近期研究》（"Recent Studies in Genetic Epistemology"），载《皮亚杰文献档案馆基金会会报》（*Cahiers de la fondation archives Jean Piaget*），No. 1, Geneve: Fondation Archives Jean Piaget, 1980，第 3—7 页。

③ 同上。

④ 同上。

涵的。)

作为一名教师培训者，本书编者之一(J. E.)注意到：学校的教学工作，特别是数学教学，经常会遇到这样的情况，即人们努力排除内涵的推理而赞成外延的推理。这样做的一个负效应可能是：对教师和他们的学生来说，数学被降为一种无意义的计算了。在任何情况下，显然，一个人先前的训练可能既有助于、又可能有碍于他同化皮亚杰最后有关运算逻辑所做的工作。所幸的是，皮亚杰遵循其通常的方式，探索了儿童的意义推理的发展；他从各种角度进行这种探索，向我们无可辩驳地揭示了儿童进行这种推理的模型。不过我们仍然在那些不太清楚的地方加了些脚注，我们希望这样做至少对某些读者是有价值的。

P. M. Davidson 和 Jack Easley

本书编者

第一部分

作者　让·皮亚杰

导　　论

本书主要的目的是沿着一种意义逻辑的方向完善和修正我们的运算逻辑。运算逻辑以往一直是一种外延意义上的逻辑，因此，我们应在内涵意义上特别说明诸如"和"、"或"等逻辑联结词的运用；首先，我们要指出不同于"实质蕴涵"的"意义蕴涵"的应用。这两种蕴涵之间的差别在于后者是由陈述命题的真值所界定的，它不去考虑其意义或它们之间联系的意义。因此，仅从外延上考虑，只要以下析取中的任何一种情况

$$(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$$

都是真的，就可引出蕴涵 $p\supset q$——即使在 p 和 q 之间没有意义上的联系。这是许多著名怪论的根源。①

因此，我们的重要工作是去构造一种意义的逻辑，其主要的运算我们称之为"意义蕴涵"：如果 q 的一个意义 m 存在于 p 的意义之中并且这种意义 m 是传递性

---

① 实质蕴涵怪论，它源自于以下事实：当 p 为真或 q 为假时 p 实质蕴涵 q；它包括以下定理：$p\to(q\to p)$；$\bar{p}\to(p\to q)$；$(p\to q)\vee(q\to p)$。进一步的讨论可参阅 Anderson, A. R. & Belnap, N. D.，《衍推：相干与必然的逻辑》(*Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*)，Princeton: Princeton University Press，1975，第 3—[illegible] 页；Haack, S.，《逻辑的哲学》(*Philosophy of Logics*)，Cambridge: Cambridge University Press，1978，第 176—203 页。(编者之一，P. M. D)

(transitive)的[1]，那么 p 蕴涵 q（写成 $p \to q$）。在这种情况下，各种意义的表现（根据它们相对的包容——我们称这种包容为"内在性"），就与外延的嵌套(nestings)相对应，因而也对应于某种真值表。然而，这样一种真值表只是部分的，它们由意义所决定，并且其否定也因这些被用来作为参考框架的嵌套的不同而具有相对性。[2]

如果这样一种意义逻辑真的存在，那么就没有理由只把它限定于命题或陈述语句中，因为任何动作或运算也都有意义。因为没有什么动作或运算，特别是，没有什么意义是孤立的，相反，它们是彼此密切联系的，在动作或运算的意义之间存在蕴涵。这样一种蕴涵是与行动的因果方面或行动的实际执行不同的（尽管又是不可分的）。

因此，我们的第一个目的是推进对动作或运算之间蕴涵的分析，这种分析应尽可能回溯到实际的动作水平和沿着最基础的推理方向来进行。在真正的运算水平（大约6至10岁），分析可以直接进行。例如，一个把物体X结合进一个类中去的运算显然意味着把物体Y（或非X）排除的运算。正如斯宾诺莎(B. Spinoza)所说，"凡有肯定，必有所否定"("Omnis determinatio est negatio")。但是，就实际的动作而言，我们必须把它们的因果方面（在事实之后可以证实的产物）与其预期方面相区别，后者是推理性的。一个动作就其自身而言，既不是真的，也不是假的，而是根据与某种目的相关的有效性或有用性予以评价的。而一个包含着预期的动作蕴涵就或是真的或是假的，因此它就构成了一种逻辑，即使是在最原始的水平上。此外，由于意义是在把客体同化于主体的结构之后发生的，因而相反地，全部的同化又产生了意义。可观察事件的因果连续对意义之间的蕴涵来说是其充分的条件。例如，一个物体X可以被置于一个支撑物Y之上。主体可能运用Y去把它拉回来，或者主体也可能把它置于支撑物Y旁边。观察这两种情境就会产生意义之间的蕴涵，只要主体理解到在后一种情况下，去拉（推）这个支撑物是无效的；这种关系或"放置"的动作已经蕴涵了一个"理由"(reason)的意义。

1　由于传递性是一种关系的性质，故它似指共享意义的关系。因此，涉及一个意义 m 是传递性的，就是意指：如果 r 与 q 分享 m，并且 q 与 p 分享 m，那么 r 就与 p 分享 m。这一点皮亚杰在其《发生认识论的最近研究》("Recent Studies in Genetic Epistemology," *Cahiers de la Fondation Archives Jean Piaget*, No.1, 1980, p.5.)一文中多少对之做出了进一步的澄清。

2　这意味着：例如，由于方形的类包括在矩形的类中，那么，如果 s ="这个图形是一个方形"，那么 $\bar{s}$（即这个图形不是一个方形）并不意味着它是什么其他东西，而仅意味着它不是一个矩形。

这似乎指："不是一个矩形"也许应读成"一个非等边的矩形"。在这一简单的情况下，仅涉及两个内涵：方形(s)是相对于矩形(r)而言的，因此我们可以得到如下"部分的"真值表：

s	r	$\bar{s}$	$s \to r$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	x
F	F	T	y

在当前的解释下（$\bar{s}$ ="非等边的矩形"，它与"矩形"分享意义），x 为真且 y 为假，而在外延解释的情况下，x 和 y 都为真而不管它们是否分享意义。(P. M. C英译注)

从这一立场出发，可以区分出不同水平的蕴涵。最基本的水平在新生儿形成整体的知觉形象的过程中构造动作、客体和关系的格式之际就出现了，这些形象构成了新生儿的世界。在这最初的未分化的世界中，最初的任何变化只是用一个综合的图画代替了先前的图画，并没有对可能的改变做出任何细节的分析。从这种本质上是混合的情况开始，儿童首先出现的认知努力只是通过可重复的动作去执行许多相对可分离的和稳定的元素（动作格式的起源）。这样，客体和关系就形成了，它们可以作为意义和动作之间的推理或蕴涵的内容。

我们之前描述过客体在各种遮掩条件下，客体持久性的获得是一个艰巨的过程，并且在11～12个月大时才能实现[1]。从那以后，许多研究（Bower[2]以及其他人）已经揭示这种构造甚至比我们所描述的还要复杂。最近的一些研究[3]描述了在大约9～10个月大时儿童所构造的其他形式。面对各种体积的空的管子，儿童在使用棍子和小塑料球时，会表现出要把一个较小管子插入到较大管子中去的意图，但非常有趣的是，他们不是直接这样做，他们首先把它放在自己的嘴里；通过这一程序，他们很好地建立了“把什么东西放入一个人的嘴里”这一格式。他们然后通过一种“反省抽象”的形式建构了容器—内容的格式（在现在的情况下，这是一种关系）。在此之后，他们把它延伸至新的、多少有点相互协调的格式或亚格式，诸如放入和取出，注满和倒空，或者重复有趣的动作以使原来一个“内容”的管子成为另一更小的管子的“容器”。这样，球、管和棍子将最终作为内容使用，六个管子都成为容器。

至于塑料球，婴儿（儿童）会把两个或更多个塑料球放在一起，构造了一个连续的整体，然后又把它们分开使之回复到最初的非连续状态。其他的物体，如棍子，被他们用来进行击、扔、推等等之用。这些事实非常有趣，它们显示出关系格式的构造，这些格式可以相互协调，特别是当一个肯定的动作（如，插入等这样的动作）随后又有相反的动作跟随的时候（取出、倒空等）。这构成了动作之间蕴涵的开始，如“动作 x 意味着存在相反动作的可能性。”我们还可以观察到诸如动作的分化、客体的个别化和位置化、动作的连续化、基本分类活动、对应等等各种过程。

我们可以称这种最初水平叫作“前逻辑”水平的蕴涵，它是导致演绎工具之形成的准备阶段。这一阶段以第一个同化格式，因此也是最初的意义蕴涵（例如，当在视觉和抓握之间的关系通过对实际距离的逐渐发展的评价而建立起来的时候）的形成和协调为标志。

在最初阶段之后，继之又有另一更高的水平，但它仍是以动作之间的感知活动蕴涵

[1] 皮亚杰（Piaget, J.），儿童智慧的起源（The Origins of Intelligence in Children），New York: Norton, 1963。

[2] 鲍尔（Bower, T. G. R.），婴儿的发展（Development in Infancy），San Francisco: Freeman, 1974。

[3] 辛克莱等（Sinclair, H. et al.），婴儿与物体（Les bébés et les choses），Paris, P.U.F., 1982。

为其特征的。在这种情况下,这种蕴涵足以系统化而产生稳定的结构。例如,一旦物体稳定性在物体暂时置于遮掩物后得以形成,主体就可发现物体占有其连续位置的最后位置而不是最初的位置。这意味着这个位置与位移已协调了,因此"位移群"①就逐渐形成了。无疑,这样的结构化不仅需要肯定的蕴涵之构造,而且除了上述提到的最初的反向动作之外,还要求排除或否定的适当应用。

当符号功能完善构成之际,动作蕴涵就可伴随以口语表示,于是这就导致语句陈述之间意义蕴涵的出现。这种蕴涵仍然由意义所决定,不能还原为外延,因为它们仍然依赖于嵌套和固有性,并没有一个一般的真值表。

在这一水平上,我们的研究产生了第二个有趣的结果:我们观察到在动作背景中的不成熟运算的形成,其中的每一运算都与命题逻辑中的 16 个二元运算中的每一运算同构。自然地,这些先行运算是孤立的,它们与具体特殊意义相关联,而不是已组织成为结构整体(如,群集等)。我们以前把这种运算视为约在 11—12 岁时才能完美构成的系统的特征。我们当时这样认为是基于两个理由:首先,这一时期标志了假设—演绎思维的开始,此时主体能够从明确的假设开始去推断必然的结果,而不用依赖于材料(如在"具体运算"水平,大约在 7—10 岁)。第二个假定它发展晚的理由是:在假设—演绎水平上,这些 16 个运算是作为一个反演(N)和互反(R)之间的关系系统而产生的,它们构成了四转换群(INRC 群中的 C 是 R 的反演,是同一性 I 的对射)②。这些群被用来作为解决物理问题的例释,例如那些包含作用力与反作用力相等的物理问题。因此,重新发现这些动作协调水平的 16 种运算在演绎思维之前(毫无疑问,更在 INRC 结构被使用之前)就存在,这真是一个令人惊讶和富有启示的现象。

在儿童早期水平,我们实际观察到的只是把成对的动作相结合的 16 种可能的途径,并不是系统的相互联系,其中每一种结合都是根据内容进行的。而且,就像逻辑联结词"和"或"或"有各种内涵的意义一样(我们希望能对之予以区别),16 种类型的组合(结合)甚至包含了多于 16 种不同的操作,根据这些操作,主体做成了合取、析取、不相容或其他的组合(在具体情景之意义蕴涵的基础上)。无论是内隐的或是外显的,这些蕴涵都可以在理论上归结为(即从观察者的立场)蕴涵和否定的组合:例如,$p \bigcirc q$(这里的内涵的合取 $\bigcirc =_{16} p \to q$)和 $p \vee q$(这里的内涵的析取 $\vee =_{16} p \to q$)。这就是说:在所有水平上,所有逻辑的基础具有一种推理的性质,它在一种意义逻辑的情况下是十分自然的。

一言以蔽之,本书的目的是揭示这种逻辑的构造;它构成了我们的运算逻辑的一种

---

① 皮亚杰(Piaget, J.),《儿童智慧的起源》(*The Origins of Intelligence in Children*), New York: Norton, 1963,第 241—247 页。

② 皮亚杰(Piaget, J.),《运算逻辑试论》(*Essai de Logique operatoire*)(J. B. Grize 编), Second edition of *the Traite de logique*, 1949, Paris: Dunod, 1972。括号中的句子可读成:C=NR & C=CI (P. M. D)]。

自然的和必然的延伸，而运算逻辑直到今天仍与我们更为熟悉的外延逻辑过于紧密地（尽管仅仅是部分地）联系在一起。读者也许会认为这个目标实际包含两个不同的主题，它们是如此不同以致我们本应该把它们放在书中的不同部分以避免可能的混乱。第一个是要描述意义的形成和增加（multiplication），强调它们的多样性（diversity）以及它们共同的特征，并且以此检验"意义的意义"（参阅Ogden和Richard的名著：《意义的意义》）[1]。第二个是要对意义的蕴涵作更进一步的分析，特别是对那些构成动作或运算之间蕴涵的意义蕴涵进行分析（这种蕴涵，如果我们没有说错的话，以前几乎还没有人讨论过）。

这两项工作是有区别的：我们也许会产生它们并非必然混合的印象。然而，尽管它们是不同的，但它们不可能分离开来，这主要基于以下这一根本的原因，这一点我们必须一开始就强调：它们的联合（unity）不仅在于它们具有某些共有的特征（例如，通过一种包含或相交而相互联系），而且在于更重要的和更富于启示的事实，即它们实际是一个辩证的关系的两种说法（terms）。因此，它们是一个圆的两极，这个圆从一开始就普遍存在，然后在整个发展过程中，像螺旋一般地发展。

如前面所提到的，任何可观察之物总是与一种解释相连的，这必然地不仅涉及意义，而且也涉及这些意义之间以及它们与先前意义之间的推理的联系。这样一种推理，无论是外显的，还是内隐的，从其最早的形式来看，只能是由意义之间的蕴涵构成，然后由动作格式之间的蕴涵所构成。因此，甚至最基本的格式（预成的吮吸反射），也已经包含了蕴涵（在位移和成功、失败之间，即，当新生儿为了调整其嘴对奶瓶的错误位置而必须改变其位置时）。至于完全获得（非预成的）的行为，我们会在第一章看到这些意义和蕴涵是如何通过工具的使用而同时为主体所构造的。

1　奥登（Ogden，C.）和理查德（Richards，I. A.）：《意义的意义》第4版，（*The Meaning of Meaning*，4th ed.），London：Routledge，1936。

第一章　工具性行为中的意义和蕴涵

合作者：D. de Caprona 和 A. Ritter

本项研究分析行为中的意义和动作蕴涵的形成，这些行为自苛勒(W. Kohler)所做的"猿"研究——各种作为"工具"的物体的使用，被用来获得它们手够不着的东西——以来，经常被人们进一步地深入研究。我们之所以现在研究这种经典的问题，是因为这种行为一直极少被人们从其内部逻辑的角度加以分析，这种内部逻辑保证从感知运动逻辑向前运算的预期和表征的逻辑的过渡得以实现。

实验仪器(见图1)由一个宽板组成。在板的一端，排放着三样东西：(1)左边是一个放在一只固定透明的盒子中的玩具猴；盒子四边封闭，但顶部开放，因而可以用钩子钩住猴子的尾巴把它吊出来；(2)右边是一只玩具狗，它被放在一个类似的盒子中，盒子一边和顶部是打开的，我们可以通过盒子背面打开的那一边，把狗"赶出"盒子，使它在盒子周围"走动"或把它拉向自己；(3)在猴与狗之间没有盒子，但有一只玩具猫。以下的工具可以自由使用：(1)一根35厘米长的棍子；(2)另一根40厘米长的棍子，其一端有一钩子，利用这个钩子可以吊起猴子或推动狗；(3)一把小耙子，35厘米长；以及(4)一根弯曲的棍子，35厘米长，其弯曲部分可以用来推动狗或拉着狗和猫走。对较大的被试还给他们几根直的可连接的小木棍，均为15厘米长。被试可用它们来改进(1)到(4)的工具。

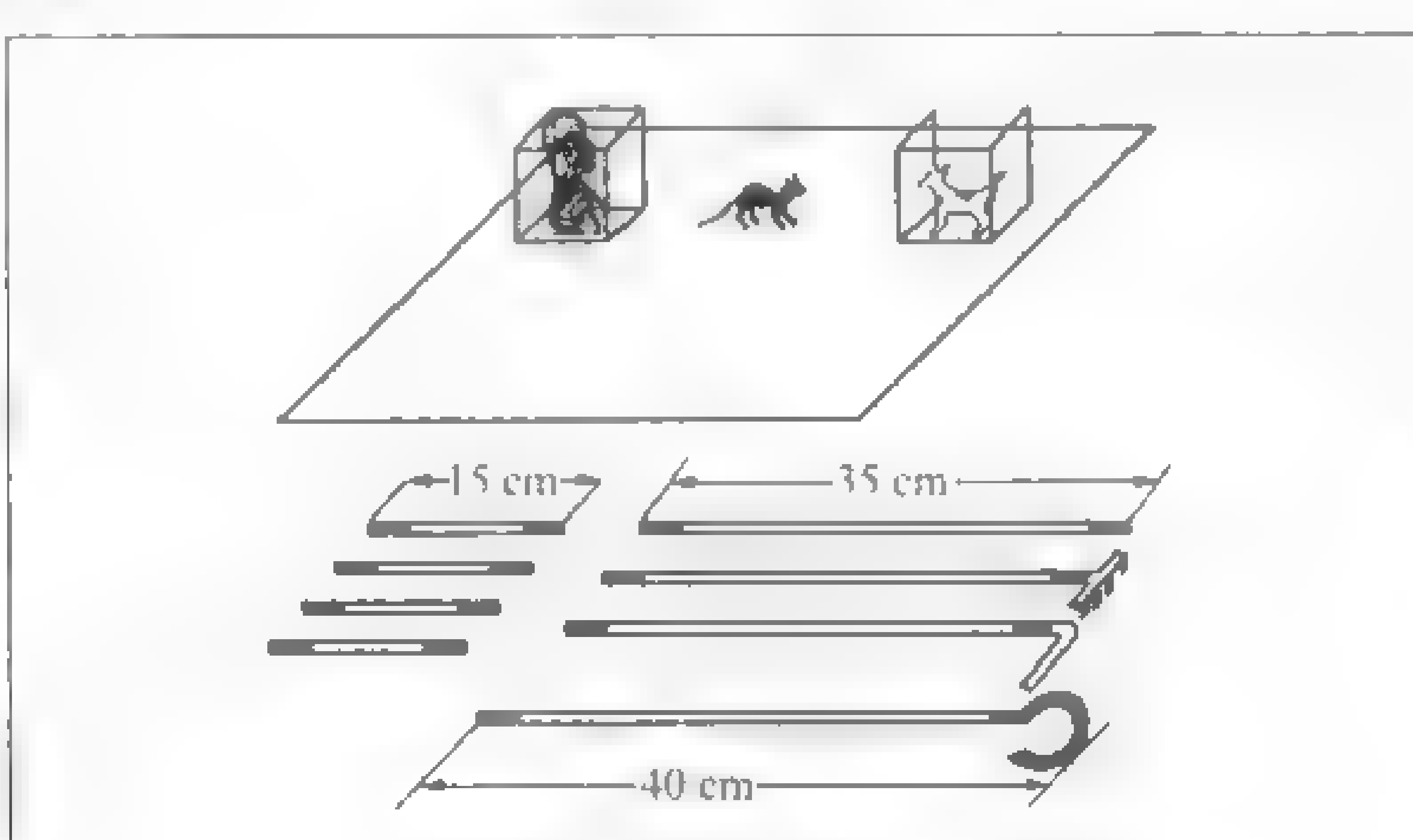


图1

对所观察到的儿童反应，可将其区分为三种水平。第一种水平以简单的探索为特征，其目标在于把意义归于四个潜在的中介物；但局限于像击、推等这样的即时操作。这些主体并不把这些中介物看作是取得所要物体之工具，因此并不把它们作为手段（工具）来使用。在这“非工具水平”之后是一个过渡性的中介水平（水平Ⅱ）。在这一水平，工具意义第一次出现，虽然它们仍然是零星发生的，并且与水平Ⅰ的行为常相混合。最后，达到水平Ⅲ，即工具行为的水平，这些工具行为或是通过即时的成功，或是通过或多或少的努力而获得的。

1. 水　平　Ⅰ

首先提供几个水平Ⅰ的例子。

Soa（1岁2个月）　尽管主试向她发出用工具“去取”动物的指导语，但Soa似仍未表现出对工具的兴趣。她在整个实验期间只做出几次不成功的企图抓握的尝试。当把耙子放在猫前面时，她却把棍子聚在一起，并把它们推向猫，使得猫从板上掉下来。对狗的盒子她也做出同样的动作，只不过没有移动。主试把猫放回原来位置后，她再一次地又把它逐渐推下去。她看看猫，然后又看看自己的手，然后移动她的手指（这显示出她有要拿到的意愿）；接着，她向猫伸出手臂，但并没有试图去拿木棍，而这些木棍已经放在她伸出的手臂的旁边。

Xan（1岁8个月）　他为了得到猫，试图靠近它。他注视着猫，把耙子放在板的顶部，用它去打猫但并没有任何拉的动作。这一行为在实验期间重复了几次，或是只用耙子，或是用拿在手里的全部工具。然后，他拿起耙子又把它再翻过来，换了一只手，再次去打木板，最后让钩子来回滑动；拿起弯的木棍，看着其弯曲之处，把它放在木板上，等等。实验者示范用耙子拉近猫，然后把它放回远处；他模仿这一行为但并没有成功。当用棍子来重复演示时，他拿起耙子，不是瞄准猫，而是用它去不断击打木板。他拿起弯棍，握住其弯曲处，把它的另一端插入到盒子中，推动棍子而不是去拉棍子。他把耙子的一端插入狗的盒子，然后击打木板，先用耙子，然后用弯棍。他也用抓在手中的几个工具去重复这些行为。

Chr（1岁1个月）　他拿起耙子，用它在木板上从这边扫到那边，然后又来回滑动，最后用它去打木板。实验者指着要猫，要求他拿到它（重复指导语多次），此时儿童把耙子的一端放在猫的前面，把它向前推了二次。接着，垂直握着耙子，击打木板；后又用钩子也这样做。主试用耙子指着狗，告诉他狗现在在盒子外边，于是他拿起耙子，轻轻击它，并用手指着狗，然后身体向前倾，用手抓住了狗。同样，我们也可观察到他用棍子也这样做。

Bel（1岁1个月）　他不管指导语，在最初对这些工具进行探索活动时，并不把

它们与动物相联系。他拿起耙子和钩子，多次移动它们，在木板上滚动木棍或把它拿起来，在做这些动作时，他都在观察着动物。向其演示怎样用木棍把猫拉回到面前，他拿起钩子但却推开了猫而不是把猫拉向自己。实验者用耙子拉近猫，但他仅仅是模仿了拉耙子这一动作，并没有使耙子与动物接触，或甚至只是看着耙子。实验者再次进行这一动作；这一次儿童用耙子碰到了猫，但他把它推开了，直到它落下木板。当把猫放回原处，儿童重新开始其努力，但却是从侧面去靠近猫，无意地碰到了猴子的木盒。要求他拿到狗，这时他只是满足于去打狗和盒子；然后同样地去打木板和猫。最后，他试图（但无效）去钩猴子，这是一种最初工具关系的表现，尽管是一种尚未完全成熟的工具关系。两个月后再次测试，Bel达到了水平Ⅱ（见下面水平Ⅱ的介绍）。

Pao（1岁[illegible]个月）。她的反应很有趣，因为虽然她把工具与动物联系起来，但并不是用前者去拉后者。她先拿起木棍，看了看它，又把它放下。然后拿起耙子，她看了看它，把它反转过来，又放回到木板上，推着它向前但还未够到猫就停下了。主试把猫放在离她更近的地方；这时是她碰到了猫，但随后又恢复用手直接去抓而不再运用工具了。主试再次把猫放在离她较近处，尽管她把耙子放到了猫的背上，但她最终还是用手抓住了猫。实验者向她演示用耙子去拉猫，然后把耙子递给她，这时她只是握住耙子，让耙子立起来，检查它的形状，然后她又以耙子齿作为底座，使耙子保持垂直的平衡。

这些最初的反应在几个方面是很有趣的。首先，它们完全不是如指导语所要求的那样，作为一种工具性的行为去拿到够不着的玩具动物。换言之，四种潜在的工具还不具有作为达到特殊目的之手段的意义。甚至对Bel来说，实验者向其演示用耙子去拉猫，因而他可以模仿他刚才所看到的，但此时他仍然很少理解到“用一个工具去拉”这样的关系，以致他不能连续地使用这一工具，仅仅是用它去击打木板。我们也不可能认为这是由于儿童忘记或忽略了指导语的缘故。例如，Soa在用她的手指工作时，注视着猫和自己的手，然后把手移向猫，但只是把棍子与她的手臂平行放着而并不尝试让棍子与猫接触。因此，这些儿童现在理解了应该做什么但不能理解能使她们这样做的关系。

我们所观察到的行为的意义同样是令人感兴趣的。对四个工具探索的最初阶段必须被看作是儿童基于用它们“能做什么”去寻找其意义的过程。这些意义有两种：有些意义与工具的一般性质有关，但更多的偶然的意义则是依赖于所建立的与动物间可能的联系。第一种类型的意义有：棍子可以放下、滚动（Bel），或者垂直放在桌上；耙子可以在其柄或末处抓握住它，或者使之垂直立起；可能移动或推动工具，但不可能使其变形；它们长度相同但有一端不同。这些一般的意义是普遍的，它们对年龄大的主体来说，立刻会被注意和记住；而我们在水平Ⅰ的年幼儿童中却发现：在他们观察到这些意义之前需要主动探索。这表明了意义是动作（即同化格式）赋予物体的属性；因此，物体的性质不能归结为“纯粹的”可观察物，所谓“纯粹的”意指没有任何形式的解释

至于与即时情景相联系的意义——在这一例子中，即时情景指的是要达到的动物——尽管这些意义已经有很多，但其中并没有一个意义含有"拉向自己"的想法。其中最简单的是把中介物移向目标，即像Soa那样把木棍与其手臂平行放置，这显示了她要让对象更靠近自己一点的意图。另一种行为（它经常出现但其意义不甚清楚）是击打木板。这也许含有第一种类型的意义，但它似乎更表明主体有一种去摇动动物的意图，希望这些动物从原处离开，因而使它们会靠自己更近些（例如，Bel交替击打木板和猫）。当一个动物被一个工具所触及，两种最通常的动作是去推动物体或从侧面移动物体，而不是去拉它。这就正像工具是主体手臂的延长那样——这时实际上，工具只是手臂的延长，而不是手臂和手的延长（如在抓握的动作中）。

根据我们指导性的假设，如果所有这些一般的和局部的意义是由动作对客体的"归属"（attributions）所组成，那么意义之间或动作之间的蕴涵又是什么呢？它们是如此内隐以致我们会认为它们也许根本不存在。但是，我们怀疑这一点，因为把意义赋予客体或动作就是去解释这些客体或动作；解释是一种复杂的，基本上是推断的行为。当然，其隐含的意思就是这种解释可能是尝试性的：去触及一个客体意味着要更接近它；去推它意味着继续这种"向前进行"的动作；而去拉回它则意味着相反方向的一种运动，因此它是较为困难的。从侧面横扫物体意味着一种从"向前"方向到与之垂直方向的变化；击打木板意指一个肯定的结果是可能的，如此等等。简而言之，每一动作都发生在一组初始的条件和一组肯定的或可能的结果之间。这解释和说明了前摄的（proactive）和后摄的（retroactive）蕴涵的存在，当然这是非常初级水平的蕴涵。皮尔斯（C. S. Pierce）称之为"预期的"（predictive）和"回溯的"（retrodictive）蕴涵[1]。

2. 在"推"和"拉"之间的中介（过渡）情况

在水平Ⅰ，我们有时会看到侧扫动作的例子，但这些动作并非被主体有意识地理解为是向一种拉的动作的可能过渡。以下的例子显示儿童是如何使用侧向的运动达到问题解决的。

> Bel（1岁6个月）（在其水平Ⅰ反应两个月后再测）。像在第一阶段一样，Bel从去打木板开始，然后推动目标，等等。然而，在把耙的尖齿放到猫的身后时，他产生了移动动物到他另一只手的想法。他把耙子放在猫的背上，把它扯到边上，成功地用其另一空着的手拿到了猫。在下一次试验时，他试图把猫从右边移到他的左手，但没有成功。再一次地，他把耙齿放在猫背上，用力压，并使猫翻倒了，但他未能把耙子放在猫的身后，只是简单地推动它。然后，他重复地去击打猫，使得猫稍稍靠近了自己。在敲其中一只盒子后，他推动了整个木板，也产生了要去拉它的想法，这使他抓到了动物。这样，他用钩子再次使猫靠近了他的空着的手。转向猴子

时，他把钩子插入盒子，但不能钩住猴子。至于狗，他的反应只限于去拍打盒子。

Cri(2 岁 2 个月) 开始时，他用钩子从侧面移动猫，然后又用耙子去做，用另一只手抓取它。与此相对照，当实验者把耙子放在猫的身后时，他把猫径直拉回。他也能成功得把猫从盒子中取出，但仅仅是用手去抓。

Joe(2 岁 11 个月) 他把一个工具放在猫的身后，把它稍稍扛向自己，然后又从侧面进行，直到能用另一只手去拿到它。他用钩子成功地从盒子中取出猴子并且一路上都是扛着它。然后，他又成功地拿到了猫。然而，在狗的实验中，一旦狗从其盒子移出后，它仅仅被扛了几厘米，最后被他用手抓到。

Cap(2 岁 10 个月) 当我们问她："你能用耙子扛回猫吗？"她回答"不能"。但她尝试这样做，有两次成功了。这一成功导致她思考：她能够用其他工具对其他动物达到同样的结果。把狗放在木板当中，在原来的盒子外边。她先拿起木棍，但说："这根以后再用。"她换选了弯棍："这一根好(用)。"然后拿到了狗。但她没有拿到猴子，也没有拿到放回到盒子中的狗，因为她不能分化出与动物在盒子中时所要求的动作。

从动作之间的蕴涵的观点来看，这些过渡的例子具有启发的意义。除了击打和推的动作之外，水平Ⅰ的主体有时会进行侧向的横扫动作，但并没有任何把物体移近一点的意图。但与击打和推的动作不同，这种行为会产生从握着工具的手向客体的子位移的间接效果。因此，这时我们看到的是工具获取和手的抓取两者之间的一种整合的形式。首先，这里涉及一种推理，即：如果某种运动完成了，那么其他的完成也是可能的。这就导致许多主体从推的动作转向了侧面或斜的运动，最终转向去拉客体。而且，我们还可以注意到在 Cap 的反应中，有一种概括化的倾向：她试图用不同的工具去应付不同的动物(这个棍子"以后再用"——尽管她失败了——除了在她否认耙子是可能的之后，还用它去拉猫这种情况之外)。

3. 水平Ⅱ和水平Ⅲ

我们应该把如下儿童归于水平Ⅱ：他们能成功地取到猫，但不能取到猴子，特别是不能取到狗。因为这两种情况下动物都是在盒子中，这就要求动作的分化和协调。以下是一些水平Ⅱ的例子：

Ano(3 岁 4 个月) 他伸出耙子并使它落在猫的身上，然后马上拉动它。对于狗，他把钩子放在盒子上面的边上，然后通过后面的开口去拉它，但最后放弃这样做。他把耙子放在盒子的一个边上，然后把它插入盒子中，他对整个实验装置又推又扛，试图拿出动物。最后，他放弃了。然后他把钩子放到猴子的后面，能碰到猴子的尾巴了，但他并未注意到尾巴是弯曲的。然而，部分地由于偶然性，他成功地

把它取出来，但直到他用手紧紧握住它，他才把它拉向自己。

Bol(3 岁 6 个月)　他把耙子先放在猫的上方，然后又放在它的后边，用力拉回它。对于狗，他没有把它推到盒外而只是拉盒子，把狗翻过来，等等。最后他说："狗不想走。"他用弯棍作另一尝试，说："它不好用。"他试用另一工具，再一次使狗翻过来，但没有成功。他用钩子把猴子从盒子中取出，因为钩子正巧落到了尾巴圈中(因此可以说这是一种向水平Ⅲ发展的局部变化)。

Man(3 岁 5 个月)　他用肘轻推狗，但它弄翻(倒)五次，但一次也没有拿到它。

以下是水平Ⅲ的例子：

Jes(2 岁 1 个月，早慧儿童)　他在拉猫时没有任何问题，然后转向猴子时使用耙子。他把耙子放在猴子后边，稍微把它举起，然后运用把柄作为一个杠杆顶着盒子的边。他这样做了五次，直到猴子到了盒外。主试把猴子放回盒内，要求他用另一种方法再做一次。他成功地使用了钩子，他把钩子插入尾巴圈中。后来，他用钩子通过盒子开口的一边(主体的对面)去推出狗，并把它拉回到自己跟前。

Car(3 岁 4 个月)　对于狗，他开始用耙子作为杠杆，让狗顺着盒子的一边上来，他说："我们可以用这个办法来做。"当他注意到可以通过盒子开着的后边，更简单地把狗推出来的时候，他用了两个动作：先把狗推到后面，再把它推到左边；然后把它拉向自己。他用弯棍也同样这样做。然后，他运用那些小棍加长工具并以此为乐。

Ros(5 岁 6 个月)　她能立刻钩住猴尾，把它拉向自己。对狗她选择运用耙子。她把它推向后边，说"这里没有门"，然后，她试图把动物向前拉。

Dan(4 岁 6 个月)　她用耙子的犬齿，通过猴尾钩住猴子并把它取出。对于狗，她先拿起钩子，只是把狗在原处移动。然后，她拿起弯棍，猛地把狗推到盒子外，随后把它拉向自己。

Ana(4 岁 6 个月)　她表现出同样的反应：她立刻把狗推出盒子外，然后推到左边，接着把它拖到近处。猴子被非常小心地举起，其中有几次短暂的停顿。

只有在水平Ⅲ，以下三种格式才被协调：推动狗使之离开盒子到盒子后面；沿着盒子的侧面移动动物；以及把它拉回到自己面前。因此，我们也许可以假定这里涉及预期和行动的计划，而这些在水平Ⅱ是缺乏的——尽管那时目标是足够清楚的，但手段仍依赖于试误行为，只伴随部分的成功和失败(这些成功或失败并不总是被儿童所理解)。

至于意义，我们注意到对物体(对象)或工具都有新意义的进展。这些对象不再只是那种可方便用来去拉够不着之物的、刚性的、长长的、无特色的固体物了。在水平Ⅲ，工具的每一部分都有一特殊的意义：钩子的弯曲之处的意义在于去钩；弯棍的平直一端具有一种推或拉的意义，就像耙子的一端一样，尽管后者较宽。木棍只是工具，并没有特殊的功能意义。

当前的研究提出了一个关于动作间蕴涵的基本问题，这些蕴涵是以它们的功能意义为其特征的，并且这个问题我们还会在另外的研究中再次遇到：如何说明因果联系与内涵的推理之间的区别。实际上，在动作系列的每一阶段明显地都显示出其因果方面（以及另外的目的性方面）的特征：把一只狗从盒子中拿出后，又把它拉向自己就是一个因果的产物（几种可能结果之一），因为动作是连接的、有条件的、连续决定的，而不仅仅是以所谓休谟的固定连续的方式表现出的一种可观察物的系列。因此，从本章研究的基本感知运动的形式开始，我们需要证明我们不断谈到的动作意义之间的蕴涵的正当性。

第一个证据在于，我们认为主体根据他们已经达到的水平，可以不做出外显的动作，把自己限于对他们实际能做的所有事物的预期上，包括那些要去避免的错误。去预期就是去推断，并且任何推断和推理都是蕴涵的一个系列或系统。

第二个证据，这样的推理的预期并不依赖于动作的物质条件（就是说，并不依赖于活动手臂或手的细节的肌肉运动），而是依赖于由主体的认知格式所赋予的意义。这些“赋予”出现在对对象的任何解释以及主体对这些对象进行操作的任何活动中。

第三个证据，主体为自己制定的计划从一开始就伴随着如下的证明活动，即成功或失败随后将得到证实或否证。这些证明是不同于真值证明的（但它是为后者作准备的）。

最后，“推出”“侧向移动”“拉向自己”这三种格式的协调，作为水平Ⅲ的特点（在“狗”的情况下，盒子后面是开放的），它是一种更高类型的演绎预期，涉及一种完整格式的建构，这一格式来自于与整体相协调的局部格式。作为一种蕴涵之间的蕴涵，无疑这种协调的格式本质上是推理性的。尽管它可能是表象性的，超越了纯感知的水平，但它的构造必须要有先前的准备，这就要求更简单的和更基本的蕴涵的存在。

因此，这些思考似乎允许我们使用“动作之间的蕴涵”这一概念，它不同于因果关系概念。不用说，这里也涉及因果性，并且，尽管蕴涵关系与因果性关系是不同的，但工具行为的这两个方面是不可分离的。我们甚至可以更进一步地断定：这些所涉及的推理的系统构建了“模型”，并且，因果性思维正是存在于由这些模型赋予（归属于）主体之外的客体及其动作的过程中。否则，因果性就只能被归结为可观察物的固定的连续了（经验主义者错误地只满足于这些可观察物）。

第二章 树状结构式的位移

合作者：C. Monnier 和 C. Vachta

在前面一章中，儿童必须自己为对象创造出一条可走的路。在本章的实验情景下，路径则是如一棵树的形式。儿童必须从中选择所走的路径。这样一种选择要求儿童对包含(inclusion)和排除(exclusion)有所理解，并且，由于一棵树与一个类的"群集"同构，所以最初的动作蕴涵(不管它们是错误的还是需要改正的，或者一开始就是正确的)从一个水平发展到下一个水平，它们会逐渐变得更为相互协调，直至真正的包含和排除运算成为一个分类群集的部分[1]。从一种意义逻辑的构造立场来看，这正是这种蕴涵的意义所在。

实验装置是一个由管道组成的"树"型网络(大小：110cm × 50cm；高 5cm，参见图2)。"树"的位置是：在儿童左边是干线(T)，支线向右边伸展。这样设计是为了避免人为地提示它们是树的"顶部"或"底部"。干线(T)分为两个主要支线 A1 和 A2。然后它们又各分成两个支线：A1 分成 B1 和 B2；A2 分成 B3 和 B4。这四个 B 级的路又继而分成两条路：B1 是 C1 和 C2；B2 是 C3 和 C4；B3 是 C5 和 C6；B4 是 C7 和 C8。每一条最后的路结束于 8 个汽车库 G。主干和所有的分叉都是空的管子，以使进入 T 的小汽车(模型)能够到达八个汽车库中的一个。儿童的任务是决定汽车进入哪个车库。为此目的，汽车系在一根长细带上，在汽车到达之后，它在 T 和 G 之间建立起联系。而且，每一条 A 的支线和 B 的支线都有两个小的阀窗，儿童可以打开(然后必须再关闭)去检查是否带子仍在路上。汽车既不可转身也不可往回走。

我们可以看到这个实验建立了多少种推理和运算：如果带子在 A1，这意味着汽车会处于 G1 和 G4 之间，G5 到 G8 被排除；如果带子在 A2，则汽车肯定会通过 B3 或 B4；如此等等。由于分类的群集可以采取与当前情景同型的"树的型式"，所以我们这里就

---

1 "群集"一词，皮亚杰指的是具体运算思维的结构，其形式描述具有代数群(因此使用"群集"来标记)的某些特征(如逆运算)，以及次序的集合或格的特征(如嵌套的包含)，参阅 Piaget，J.，*Essai de Logique Operatoire*，Paris：Dunod，1971；Wermus，H.，"Formalisation de quelques structures initiales de la psychogenese，"*Archive de Psychologie*，1973，42，pp. 271—288，Wittmann，E.，"Natural numbers and groupings，"*Educational Studies in Mathematics*，1975，6，pp. 53—75 (P. M. D.)；英海尔德(Inhelder，B.)和皮亚杰(Piaget，J.)，《儿童早期逻辑的发展》(*The Early Growth of Logic in the Child*)，New York：Harper and Row 1964，介绍了许多这样的分类形式(J. E.)。

把对感知运动蕴涵的研究转变为对一个群集中的运算之间的蕴涵进行某种分析。我们断言这些运算是建立在意义基础上的，并且伴随着一种非外延性质的语言表达。我们能够区分出四种水平的反应：ⅠA、ⅠB、Ⅱ和Ⅲ。

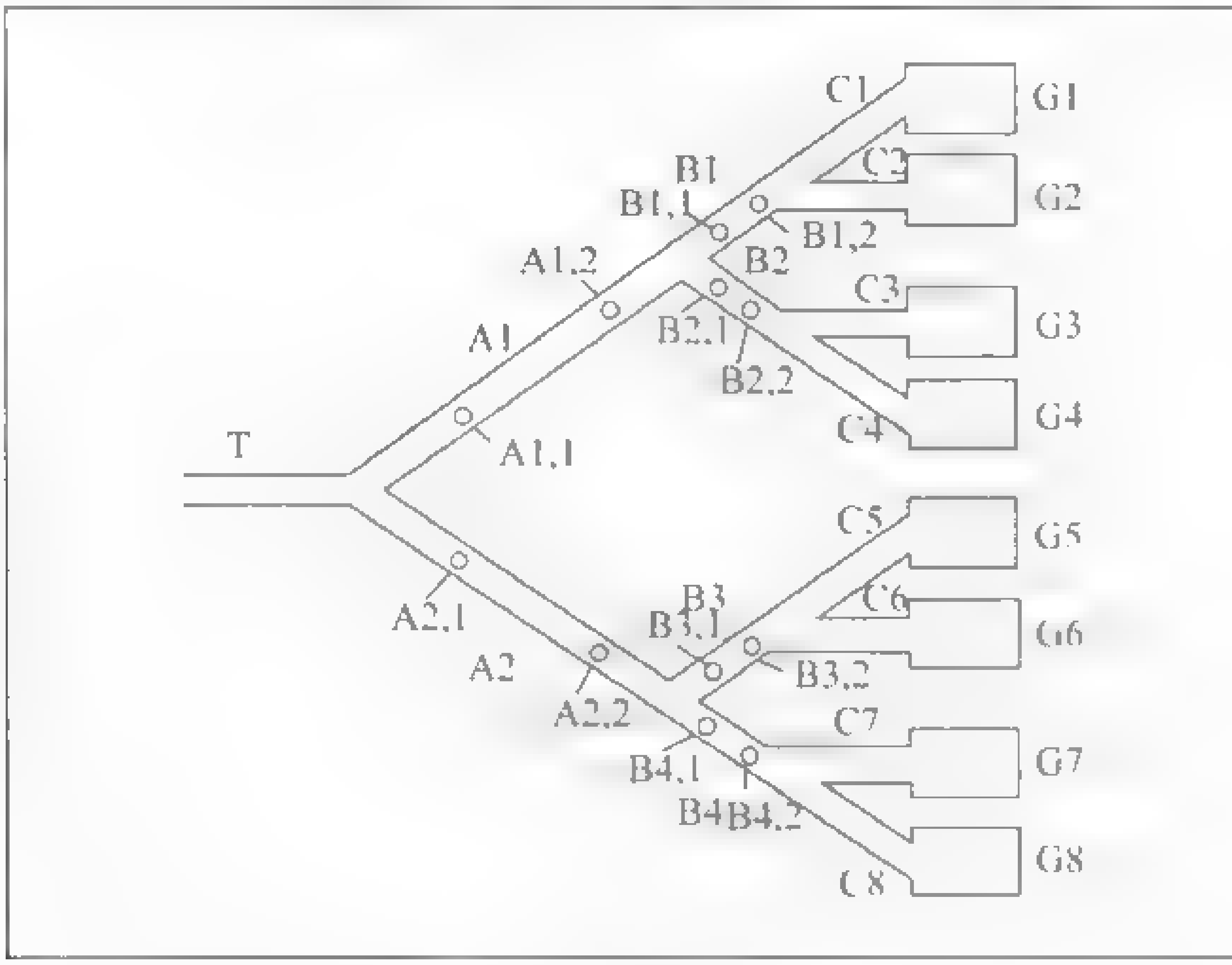


图2

1. 水 平 ⅠA

以下是关于水平ⅠA的几个例子(约4—5岁)。

Sab(1岁7个月) 她一开始时打开所有的车库，直到找到了一个正确的车库，然后根据要求，她指出了刚才汽车走过的路。“请你只打开那些能帮助你找到汽车的窗口。”(她打开了A1)。“是的……这是什么意思呢？”——“这根带子连着这个汽车”。——“这个汽车会到哪里？”——“这里(G1)，不(汽车是在G2)。”“在另一个(车库)？”——“不。”——“试试看。”(G2：正确)。“一开始从A、B或C中打开哪个窗口更好？”——“打开C的窗口。”——“在打开它之前打开别的窗口是否有帮助？”——“不。”——“如打开B的窗口呢？”——“不，这没有用。”——“打开C呢？”——“是的。”——“为什么？”(没有回答)。

把汽车放进G5。“试试只用很少几个窗口把它找出来。”——她打开A(1,1)。

每一小窗以一对顺序的数来表示，如A(1,1)意指支路A1上的第一个小窗，等等。当没有必要作进一步的特指时，也可用支路的名字(如A1)来更简化地表示小窗。

"不"她打开 A(2.1)——"是的。"然后她打开 A(2.2),但这是无效的,因为它与A(2.1)是在同一路段上;然后同样地她又打开 B(1.1)和 B(1.2):"不"。尽管如此,她还是打开了 G7 和 G8,而这是与"B1 是空的"这一事实相矛盾的。然后,她打开 B(3.1):"是的。"但接着又打开 B(3.2)(无效)。"汽车在哪个车库?"她打开 G1、G3、G2,然后又打开 G1,这些都是 A1 的支路,因而与 A2 是不符合的。然后,她打开 G5,这一次正确的选择乃是偶然性,因为它是在发生了 G1—G4 这些错误之后。"什么时候没有带子呢?"——"那没什么关系。"——"如果带子在 B1,汽车会在哪里?"(她指着 G1—G5,而只有 G1—G2 是正确的)。因此,即使对 Sab 来说,从 G,回到 T 是容易的,但从 A 到 G,她不能做出任何决定。"打开 A 中的窗口有用吗?"——"不。"——"B 呢?"——"不,那没有用。"

Xis(4 岁 11 个月) "A 有用吗?"——"不,这里(C)。"——"这里怎么样(B)?"——"不。"

Eri(5 岁 8 个月) 他随意地打开 G。:"如果我们先打开 A,中的一个窗口,是否更容易些呢?"——"不,因为汽车不是走到这里。"——"如果我们打开 A 或 B,会怎么样呢?"——"我们可以打开别的,但 C,更好,因为它们靠近车库。"

Dav(5 岁) 他从 C 开始,在找到正确的一个车库(G1)之前,打开了七个车库(G)。在回答主试问题时,他指出汽车经过的路。尽管如此,但与汽车放在 G6 时,他指出了几个相连的 C。"这对到这里(A,)有用吗?"——"不。"——"指给我看汽车通过什么地方到这里。"(他打开了 B1,而到达 G6 意味要打开 B3)。"它是通过这里吗?"——"是的,这里。"(指 A2 和 B1—G5),但他为结果而感到奇怪,通过正确地打开 A2、B3 和 G6 改正了结果。——"试试不要打开很多门,打开 A 中的一个门是否好?"——"是的。"他打开了 A(1.1)和 A(1.2):无效;然后继续打开 B1]——"汽车能够最后到达这里吗?"——"那儿"(G1—G4,尽管 G3 和 G4 被排除了)。"汽车不能到达那儿吗(G7—G8)?"——"不,因为带子不在 A2。"然而对 G8 来说,它又只注意 C 的支路。

如果 C、B 和 A 是可以直接通过包含而构成网状联系的对象,问题就显然容易解决。然而,虽然这里所有的"群集"与分类同构,以逻辑内(infralogical)的或空间的观点来看(C 的路从 B 的路的一个分支发出,B 的路类似地从 A 的路发出),但最后的位置乃是决定于所采取的路径。这对那些仍把注意集中于汽车的最后位置而不从出发点推断汽车走过的路的主体来说,情况变得复杂起来;即使他们理解了路径,那也缺乏必然性。因此,蕴涵的缺乏,这就仅仅建立在对所经过的路径容易重复的基础上,只要它的终点知道了;它并不是依赖于对从 T 到 G 的路径上的预测。事实上,这样一种预估并不是建立在 A→B(或 A1→B1)形式的简单蕴涵基础之上的,而是建立在如下的蕴涵之上的:在这一蕴涵中,前件 A1 需要一种两分的 B1 和 B2,它们是互相排斥的(符号为 $\bigvee\!\!\!/$):A1→(B1 $\bigvee\!\!\!/$ B2),等等。因此,我们此处所遇到的是这样一种标准形式的"群

集"：A+A B,B+B C,…,但它必须以相反的次序 B→(A ∨ A),C→(B ∨ B) 而不是以直接的次序 A、B、C 来理解或建构，如同在路径是从其终点推断出来时的情形那样。结果，以大多数被试的观点看来，从 T、A 或 B 出发是"无用的"(Sab、Xis 和 Dav)，因为"汽车到达不了那里"(Fri)。因此，这第一水平是以路径的建构的方向上的包含的缺乏为其特征的，尽管路径可以很容易搜寻回去。

2. 水 平 IB

在水平 I 和水平 IIA系统的包含开始之间是许多中间的情形，它表现出一种正确的蕴涵形式 A1→(B1∨B2)与仍然是无效推理的混合特征。换言之，从一种纯粹的经验的方法(对 G 进行或多或少的排除性的检验而不考虑路径)到半经验和半演绎的程序之间，存在一种过渡。更简单地说，水平 IB 是以部分的包含为其特征的。

Had(5 岁 6 个月) 他从 C 开始，但在第二次尝试时就从 B1 和 B3 开始，但它们是空的，于是他打开 A2，这时他看到了带子。跳过 B，他推断 C7 和 C8，结果发现汽车在 G8 里。"打开 B3 是否有帮助?"他回答"没有帮助"，只看到他从 A2 到 G8 的成功(后者是在实验装置底部的一条直线上)。要求他使用三个窗口，他只选择了 B2 和 B3，即在每个主要的支线上选一个 B。

Rac(6 岁 6 个月) 她从 B2 开始，然后打开 B1："啊，在这儿!"然后打开 G2(正确)。在第二次尝试时，她从 A2 开始，然后打开 B4 和 G8，再次是正确的。然而，在第三次尝试时，她从非 A1 开始——她打开它两次，似乎第二个窗口 A(1,2)会纠正在 A(1,1)中带子的缺失——她直接推断 C1 和 C5，而它们是相矛盾的。接着她从非 A1 直接推断 B2，这并不是来自 A2 而正是来自 A1。"这是什么意思？汽车不在 B1?"——"呀！现在我全懂了：它会在 B2，因为它先在 A1，也许以后它转到了 B2 了。"然而，她错误地从 B2 结束于 G8，而 G8 是由 B1 决定的；如此等等。"是不是打开 A 上的一个窗口更好?"——"不，任何地方都可以。"——"什么地方更好?"——"在 A、B 和 C 上。"她在接下来的试验中，正确地采用了这一次序，但然后又恢复到如 IA 水平那样，去一一检查 C 窗口(她加上了一个 B)。所以 Rac 常不可思议地以 IA 的虚假推理来取代正确的推理。

Gab(6 岁) 类似地，他除了能做出正确的蕴涵以外，也犯了一些如下的错误：A1→B3→(C4、C3、C2 和 C1)。

Dan(6 岁) 他开始在 A2、B3、C6 上做得很好。"我发现它了!"——"你能不能少打开一些窗口?"——"不能。"他再次开始，到达 B3，再次打开 C6。"它会不会在另一个 G(如在 G5)?"——"不会"——"你能肯定吗?"——"是的。"(他打开 G5，发现了汽车)——"这能帮助你从 A 开始吗?""有时候我们可以从 C 开

始,因为我们总是找到它。”“从A开始呢?”“有时候我们会找到它,有时我们找不到它”“是从A开始还是从C开始更好?”“有时从当中开始更好。”

Lau(6岁1个月) 与他从A、B、C开始时,他能进行正确但是容易的推理,并且他给出了预期汽车达到G5或G6的理由:“因为它通过B3,而且它不能从B3跨越到B1,所以它只能在C5和C6。”另一方面,他总结他的想法,说:“如果我们想确定汽车通过什么地方,我们必须从B开始,因为从A开始,它可能或者到达这里(顶部),或者到达这里(底部)。”“所以没有必要在A打开?”“从A开始我们不能告诉它随后走什么方向;我们必须从B开始。”“那么C呢?”“是的,因为我们能立刻看到它 这个游戏正是让我们这样做的:从A和B开始是无用的”Lau完全没有考虑到汽车“为什么”会在最后的位置,因此他没有考虑到必然性。

Mi(6岁2个月) 他甚至更进一步:“要找到汽车,C上的窗口最有帮助,B上的窗口有一点帮助,A上的窗口一点帮助也没有。”这正是一种包含的否定形式。

Jan(6岁6个月) 他接近于水平ⅡA,他从A开始,然后B、C,他用A2与A1或对一对B窗口相比较,如此等等:“因为你总是把它放在另一边,如果带子不在那里,我们就知道它是在另一个里边”所有这些都不妨碍他最终得出如下结论:“要打开最少的窗口,我们必须从C、开始。”他并未看到在这种情况下要检查八个窗口,而当我们从A开始,则只要检查3个窗口。

因此,我们注意到:这些反应中的一些反应为“部分包含”提供了证据,而其他的反应则使用的是虚假的推理 结果,G的所有位置最后都被发现了,但它们只是作为静态的情景而不是作为汽车走过路径的必然结果。

3. 水平Ⅱ和水平Ⅲ

只有在大约7—8岁时(水平Ⅱ),儿童才能以整体的眼光来看待这一网络,才开始去构建一个运算的群集。然而,这一水平的主体,还不能确定应该打开最少的必要窗口数;也没有通过注意到没有带子的位置来进行检查的可能性,这是因为系统在其每一分支中都是二分的 这一水平仍有很少错误的推理,但它们总能很快被改正。

Seb(7岁10个月) “为了尽快找到汽车,我们应该从A还是从C开始?”“从A开始”,他按A2、B3、C5这一正确的顺序进行。“我们能否知道必须打开多少窗口?”—“不知道,有不同的情况。”

Bri(8岁6个月) 他正确地选择了A2、B4、C7。“你能只打开更少的窗口找到吗?”“我不知道”然后,他打开A2(空的)、A1、B2(空的)、B1、G2、G1(正

确)。"如果你打开 A1,你没有看到带子,这对你有帮助吗?"　"是的,这意味着它通过了另一个(窗口)。"

Did(8 岁 2 个月)　他从 A1(空的)转向 B3　"它可能在哪个 G?"　"在 G5。"　"可能在别的 G 中吗?"——"G6。"——"还可能在另一 G 吗?"——"不,因为它是通过 B3 的,它不可能走回去。"　"打开多少窗口我们能找到汽车?"　"3 个。"　"用更少窗口呢?"　"也许。"　"3 个窗口是否总是足够了?"　"有时候要更多。"　"是否可能不看带子就找到?"　"不可能,因为如果没有带子在 A1,那么它就是在 A2;如果带子不在 B3,那么它在 B4;如果不在 C8,那么它就在另一个(C7)。"　"所以看不见带子,那也是可能的?"　"不可能,因为我不能看到它在什么地方;我们必须看到带子。"　"我们能够事先知道吗?"　"不能。"　"如果三个窗口不够,要多少呢?"　"5 个。"　"指给我看。"　"如果不是 B1,就是 B3。如果不是 B3,就是 C7。"　"你肯定要有 4 个或 5 个窗口吗?"——"是的"。

在一稍高的水平上,儿童断定必须总是从 A 开始,打开 3 个窗口就可以找到汽车:

Yva(8 岁 11 个月)　他打开 A2、B1(失败),然后 B3、G6:"不(没有),那么它是在 G7,因为我刚才在 A2 中看到带子,不在这里(B4,等);所以汽车不可能在 G7 和 G8 里。现在,我打开一个窗子就行了,因为如果带子不在 B1,它就是通过 B3 走的。"　"能不能少打开一些门(窗口)就成功呢?"　"是的,可以少打开一个。"——"更少呢?"——"不行,我必须看到它是否在 A1 或 A2。"

Sad(8 岁 5 个月)　"它在 G3,因为它是通过 A1 和 B2 走的,没有通过 C1。"　"我们必须从 A 开始?"　"是的,总是这样,因为我们打开 A 时,我们就知道带子在哪一边了。"　"如果我们不能在什么地方看到带子呢?"　"这也会有帮助的;如果我们看见它了,那也会对我们有帮助。"　"如果我们从 A 开始,但都未看见它,这样我们能找到它吗?"　"不,不可能。我们肯定会至少看见它一次或两次。"

因此,这些儿童达到了一个接近完全必然性的水平。尽管如此,但仍缺少那种水平Ⅲ才具有的必然性形式:只通过打开的空窗口,就可能指出必然的路径。

Ver(9 岁 9 个月)　从水平Ⅱ反应开始,通常这是她这一年龄的特征,但她总是按照 A、B、C 的顺序进行。然而,问她"汽车能够走另一路径到达这里吗?"她就只做出水平Ⅲ的反应:"不,汽车只能这样走。"　"打开几个窗口我们就能知道呢!"　"3 个。"　"为什么?"　"因为这个(A2)是一条路径,这两个(B3 或 B4)又成了另一路径,这个(一个 C)是一条路径。"　"是否必须要打开它们中的 3 个?"　"是的,必须这样。"　"次序是重要的吗?"　(她指着 A5)"我们必须从 A 开始。"　"当没有带子时,情况会怎样?"　"那这意味着汽车是通过另一条路走的。"

Cat(10岁3个月) "如果我们打开A1并看不到什么东西，那么就是走了A2。如果我们打开B3也看不到什么东西，那么它是通过B4的；如果在G7什么也没有，那么它就是到G8了。(打开)3个窗口总是足够的" "如果我们看到什么，它会对我们有帮助吗?" "是的。"——"那么我们没有看到什么呢?"——"是的。"

Cri(11岁1个月) "看见带子有帮助吗?" "是的。" "如果我们没有看到呢?" "是的，这就意味着如果它不在这一边，它就在另一边。" "帮助是一样的吗?"——"是的。"

Ste(11岁8个月) 在看不到东西的情况下："如果我们跳过这里一个洞(在B上)，这就没有帮助，如果我们按照正确的次序做，就有帮助。" "不看到带子，是否有可能找到车库?" "是的。" "这不是很奇怪吗?" "不，我们必须(即我们只需要)按逻辑去做。"——"你十分肯定吗?"——"是的。"

Dac(12岁11个月) 他认为3个窗口是必需的 "因为有3段路线"并且"它总是有相对的一个窗口(即：每段路线都是二分的)" "如果我们没看到带子呢?"——"那我们就似乎离开了一条清楚的路线。"

Phi(12岁2个月) "如果我们从未见到带子呢?" "是的，我们可以打开3个窗口找到它。"

这种否定的必然性，如其所显示的，正是主体要接受的最困难的东西。然而，正是要把整个系统理解为一组二分线路这样的标准，才能解释到达C和G中的终点的不必依赖于经验的(或半经验的、半推理的)确证。这一系统是一个群集，尽管它是一个空间的(逻辑内的)群集，它并不是把分离的物体加以分类，而只与链形的路径有关。这样，它就引来一个问题：运算的分类是随着对包含及其量化的理解(即如果 $B = A + A'$，那么，$B - A$ 且 $B - A'$)，约在7—8岁时构造起来的，而在现在的情况下，这个群集在运算上要到约10或12岁时才能完全构成。

造成这一情况的原因是明显的，并且也是富于启示的：7岁或8岁时的成功的分类是以一种从特殊的到越来越一般形式的(即以一种 $A + A' = B, B + B' = C, C + C' = D$，等等的形式，这里"+"的记号表示约束的合取)上升的(ascending)次序构造起来的①。与此相对照，在现在的情况下，它所需的运算是由以下一种下降的次序重构而成的：$D - C$ 或 C'；$C - B$ 或 B'；$B - A$ 或 A'。这些重构用连续的析取("或")取代了合取"+"("和")。这种在"或"与"和"之间的实质的滞差(decalage)产生的原因似乎是：当构造一个群集时，这个群集受限于新加的元素，无论在已经构成的类中，或在一个包含它们的

① 约束的合取表示的是"群集"的独特性之一。"一个群集的组合只能在相邻元素间进行：这就是说，它们与二分的互补性有关，群集正是根据这种互补性建构起来的"(*Essai de logique*，p. 1[illegible]7)。换言之，群集运算是以相邻性和共享的意义来定义的。"群集是一种内涵的而不是外延的建构，而且它是获得很好定义的那种内涵的建构"(*Essai de logique*，p. 93)。群集的这一性质(逻辑学家不太喜欢)突出表明了皮亚杰早年对自然逻辑的形式化与当前工作之间的连续性。

更一般的类中都是如此；而在应用包含一系列析取的渐次下降的方法时，在考虑对该系统的每一个联系之际，我们必须总要为"可能性"提供理由。

4. 合取、析取和二元运算

在这些主体理解走过路径所构成的整个系统之前，他们显然已经能够进行某种逻辑的析取运算，即，能在多种特定的情境中使用"或"这一词语。类似地，在第一章的实验中，我们已揭示：那些能把狗取出盒子的儿童能够在把它放回之前把狗向左或向右移动。因此，这些在"和"与"或"①之间的偶然的有限的结合可以采取与一个系统的命题逻辑中的 16 个二元运算相同构的形式。但在现在的实验情况下，它们只是暂时的动作协调(同时产生"和"与"或")，具有就像肯定的缔涵中的可能性一样的排除的可能性。当达到"群集"水平的时候，这种局部的、早期的协调当然会扩展开来。在这种情形下，根据推理的方向，$B=A+A'$就产生了缔涵：如果 x 是一个 B，它必然地"或是"一个 A，"或是"一个 A'。

让我们现在给出几个例子：

• 从一开始，我们的路径显然是建立在"B1→A1"这一形式之缔涵上的，这里的箭头→(缔涵符号)表示这样的事实：经由 A1 是继续到 B1 的基本条件，而与反缔涵(A1←B1)表示的是：经由 B1 是经由 A1 的结果之一。

• 在另一方面，在像 B1 和 C1 之间的那种关系中(即我们或者具有 $p \cdot q$，因此 $\overline{p \rightarrow q}$；或者 $\bar{p} \cdot q$，因此 $\overline{q \rightarrow p}$)并没有缔涵。

• 最常出现的二元联结词是以渐次上升次序出现的合取"和"，以及以渐次下降次序出现的析取"或"($p \vee q$)。

• 可观察到非排他性的析取$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$。例如，当主体把三个元素加以序列化时：$A<B<C$(这种二元的序列很早在儿童身上就出现了)；并且看到：如果 A 是唯一小于其他元素的元素，C 是比其他元素较大的元素，那么"中间"元素 B 就既是"<"的又是">"的元素。

• 我们注意到存在不相容$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$，例如，在 G5、G6 之间和在 G7、G8 之间，就有这种不相容，它可以写成$(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$。在这种情况下，通过 G4 到 G1，就既不是 p，也不是 $q(=\bar{p} \cdot \bar{q})$。

• 因此，合取否定可以非常早地出现：在第一章关于使用工具的实验中，当儿童理解如何把动物拉回到自己身边的时候，他就排除了"推"和"侧面移动"这两个动作，即 $p \cdot q$。

---

① 当然，它包括排除或否定。

• 等价$(p \cdot q) \mathrm{W} (p \cdot q)$也是很明显的。当主体理解了二分性(如6岁的JAN说"你总是把它放在另一边")在所有支线路段的情况下一再被重复时,就有了等价的含义。

• 当对儿童来说,带子肯定在某个排列中的某个确定的支线而不在别的排列上时(当然,儿童不必说出来),我们就可以说这里有"冗余"(完全肯定)存在。

• 相反,连接词"矛盾"或"总是假的"只是由要加以避免的具体矛盾所组成,但主体并不总是这样做(例如,在前I具行为中,年幼儿童仅仅进行错误的位移而不去拉物体)。

• 至于相对于q的p的独立性$[(p \cdot q) \vee (p \cdot q)]$,或相对于$p$的$q$的独立性所涉及的"肯定"或"否定",它们在所有年龄是明显的,此处无须多言。

我们第一个结论是:在初级水平上表现的只是某些**部分的**以及有时只是**暂时的**协调,它们在形式上可以与经典逻辑中的16个二元运算相比拟。这些协调并不依赖于结构整体,后者只有在真正的以假设的演绎思维和INRC群为特征的形式运算的水平上才成为可能。从意义逻辑的立场来看,这一事实的重要性在于表明:从一开始,"形式"在保持对内容的同化作用的同时,它们部分地依赖了内容。

我们从这一研究引出的第二个结论是:形式思维的(在水平Ⅲ)主要的和甚至是基本的条件之一是在"和"与"或"之间的系统的或持久的协调,此时主体就能在通过一个确定的系统中对递增的方法与递减的方法加以区分。

第三章 贴 瓷 砖

合作者：B. Vitale 和 M. Zinder

现在，我们再回到动作蕴涵上来。我们现在要做的这项研究，其兴趣是双重的，它既是一个实际的问题又与几何图形的组合有关。实际要解决的问题是用瓷砖拼贴在地板上，但不能让2块瓷砖之间留有空隙，拼装的形式则可以持续不断地进行下去。瓷砖有多种形状(图3)：方形S(黄色)、等腰三角形T(白色)、五角形P(蓝色)和六角形H(红色)。S、P和H的边与T的底长度相等(8cm)。T的角度大小正好能使它们放在P的旁边时，它们的边成为P的边的延长线。儿童可以运用所有图形来拼放，他或者可以运用同一形状的元素(一个仅由方形组成的路面是最容易构造的；而只应用五角形则是不可能的)或者以各种方法来使用混合的图形(例如，以三角形来填满五角形的空隙处。)

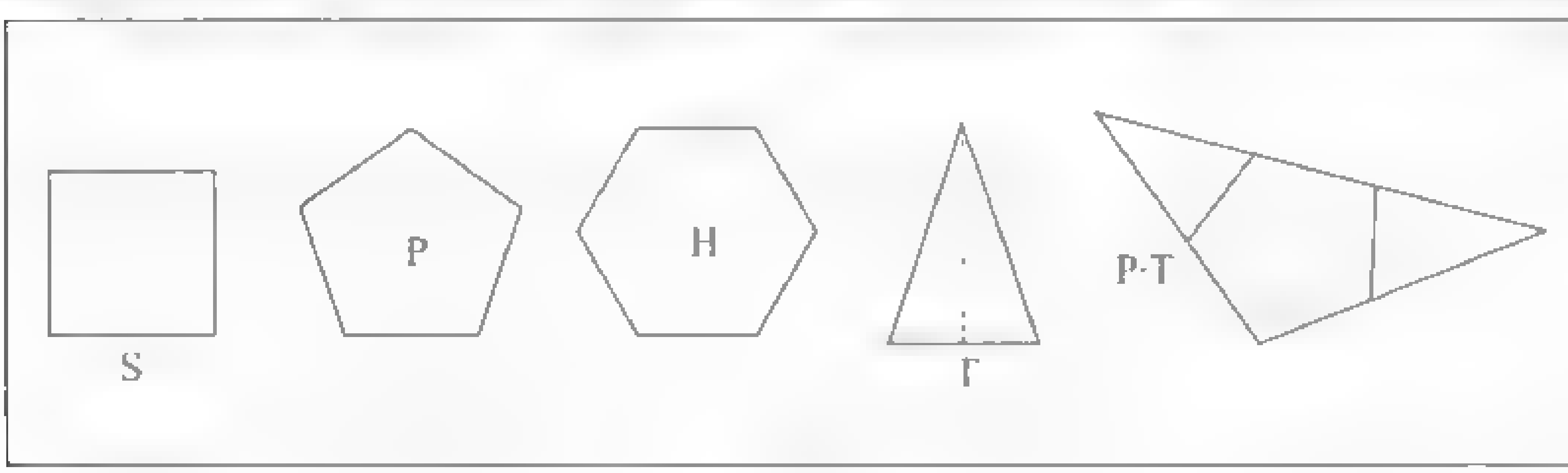


图3

我们分析两种动作的蕴涵。首先，一些蕴涵仅仅预期了可以用类似图形做成的排列；例如，预期方形的并列将拼成无空隙的地板，更重要的是(这是另一个问题了)，如果这样一种拼法在一个小的面积上做是可能的，那么它就可以无限地做下去。反之，五角形的并列将留下一些"洞"，它不能靠加上更多的五角形来填补这些洞。

其次，还有更有趣的其他推理形式。如果我们能运用方形而不用任何三角形(用我们的记号，即为S·T̄)或者用三角形而不用任何方形(用我们的记号，即为T·S̄)做成一个完全的拼装，那么，把两者相结合是否可能呢？例如：

$$(T \cdot \bar{S}) \vee (S \cdot \bar{T}) \rightarrow (T \cdot S) = Sc(\text{成功})；$$

$$(T \cdot \bar{P}) \vee (P \cdot \bar{T}) \rightarrow (T \cdot P) = Sc；$$

而 $$(S \cdot \bar{P}) \vee (P \cdot \bar{S}) \rightarrow (S \cdot P) = Sc(\text{失败})$$

这些推理提出了几个问题，那些只用Ts或只用Ss就成功构造了拼图的主体是否

能得出结论:无空隙的拼装能通过把 Ts 和 Ss 相结合而形成;是否一个成功的 T·P 组合表明只用 Ps 来拼图(它是错的)或只用 Ts 来拼图(它是容易的)是可能的;是否T·P 是可能的这一事实意味着 S·P 是必然的,而实际上它是一种不可能的结合。在所有这些情况下,推理都从属于异类的和同类的模型之间的关系,这需要更为发展的和复杂的预期为先决条件。

而且,在本研究中,我们会再次碰到我们在第一章中所处理的 16 种二元运算。在儿童的反应中存在三种明显不同的操作水平。

1. 水 平 I

在这第一阶段,主体只是在用方形拼成无隙的图形时获得成功,但他们不能推断拼图可以无限进行下去;因此,他们甚至不能掌握这种基本的循环推理形式

Nad(6 岁 7 个月) 她用六个方形拼装成一个矩形:"像这样的(图),会做的。"——"你总能加一些东西上去不会留下洞吗?"——"不,我想不能。"(她在图形的长的边上又加上了一些方形)——"好,你能继续下去吗?能不能?"——"能,是的"(现在她已放了 12 个方形)。"我能一直这样做下去,拼一个更大的。"——"像你想要的那么大?"——"不。"——"如果你把它们中的两个这样放(两个方形,拼成一个矩形),你能叫出它是什么吗?"——"我叫它们是一个三角形,因为它们有一个角。"——"你怎么能够知道一个形状是一个方形呢?"——"因为它有一个方形的形状。"——"那么这一个呢?"(一个她刚构造的 5cm×6cm 的矩形)。——"不完全是(一个方形)。"用六角形和 3 个方形,她构成了一个"长蛇",然后又拼装成了花朵状,在其花瓣之间留有三角形的空隙。她指着空隙处,说:"然后,我要做(即要放)在这里一些东西。"——"你能填满全部这些空白地方吗?"(只有四个空隙处)。——"不,我想我们永远不能做到,这里永远会有洞。"

Dan(6 岁 8 个月) 一开始做成了一个非常好看的皇冠形状,它由 10 个五角形组成,每个五角形都边连着边,图形当中留下了一个大洞。他试着用 3 个五角形去填这个洞。"不,我不能填它,因为这里和这里(他指着留下的空隙)它们没有像这样的形状!"然后,他用 17 个五角星排成两个平行的行列(row),两个行列被一个空白处分开,在空白处他放了 9 个五角形。"我们不能做。"他拒绝使用其他形状(Hs)。尽管如此,但他后来还是只用六边形做出了一个新拼图,并且他注意到之所以能这样做是因为它们都有相同的形状。这是与他在用 Ps 拼图时所能接受的观点相矛盾的。"用这两种图形呢?"(Ps 和 Hs 一起用)——"是的,能用 Hs,但不能用 Ps。"他用 Ps 围着一个 H 构造了玫瑰花形,得出结论:"我们不能把它全填上。"——"为什么?"——"因为它(H)不是方的。"

Cor(7 岁 9 个月) 她接近Ⅱ水平,但不能真正克服水平Ⅰ的困难。她一开始用 8 块方形拼成一个矩形马赛克图。"我们能继续做下去吗?"——"是的,也许,有时候不能。"——"为什么?"她先在这个矩形的垂直方向上加上一些方形,然后又在水平方向上加上一些方形,两个方向的附加物都分别由 3 个方形组成。接着,她把它们与原来图形连接在一起,但位置有了移动:她把附属的方形的一个边对着当中两个方形的各半边。像 Dan 一样,她先用 Hs 来做,然后又以 Ss 与 Hs 混合使用,因此只形成了非常不规则一行排列。

首先,这些最初的反应显然缺乏任何预期,他们从头到尾都表示得没有把握。我们也许会认为这些主体根本不理解要他们填上空隙的指导语,但情况并非如此。最令人奇怪的是方形的例子,从 6 岁起,儿童就明显理解延长任何线形系列是可能的($n \to n+1$)。但是,Nad 以及甚至 Cor 似乎都没有这样的想法:可以无限加宽一个平面,即使像这种以某种规则的方法沿两个维度并列的一系列方形所组成的简单的和无间隙的平面。另一方面,虽然她计划"在这里放上一些东西"以填满四个小的三角形空洞,但 Nad 仍断然地做出结论:"我们永远不能这样做,这里永远会有洞。"另一奇怪的反应是从摆一个"长蛇"开始,但同时并没有忘记任务的目的是去拼一个瓷砖图形。概言之,水平Ⅰ的特点是经验主义的,主体满足于这种经验主义,只伴随以很少的推理,这些推理大多是不可证实的——如 Dan 的想法,用 Ss 围着一个 H 将会比用 Ps 围着它更好地盖住整个平面。

2. 水 平 Ⅱ

在 7—8 岁时,我们注意到儿童在推理方面以及在把各种不同形状加以某种组合方面,都有了某些进步。

Pau(6 岁 9 个月) 她开始时拼成一朵花:一个 H 周围绕着 Ts,以三角形的底部与 H 相连)。然而,检查她是否能继续下去时,她又移开了 Ts。"我们能像这样继续下去吗?"——"我不知道但我肯定!"她放下大约 30 个 T……"现在我们能肯定可以继续下去。"然后,在更好地拼成一个整体之前,她大约以 24 个 T 排成一个不规则的形状,但并没有空隙。她用 P 构成了一个大的皇冠,为了填满内部的空隙处,她用 T 替换 H,使它们成为一个中间有许多尖顶的圆

Xav(7 岁 5 个月) 他开始只用 Ts 拼成一个不规则的球形,然后用其他的 T 填满空隙,不考虑整体的形状。他得出结论:"我总能够这样继续下去,我认为不会有洞,因为它是紧挨着的。"——"我们能这样覆盖整个房间吗?"——"是的,可以在整个房间这样做。"他选择另一个球形,用 8 个 Ts 建成了一个漂亮的玫瑰花形,其顶点对着中心。但随后他又怀疑:"我们总能够填满这些洞吗?"——"当边是圆的

时候,这样不能(即,当圆形被放到一个像房间这样的方形中时)。我们能作一个更大的方形"(他用15个S去装配成一个大的矩形并肯定能够继续这样做下去)。——"用S和T呢?"——"不,我们不能。"但实际上他这样做了,他在其一个角上放置了二列4个方形,并用T去填满外围空隙。

Bea(7岁10个月) 她在用Ps排成一个皇冠时不能填满空隙,而在用4个H时,她立刻看出"我们能够连续这样做下去"。在用S和T获得成功后,她得出结论:只用T我们能拼出来,只用Ss我们也能拼出来,但不能一起用T和S。[1] 她自发地用Ps和Ss做试验;用P拼成一个皇冠,用一个S和几个T放在当中。这次失败了,但她用一个H和几个T获得了成功:"我们总能这样继续下去。"

Aug(8岁10个月) 他首先用P做成了一个皇冠,但不知道怎样填满当中的空隙。尽管如此,但他是第一个能这样做的儿童,即把四个P边对边地连在一起,使其角尖朝上,用另一排以P做成的图形覆盖其上,其角尖对下,当中的空隙以Ts排满:"这样我们能继续下去了。"当把3个H集合成一个圆的弧形的时候,他注意到内部的空隙本身形成了像H的形状:"我们能够做下去了,因为是这个形状。"(他指了指空处)当继续用T和H做下去时,他说:"我不知道这行不行,也许行。"——"我们知道我们可以用T进行,也可以用H进行,我们用这两样来做能行吗?"——"不,我们不能肯定,我们必须试试看。"

Pan(8岁9个月) 他用7个S组成图形,以H放在外边上。"我们能把它填满吗?"——"不,每次我们加上一个S,它都会出来有一个新洞。"

Ben(9岁11个月) 他用3个紧密结合的H组成一个三角形的形状,与Aug一样,他说:"我们总能把更多的H放在这里,因为这个洞有同样的形状(即H形状)。"

Jos(9岁8个月) 她用1个P和1个T来拼装,"这里我们可以继续用T"。她得出结论:只用T,我们能够成功(S_c),只用P我们不可能成功(S_c=真的),用P和T两种我们不能成功(S_c=假的),用T和H我们不能成功(S_c=假的),用P和H我们也不能成功(S_c=真的)。

这样的反应在如下方面是十分有趣的:推理以动作蕴涵的形式而发展,既能对将拼成的形状做出预期,也能引出一个可能的继续。对第一点来说,完全的预期很少,主体只是考虑对留下的空隙,预期怎样去填满它们。另一方面,对第二点来说,一种非常一般的蕴涵是:任何无空隙的图形意味着它可能继续(圆形图形例外,因为它留下的总是圆形,例如Xav)。当问及这样一种继续的理由时,Pan说:"不知道但却肯定。"与此相对照,Aug和Ben只用H构造了图形,在空隙的形状中发现了理由:它们也是H形状。

---

[1] 这里的运算可以表示为如下的运算符号(S_c=成功):$(S\to S_c)\cdot(T\to S_c)\to S_c$;或$[(S\to S_c)\cdot(T\to S_c)]\to(S\cdot T\to S_c)$,同样的运算也可在Xav的反应中见到。

相反，主体完全看清周围由 S 环绕的 P 将永不能全部覆盖表面，因为“每一次我们都加了一个 S，它将产生新的洞”(Pac)。然后，尽管有了这些各种的进步，构成这一水平特征的演绎仍然是不适当的，特别当儿童必须预期两个不同形状的图形结合时更是如此(例如，甚至 9 岁的 Jos 还会遇到这样的困难)。

3. 水　平　Ⅲ

正是在这最后的水平，推理和动作蕴涵起到了关键的作用，两者都显示了它们的力量和创造性。

Mac(11 岁 1 个月)　他用聚合的 T 建成两个玫瑰花形，但用其他的 T 填补中间的间隔。“我们能继续(不会有洞)吗?”　“我们能继续做下去产生无限的面，因为它总是看上去一样的，我能想象这个面是非常大的，我们能够显示出这一点，这样做，完全是无限的。”　“为什么?”　“因为它填补了一切，因为，如果我们继续下去，它就会是同样的。”他做成了一个新的面，这次他是做成了一个对称的形状。“为什么?”　“所有具有直边的形状都可以折叠成两部分，它会形成一个对称轴。我想我们能够这样做。”实验者画出一个具有不规则周边的图形：“我想我能完成。”

Car(11 岁 1 个月)　她有着与 Mac 一样的最初反应。然后，在运用 P 时她立刻预期我们可以用 T 填满洞，因此，只用 P“总会有洞存在”。然后她又在两个连接的 P 上补上四个 T 并宣称：“做好了！我们做成了一个平行四边形。我们已看到在这种情况下我们可以一直做下去。”　“你是预先知道(用 T、S、P 这些你刚才所用的形状)会有一个解决方法吗？或是你原来就发现这个办法了?”　“我能知道。”(她指着分离的部分)

Arc(11 岁 6 个月)　他在把 P 和 T 混合后，说：“图形会是不规则的，但也许可以继续这样做下去(没有空隙)。”　“如果我们加上 S 呢?”　“我想它是可能的……我甚至可以肯定。”尽管如此，他仍保持一个规则的形状，当他得到一个平行四边形时，他感到很有信心：我知道我们能用一个平行四边形做成一个无限的面，只用 Ss 是一样的，用 Hs 也一样。如果把全部形状都混合使用：“这将有点困难，但这是可能的，如果我们量一下角(不同的空隙造成这些角或是钝角或锐角)，我们不能只用 P 来做。”

Ani(12 岁 2 个月)　她也是从 P 和 T 开始，尽管断言，连续做下去是可能的，她说：“这有点气人，因为总有什么要放(即要去填空隙)，但这总是有麻烦：我们不能证明什么。”然后，像 Arc 一样，她试着去拼一个规则的整体，当发现我们“可以用混合图形一直做下去的时候”，她非常高兴地得到：“一个平行四边形！终于，这做

成了一个面(一个规则的图形了!)我们知道了，我们能无限地加上去，但这儿我不知道(如何去证明它)。这有点讨厌；我总能加上些什么，好，有些麻烦，这不是一个规律，我们是随意加上的。”

这些较高水平的主体对他们自己提出的要求很感兴趣。当然，他们承认，一旦找到一个有限的无空隙的面，即使它是通过部分的预期和一步步观察得到的，那么通过在其边上补接上图形从而使其不断地延伸下去，这总是可能的；仅仅是不断加宽初始面也是可能的：Mac把它说成是“这一无限方法的一种表现”。他更倾向于把图形理解为是对称性的，这标志了一种可以通过类似性以保证重复构造的规则已经开始为儿童所具有了。对Car来说，对规则的需要已变得显而易见：得到“平行四边形”不仅保证了而且显示了可能的连续——这是一种较之以前更强的需要；而且，空隙的形状的变化可以通过随后相应的角的变化而得以补偿。最后，对Arc和Ani来说，在规则形状和不规则图形之间存在显著的差异：一方面从规则形状中可以必然地推断出“无限表面”，另一方面不规则形状无疑可能通过不断变化的调整而继续下去，但这种调整产生的是一种“恼人的困境”(Ani)而不是一种简明的呈现。

4. 结　　论

本研究在涉及一种推理类型的发展方面具有特殊价值，这三种推理类型我们将其视为我们所说的三种水平特征。在水平Ⅰ，预期仍局限于由重复排列的可观察物或经验上可观察到的改变之上。在水平Ⅱ，推理与那种超越了可观察物的预期有关，它们是建立在必然蕴涵基础上的，但它尚不能提供“理由”。最后，在水平Ⅲ，推理是建立在理由或可能的图形呈现之基础上的。

1. 在水平Ⅰ，动作蕴涵又分为以下两种类型：(1)在拼图中的一个空隙可以(或必须)由一类似形状的元素(S、H等)来填补上；(2)一旦一个拼图在一有限空间中完成了，它就能被加宽：“我们能继续这样做，做成一个更大的”(Nad)，或“是的，也许，但有时不能”(Cor)。另一方面，它又不可能做得“像你希望的那么大。”Nad十分肯定地回答：“不”，似乎“继续这样做”是有限制的，并且“使它更大”似乎也并不需要一种无限的重复，即类似于自然数连接的那样重复：$n \to (n+1)$。对儿童此时具有的这种“限度”加以解释，显然其原因在于：这时的“重复”(“总是”)并不是可观察物，但主体仍然在由经验对象所构成的领域内推理或寻找理由。我们已在别处看到[1]：当我们要求儿童以一只手在一个透明的容器中放置n，$n+1$等物体，同时又用另一只手在一遮挡的容器中放

[1] 皮亚杰(Piaget, J.)和英海尔德(Inhelder, B.)：《儿童对物理量的建构和发展——守恒和原子论》(*The Child's Construction of Quantities, Conservations and Atomism*)，New York: Basic Books, 1974。

置同样的物体，这一水平的儿童会肯定两个容器的数量相等，但他们完全不能肯定如一直这样不停做下去"直到晚上"时，两个容器中的东西是否仍然会相等。

在水平Ⅱ，这种无限的连续不仅被推断是可能的，而且还被认为是必然的，尽管没有进行实际的演示。当 Pan 声称："我不知道但我肯定"，她似乎意指"我能够既不用演示，也不用去证实它，但能一步步地继续下去，这就必然意味着这种连续是无限的"。这种肯定使我们想起了一名我们经常引用的年轻被试所说的话："当我们一旦知道了，我们就永远知道了。"换言之，这里的动作蕴涵是建立在一种反省抽象的基础上的，它不是像在水平Ⅰ那样在如下的推理中严格局限于从经验抽象中引出逻辑的结果："如果我们在做出这种拼装时获得了成功，并没有什么空隙出现，那么我们就能把它再加宽。"

最后，在水平Ⅲ，被试能把 Ani 称之为"一种恼人的困境"(她肯定她能无限地延长它而不用进行详细的演绎运算，因为"我们是随意加上去的")与她所说的"面"(即一个规则的和简单的图形)两者加以区别。事实上，她发现可以构造"一个平行四边形：最后，做成了一个面！"她的意思是：一个重复可以通过一组容易引出的连接表现出来。这种对规则图形的探求首先出现在 Mac 的反应中，她如此肯定地声称发现了对称轴，甚至在向其呈现的一个异常的形状时亦能如此。Car 和 Arc 进一步展现了这种探求，他们像 Ani 一样构造了平行四边形。Arc 说："我知道用一个平行四边形我们可以做成一个无限的面。"

因此，我们可以区分三种形式的动作蕴涵。第一种我们可称之为"条件性"蕴涵，因为它的成功要有相应的必要和充分条件；在本实验的情况下，就是要找到与空隙具有同样形状的元素。这种蕴涵，早在水平Ⅰ时我们就可观察到，它能使得儿童有把握去把他刚刚做成的图形"加宽"或重复，但不能保证具有一种无限的概括化，因为他们尚不知道可能会发生什么。

我们也许可以称第二种形式为一种"放大的"蕴涵，因为这种蕴涵是建立在已有之结果的基础上的。这是在水平Ⅱ上发生的情况，它可以作如下解释：如果我们在对已经做成的图形加宽而获得成功，那么，我们就没有理由不能继续下去(见 Xav 的反应)。

第三种形式，我们称之为"证明的"蕴涵，它给出了理由，这使一种无限的重复成为可能。在规则图形的情况下，这种理由是通过一种容易的呈现而得到的(Ani 的"面"，这种"面"与最初的"混乱"是完全不同的)。

Ⅱ. 这三种蕴涵原则都是有效的，在它们之上我们还可以再加上我们称之为假定的(assumed)或弱的(weak)蕴涵。这些蕴涵是建立在部分信息基础上的，尽管如此，但它们似乎在逻辑上还是有道理的。出现这种蕴涵的一种典型情景就是：主体知道只用 x 形状可以做出什么图形，也知道只用 y 形状可以做出什么图形，然后再要求主体预期 x • y会怎么样时，即去预期当用 x 和 y 两种形状而没有第三个形状 z 的支持时会产生什么图形。例如，让我们假定：S 产生了一个无空隙的面，P 产生了一个有空隙的面，这时认为 S • P 也会产生空隙就完全是逻辑性的预期。在只用 S 和只用 H 两者都获得

成功(Sc)这种似是而非的不合理情况下,主体会被诱导相信:S·H 至少也应该成功——而实际上,它们产生了三角形的空隙,只有使用三元组合 S·H·T 时,才有可能成功。在这种情况下,尽管它似乎具有逻辑的形式,只要没有通过观察和预期获得另外的信息,那么蕴涵 S·H→Sc 就仍可能被保持。

这种假设的蕴涵在我们所说的三种水平上有不同的表现。在水平Ⅰ,儿童倾向于只放置同类的形状(瓷砖)而用不着协调图形,因而就不会出现问题。当问题由实验者提出,被试会做出像 Dan 那样的回答。如主试问:如果把 P 和 H 放在一起时,情况会怎样,儿童仅肯定分别使用它们中的一种就可能进行拼装。

在水平Ⅱ,我们发现一种正确答案、错误答案和拒绝做出结论的混合情况。例如,Bea(7 岁 10 个月)认为:只用 T 和只用 S 会获得成功,但她预言既用 S 又用 Ts 两种形状的瓷砖会失败(Sc),但这是错误的。Aug(8 岁 10 个月)或是做出错误回答或者拒绝做出任何结论:只用 T 或只用 Ss 是成功的,但 T 和 S 的结合不能成功。当我们问他既用 Ts 又用 H 两种材料时,他回答:"我不知道这是否可以,也许可以。"再问他"我们知道我们可以用 Ts 进行,也可以用 Hs 进行,我们用这两种形状一起来做,是否自然会得到成功"时,他回答:"不,我们不能肯定,我们必须试试看。"至于 Jos(9 岁 8 个月),她做出了一系列正确和错误的回答:我们只用 T 将会成功,但只用 P 我们不会成功,用 P 和 T 两者我们不会成功(Sc=错误),用 T 和 H 两者也不会成功(Sc=错误),并且一起用 Ps 和 Hs 我们也不能成功($\overline{Sc}$=正确)。

只有在水平Ⅲ,问题才得到解决。Car 甚至能够达到一种三元构造 T·S·P;肯定这是可以进行推论的预期,并且能做出详细的组合来支持这一推论。至于假设的或非有效的蕴涵,水平Ⅲ的儿童在如下方面的表现十分有趣:他们趋向于立刻——并且经常是稳定地——专注于两个、三个或四个形状之间的关系而不是去注意被当作绝对存在物(absolutes)的孤立的形状。自然,这种相对化的过程对如何探求形状的不同呈现或找到某种"理由"起着重要的作用。

a. 我们还必须要讨论主体对相互关联的意义所进行的操作,如我们曾说过的,它们是与 16 种命题间联结词同构的。我们应首先指出:此处在客体的意义和动作的意义之间是没有区别的。因为主体所确定的目标,就是去实现无空隙的拼图,动作的意义是由成功和失败构成的,因而它是建立在手的操作之结果上的。客体的意义就是"能够用它们去做什么",因此,在所有的情况下,它指的是对它们(客体)所施行的动作。在抽象水平上,客体可以根据它们的形状来加以分类,如 Nad 一开始在水平ⅠA 时所做的,或者它们也可以根据其具有的边的数目来予以序列化(从 T 的 3 到 H 的 6),这种系列化在所有水平上都是内隐的。然而,在本任务的背景下,客体的意义在于实现所要求的拼图(贴瓷砖)的可能性和不可能性。在这种情景下,主体建立的联系或试图去建立的联系就是与我们所熟悉的 16 种命题间运算相同构的。这并不令人奇怪,因为此任务包含了一个基本的组合系统,而且也因为只有用主体陈述的真值才能描述他们真正在做

的事和他们的成功或失败的理由。

首先，我们可以区分出四种运算，这些运算表示独立的 p、q 或它们的否定，它们通常可写成如下的形式：

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot q),\ (p \cdot q) \vee (p \cdot q),\ (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

和

$$(\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot \bar{q})$$

当主体试图去用四种形状中的一种去构造一个拼图而不把它们与其他形状相联系时，这四种运算就出现了，结果是用 T、S 和 H 获得了成功而用 P 则导致失败。

其次，存在合取（$p \cdot q$），从意义的立场来看，它具有两种不同的形式：一种是像 T • S 这样的"自由"合取，如当两个形状相结合以及当他们是分离的时候，它们都是成功的；另一种是像 P • T 这样的"约束的"合取，如当一名水平低的被试说：我们可以用 P 而获得成功，因为"我们总是要加上 T 的"。

第三，我们在 H • S 的情况下，发现了排他的析取或互反的排除这种组合，在没有第三种形状参与时，它总是失败的。非排他的析取可用以下情况予以说明：(T • S) ∨ (T • S) ∨ (T • S)［可把它与 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$ 相比较］。

最后，我们能够清楚地观察到等价以及对应于二元运算的组合。在所有这些情况下，涉及的只是动作及其意义，外延的命题与此无关，即使主体把他们所做的转变成了精确的言语陈述。

第四章　算术的蕴涵和意义

合作者：I. Berthoud 和 H. Kilcher

我们已从第一章至第三章中看到：动作蕴涵在有关外部客体和那些要求实现一个目标，因而只涉及实际的成功和失败的问题中，发挥着本质的作用。当有关的物体（对象）是由主体创造出来的实体（例如数）时，以及当允许做出的回答只能根据"正确"或"错误"——即真值做出时，我们是否必须承认：此处涉及的唯一蕴涵是陈述之间的蕴涵呢？或者，我们是否会发现：主体的陈述只是对一组运算的语言上的描述或形式化，而蕴涵才是陈述在交流水平上所传递之物的现实的和必然的源泉？

因此，本章要研究的问题不仅对我们来说是非常重要的，而且它还具有某种一般认识论的意义。由于我们必须在发明水平上的"自觉的"数学与最具强制性质的"公理的"数学之间做出区别，因此自然地就要研究在第一种水平上的运算和在第二种水平所保留下来的运算之间蕴涵所起的作用。类似地，如果我们并不根据布劳威尔（L. E. Brouwre）的严格意义去解释"建构主义"一词，那么自定的数学显然是由不断地运算建构所组成，其意义是通过无数的蕴涵相互联系的。在下面，我们将分析在最初的情景所出现的这种协调的发生。

本章分为两节。第一节讨论有关序数和基数之间的关系，以及它们的相互蕴涵。第二节分析计数的基本的和必要的条件，特别要分析对一个循环排列进行计数的条件。

第一节　序数和基数

第一个实验装置简单由两个盒子组成（图1）。联结高盒（H）和低盒（L）的是一根倾斜的管子，通过这根管子，可以每次用手从高盒向低盒落下一个弹子。该任务的序数方面是对从H到L的弹子加以序列化，它是作为一种不同时相的连续落下的函数；而基数方面则与留在H的弹子的数目，或者在每次落下后在L中收集到的弹子数目有关；即，它指的是H和L的状态（在一个弹子落下前、当第n次弹子落下时、当它已经落到L时等的状态）。在H和L中的基数显然就弹子的总量来说是互补的：T = H + L。问题可以以预期形式（在落下弹子之前）或重构形式（在落下之后）出现。当然，在后者情况下，不能让儿童看到盒子内的弹子。

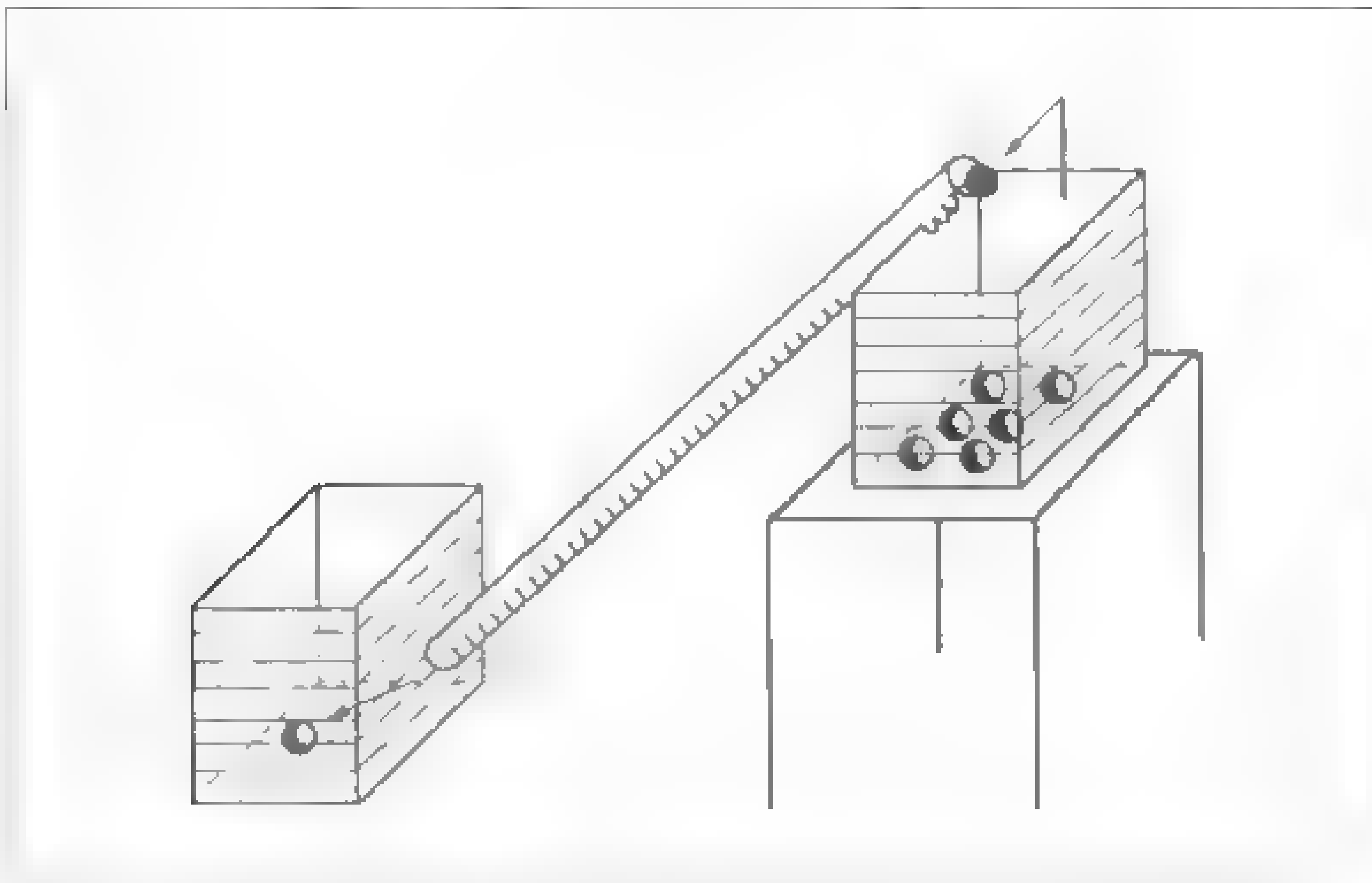


图 4

我们设计两种实验情景。在实验情景I中，最初在H中总数都为11个弹子（或对年幼儿童用少于11颗球），L中没有弹子。首先要求儿童预测：“在第[illegible]次落下前，有多少弹子在L和在H中？”然后要求他们实际进行落下的动作：“让每次落下一个弹球，在第[illegible]次落下前停止。”随后用布把H和L盖上，再问他们关于基数的同样问题。这样，在这一情景中，儿童必须根据次序的信息来推断基数。

在情景II中，总数T为11（在H中），要求被试预测：“你打算让11个弹子从H落下到L，每次落一个，那么第4次落下的弹子是在L中还是在H中？第7次落下，第10次落下，哪个弹子会在H中？第13次落下，哪些其他的弹子在H中呢？”然后要求他们“让11个弹子落到L中”。在儿童每次完成动作后，立刻把H和L遮盖上，并且重复问他们弹子是哪一次落下的。这时，每次会在盒子中找到的序数必须从关于基数的信息推出，这里涉及的蕴涵与情景I所要求的蕴涵是相反的。

我们能够把儿童的反应区分为以下四种水平。

1. 水平IA

以下是第一水平的例子，它至少（或主要）在情景I表现出不能把整体T分离成为两个互补的亚集L和H之特点。

Bri（[illegible]岁） 情景I，以“动作”形式进行，弹子总数为8。“在第4次落下前停下”（她落下[illegible]弹子）“在L中有几个弹子？”（无回答）“你用手落下了[illegible]次，所以，在L中有几个弹子？”“[illegible]个。”“H中呢？”“我不知道。”再给儿童8个弹子。“在第4次落下后停下……你已经把它们中的几个弹子落下了？”

“3个。”——“在H中剩下多少?”——“7个。”再次用弹子总数为1来做。“在第3次落下后停止。”——“它们中有3个会在L中。”——“那么在H呢?”——“4个。”情景Ⅲ，用弹子总数为7做：“我已经放下了1个弹子在这儿了。第2个在哪里?”(无回答)

Dan(5岁6个月) 情景Ⅰ，以“预期”形式进行：“在第5次落下前，有多少弹子会在L中?”——“我想不会有什么弹子。”——“会有一些还是不会有?”——“是的，11个。”显然这是一种全或无的回答。然后落下5个弹子：“多少弹子会在L中?”——“5个。”——“你怎么称呼这个打算再落下的弹子?”——“6”——“在H中还有几个呢?”——“6个，不是11个。”——“为什么你说6?”——“我想，我数错了。”

情景Ⅱ，用T＝11来做，其中5个落下了：“第3个是在L中还是在H中?”——“在L中。”——“为什么?”——“因为它被放到管子中了。”——“第5个在哪里呢?”——“在L中。”——“第7个呢?”——“在H中。”——“另外哪一个在H?”——“第8个。”

重复情景Ⅰ，在H中有8个弹子：“在放下第1个弹子前停止，第1个在哪里?”——“在H中。”——“在L中有几个弹子呢?”——“没有任何弹子。”——“为什么?”——“因为它全空了。”——“有多少在H中呢?”——“我不知道。”——“你能告诉我吗?”——“大约8个，不，大约6个，我想不是10。”

Cat(5岁6个月) 情景Ⅰ，以“动作”形式进行，以T＝11开始：“让7个弹子落到L中。”(她落下了全部11个弹子)——“这里会有7个，因为原来有11个。”“但我要你只落下7个弹子。”——“我们永远不能用11个弹子得到7个弹子。”因此对该名儿童来说，整体基数T还未被分离。至于动作，为了“在第5次前停止”她在拿第一个弹子时数“1”，当她把它放进管子时，又数“2”，拿起第2个弹子数“3”，拿起第3个弹子数“4”，然后得出结论：“我落下了4个弹子。”——“在开始时，我们在H中有11个弹子，你落下了4个到L中，那么H中还剩下几个呢?”——“有10个。”

凡在水平Ⅰ的被试都知道怎样数到15或更多。这些回答的意义在于揭示了这种言语计数在他们的基数定量化方面是很少使用的，或者甚至在他们的序数定量化时也很少使用。产生这种情况的原因无疑是：在这一水平，数字“1”“2”“3”等等只不过是熟记的名字，儿童借助它对在一个给定集合中的同质的个别元素临时加以区别：“1”是最

① 一名5岁大的女孩曾向我解释她所说的“在……之前”和“在……之后”的空间含义：“3是在4的后面，2是在4的前面”。她认为数是按顺序排列的，从“1”开始，并且你是顺着它们而移动的，你会注意到哪个数还在你前面，哪个数还在你后面。这样一种表象也许可以解释为什么Bri不能解释主试关于这两个词时序上的意义。

先区分出的元素，"2"是下一个区分的元素，如此等等，它们还没有量的含义。因此，当一个整体T的第n个元素n被从H到L落下时，这些被试并不会得出结论：集合T被分成了两个亚集L和H。他们或是得出所有的东西都落下的结论，因为n是这一整体的部分；或是得出什么也没有落下的结论，因为那唯一有了名字的元素（第n个元素）还没有在L中。因此，Bri"不知道"在落下后什么在H和L中；以T＝1和3次落下到L为例，她得出结论说：在H中有1个弹子剩下；在弹子落下后，Dan认为在H中及在L中有全部弹子（T）或是什么弹子也没有；当要求Cat落下7个弹子时，她落下了全部弹子（T＝10），因为7包含在10中；然而她拒绝认为7是一个可定量的亚集，因为"我们永远不能用10得到7"。至于序数的定量化，儿童能成功地计数他们的连续动作；然而，对Cat来说，她就像其他几个儿童一样，把数字"1"与拿起第1个弹子的动作相联系，把数"2"与使它通过管子落下的动作相联系……这样，她就把已经落下的3个弹子定量为"4"。

一言以蔽之，这第一水平是以定量化前的一个行为为特征的。因此，我们对于数和基数之间关系的研究一般而言，乃是研究作为一个量的数之形成，换言之，即研究一个意义系统的构造，这些意义是如此基本以致我们也许一直以为它们是在我们一开始接触物体的经验中就已具有的，而实际上，它们依赖于远比我们所想象的更为复杂的活动。因此，在这最初的水平，一个动作可以把整个T分为两个亚集，一个是要"从H到L去的弹子"亚集，另一个是"仍留在H中的弹子"亚集，尽管如此，但整体仍保留了它作为一个可分客体的意义。这个对象的各部分享有同样的外延，似于这是一个定性的类及其亚类的一种性质。让我们回忆一下另一关于"花"和"雏菊"的实验，这时"雏菊"也是"花"。①

2. 水平ⅠB

在这一水平，我们可将许多中间的例子包括其内，这些例子代表了一种在L和H中的弹子数之间建立定量关系的过渡阶段。

Aro（5岁9个月）　情景Ⅰ，以"预期"形式进行，T＝1："如果我们在第二次前停止，第二次落下的弹子在哪里？"——"在H。"——"在L里有多少？"——"我不知道……1个。"——"在H呢？"——"我不知道。"——"大约有多少？"——"10个。"

情景Ⅱ，以T＝13进行："如果我把10个弹子落下，第1个将在H呢还是在L？"——"在H，因为它们还没有被放下，我们不可能知道我们没有做过的什么

① 英海尔德（Inhelder，B.）和皮亚杰（Piaget，J.），儿童早期逻辑的发展（*The Early Growth of Logic in the Child*），New York：Norton，1969。

事"情景Ⅱ,"动作"形式,以 T=13 进行:"你让 10 个落下,第 4 个在哪里?"——"它已落下去了。"——"第 7 个呢?"——"因为我落下了 10 个弹子,第 7 个也落下去了。"——"那么第 13 个呢?"——"它在 H 里。"以 T=8 进行:"在第 4 个落下之前,L 里有多少?"——"3 个。"——"有几个在 H?"——"8 个。"——"在一开始我们有几个?"——"8 个弹子。所以不可能有比 8 个多的弹子。"——"那么是多少呢?"——"5 个,我没有数过它们(在 L 中的 3 个弹子);我只数了这些(留下的弹子=另外 5 个弹子)。"

Lav(5 岁 6 个月) 情景Ⅰ,以 T=11 开始,"预期"形式:"在第 5 次落下前有几个?"——"4 个(在 L 中)。"——"在 H 中呢?"——"6 个,不,因为它离 5 太近了。"——"那么是几?"——"10,因为它不靠近 5。"在落下弹子后:"有 9 个(在 H 中),可能有 9 个或 10 个弹子;我想是 9 个。"

Ana(6 岁 6 个月) 其理由部分仍是处于水平ⅠA(当 T=11 时),但当 T=8 时,他又做出了纠正。在 T=11 时,在第 5 个球落下前,他认为有 4 个在 L,但有 10 个在 H:比 11 稍微少一点或简单地以 11 减去第 1 个。用 T=8 进行,在 L 中有 3 个(在第 4 次落下之前),5 个在 H:"我数过。"——"为什么你不数到 6?"——"因为那样的话,在 H 中就要是 9 了(=总数),而这个游戏我们只需要 8 个弹子。"

Cri(6 岁 8 个月) 能区分两个亚集,即 L 中的已落下的弹子和仍留在 H 中的弹子。他用手指来数弹子,但在这样做时,他仍然从第 1 次数过的数继续往下数!以 T=11 进行:"在第 5 个落下前 L 中有几个?"——"4 个。"——"你怎么知道的?"——"我差不多是算出来的:1,2,3,4,…;把 1 个留下,所以得到 4。"——"在 H 中呢?"——"我数数:5,6,7,8,9,10,11,所以仍然是 11(在 H)。"

Mar(6 岁 11 个月) 情景Ⅰ,以 T=11 进行"预期"形式:"在第 5 次落下之前有几个?"——"有 5 个在 L 里,如果第 5 个落下的话。"——"那在 H 里呢?"——"也许也有 5 个:如果有 5 个,那么很可能在 H 中也有 5 个(对称)。"以 T=8 进行,"在第 4 个落下前呢?"——"3 个在 L,因为第 3 是在第 4 前面。"——"在 H 中呢?"——"我不知道。因为我不知道整个是多少。"

这一水平的主要进步是:语言数现在已具有了一种回答"多少"的量的意义。这使被试能从"全或无"的反应中解放出来,"全或无"反应是水平ⅠA 的特征;并能使主体对整体 T 区分为两个亚集:例如,Cri 谈到了那些从 H 到 L"落下的"弹子的亚集和那些在 H 中的"留下的"弹子的亚集。Mar 最后所说的话清楚表明了一种对整体的定量的划分:如果整体不知,3 个落下的弹子可能被量化,但我们不能说在 H 中留下的是多少。"因为我们不知道整个数。"这一水平的儿童即使有了真实的进步,但仍有一些行为经常发生,这些行为似乎像是水平ⅠA 的"全或无"反应的残留:为了量化"留下的弹子",Cri(以及还有其他几名被试)并不分别去数它们,而是继续根据在 L 中的弹子数去数;这样,一旦他把数给了 L 中的弹子,他就对 H 中的弹子继续数"5,6,7,…,11";他不是"得

出结论：5—11的弹子是在H中”，而是通过不正确地把在H中“剩下的（弹子）”加入到整个T中而推断出有11个弹子留在H中了！另一方面，Aro以T与H的相等（T=H）开始，但只要他记住T=8，他就能推出“不可能（在H中）有比8更多，而是5个”，因为8减去L中的3就是5。一般而言，当T=11或更多时，在这一水平仍有很多困难，但以T=8简化问题后，就能获得许多成功：当Ana已把整体T=8区分为L=3和H=5时，问她：“为什么是5而不是6”，她回答“因为那样的话，（在H中的）总数就会是9了（T在H中。），而这个游戏我们只需要8个弹子”。与此不同，情景Ⅱ几乎总是引出正确的答案，它们是通过预期而获得的。

3. 水平Ⅱ和Ⅲ

在水平Ⅱ，两个亚集能很好地分离开来，每个亚集都会引发各自的计数，尽管由于计数技术的缘故还时有错误发生。以下是一些例子，刚开始时仍处于水平ⅠB和水平Ⅱ之间。

Ser（7岁1个月）　他仍不能完成以T=11进行的情景Ⅰ任务。但当T=8时，他根据自己的手指来数L中的弹子（1，2，3）和H中的弹子（1—5）。在数H中的弹子时，他不再把已落到L中的弹子数包括在内了，因此他就把两个亚集分离开了。“现在，我们知道了一共有8个弹子，这对我们是否有用呢？”——“是的，它对计数有用。”每次2个弹子分3次落下。“在哪一次落下中是第5个呢？”——“在最后一次。”——“第4个落下去了吗？”——“是的，因为5比4大。”

Lat（7岁5个月）　情景Ⅰ，以T=11进行：“在第5个落下前，在L中会有几个弹子？”——“4个，第5个还在H中。”——“总数是多少？”——“11个。”——“仍留在H中有几个？”——“9个。”——“为什么？”——“我数过弹子了（11），然后我拿走5个，我发现有9个。”（似乎11－(5)＝9）“动作”形式：“在第6个落下前有几个？”——“5个在L中。”——“在H中呢？”——“8个。”——“你怎么做的？”——“我在L中数了4，然后我数5，6，7，8，9，10，11，12，然后我从1到8去数它们（用同一手指）。”因此它不像Cri（水平ⅠB）那样只是一种计数的继续（连续的计数），而是一种蕴涵，这种蕴涵使得从第5到第12元序数的集合具有“8”这个基数

Pat（7岁2个月）　情景Ⅰ，以T=11进行：“在第5个落下前，这里会有几个弹子？”——“4个在L。”——“在H呢？”——她从1数到11，拿走1到4，然后数剩下的弹子。“呀，是这样（顿悟），剩下是7个！”（通过再一次地数第5到第11个弹子。）“动作”形式：她分别对L中的弹子从1数到4，对第5到第11个弹子从1数到7。“你在做什么？”——“我知道在L中有4个。我再数一次会得到11；前4个（1—4）不数了，我再数一下另外的弹子（因此1—7）。”

情景Ⅱ，“预期”形式：在T=15和L=10情况下，对所有序数问题均能做出正

确回答。"在 H 中有多少？" "很难说。"她先数了 1 15，然后数 11 15。"是 5。"

And(7 岁 1 个月) 情景Ⅱ，T 15 和落下 10 次进行预期实验：他能给出正确的序数；至于最后的基数，他数了 15，然后拿走 10，于是 H 5。

Cla(8 岁 1 个月) 情景Ⅰ，以 T 11 进行预期实验"也许在 H 中会有 8 个，如果我们把 L 中的 4 个再加上，那就会有 11 个"。以 T 8 进行："3 个弹子到了 L 了，但不是 4,5,6,7,8,…是 5 个(在 H 中)。"

San(8 岁 6 个月) 以 T 11 进行预期实验："4 个在 L，那么 5,6,7,8,9,10,11。那会是 7 个(在 H 中)。"

以下是水平Ⅲ的例子(加法和减法)

Joe(9 岁 6 个月) 情景Ⅰ，以 T 11 进行预期实验："4 个在 L 中。" "那么在 H 中呢？" "7 个。"(减法：11 4) "你怎么知道的？" "L 里有 4 个，那么我就数(剩下的弹子)。"以 T 15 进行，10 个落下。"第 10 个在哪里？" "在 L 里。" "在 H 里有几个？" "5 个。" "你怎么知道的？" "因为 10 个已经落下，总数是 15(所以 15 10 5)。"以 T 8 进行，其中 3 个在 L 中："在 L 中和在 H 中有几个？" "3 个在 L 中，5 个在 H 中。" "你怎么知道的？" "它们中有 3 个在 L，加上应该的数要使它们的和是 8。"(所以所加的数：8 3＝5)

Ric(9 岁 4 个月) 情景Ⅰ，以 T 11 进行预期实验："在 L 中有 4 个。" "在 H 中呢？" "会剩下 7 个。" "为什么？" "因为我是 4 加上 7(加法)，然后拿走 7(从 11 中拿走：减法)。"

Eli(9 岁 2 个月) 情景Ⅰ，以 T 11 进行预期实验："4 个在 L，所以 7 个在 H：4 加上 7 等于 11。"

情景Ⅱ，以 T 15 进行 10 次落下的实验。"那会是 5(在 H 中)。"以 T 8 进行："L 中有 3 个，那么会有 5 个(在 H 中)。" "用你手指数给我看。"(她这样做了)"有些小伙伴同样这样做，但他们说在 H 中有 8 个，他们的错误在哪里？" "因为他们不去注意他们的手指(H 中的基数)，他们说的是他们的最后数的数(换言之，即他们说的是他们点数 T 时的最后一个序数！)"。

Lac(9 岁 5 个月) 情景Ⅱ，以 T 15 进行预期实验："在最后，我们会有 5，因为 10+5 15。我们不会说 6，因为这样就意味着我落下 9 个了。"

水平Ⅱ较水平ⅠB的显著进步表现为整体 T 中的两个亚集 L 和 H 已清楚地分离。在 L 中的弹子数很容易确定，因为它表示了连续的落下动作，它是一种身体动作的指派，无论这一动作是实际执行的还是仅仅是预期的。因此，在水平ⅠB 获得了成功。与此相对照，从第 n 次落下以后，主体继续以一种顺序的计数方式进行下去，这是一种简单语言的列举或受到作为一种物质支持的手指的帮助(因此，当 L 4 时，Lai 说："那么让我来数 5,6,…，直到最后一个")。水平Ⅱ相对于水平ⅠB 的创新之处在于：儿童理解

了"前4个不数"(Pat)，因此从7到11的弹子必须单独地去数；于是，Pat再一次去数H中的所谓"其他的弹子"或"剩下的弹子"(7—11)，但她这时的计数是通过新的枚举来进行的。这种枚举作为亚集H中的元素的总和，就成了一个基数数字。实际上，这一复杂的方式的变动，是水平Ⅱ的典型反应，它是加法和减法运算的一种准备，或是其功能的等价物。说："前4个不数"(Pat)相当于把它们从总体中移开，因而就是在进行减法。当某些儿童(如Pat、San等)在从L中的弹子转向在H中找到弹子以建构整体T时，他们此时会说到"那么"、"然后"这些词，而它们就是一种加法运算的等价物。

这样的加法和减法随后在水平Ⅲ时就成为外显的了。当Joe说"在L中有5个弹子，加上的数要使它们的和是8"时，其中"加上"一词就是有意识地表示加法这个概念。当Ric说他"4加上7，然后拿走7"，因为从11中落下4就会留下7(在H中)，加法和减法的含义是同样明显的。更有甚者，我们还特别提到Eli对较早水平的儿童所发生的错误，能做出清楚的解释，这些错误乃是由于缺乏对两个亚集的适当的分离，把H中的弹子数与T中的弹子数混淆起来了。

4. 结论

一个基数是一个集合，它存在于一个同时性的整体之中，不管其被视为等价单元的元素其计数的可能次序如何。一个序数则是一系列排列(rank)中的一个排列，这些排列中的每一个排列都由其前一个排列的基数所确定[$n=(n-1)+1$]。当然，如水平Ⅱ的反应所显示的，两个相互的蕴涵联结了基数性和序数性，尽管这并不意味着它们是同一的，而仅仅意指它们必然是相互依赖的：(1)序数蕴涵着基数，因为一个排列所具有的意义是由其前一个排列的基数所决定的，这就是说，第n个排列对应于由$n-1$基数对其先导的元素；(2)基数蕴涵序数，因为如果其元素是等价的(它们必须被这样看)，那么区分它们的唯一方法就是以某种确定的次序去列举它们。

因此，在我们的实验中，被试根据序数的信息对基数做出推断，以及反之亦然，这是非常自然的。但首先两者应加以区别。区别似乎很容易做出，因为序数是通过从H到L落下弹子的动作建立起来的，而不管是在H中(还没有落下的元素)，还是在L中(由落下而产生)的元素，它们的基数都仍是保持不变的。本实验为我们提供了一个有趣的事实：评估L中的元素的数目是容易的，因为它们是通过动作而被聚集在一起的；但说出H中的元素数目就或多或少成为问题，因为它们形成了一个H=T−L的亚集，而这个亚集主体试图仅仅根据已落下的元素的计数来数出它们。结果是：在水平IA，在序数和基数之间就仍没有蕴涵出现(除了在如下简单意义上，n落下意指在L中有n个基数元素)；恰恰相反，它们还没有分化。因此，落下单个的第n个元素被认为要让整个T从H到L。从水平IA上未分化("全或无")的反映到水平Ⅲ的加法和减法的运算，其间发生的全部进步，乃是由于一种新的意义以及其必需的蕴涵的构造形成之结果。在

水平IA，落下一些弹子代表一种确定事实，这是因为意义是由物质上执行的动作（没有预期）所决定的，这种动作与整体T或与H中剩下的弹子（没有动作作用于它们）没有什么关系。相反，在水平IB，落下要求一种在其他元素之中的"一些"的意义，这将反转过来对这些其他元素产生一种未预见到的意义：它们是一种"剩余物"，尽管它还没有与一个整体相联。

下面举几个例子：在水平IA，Cat说："我们永远不能用10个弹子得到7个弹子，"因此拒绝了把一个集合划分为部分的想法。水平IB的Aro把那些其他元素叫作"还没有放下的"（元素）。这一回答包含了一种"剩余物"的新的和本质的意义，但它是这样的"剩余物"——它因缺少对它执行的动作而不可能被主体知晓："我们不可能知道我们没有做过的什么事。"与此相对照，Lav认为这一剩余物肯定是大的数（离1和5的边界"不要太近"）；另一方面，Cri和另一些儿童希望去数这些元素，但他们这样做仅是根据落下的数目的计数来进行（因此H=T，这让我们想起了水平IA的反应）。Mar有了对称性的想法，根据这种对称性，H"也许有5"（像L一样）。然而，在意义中的关键的变化发生在水平II，此时H中的"剩余物"被另计数。不过这时还没有一种对整体的系统参照，主体只是外显地谈到两个亚集：Pat说"（H中的）前四个不数"，意指由于落下的缘故它们已被主体所知。在某种顿悟之后，她发现"剩余物"必须被另外看待（"呀！是这样，剩下是7个。"），加上这样的话："我再数一次别的弹子（在H中）。"最后在水平III，那种在水平II仍是内隐性的加法和减法获得了运算的意义。这样，它们就从属于一个整体的构造或解构，这个整体不断地借助基本的蕴涵即T=B+H或H=T−B而被唤起。

在情景II，推理显然导致了一种更早的蕴涵成就，亦如以较少的数字集和亚集呈现的情景I的情况。所有这些计算——即使被试通过陈述来表示它们——它们也是动作之间或运算之间的蕴涵。有时人们会问：是否每一计算都会涉及一些推断系统？如果我们引入动作蕴涵的观念，那么这是明显的。

第二节　圆形序数中的计算

向儿童呈现一个以圆形次序排列的元素集合，考察他们怎样确定基数，特别是序数，以此来结束本章的前一节，这也许是十分有趣的。例如，我们可以先问儿童在包含10或11个纽扣的圆中有多少纽扣，然后再问这些纽扣中有多少纽扣可以是第一个，第二个，第三个或最后一个纽扣。我们可以区分出以下三种水平。

在水平IA，儿童并不立刻想到要对开始的元素做出标记，他们的计数常过少或过多地结束于一个或两个元素。首先，他们没有看到我们可以有像第一个元素一样多的

第二个元素，甚至如果次序反转的话，许多元素可能成为两次第二个元素。①

San(5岁)：她数由11个元素组成的圆之元素时，没有记住第一个元素因而数出总数为11。"哪一个是第二个？"——"那个是。"——"可以让另一个元素当第二个元素吗？"——"不。"——"为什么？"——"因为那样的话，就会有错误。"——"你能从这里(与原来第一元素相对的元素)开始数吗？"——"是的(她数1，2)。"——"可能会有另一个第二个元素吗？"——"不。"——"从其他地方开始呢？"——"是的。这里，"(她指着二对相继的元素1，2，说"1，2"，然后又说"这一个在前，那一个第二"。)——"现在你有了几个第二个元素了？"——"3个。"——"我们还能找到更多吗？"——"不。"——"为什么？"——"因为我们还没有再数。"——"试试看。"她又去数另外的一堆元素对"1，2；1，2；"等等，绕着整个圆不断地数。她在以相反次序再次开始数时，遇到了已数过"2"的元素，她把它放到圆的当中。"有多少第二个元素？"(实验以上述同样的程序进行。)"有多少个第一个元素？"——"它们中的全部元素，因为我能一开始就数它们。"

Am(5岁5个月)：让她数有7个元素的圆，结果她数出了"8"。"不，这一个你数两次了。哪一个是第二个？"——"这一个。"——"如果我们从这里开始，会数出多少？"——"也是7个。"——"为什么？"——"我知道。"(她又从另一元素开始数)——"哪一个是第二个？"——"这儿。"——"有多少纽扣可能是第二个纽扣？"(她数了3个连续的一对元素)"3个，还有这一个(第7个)。"——"有多少可能是第1个？"——"它们中所有纽扣！"(她指着它们中的每一个)——"那么有多少第三个呢？"——"3个。"(她指着3组3个元素)实验者把7个元素放成一列。"这里有多少元素？"——"7个。"——"用这个方法数呢(相反次序)？"——"是一样的。"——"为什么这个在这次是第四个而在另一次又是第二个呢？"——"因为这里它在5的前面。"——"那另一种方法呢？"——"这是第四个。"

Pat(6岁8个月)：能准确地数出11个元素组成之圆中的元素。"有几个第二个？"——"这一个(第一个数过元素的左边一个元素)和这一个(同一元素的右边一个元素)，2个！"——"是全部吗？"——"3个，不是2个。""不，全部元素(如果开始的元素改变的话)。"——再来一次：它们中的2个可能是第二个元素。——"这是它们中的所有元素吗？"——"是。"——"有多少第3个元素呢？"——"9个。"——"有多少第1个呢？"——"它们全部。"——"第11个呢？"——"2个。"——"怎么会是11个纽扣是第一个元素，只有2个纽扣是第11个元素呢？"——"……我不知道。"

① 这段话突出表明了对内涵的重视：第二个元素是一个系列的部分……例如，在一个一个元素的队列中，某元素可以是右起第二个元素，和左起第二个元素，因此它可以同时是两个第二个元素。(J. E)

为了更好地理解这些前反应的意义，让我们先考查水平IB和水平Ⅱ的例子。在水平IB，存在一种回答类似水平混合的理解。

And(6岁10个月) 他正确数出圆有11个元素："它们中有多少是第2个元素?" "一个(以一个方向)，不，2个(另一方法)。" "还有更多吗?" "是的，还有别的方法(以相对的元素作为第一个元素)。" "还有更多吗?"(又做了两次从新元素开始的数数)"那么这里有几个第二个元素?" "很多。"(他数了几个成对的元素，似乎每一对元素都有一个第二个元素，但只是以同样的转动次序去数)"有5个。" "有多少第3呢?" "1个。" "多少第11呢?" "全部!不，只有1个。"(最后一个) "如果我们像这样数呢(新的开始元素)?" "呀!如果我们改变开始的元素，对每一个元素(挑选作第一的元素)来说，都有一个11(顿悟)。" "为什么?" "因为它转动了一点了(即因为这些第一个元素以及那些最后一个元素，是以一种循环的次序彼此相随的)。" "有多少第3个呢?" (他并没做出概括化和重新进行二个一组的实验。)"1个。不是3!"(用最后两个纽扣)。 "怎么会有11个第11个元素而只有3个第3个元素呢?" "因为3乘4等于11。不，因为只有3个第3个元素。"

在水平Ⅱ(7—8岁)，这些问题得到了解决。以下是两个例子(第一例为一位显著早慧者)。

Bri(5岁) 用7个纽扣进行实验，他标记了一个开始点，认为在它的两边都有一个第二个纽扣。"还有别的第2个吗?" "是的。"(他以一个第三个元素作为"第一个"元素，然后指着它的两边相邻的元素) "还有更多吗?" "是的，任何地方都有，因为它们都是边靠边的。"他对随后的元素也做出了同样的回答，并不用分离的一对元素、三个元素一组等等方法。

Hel(8岁10个月) 13个元素组成的圆："要去数它们，我们必须知道我们是从哪里开始的。" "这一个(第6个元素)能是第2个元素吗?" "是的，我们能，我从这一个开始(前面的一个)，等等。它们全部可能是第二个，但不是在同一次(时间)而是每一个依次成为第二个元素，因为我们可以从另一边开始。" "它们中的两个不能同时是第2个吗?" "是的，我们不是数出它们的数(基数的计算)；我们不是数1个、2个、3个、4个!"然而，要数出(基数的)总数，可以采取任何次序。"我们有同样的数量，它没有变化。"然后把10块糖摆放成一条直线："这是10个。" "我们能从别的地方开始数吗?" "是的(相反方法)。" "从这里数怎么样(左边第3个)?" "是的(她对它作了标记)。我先数这些(3—10)然后再数那些(1—2)。" "这一个(第7个)可以是第2个吗?" "是的，我们能让它成为第2个元素(她从'6'处开始数)。"

在水平Ⅱ，以此实验程序进行实验，可以发现在基数性和序数性之间已有了清楚的分化以及相互的蕴涵。根据我们在本章第一部分第1小节的开头引用的定义，一个基

数是一个集合，不管在计数其元素时的次序怎样，它都保持不变。这正是当Hel说"我们有同样的数，它没有变化"时所表示的内容。反过来，一个序数是一系列连续排列中的一个排列，这些排列中的每一个排列都由其前一个排列的基数所决定。因此，在水平Ⅱ，n个元素将产生（当以两种方式进行计数时）$2n$个第2个元素，$2n$个第3个元素，如此等等。这些意义和蕴涵只有从水平Ⅱ以后才能被理解，而在水平ⅠA，我们在本章第一节指出：在序数和基数之间还未分化：这时对一个给定的总数n，其第2个，第3个等的元素的数目并不是$2n$，即它并不依赖于整体n，而是依赖于小的分割的亚集（两个元素组、三个元素组，等），这些亚集既是基数性的又是序数性的。这种从水平ⅠA和ⅠB向水平Ⅱ的意义上的进展不仅仅只是分化和相互蕴涵的进步，而且也是所使用的观念（概念）的一种基本的相对化（relativation）。

第五章 物体(对象)内的关系

合作者:R. Zubel 和 G. Merzaghi

以下的研究也许会被认为是琐细的,因为它处理的是最基本的物体猜谜(puzzles)问题。然而,我们必须考察:从意义和动作蕴涵的观点来看,客体概念中到底包含了什么?为此目的,不太复杂的问题是最能给我们以启示的问题。

一般而言,一个客体(对象)有两个意义:主观上,我们能用它做什么?以及从客观上看,它是由什么构成或如何构成的?前者不能与动作的意义相分离,这一点我们不打算在本章讨论。后者的意义产生了如下问题,即是否客体由一组可观察的性质所构成,或是否需要建立关系、再构造等等——换言之,是否要求类似于或甚至同构于运算的主体活动的参与;我们希望事实确实如此,并且我们将把注意点放在最简单的问题上。

一方面,一个对象的构成成分就是其性质,这些性质或是可观察的——即使在这种情况下,它们needs要解释——或是仍然有待被发现的。另一方面,这一构成又是由客体(对象)的部分或拼件所组成的,或多或少与其性质有关,并且必须建立或确定这些性质的空间联系。为了阐明这些各种关系的建构,我们分析了儿童对随机呈现的几个待拼物体之拼件的反应。实验材料由以下 23 个不同形状的卡片组成(见图):

- 苹果的 13 个拼件,其中 11 个(从 1 至 11 的拼件)可以装配成 1 个完整的红苹果,还有 2 个剩下的拼件是无关的绿色部分。
- 5 张双面的拼件,其一面构成一头大象,里边有一条蟒蛇(E2—E5),另一面是顶帽子。(说明参见 Saint-Exupéry 的《小王子》)
- 2 张单面的拼件,一张是象的一个拼件(E'2),另一张是帽子的一个拼件(H'1)
- 3 张不是任何待拼对象之拼件的卡片,它们不能相互组成任何对象,也不能与其他拼件组成任何对象。它们是一辆汽车的拼件(C)、一只动物的双腿(A)和一张白色的卡片(W)。

指导语非常简单:"请你尝试用这些卡片去拼出什么东西来,告诉我它是什么。"没有任何关于要用到几块拼件的说明。被试必须建立的关系或是图形内的关系(例如,去再建构一头完整的象),或是图形间的(如,把苹果都放在一起)关系。我们的问题是去建立一个关于这些关系所具有的某种运算形式的范围:这些运算形式有合取、否定、相交、不相容、蕴涵等等。

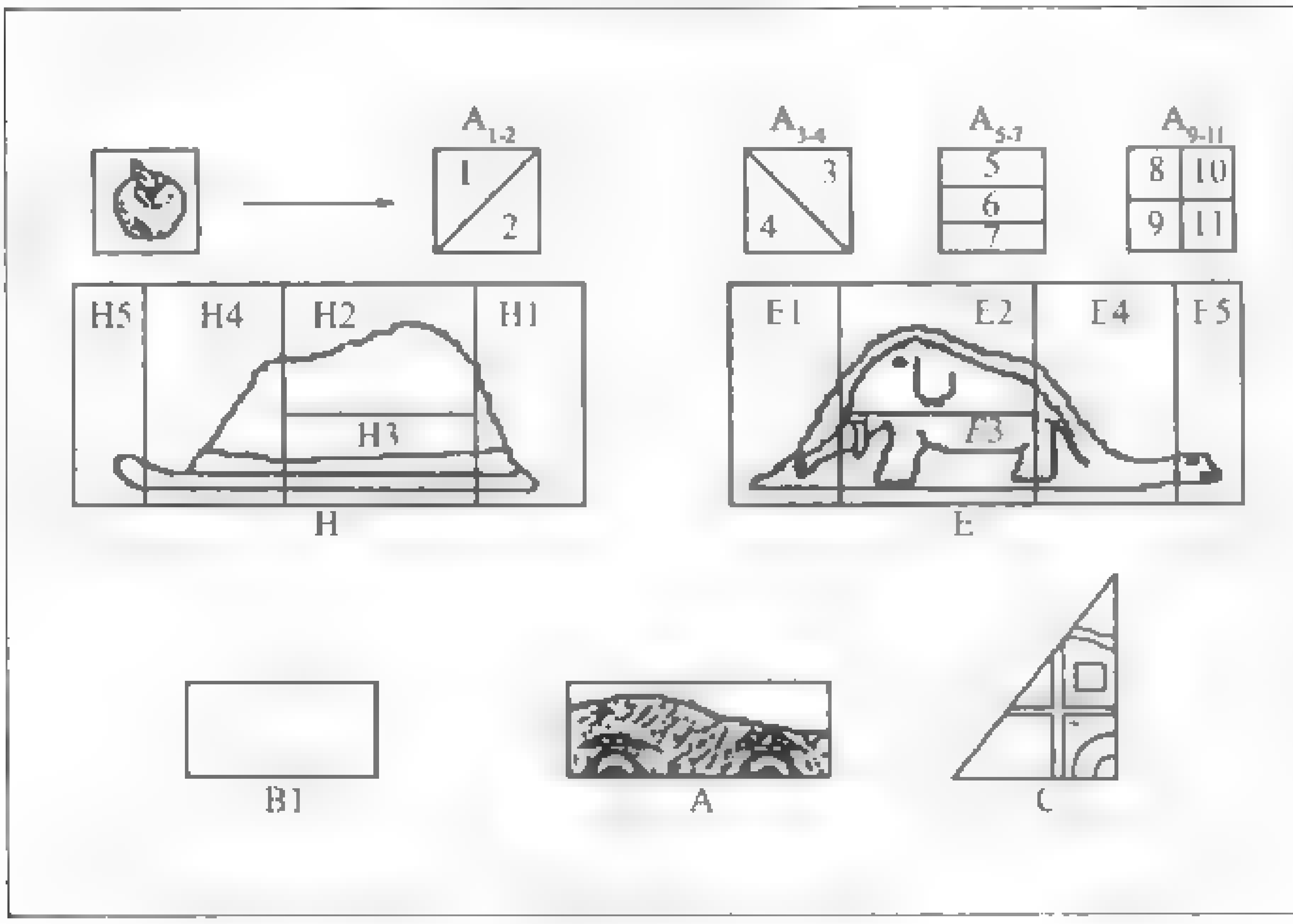


图7

1. 水 平 IA

以下是一些水平IA的例子。

Tre(3岁5个月) 他拿起苹果的一个拼件(2)。"这是什么?"——"我不知道。"他把它与拼件8放在一起,8也是苹果的一个拼件,但它与拼件2在空间上不能协调,他说:"这是一只苹果;但我们必须把它放在这里(桌面纸的一端),因为它是绿的。"在加上了标号为6的拼件后(与中部分),他改变了拼图的意义:"现在我有了一所房子。"他加上了一些帽子的拼件,以一种不适当的混合结束拼装(尽管如此,他对邻近的和拼接的部件使用两个选择标准:相似的颜色以及首先考虑在拼件之间不留空隙)。然后,他建立了一个新的集合,这个集合从顶部到底部是由象的背、一个卡车部件、一个白色的空白卡片、动物的眼睛和帽子的部件所组成(一些部件被放置于另一个部件上面):"这是一匹马,这是水,这匹马在水里。"最后:他又把这两个组合连接在一起,得出结论:它们只是几个苹果。

Aya(3岁1个月) 他也是先从把两个拼件对拼起来开始(一个是大象的拼件,另一个是苹果的拼件)。然后他把5个拼件放在一起,认为它们应该是合适的,他指着其部分,说:"这是苹果。"他最后用一些无关的拼件做成王冠的样子围在其边上,并且显得非常高兴:一所房子!

Min(3岁2个月) 他也是从2个或3个拼件的错误拼装开始,每次都说:

"(这是)一只苹果。"然后，又用另一对元素，"这是一头象，一头象的一个部分。"随后他又把它们合成一个无序的系列："这是一只落到水里的苹果，水里有汽车和房子。"接着，他又把这些元素分成了排成一条线的 8 对拼件："它们是苹果的一部分(实际上，它们根本不是)"；然后他又说，"这是一条苹果路"。实验者指着由"象"的一个拼件和"苹果"的一个拼件所组成的一对拼件，问儿童："它们放在一起合适吗?"——"是的，它们都合适。"

这些 3 岁的被试(水平 IB 从 4 岁开始)在他们的构造活动中所缺少的东西是非常有趣的。首先被随机选择的拼件并不被视为整体的部分，他们只是用一个拼件作为出发点，并且预期这些随机选择的拼件会是某个整体之部分。Min 是唯一一名谈到(一头大象之一个)拼件的被试，但他根本没有或是通过预期，或是通过试误去寻找其他的拼件；它们只是与新的拼件联合在一起，直到这种所谓的"伪整体"出现(它们由异质的元素组成)而导致产生意义。这些意义具有如下特征：(1)它们在建构过程中可能会变化：在加上新的拼件后，Tie 一开始认为的"苹果"就不再是苹果了，因为"现在我有了一所房子"(也可见 Aya 的例子)；(2)它们指的是暂时的情景而不是稳定的对象："这是一匹在水里的马"(Tie)，或是如 Min 所说的，是只"落到水里的苹果，水里有汽车和房子"，或是"一条苹果路"。更有甚者，当 Min 肯定"它们都合适"时，他显示了水平 IA 的一般和本质上的特征，即，以什么事物去适合什么事物，这表明他发明了一种任意的联系，而不是通过预期去寻找这种联系，即通过一种必然的合取去发现它或把可观察的材料相联系去客观地证明它。

2. 水平 IB

从 4 岁以后，儿童在寻找对象的过程中产生了一个显著的转折点：最初选择的拼件，无论它是什么，现在都被作为一种"参照的"元素来使用，即它被认为是一个有待完成的可分离和可保存的物体，而该物体是以"物体内的"(intra objective)关系为特征。这样的关系是"约束的合取"，它部分是通过经验的尝试所获得，同时也是通过局部的预期——无论它是正确的还是错误的预期——所获得的，这种预期都会在不同程度上引导主体的探求。

Mar(4 岁 1 个月) 她开始用 E′2(象的背部和眼睛)进行，然后又用相邻的部分与之拼成一对，说："这是一条鱼。"然后，她拿起拼件 4(苹果的一半)，她正确地用拼件 3(苹果的另一半)与之相组合，说："这是一只苹果。"然后，她又拿起 A(动物的眼睛)，寻找与之相配的拼件，正确地得出结论："没有什么(和它相配)。"她再次在 Es(象的拼件)中寻找："不，这里有什么东西缺失了。"她又回到有一个绿色拼件的苹果上："我要做一个绿苹果。"她把拼件放在一起，注意到它们在空间上是彼

此不相配的："这不行，因为这里离得太远了，这里也是。"

Fre(4 岁 6 个月)　他开始用苹果的一个拼件(?)，说："它看上去像一只西红柿。"他尝试用拼件 4 与之相配："这个(指拼件 4)不是。"(即不是互补的部分)在以下六次尝试中，他重复"这不是，这也不是"等等。最后，他用拼件 7、9 和 11 做出了正确的组合："这下对了。我想它是一只苹果　我要找出另一只苹果。"他发现 2 与 1 相配，然后又发现 3 与 4 相配，因此通过否定和图形内的(intra figural)合取，拼成了三个苹果。然后，他又转向"象"的拼装，成功地把 E2 和 E3 相配合，说"我们必须让它们不变了(就像这样子)。"然而，(在参照留下的拼件时)他说："这些没有能用的"，并且他猜测："有人拿走了一个图片(拼件)。"他把这些他认为不能用的元素聚合成为另一集合，这一集合不禁使我们想到 $p \cdot q$ 的不相容形式 $p\ q$!

Fri(4 岁 2 个月)　他一开始在 1 到 11 的拼件中认出了几个可能的苹果拼件，他先作了不同的配对，然后，他比较了 E2 和 E′2，得出结论："我得到了 3 个苹果和 2 个动物。"对 H1 和 H1，他做出了正确的定向但未把它们联在一起，"这是一条蛇。"——"做完了吗?"——"不。"

Gar(4 岁 2 个月)　把 E2 放在 E 2 旁，但他说："不，因为这样有了(产生)两个鲸鱼了。"　"这太多了吗?"　"是的。"然而，对 H1 和 H 1："(这是)一个毛虫(caterpillar)朝上爬，另一个朝下爬。"

Ama(4 岁 ? 个月)　他一开始以 7 作为参照元素，对 7、8、10 进行拼装："这是一个苹果，还有个苹果"(另一组合)　关于 Es 的拼装，实验者(主试)提出用 H 替换 E 的要求："那也是适合的。"

Car(4 岁 ? 个月)　他成功地把 8 + 10 与 9 · 11 配对，然后装配了另一只苹果(5 + 6 · 7)："这个做完了，这儿也完成了。"至于"象"，他把 E2 · E3　E1 聚在一起，然后正确地加上 E1："我得到了全部拼件"(除了 E′)　然后，他完成了图形，认为它是一条"蛇"(大蟒蛇)的一半，然后又接着说："这是另一半。"然而，他认为"象"是"帽子"的"另一半"。

在这些 4 岁的被试和水平 IA 的 3 岁的被试之间存在实质性的差异。主要的差异是 4 岁的儿童其建立在空间接近基础上的对象内关系已经形成，它们通过"约束的合取"的手段而被保存　甚至当对象被分割为多个拼件，必须被再次装配成一个紧密的和稳定的整体时。换言之，这些被试并不构造异质的集合，即像 Min 那样在看到所谓"一只落到水里的苹果，水里有汽车和房子"，并说"它们都合适"时所想象的那种集合相反，这些儿童总是从一个想象的图形开始，例如他会正确地把某个部件设想为是一个苹果的一部分，并运用这个图形作为参照把它补充的拼件相结合去组装对象　这就导致了新的和基本的动作的产生(它具有以下的相互蕴涵)：(1) 寻求将导致整个对象形成的"约束的"合取；(2) 排除或否定已经必然而又相关地出现　我们可以引用 Fre 的反应作为后者的一个例子。他在寻找所谓"正确的"部分"去适合于参照的元素"时，他

相继检查了6个拼件，每一次都重复认为"它不适合"、"它也不合适"，直到他把拼件7、9和11联系起来，说"这下对了，我想它是一只苹果"。然后，他继续组装了另两只苹果，因而实现了把其他的苹果（它们是对象间的，甚至是包含的——就"苹果"的类而言）与对象内的合取的整合。

除了这些基本的进展，我们还应注意到其他的进步。Fre已不满足于部分的否定，他把未用的拼件又聚成另一类："用这些来组装，没有一个是合适的。"再者，虽然这些被试没有在开始时预期到最后的图形，但他们在一旦开始构造时就已能进行部分的推理。然而，我们必须指出，两个意象H和E之间的关系仍然是一个未解决的问题。儿童只是或在H内或在E内建立很少的联系，而没有考虑到它们的相互联系或相信这两个图形是能被综合的；对Ama来说，以一个H的拼件替换一个E拼件仅产生了以下判断："它差不多也是合适的。"Car表达了一种与那些在H和E之间寻找关系的被试一样的共有的看法：集合H组成了集合E的"另一半"。

3. 中间的过渡水平和水平Ⅱ

由基本的前函子（pre-functors）在水平ⅠB形成——它们表现为受图形内的相邻性（contiguities）以及排除或否定所约束的合取形式，其进一步的发展主要具有一种程序的而不是结构的性质——任务就很容易获得解决。在这一时刻，对建构对象的预期变得越来越快和越来越完全，主体使用了多个参照元素，从一个建构到另一个建构的迁移也增加了，等等。留下的只有一个结构的问题，如我们将要看到的，它是一个十分有趣的问题。这个问题是：H和E（帽子和象）的两个边是否在如下意义上相联系的，即像Car那样把它们看作是一个单一整体的两个"一半"，或者它们是独立的形象，如同在一个图片集中一页的前页与后页是没有关系的。因此，解决这一问题是我们区别水平Ⅱ不同于水平ⅠB的主要标准。

比如，以下是一些介于水平ⅠB和水平Ⅱ之间的过渡情况的例子：

Tr（6岁8个月）：在一开始，他拿起E1、E2、E3，预期到整个对象，并完成了

在范畴论中，一个函子（functor）就是一个概括化的函数，它把一个范畴的内部结构映射于另一个范畴的内部结构。皮亚杰的前函子概念无疑指的是一种类似的认知建构，通过这种建构，不同对象的内部特征可以相互联系、比较和转换。在此处，皮亚杰间接提到了在当前研究与其他最近进行研究之间的联系。参阅皮亚杰《结构与范畴》（"Structures et Catégories," *Logique et Analyse*, 17, 1974, 223-240）；皮亚杰等《认识论与机能心理学》（*Epistemology and Psychology of Functions*, Dordrecht: Reidel, 1977）；皮亚杰《关于"对应"的研究》（*Recherches sur les Correspondances*, Paris: PUF, 1980）；皮亚杰等《态射与范畴：比较与转换》（*Morphisms and Categories: To Compare and Transform*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, in press）（P. M. D.），此书亦为本丛书一本。——中译注

任务。然后，他拿起5，说："这是一个苹果的柄。"他拿起9和3，但又把3放回："这个不行。"他拼装了8、10、9、11："它们都行，做好了！"他认为H1和H1组成了一顶帽子，但是，在把Es与它们混合后，他看出来这是一头大象。在进一步用H7和Es作尝试后，他得出唯一结论："有些拼件丢失了！"

Eri(6岁1个月) 他迅速地拼装了苹果。当他预期要拼装一头象时，他迅速地拼成了，除了E5，他把它看作是一条蛇了。至于Hs拼件，他已预先把H2看作是一座山，把H3看作是一座桥、一条河，因此是把它们视为一道风景的整体。在完成了E的建构后，他想再去拼装H，但认为"有些拼件丢失了"，他忘记自己把它们翻过来了，他得出结论："你拿走了另外的拼件。"因此，他并不理解正反两面涉及两个独立的系统。

Cee(7岁7个月) 他把Es和Hs混合起来。当主试建议他把它们翻过来，他最后拼了一头大象但并未完成，一顶帽子也未完成。

以下是一些明显的水平Ⅱ的情况。

Ian(7岁5个月) 他确认了三个参照框架(苹果、象、帽子)，并把相应的元素分配到这三个不同的集合中。然后，他拼装了苹果，以E2+E3拼装了一头象。他用H4+H2做成了一座山或一座大山，但当他想去完成它时，他仅找到"山的一半"和"象的一半"。在观察到一些拼件已被"移开"后，他把一个拼件翻转过来，大叫："啊，我知道了：有一头大象，你把它翻过来了。"使他感到十分惊奇的是，他发现当他把大象翻过来时，山就出现了，他把拼件排成了正确的次序。

Gre(7岁8个月) 在拼装4个苹果时，他立刻获得成功；然后，对E2、E5和E1，他认为"这是一头大象"。他拿起H3，把它翻转过来与Es进行组合。紧接着H4，他放了E1，把它翻转变为H1，并说"这是一个东西的头。"这是他用H1和H7完成的："啊，这是一只龟：头在这儿(H)，弯背在这儿(H2)。" "在背面它会是什么？" "大象！"这样，他获得了两个独立的系统，其中每一系统他都能正确地拼装："完成了，做好了！"

Oli(8岁11个月) 在苹果之后，他拿起H1，并在另一边发现了E1。他正确地拼装了Es拼件。"你还能再拼装别的东西吗？" "是的，也许，如果我把一些东西打乱了"。他用Es这样做了，发现"有一些东西像那些在另一边的东西"。他排列成了"帽子"："现在我有一顶帽子了，然后，又是一头象。"他把帽子的拼件逐次翻转过来，检查发现这是排列得很好的一头大象。

Did(8岁3个月) 在拼装了苹果之后，他拿起H5、H3和H7以及E1、E2和E4，说："现在它们都是一半。"他预测了一顶帽子，又预测"它们是象的一半：它们是不能放在一起的一半！"然后，他发现："以前这些不是在这里的(H4和H2)；也许它们在背面。" "那么，我们能做什么？" "把它们翻过来。"他按顺序一个个地翻过拼件。

Nic(8岁1个月) 用H4+H1:"这是一顶帽子",然后他用H5完成了装配。接着,他把一些Es集合在一起:"这已是一条蛇的一部分了。"在"帽子"还没有完全装好,"象"也是不完整的时候,他逐次把拼件翻转过来,理解两个系统的二元性及其分离性。

那些在其他领域处于水平Ⅲ的10岁到13岁的被试,他们具有比刚才提到的儿童更为迅速的预期和翻转图片的能力;尽管与成人的反应相比,他们的反应仍具有较大的不确定性。这里没有任何新结构的标志而只有程序的变化。

我们可以根据水平Ⅱ儿童的反应形成以下观点:只有在7—8岁时,儿童才理解一张卡片反面的画可能与它正面的画没有关系。在达到这一年龄之前,他们或是把Hs和Es相混,得出结论说:依据完整形象的要求,有些拼件缺失了;或是他们假定(像水平ⅡB的CAR那样):物体的一半是在另一面的,似乎像形成了帽子的"另一半"。这里的问题因此是一个有关意义的问题。

实际上,除了客体意义(一只苹果等)和动作的意义(去结合或去分离对象等)间的二元性之外,我们必须进一步设想存在这样的二元性,即意之所借和意之所指之间的二元性。这里的意之所指或是指由图片所代表的物体,或是指可以实际执行的动作。意之所借可能或是词(或是词系),任意的符号(如表示加、减、乘和其他数学运算的记号)或意象,它们的唯一意义是去代表它们之外的对象。从很早的研究[1]中,我们就知道对年幼的被试来说,对象及其言语的表示物(意之所借)是不分化的;换言之,名字就是对象的一部分〔例如,只要看到勃朗(Blanc)山或塞立夫(Salève)山就知道它们该叫什么〕。在现在的情况下,在达到水平Ⅱ前,外部对象与它的图画或意象就似乎也是未分化的:在一张代表一头象的卡片的背面,我们必须找出它的一个部分或一个有关的元素(即使它是一顶帽子),似乎一个图像是一个真正的客体,这个客体可以被翻转来看到它的另一面。相反,在水平Ⅲ,儿童认为在一幅图片的背面是另一幅图片,这另一图片是独立的并形成了它自己的一个完整的系统。

除了这种实质结构上的进展之外,水平Ⅱ还以许多程序上的改善为其特征。预期更为迅速并成为对象建构的更好的指导,因为它们迅速指向对象的最终形式。参照的框架更多了,因而主体能同时地运用其中之一框架来建构苹果,用其中另一框架去建构象和帽子。经常地,儿童在他们开始细节的建构前,会把元素分为三组。他们的建构也可能产生迁移。最后,近端的否定(例如,对E无用的拼件可能对H有用或相反)被扩展成远端的排除或否定(完全无用的拼件)。

1 皮亚杰(Piaget,J.),儿童的世界观念(*The Child's Conception of the World*),Littlefield,Anams,1972,第63—70页(orginal work published 1926)。

4. 结　　论

本书的两个总的目标是去发现我们必须从何处开始去建构一种意义逻辑，以及揭示这样一种逻辑是建立在动作和运算之间的蕴涵和其他关系之基础上的。

一种意义的逻辑绝不可能受到真或假之陈述的逻辑的限制。它必须从属于陈述的所指物，即从属于对象本身，如本章所描述的情况。我们在前面指出，对象的意义有两个方面：(1)首先，它是指或是在实际上或是在心理上我们用它们"能够做什么"。在实际上，我们能够——或不能够——移动一个物体，能把它分为部分，如此等等。这时对象的意义于是从属于动作的意义。在心理上能做什么是对对象进行分类和序列化，等等，对象的意义仍是从属于动作或运算的意义。(2)一个对象的意义也是指"它由什么组成"或它是怎样组成的。这里再一次地，对象从属于动作，而且它们更多的是构造的，不是纯功利的(utilitarian)。

动作只有通过它们的相互联系才能存在和发挥作用，无论初级的动作，还是复杂的动作，情况均是如此。最一般的相互联系是动作或运算之间的蕴涵，本章有许多关于这种蕴涵的例子。以下是最经常发生的蕴涵：(1)把一张画片分为拼件意味着可能存在某些重新建构它的合适方法；(2)拼装某些拼件意指排除其他拼件；(3)拼件的结构形状意味着"约束的合取"(用安德森和贝尔纳普①的语言表述即为 $AB \to A$ 的形式)，例如A是不可能与B相分离的，如此等等。

除了这些操作的连接物(动作间的蕴涵和联结一个对象各部分的约束的合取)，我们也在本研究中观察到我们可以称之为"自由合取"的现象。当图片代表一个复杂的对象(其元素并不总是与现实世界相联系，如大象在大蟒蛇中)的时候，这些"自由合取"就会出现。大蟒蛇不可能实际上吞下大象。但十分令人惊奇的是，甚至那些不熟悉《小王子》一书的人也不特别为这种不寻常的组合而感到困扰。我们也许可以发现有第三种类型的合取，我们可称之为"对象间的"或"包含的"合取，这些合取由把那些以不同方式组成但具有同样意义的对象联结为一个单一的集合所构成，例如，从水平Ⅱ以后，当被试说到"四个苹果"时，就出现了这种合取。

而且，我们可以确认出四种类型的不相容(incompatibilities)：(1)当两个类似的对象(例如两个苹果)被以不同方式分解，以致一种分解所产生的一个拼件与另一种分解所产生的拼件不能合适地组合在一起的时候，这时就产生了一种"对象内的"不相容。(2)当不可能把两个不同的对象(如苹果和帽子)的部分相结合时，这就出现了一种"对象间的"不相容。(3)当呈现的或所选择的拼件不能与任何对象相适配并且形成了一个

① 参阅本书第十一章及总的结论。

类(就像由苹果的拼件、象的拼件和帽子的拼件所构成的交集那样的类)时,这就是"对象间的"不相容,这可以由下面的经典形式与 $p \vee q$ 相对照:

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$$

(4)最后,当画在一张卡片的两面的两个对象(例如一头大象、一顶帽子)可能被组合成功,但永远不能同时一起出现之际,这时就有了一种我们称之为"表象的"不相容。这后种情况必须以空间的或逻辑内(下)的(infralogical)"反转"为前提。

一个与不相容有密切联系的连接词就是简单互反排斥,或叫"既不……又不"$(p \cdot q \vee p \cdot q)$。虽然它可能与不相容一样经常出现,但它在否定的应用和在意义上是不同于不相容的。从意义逻辑的立场来看这是一个十分重要的问题:在仅建立在真值表上的外延逻辑中,出现在"蕴涵 $p \supset q = (p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot q)$"中的 p 的否定,指的是在谈话所及的所有事物中那些不是 p 而仍保持 q 的真值的全部对象。从这样一种否定出发,就会产生蕴涵悖论,而这是必须加以避免的。在一种意义蕴涵中,否定只是在有一种良好定义的包含时才会出现。例如在一个 B = A + A′的群集中,以"A′ = B − A"所表示的 A 的否定是相对于 A 包含在 B 中而言的,因此,把"近端的否定"(它指的是最邻近的包含)与"远端的否定"(它涉及更为[illegible]远的边界)相区分是明智之举。

我们现在要对排除或否定如何通过我们的发展阶段而得以发展的,进行考查并尝试做出解释。发展大约是从似乎较原始的远端的否定过渡到近端的否定,它随着年龄的增加而逐渐改善。这种转变的原因在于参考框架本身的转变;然而,我们首先要清楚我们是在两种意义使用"否定"一词的。一方面,我们是在包含的意义上使用它,对于这种包含某种合取或是可能的或是被排除的。另一方面,在描述发展的水平时,我们谈到一个"参照元素",它被视为一个不变的拼件,其他拼件的合取是相对于它而被组织起来。在水平Ⅰ,儿童只使用一个参照元素,因此只有相对较少的元素可以用来补充它,而相对较多的元素被排除了,这就使得否定成了远端的否定。相反,水平Ⅱ的儿童能同时使用好几个参照元素,它们对应于苹果、帽子和象。因此,他们的否定就越来越近,因为这一个系统必须分别的同时也是联合地完成建构。

因此,从一种一般的立场来看,否定常被用来标志差异的程度。在我们先前与英海尔德进行的一项研究中②,我们也注意到近端的否定是很晚才出现的;例如,一名被试说"石头比报春花更不像雏菊"时,句中的"更不像"当然意指在石头和花之间的差异要比两者都是花的对象之间的差异更大。

在各种已讨论过的前运算的联结词之外,我们必须还要加上"等价"。存在四种分解和再构一个苹果的方法,显然这里就有一种等价,这种等价不仅存在于所生成的对象

① 参阅本书第十一章。

② 皮亚杰(Piaget,J.)和英海尔德(Inhelder,B.),儿童早期逻辑的发展(*The Early Growth of Logic in the Child*),New York:Norton,1969。

中，而且存在于生成对象的程序中，每一种方法的目标都是要避免在各个连接处上的中断，和建构形状良好的圆苹果。虽然非排斥的析取和交集不是由被试有意识建构的，但我们可以注意到内隐建构的情况。例如，被试正在拼装的苹果可以通过图形间的连接把它分为两个类(见图5)：如果 p —有少于4个划分部分的苹果(1,2，3,4，5,6,)和 q —有多于2个划分部分的苹果(5,6,7,，8,9,10,11)，那么，具有3个划分的苹果就构成了这两个类的共同部分($p \cdot q$)，它与两个其他部分($p \cdot q$ 和 $p \cdot q$)相对应。

概言之，我们的被试应用了与16个未来二元运算中的10个相同构的联结词，其余的6个联结词是冗余(完全肯定)、完全否定和 p 或 q 的肯定和否定(即 $p \cdot q \vee p \cdot q$，等)[①]。现在所使用的10个是在不依赖于外延真值表的意义之间的全部联结词。外延性仅仅在由意义及其"内在性"所支配的部分的包含中才会介入。

---

① 此处法文原版及英译本均似有误。"p 的肯定"的析取规范形式应为 $(p \cdot q) \vee (p \cdot q)$ 而非"$p \cdot q, p \cdot q$"。($p \cdot q$)是 p 与 q 的合取形式，$p \cdot q$ 是 p 与 q 的非蕴涵形式。——中译注

第六章　物体(对象)间的否定和不相容

合作者：L. Banks 和 A. Wells

我们在第五章中所描述的是在对象的各个划分成分之间的关系，它们既属于对象内的(intraobjective)领域(与对象的组成有关)，也与"逻辑内"的(infralogical)联结词(它以诸如相邻、连续和分离之类性质为特征)有关。这些是与分离的对象之间的逻辑数学关系领域问题完全不同的问题，在后一领域，它所涉及的整体是类或集合，而不是具有相互联结部分的连续的对象。但在这两种情况下，我们都会自然地发现合取、排除、缊涵和不相容的形式构成了主体活动的特征。但是，它们实际上是同一回事吗？它们在发展的各个水平，特别在动作或前运算及其意义缊涵方面，是以一种类似的方式发展的吗？它们的主要差别是：尽管难以看出"对象的拼件"实际上是与主体相分离的，但只要一个主体做出了这样一种分离，另一个主体就能立刻察觉出每一拼件它自身所具有的不完整性，因而也就能察觉到它的否定方面。相反，面对两个类 A 和 B 以及第三个类 C(既不是 A 也不是 B)，主体寻找 C 的共同的肯定特征，直到观察到没有任何这样的特征并接受 C 只是"既非 A 也非 B"。因此，回到对象间水平的否定和不相容的问题上，这对我们理解其性质是很有益的。

第一节　否　　定

我们已经在许多场合研究过否定，但还从未以下面的实验程序来进行研究，这一研究将为我们提供一些新的信息。它包括二个程序。在第一个程序中，向儿童呈现一个对象，要求儿童说出这个对象不是什么(任何东西)或"我们不能用它做什么"。[我们一定记得，一个对象(物体)的意义之一就是"能用它做什么"。]因此，对这种否定而言，其参考的框架是由儿童决定的。然后再向儿童呈现 10 个物体，要求他们对其中的一个他们叫得出名字的物体，告诉我们这个物体不是什么，这可能会引导他们去使用物体的全部集合作为参考的框架。分别来看，这两种情况下所问的每一种问题当然都是不充分的，因为前者(方法)也许只是产生了语言的回答，而后者则只是产生了连续排除的动作而并不试图作任何初步的分类。

因此，我们设计了第三种更精确的程序——以一个屏幕把儿童与一名实验者隔开。

在儿童面前放置各种不同的物体，让他从中选择一个物体。实验者必须根据被试提供的信息想出它是哪一个物体，但是这种信息必须总是否定的（即儿童必须告诉我们这个物体“不是什么”）。例如，如有两个红色的弹子和一匹玩具小马，儿童选择了后者，那么他就必须这样说“这个东西既不是红色的也不是弹子”，让实验者去推测它是一匹马。然后，他们变换角色，实验者提供信息，儿童引出结论。

第二个程序要求儿童把物体分成为不同的集合，在每一集合形成后，儿童必须要给它一个名称。然后实验者问是否能把集合A中的一个物体放到另一集合B中。要求回答“不能”的被试说出为什么“不能”。如果回答“是（能）”，则要问儿童是否这个集合的名称必须改变以及它应该叫什么。最后，把一个新的并且是完全不同的物体（我们将它称为“入侵者”），插入到该集合中，要求儿童回答它是否与其他物体“非常适合在一起”并解释为什么适合或不适合。

1. 水平 I

让我们先举几个水平IA的例子。

Hel（3岁6个月） 向他呈现一支钢笔：“这是一支铅笔。” “它不是什么？” “什么也不是（nothing at all）。” “我们不能用它做什么？” “我不知道。” “我们能用它做什么？” “在纸上做记号。” “这个菱形卡片呢？这个是什么？” “一只风筝。” “它不是什么？” “它没有线。” “我们不能用它做什么？” “什么也没有（nothing at all）。” “我们能用它做什么？” “我们扛它，带着它跑。”（呈现一个不完整的圆形）“这是一个破的手镯”。 “它不是什么？” “什么也没有，就是它一个（it's all alone）。”

使用一个屏幕并角色互换（两辆汽车、三只动物、一个弹子）：“它不是一辆汽车，它不是一只动物，它是什么？” “一只动物和汽车。” “我告诉你它不是一只动物，它不是一辆汽车，所以它是什么？” “一只动物和一辆汽车。” “但我告诉你它不是一只动物，也不是一辆汽车，所以它是什么？” （他指着所有物体）“它是全部这些东西（it's all that）。” “你选择什么呢？”（他先指着红色汽车然后又指着猪）对于“入侵者”：所有东西都适合在一起（包括“入侵者”：在苹果中放一块巧克力）。

Mat（3岁9个月） 在她面前放置一支圆珠笔、两支毛笔、一支钢笔、一块橡皮和一些绘画笔。“这是什么？” “一支铅笔。” “你能告诉我它不是什么吗？” “我不知道。”（尽管此时有7个物体所形成的参照框架） “这里还有什么？” “它们都是铅笔！” “我们不能用它们做什么？” “我们不允许在墙上、在桌上或在剪刀上画画。” “这是什么（橡皮）？” “圆的。” “它不是什么？”（没有回答） “我们能用它做什么？”（没有回答） “没什么说了吗？”

"没有了"。

屏幕实验：完全失败。角色互换实验："如果我告诉你这不是一个木头做的东西，它也不是一个动物，那么它是什么？"她指了指一头羊，又指了指塑料汽车（正确）。

Nev(4岁4个月) 她先说一支铅笔不是一支铅笔，然后又认为一支钢笔不是一支钢笔。屏幕实验：她连续地说出全部物体，并不考虑到否定。角色互换实验："如果我说它不是蓝色的？" "那就是这一个，因为它是蓝色的。" "它不是一个水果。"（她选择了梨） "它不是一只梨，不是一只橘子，不是一只苹果。" "它是橘子。"与她试图为物体的集合起一名字时，这个名字并不能应用于全部元素：被她称为"动物"的集合，除了马和猪之外，还包括一个弹子和一个菱形卡片。

显然由于在包含上有问题，否定被曲解了。

Son(4岁6个月) 她不能对这些物体进行分类，她对它们进行多少有些异质的配对，如将一部电话机和手风琴相配。对于笔，她说："它是一支钢笔。" "我要你告诉我这支钢笔不是什么？" "它不是一支钢笔。" "但你刚才说它是一支钢笔。" "它不是一支钢笔，是一支铅笔。" "所以它是一支铅笔吗？" "是的。" "但它不是什么！" "它不是一支铅笔，也不是一张桌子，也不是一把椅子，也不是眼镜，也不是一个人。"（这些物体都放在桌子上）

我们注意到Son一些最初的否定都是以可见的参照元素进行的，这标志着水平IB的出现。以下是一些介于水平IA和II之间的过渡性情形(IB)。

Jea(4岁6个月) 向他呈现一个菱形："这不是什么？" "三角形。" "还不是什么！" "别的没有了。"呈现一个不完整的圆形："它不是方的，也不是三角形。我想不出别的什么了。"圆珠笔："它不是什么，或我们不能用它做什么？" "我们不能用它做成一所房子。" "我们不能用它画一所房子吗？" "是的。" "还有呢？" "它不是一只熊，不是一头象，不是一只布谷鸟，等等。"

用屏幕进行："它不是一棵枞树，也不是一所房子，等等。"（他列举了全部物体，除了他已选择的物体。）角色互换实验："它不是一辆汽车，它也不是一个动物。" "那么它是什么？" "它是一辆汽车。"（屏幕移开，由实验者作同样的否定。）

Del(4岁3个月) 呈现一个菱形："它不是什么？" "什么不是？" "不，它不是什么？" "那个"。 "它不是一辆汽车吗？" "不。" "那是……？"（没有反应。）不完整的圆形："它是头。" "它不是什么？" "身体。"笔："它不是……？"（没有回答）"我们不能用它做什么？" "写。" "我们不能写？" "我们能写。" "那么我们不能做什么？" "一个气球，一棵枞树，等等。"屏幕实验和角色互换实验："它不是一辆汽车，不是一个动物。" "它是一只羊。"（屏幕移开，重复否定） "它是一只球。"（正确） "它不是绿色的，并且它

不是一个人。”——“它是电话机。”(正确;“入侵者”实验:开始时回答正确,但对几个异质的物体却说“全都适合”,这是由于缺乏层级包含之故。)

在水平IA,对所有否定的回答都是失败的:儿童不能发现一个物体不是什么:当告诉他们,从屏幕后选定的物体既不是x也不是y的时候,儿童得出结论,它肯定或是x或是y,等等。这种对于否定的缺乏是与在包含的建构中和在表达“所有东西都合适”的意义中两个系统的缺陷或不足相伴随的,这一点在Hel和Nev的反应中表现得很明显,但在其他被试中则是内隐的。儿童的第一种具有特点的缺陷是把不属于集合的元素作为集合元素引入,例如,把一个弹子和一个棱柱形放到了称为“动物”的集合中(Nev)。第二种与之密切相关的错误是把整体与其部分相混淆,如Mat说:七个异质的东西“都是铅笔”。在这两种情况下,在整体和部分或在外延和内涵之间都存在一种混淆。这等于是把“自由合取”(一些物体借助它而被拼装起来)与“约束合取”(它是建立在共有的意义——这些意义把“那些共同都适合的东西”结合进一个有共同的特征的类)相混淆了。

因此,在这些初步水平上,我们可以看到一种初级的合取,它既不是那种后来获得的“约束合取”(例如:把一头猪和一匹马放在一起因为两者都是动物,因而它们不能分开),也不是那种“自由合取”(如那种在一根木柱和一只鸟之间的合取,因为此时它们在一个空间排列上彼此是邻居——一种独立于内涵意义的外延的标准,这种标准允许元素分离)。我们称这种合取为“伪约束合取”,类似于我们在以前研究中所使用的“伪必然性”的说法,后者以一般性与必然性的混淆为其特征。[1] 在水平IA,儿童可以把现有的东西,或者把他们自己所建构的东西引入一个集合之中,这是一个具有不同程度的“伪约束合取”的集合,它因材料的不同而有所不同。

现在,我们对否定的悖论有了更好的理解了。当我们告诉儿童:“它不是一只动物,它不是一辆汽车”时,他们推测:这两个集合是被指定的,因为它们对相邻的元素构成了伪约束合取;因此,由于这种特别的提示,于是肯定压倒了否定。类似的,儿童有时说一个物体是一支铅笔,有时又说它不是一支铅笔,这是因为物体根据与其相比较的元素不同而改变了角色:如果它是通过一种伪约束合取而与比较的元素相联系,它就可能是一支铅笔;但如果是通过一种自由合取,那它就可能不是一支铅笔。

简言之,水平IA的否定的困难是由于在“什么东西在一起好”这一观念中所固有的未能得到很好建构的合取所造成的,因此,这种不良建构也是在包含的开始阶段所固有的。实际上,包含具有多重的和矛盾的意义:从运用自由的和任意的合取所进行的异质聚类,到建立在各种水平上的伪约束合取基础上的不同集合,最后到建立在共同性质

① 皮亚杰:《可能性与必然性》(*Possibility and Necessity*),第二卷:必然性在认知发展中的作用(The Role of Necessity in Cognitive Development),Minneapolis,MN:University of Minnesota Press,1987。(此书也为本译丛之一种。——中译注)

基础上的类(例如,"动物")。缺少稳定的和充分分化的参照点,排除或否定就不可能具有普遍的意义。因此,否定是困难的,因为它要以两个连续的发展阶段为前提:(1)在一个 x 和一个或多个 y、之间建立一种可能的合取(否则,对于它就什么也不能说,如 Hel 在向他呈现不完整的圆时所表现的:把"它不是"归结为"什么也不是",因为"它只是一个东西");(2)否定这一合取。换言之,说 x"不是蓝的"意指它可以是蓝的,并且如果儿童把合取理解为"伪约束"合取,他就会倾向于从"可能是什么"的角度去理解而忽视否定。水平 IB 的进步是在"包含"理解上的改善,因而在"否定"方面,也有了进步,但仍混合以水平 IA的错误。

2. 水平Ⅱ

在这一初级的运算水平,包含变得稳定而连贯一致,它为否定提供了参照框架,这使否定迅速扩展出至远端的否定。

Joe(7 岁 3 个月) 在应用"入侵者"的任务中,他分别进行了三种水果分类;然后,再加上巧克力之后,他把全部元素分为"水果和巧克力"。当加上一根木柱之后,整体又被分为两类:"能吃的东西和不能吃的东西。"

Fab(7 岁 6 个月) 他提到了超过 12 个物体,用来表示笔"不是"什么东西。在用屏幕进行的情景下,他以一种易于表达的否定措辞,引导实验者说出他所选定的物体;在变换角色后,也能顺利地如此进行。他所说的唯一一个无关的否定是"它不是由铁制成的",但立刻就承认这种否定是无用的。

Gia(8 岁 10 个月) 同样的反应。他开始时说:"它不是一只气球,不是一辆汽车。"——"你认为这样说够了吗?"——"不,它既不是一只狗也不是一个屋顶(棱柱)。"

Bor(8 岁 6 个月) 一支钢笔"是一种不像我们(人)的东西",笔"不是动物"。为了对物体进行分类,他用"家庭"作为分类的理由;绿色的木棒聚在一起,因为"它们属于同一家庭";这种情况也出现在木大雕像的情况下,但在以电话机和橡皮做实验时,未出现这种情况。屏幕实验时,他能对"它不是绿的,不是褐色的,不是一个人"做出正确的反应,说"它是一头牛"。在另一实验中,他也能正确地看出信息是不充分的。

Syl(9 岁 11 个月) 屏幕实验时,她指着物体,说:"例如,如果它既不是人也不是树,那么它就是电话机。"她选择了枞树,"它不是浅绿色的,也不是人。"——"这样说就足够了吗?"——"不,她可以说它是这个(电话机)。我们必须说:它不是绿色的并且它不是一个人。"在用红色物体、两个动物和一根木柱进行角色互换的实验时,她做出了如下推理:"它们既不是红的,也不是动物;剩下的只能是木柱了。"

Lor(10 岁 3 个月) 屏幕实验:"你能(在绿木棒、一根红棱柱、一棵枞树和一

匹马中)说出三样东西，能使别人可以猜出它是什么吗?”——“它不是绿的，它不是矩形，并且它不是一个动物。”——“那它是红棱柱。”用一只气球、一只红色的玩具娃娃、一根红棱柱、一架电话机和一只口哨进行实验：“这一次你只能说两样东西——它不是红色的并且我们不能吹它。”——“所以它是电话机。”——“是的。”

在包含(或“家庭”，如Bor所说的)建构方面的进步，不仅导致否定的正确运用，而且导致两个值得提及的新的能力的产生。首先，主体能够从那些不充分的信息中辨别出(如Syl所做的)充分的信息。这要以存在一种把“包含”分成为协调的子集的可能性为前提。第二个创新是：在应用屏幕的实验情景下，对那些他们必须以否定方式来表示物体的主体来说，他们的操作与在角色互换后由实验者提供信息(它既不是一个x，也不是一个y，等)时的操作一样容易。对儿童在此任务中的反应进行有趣的对比可使我们观察到水平Ⅱ以前的儿童在发现和使用否定上的一般困难。当角色互换后，实验者提供否定，被试只需推出结果。但在水平Ⅱ，儿童产生否定就像他们推出结果一样容易。这一进步肯定与我们刚才说的儿童对充分的或不充分的信息的认识有关，这解释了为什么较年幼儿童在产生完全的否定较之运用由别人所提供的否定时有更大的困难。

第二节　不　相　容

前面我们已经研究过不相容①，现在我们将再回到它上面来，我们将把我们的讨论限于在目前研究中所使用的技术上。儿童和实验者各有一副卡片——副卡片是各种动物，另一副是各种植物。动物包括四头走兽、四只鸟、四只昆虫(包括一只毛虫)、一条蛇、一条黄鳝和一条鱼。植物包括四朵花、四个水果、三种蔬菜、两种蘑菇、两种蕨类、一种苔藓和两种藻类。

给儿童动物卡片，实验者保留植物卡片。首先要求儿童对它们做出同时的分类——把可以分在一起的卡片放在一起。然后，要求他们为它们分出的类命名。在完成这一实验的第一部分后，实验者根据不相容的标准把自己的卡片予以分类：他把所有的花放为一堆，所有水果放为一堆，剩下的卡片再放为一堆。要求儿童为每一堆命名。最后要求儿童对自己的卡片做出类似的分类，并给他们所建构的每一堆命名。可以将儿童的反应区分出三种水平。

① 参阅第五章。

1. 水平 I

以下是水平 I 的例子。

Nev(4岁4个月)　只把异质的一对放在一起(鱼、蜘蛛,等等);但在看过成人的三个分类后,她也分成了三堆:(1)"猪"的一堆(猪、蚂蚁、狗和蜘蛛);(2)"狗"的一堆(驴、鱼和两只鸟——标记是驴);(3)"狗"的另一堆(剩下的元素)。当向她指出在"2"和"3"中并没有狗时,她在2中加上一只羊,保留"狗堆"的说法,改叫"3"为"鸟堆"。我们再次在儿童反应中看到先前指出的这一水平的部分与整体的混淆现象。

Son(4岁7个月)　她分成了四堆,每一堆都包括一只鸟,只有一堆是同质的(蛇和黄鳝)。对成人演示的反应:她只是数了数每堆的数目,让它们有一样多的元素。因此,她一共分成了三堆,随后对每一堆,(像NEV一样)她都只按其中一个元素来命名。

Car(5岁2个月)　同样的反应。给他看成人的模型并清楚告诉他:"这里是花,这里是水果,还有一堆这里既没有花也没有水果。懂了吗?"——"不。"他回答。

Syl(6岁7个月)　他把元素分成三堆,表现出明显的进步:"这里是昆虫,能爬的都在这里,能飞的在这里,活在水里的在这里,跑得快的在这里。"尽管如此,他仍完不理解实验者所提供的模型,尽管指给他看:"这里是花,这里是水果,其余的在这里。"

这些最初的反应显示了否定与包含之间的密切关系。因为物体有共同的特征而把它们合在一起(约束合取),这意味着排除了那些没有这些特征的物体;反过来,否定只有在与一种包含(或意义的基本属性)有关的时候,它才是有意义的。由于主体不能成功构造这样的集合(以及由于他们以其中一个元素命名该集合但不是表达它们的共同意义),因而他们并不理解实验者模型背后的原理,不把集合C理解为是否定的集合,虽然告诉他们"它既不是A也不是B"。换言之,他们并不把C看作是与A和B不同的,是"自由合取"的结果,后者(A和B)乃是来自于建立在共同意义之基础上的约束合取。相反,他们把C归因于一种"伪约束合取",对于这种合取,我们在第一部分分析否定的困难时已研究过它。虽然在实验程序和所问问题上两者有所不同,这里仍有一种具有启发意义的共同关注点,它使我们的解释更有信心。更有甚者,在儿童对他们的集合命名时观察到的部分和整体之间的混淆,在数的关系的领域也会出现。我们经常观察到在此初级水平的被试,他们相信:从一个20个元素或10个元素的集合中拿走的

10个元素会比从20个元素的集合拿走的10个元素有更多的东西。①

2. 水平Ⅱ和Ⅲ

水平ⅡA以运算的包含为特征，此时的主体试图运用各种包含去定义类C（既不是A也不是B）。他们还未达到否定“既不是A也不是B的水平”，尽管他们有时通过定义C为“其他的东西”这样的方式接近于这一水平。

Jan(6岁7个月)　最后构成了三个类：A.有两条腿的动物；B.有四条腿的动物；C.“有许多腿的动物”。　“鱼有许多条腿吗?”　“我把它们放在外面。”(即它们不能被分类)

And(6岁8个月)　“难以给它一个名字，因为这里有许多东西。”

Cla(7岁)　类C是“剩下的、其他的东西。”因此，这只是一种差异，但还不是一种否定。

Joe(7岁3个月)　类C是所有合在一起的东西(　混合起来)。

Dav(7岁4个月)　“水果、花和(C)会生长的东西。”

Fab(7岁6个月)　“那些不能在一起的东西”(即它们不能形成一个单一类C的子类)。

Ric(8岁6个月)　“那些有头发的东西、鸟和其他的东西。”

Sat(8岁6个月)　类C是“可吃的东西，我们可以把它放在肉里”

Jul(9岁5个月)　“它是所有混合起来的东西”。

受到让他们做成A，B，C三个类的指导语限制，这些被试并没有达到一种清晰的否定(C=既不是A也不是B)，尽管他们能完全看得出Cs与As和Bs是不可比的。他们仍把自己局限于排除的动作。这就产生了三种反应：第一种反应是试图在所有Cs中找到可与As和Bs中的共同性质相比的共同性质。例如，“有许多条腿”(Jan)、“能生长的东西”(Dav)和“可吃的东西”(Sat)。第二种反应表现在如下的说法上：C是“所有合在一起的东西”(Joe)或“所有混合起来的东西”(Jul)或“那些不能在一起的东西”(Fab)，(后者)这种说法意味着这些元素应该被分到可与As和Bs相比拟的亚类中去，因此他们认为需要比三个类更多的类。第三种反应最接近于双重否定“既不是A也不是B”，它把Cs称作“其他的东西”或“剩下的东西”(Cla、Ric及其他人)。在某种意义上，这是一种双重否定，但它是以明确的“差异”而不是清晰的否定来表示的。

---

① 英海尔德与皮亚杰(Inhelder, B. & Piaget, J.)：重复动作的基本循环形式(“De l'iteration des action a la recurrence elementaire”)。In P. Greco, B. Matalon and J. Piaget,《循环推理的构成》(*La formation des raisonnements recurrentiels*), *Etudes d'Epistemologie Genetique*, Vol. 17, Paris: P. U. F., 1963.

直到水平ⅢB(9—11岁)和水平Ⅲ,Cs的共同性质才以清晰的否定形式表示出来:“既不是A也不是B。”

Did(8岁2个月) A=“昆虫”,B=“没有腿的”,C=“它们不是昆虫并且它们不是那些没有腿的(动物)。”

Cor(8岁5个月) C=“非鸟非昆虫”,即,既不是A也不是B。

Mat(8岁6个月) C=“不是昆虫(A),也不是能飞的(B)。”

Joa(9岁3个月) C=“没有头发和没有羽翼的动物。”

Ica(9岁10个月) C=“那些不适合这些(A和B)的动物。”

Lor(10岁3个月) C=“那些不是鸟(A)和不是昆虫(B)的(动物)。”

Mir(12岁2个月) “我们可以称它们为‘既不是花也不是水果’,可能有点多了,但这没什么问题。”

Pic(12岁[illegible]个月) C=“我们可以称它们为‘既不是花也不是水果’;在动物实验时,C就是‘不是昆虫和不是爬虫’。”

与现在的结果相比较,本章第一部分儿童在问题解决时,他们在达到清晰的不相容的问题上,表现出一种相对的滞后,特别是在使用屏幕的情况下。这显然是由于当要求儿童去推测所选定的物体时(见本章第一部分),主体是从给定的或最初建构的、其形式为“它不是x,y,z”如此等等的否定开始的;而在现在的问题中,他们是从确定的包含(As和Bs)开始的,因而所谓“其他的东西”只能通过双重否定“既不是A也不是B”予以特征化。因此,寻找Cs的共同特征,(在此寻找过程中,对Cs加上诸如“其他的东西”或“剩下的东西”这类标记),这实际上意味着它们是“那些仍有待分类的东西”。随后,这种“既不是A也不是B”的说法作为一种完全描述性的表示被主体所接受,尽管它仍较在本章第一部分的屏幕实验中所涉及之情景中的那种否定较少确定性。

第七章　编　　织

合作者：G. Piéraut Le Bonniec 和 E. Rappe du Cher

这一研究使用两台织机，它们由木架（27 cm 宽，[illegible] cm 高）组成，上有织带（2 cm 宽）垂直固定于木架上，构成织品的经线。作为经线的浅色的织带（玫瑰色、黄色和橙色）与深色的织带（紫色、深蓝色和深绿色），按以下顺序交替相间排列：玫瑰色（r）、紫色（p）、黄色（y）、蓝色（b）、橙色（o）、绿色（g）。白色和黑色织带用作纬线，交替于各经线的上下。白色织带在单行出现，黑色织带在双行出现。

如果第一行从 W/r 交替开始（白色的织带在一个玫瑰色的织带上面），那么在该行的重叠的系列将是 W/r;p/W;W/y;b/W;W/o;g/W（见表 Ia）。第二行引入的则是一根黑色的织带。由于行的交替情况是相反的，因此，这就使得第一行中白色的纬线总在经线上方并把经线遮挡住的所有地方，在第二行中变成了黑色的纬线在经线的下方并使经线可以被看到（见表 Ia中的第二行）。在第三行，交替再反过来，又恢复为原来第一行的形式而形成一个循环，如表 Ia所示。这样编织就会使每隔一行得到同样的浅/深相间的效果，构成了列的型式。表 Ib显示的是另外一种型式的编织法，它不是让第一个白色织带在玫瑰色织带的上面，而是让它在下面，就会得到这样的结果：浅/深的交替效果与前面相反，形成另一种行的型式。①

① 要掌握这一情景，就需要建构两个意义系统。第一个系统与客体有关，即与织品有关。主体必须理解：有两类织带（经线和纬线），它们的关系要么是必然的，要么是不可能的。例如，B/W 或浅/深是不可能的，但是（W 或 B）/（浅或深）则是必然的。第二个意义系统与施行于物体之上的动作有关。这两种型式的系统应加以区分。

第一种型式与行有关。这一型式的动作蕴涵涉及交替性：如果一根纬带是在经线的下面，那么它必定又会回到经线的上面，如此交替进行下去。另一个动作蕴涵是指反转：如果第一行从 W/r 开始，那么第二行就从 r/B 开始。

第二种型式与循环有关。重复进行反转会造成每一行开始时重叠方式的交替，并导致一种循环。于是就可以预期在织布机的任何一点上两根织带的交替重叠情况：如果是双数行，那么各经线的重叠就会像第二行那样，如果是单数行，它就会像第一行的重叠那样。然而，这种交替可能反转，因为在开始时 W/r 和 r/W 都是可能的。因此，我们就有了以下这种蕴涵：如果我们从 r/W 开始，那么就可得到 l/W，W/d，B/l，d/B 这四种织带重叠形式。

显然，解决这一问题，要求有相当数量的动作蕴涵。问题是主体在面对织机问题时是否能必然地抽象出关于织带的意义组织，或掌握两种类型的所有动作蕴涵（G. P. L. B.　　　　　　） 转下页

表 1　两种相反的型式

Ia列的型式	Ib行的型式
ldldld	
第一行：	第一行：
$\frac{\text{(上面)W p W b W g}}{\text{(下面)r W g W o W}}$	$l:\frac{\text{r W y W o W(上面)}}{\text{W p W b W g(下面)}}$
第二行：	第二行：
$\frac{\text{(上面)r B y B o B}}{\text{(下面)B p B b B g}}$	$d:\frac{\text{B p B b B g(上面)}}{\text{r B y B o B(下面)}}$

可能的重叠

浅色的列：$\frac{Wl}{lB}$	浅色的行：$\frac{lW}{Wd}$
深色的列：$\frac{dB}{Wd}$	深色的行：$\frac{Bd}{lB}$

字母意义：

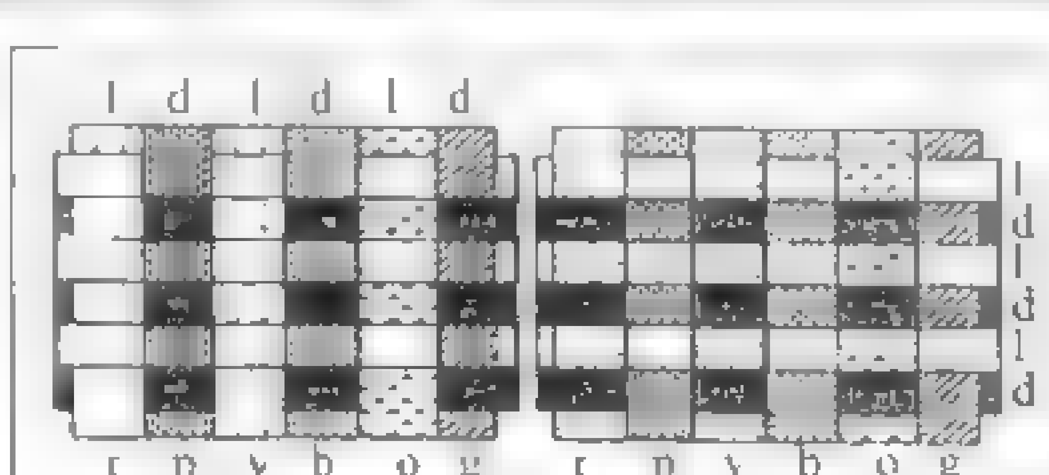
经线		纬线
l=浅色	d=深色	B=黑
r=玫瑰色	p=紫色	W=白
y=黄色	b=深蓝色	
y=橙色	g=深绿色	

为了研究主体对这一系统的表征，向他们呈示一些小的方形磁铁。磁铁有四种颜色：白、黑、灰色（表示浅色的织带）、棕色（表示深色的织带）。当把它们吸在一起的时候，可用来表示每一编织模式下的四种织带重叠情况。

实验程序如下：首先，向儿童呈现已经织好的列的型式，要求他仔细察看织带放置的方式。然后给他们一架织机，上面附有与让他看的织带相同的经线，儿童的任务是插入正确的纬线织带。对儿童在以下六个亚任务中的行为加以评定。

1. 引入第一个纬线织带，以产生一个交替。如果儿童做错了，主试纠正他或她的错误，然后让其继续进行下一步。

（接上页注）列与行的两种型式，可以用如下示意说明其各组成部分之间的关系。J.E.）



列　　行

2. 引入第二个纬线织带以便产生一个反转形式。

3. 引入第三个纬线织带，使之完成第一个循环。

4. 预期重叠的种类：在织架的左边和右边标出须织上白、黑织带的位置，要求儿童预期在织机的某一确定点上经线和纬线的重叠情况。

5. 进行反转型式：向儿童显示行的型式，要求他在自己织机上的空余部分织出同样的型式。

6. 用两个重叠去表示两个相反的型式：给儿童小方形磁铁，要求他们演示这些织带在这两种型式中是如何重叠的。

26名从4到12岁的儿童的反应以录像形式记录下来。根据记录，我们可以建立三种反应水平(它们可分为一些亚水平)。

1. 水平 IA到 IC

以下是水平 IA的例子。

Ric(4岁3个月) 他形成了一种很好的直观："白色的在这个上边，因为我们在另一面发现它了。"他能肯定模型是不同的，能看到在两个相邻的纬线织带之间有局部的区别，但他不能在自己的织机上进行正确的替换。尽管如此，但他声称："我们先在底下做，然后在上面做。" "如果我们继续下去情况会怎样呢？" "它会落下来，但如果它是在底下的，那么它就在上面，它不落下来。"但他仍做错了，最后说："W和B不是同样的；W是要放在下面的。"根据这一规则，他尝试把整个B织带放在底下，然后做出了改正。

以下是水平 IB的例子。

Rap(4岁7个月) 她把Ws放在自己的织机上："先在这里(在r下)，再在这里(p上)，等等。" "你能肯定吗？" "是的，因为它像这个(指范型)。" "那么Bs呢？" "它们与Ws是完全一样的(实际上，她把它们按W一样的方式放置，似乎因为她缺乏反转的能力：B在r下边，然后在p上面，等等)。它们也可一样做。""你的W像模型上的W吗？" "是的。" "那么你的B呢？" "不，有的地方错了。"她作了局部的纠正，因而在行的交错上又出现了一个错误(在两行之间有两个Bs而没有W)。她试图重新开始，但实际上重复了同样的仍有行间交替错误的型式，她不能把这个型式与反转相结合。

Lau(6岁1个月) 他不能立刻区分两种型式。他开始进行"列"的实验时："它们(Bs和Ws)必须放成同样的。"为预期一个远距离的重叠，他必须进行全部的中间经过的重叠。

以下是IC的例子。

Eme(6岁3个月) 他最后使反转和交替都能相互一致，但只是在多次错误之后才能达到：三个连续的 Ws 在 p、y 和 b 之上，Bs 放得也像 Ws 一样。他不能用磁铁来表征型式。他的结论是："我们必须重新再来一遍，因为我现在知道怎么做了。"

概言之，这一水平（从 A 到 C）是以少数的推理和以对模型的特殊方面作局部的和经验的模仿为特点的。"我喜欢我的手指来做，我把它当作织带，"Eme 说，同时指着替换的织带或反转的织带，但不能把它们在推理上结合起来，只能在多次错误之后达到综合。换言之，这一水平是一种连续动作的水平，动作之联结在一起仅是以一种事后的形式出现，没有明显的动作蕴涵。因此，在儿童对"理由"的理解中，并不伴随什么预期，他也并不去寻找理由。

2. 水 平 II

从大约 7 岁或 8 岁起，随着诸如"因为"（原因）和"那么"（结果）等词汇的使用，各种外显的推理开始出现。因此，我们的兴趣不仅在于动作之间的蕴涵，还在于有意识意义之间的蕴涵。尽管它们还未构成形式化的结构的整体，但蕴涵已经介入（插入）了一种随后可被理解的关系之系统中。这一系统类似于一种双向群集，它包括相互重叠的线的系列和交替颜色 l（浅）和 d（深）的分类。

以下是水平 IIA 的例子。

Liz(7岁2个月) 他最初在替换 Ws 时失败了，然后一个一个地照着样子进行织带的重叠。他在 Bs 上遇有同样的问题，但随后获得成功。他对第二个型式（行的型式）立刻获得了成功。

Gin(6岁9个月) 他也能在 Ws 的替换上获得成功，但随后他又以同样的方式编织 Bs。"都对吗？"——"不，因为我是像 W 那样做的，它不是同样的颜色。"随后，他成功地把 Ws 和 Bs 垂直地结合成列，做出了成功的预期，尽管是在纠正过几次错误之后实现的。他运用磁铁对 l 和 d 做出了很好的分类。"我们能在同一游戏中让 W 在 d 上面，然后再让 W 在 l 上面吗？"——"是的……不。"——"为什么？"（没有回答）"B 在 l 上面，随后可以 B 在 d 上吗？"——"不，是的。"——"指给我看在织机的什么地方？"——"不，我不能。"——"为什么？"（没有回答）"然后呢？"（他把它改为 d 在 B 上）

Gan(8岁11个月) 他指出了两种型式之间的差别，选择了列的型式。他正确地放置了 Ws。"你能肯定吗？"——"是的，这是对的，因为这里它是在上面，而这里它在下面，这里又在上面。"——"那么 Bs 呢？"他正确地放置了第一个 B 的位置。尽管如此，但为了预期一个远距离的重叠，他必须建构一些中介状态，考虑浅

色颜色和黑色颜色的交替(B在l上)，等等。例如，他注意到d在W上："那么接下来，就是B在d上。"但他最终是以B在l上和d在B上；然后是B在l上之后，接着是B在d上；然后又改为d在B上以及进行了其他局部的改变，这些改变妨碍他对整个系统进行组织。"如果我们从B开始，我们能发现同样的规则吗？"

"不，那是会改变规则的。"

以下是一些水平IIB的例子。

Ber(6岁6个月)　他对两个系列均做出了很好的再造。"如果我把W放在l上，你认为我会得到一些新的东西吗？"　"我想它们已在这里了"(他指出W和l，正确)。　"是否可能相反地做呢？"　"不，因为在这个游戏中，B必须在这个黄色(浅色)的上面。"　"如果我们把磁铁这样放下呢(l在W上，W在d上，l在B上和d在B上)？"　"这是不正确的，因为在这个游戏中不可能让它们像这样放。"

Tam(8岁6个月)　他也能概括出这一关系："在这个游戏中是这样的，看，B总是在一个浅色带子的上面并在一个深色带子的下面。"　"如果我已有这两个重叠(l在W上面和W在d上面)，我们能让B在l上吗？"　"不，因为我在这个型式中没有看到这种情况。不可能把W和B放在浅色的带子上，不然我们就会让两个浅色紧挨着了。"向其建议让一个系列中的W上的d去替换另一系列中的d上的W，他回答："在织机上这是不可能的，我不能这样做。"因此，Tam运用磁铁所能做的要超过他在织机上所看到的。

水平II以从对模型进行经验的和局部的复制(水平I)逐步向对整个系统及其结构规律加以尝试控制的过渡为特征。因此，我们看到了一种观察和通过动作蕴涵把它们联系起来的推理的混合。在水平IIA，可以观察到某些成功的预期，但它们只出现在对错误的纠正之后，而在水平IIB中，已有了如下形式的证明："在这游戏中它总是像这样"(Tam)；"在织机上这是不可能的"(Ber和Tam)。因此，存在一种对为什么会这样的"原因"(理由)的探求，但它仍局限于特殊模型的范围而不是对编织内在条件的探求。

一言以蔽之，水平II是一过渡期，它是从水平I(I本质上仍为经验复制的努力，其间伴随着外源性理解方式的错误和遗漏)，向着水平III的一种对规律和概括化的经验事实的内在的"原因"的理解的过渡。这种行为上的进步补充了和几乎替代了最初观察到的物理知识(它涉及一种逻辑-数学结构知识)。以更简明的语言表述：正是这一"演绎模型"的建构成为我们理解我们所提出的两个系统的不可或缺的条件。

在这方面，磁铁作为建构这种模式的手段发挥了重要的作用。在水平I，它们没有别的作用，只是在那些已经由两个模型所产生的问题上又加上了一个新的问题而已。在水平II，它们获得了符号的意义，这使我们用它们来表示一般的和更简单的重叠模型成为可能。对于水平III的被试来说，运用这样一种工具，他们将达到在水平II时只被粗略涉及的理解程度：一种对织机问题中所包含的关系的有效和一般的理解。尽管这些

关系在水平Ⅱ上已被逐步概括化了，但它们还没有表现出任何内在的必然性。

3. 水　平　Ⅲ

在这一最后阶段，被试不仅能够推断出问题涉及的关系，而且还能证明其必然性，并去寻求和建立其“理由”。

Pat(11岁1个月)　在刚开始，他成功地进行了替换，“因为如果W在一种颜色上面，那么B就必须在同样颜色的下面通过。”对远距离的重叠的预估也是正确的：“这里W将会在上面，因为它总是在紫色上面通过，这正是所要求的，因为我们能够看到用另一个白色这样做了。”运用磁铁，他把W放在l上，B放在d上，d放在W上和l在B上。“我们能做成另一系列吗？”他把l放在W上，d放在B上，W放在d上和B放在l上。“如果我想做第三个系列呢？”　“我们可以从把W放在浅色的上面和放在深色的下面，以及让B在d上和W在l上开始。”　“这是一个新的系列吗？”　（他看看这些替换的系列）“呀，是的！它是与第一个系列一样的，我们只能得到两个系列，我们已经做好了。”

Rob(11岁6个月)　他能正确进行替换实验，只有一个局部错误但立刻就予以纠正了。“你是怎么知道你做错了的？”　“我用W进行比较：它必须是在另一条路上。”　“当你做到了这一点，它们会怎么样呢？”　“B会在棕色线的下面。”　“为什么？”　“我的意思是与黄色有关。”磁铁实验：他做出了两个有三个元素的系列：B在l上，它们在W上；W在d上，它们在B上。这种组成表现出一种对结构的真正理解。“我们能让W在l上吗？”　“不，不能这样做。”“是否我们可以使l在W上，又使W在l上呢？”　“这依赖于行的数目：如果是双数的话，那是可能的，但这里我们设计了9行。”　“现在，在同样的织机上，是否可能让W在l上，也使W在l下呢？”　“啊，不，因为在它们之间总有一根黑线。”　“如果一个l在一个W上面，而且也让d在一个W上面呢？”　“不，这不可能：它们必须都在上面或者都在下面。”　“我们能够对这两种系列做一交换吗？”　“这不可能，因为如果W在l上面，它就不可能在d的上面。”

Aud(12岁)　让他对纬线织带B2作一个远距离的重叠预期，他说：“我们通过注意同一路线就能够知道：例如，B在棕色线下通过，所以我们知道，它必须在绿线之上和在玫瑰色线之下。我们也能像这样观察白线，因为所有白线都走同样的路。”对各种可能对预期重叠有用的参照元素，他能把它们完全地列出来。当实验者提出在两个磁铁系列之间作一交换时，他说：“我们不能只把它们放在这里（列），因为如果其中一个集合有一个W在一个深色上面，那么浅色的就不可能在B的下面。这是对立的型式（即在有多行的情景中）。”

Xys(13 岁) 他认为只用一对磁铁,就可产生出所有可能的重叠。其符号思维已发展到这样的程度:他提出了好几个不可能在同一织机上找到的配对的系列。"是的,如果我们想让他玩这一游戏(列),我们要是只给他 1 B,他就知道怎样进行下去。" "怎样进行呢?" "是的,一对磁铁就足够了,因为我们知道浅色在 B 的上面,我们也知道深色在 B 的下面,所以对 W 来说,它必定在附近的另一条路上。"

这种回答的新异之处在于,推理不再限于如下理由:"它总是相同的,因为它就像这样"或"它是不可能的,因为我在这个游戏中没有看到过它。"而是发展到如下水平:必然性、可能性和不可能性都由提供其"理由"的推论所引发。特别是,磁铁成了一般的符号,它们的组合构成可被应用于织机的"解释的模型",这甚至能使被试(如 Xys)去建构全部可能的组合。

1. 结　　论

我们刚才所勾画的一般发展,它是从刻板的动作间的协调——它们的意义甚至在动作执行完后还未完全显露——逐步过渡到推理之间的协调,其意义在它们的预期中显示出来。这并不妨碍某些一般的蕴涵形成,从水平 I 开始,它就决定所有进一步的动作。例如,"W 在(这条经线织带的)下面通过,因为我们在另一边找到它了"(Ric)。至于在产生属于一个特别型式的关系的过程中所进行的细节的动作,值得指出的是:幼小被试在转向对织带进行操作之前,以及在让这些织带沿着已由动作本身发现的路径前行之前,仍需要通过手或手指的运动去执行它们。

这条一般的进化路线自然包含某些差异之处,例如儿童操作磁铁较之他们完全在织机上进行更为容易。尽管如此,我们还是证实了一种从动作协调到推理组合的基本进步,其操作是由反省抽象所引导的。

本研究更特殊之处是:其研究重点放在一个复杂的结构整体,而这结构整体的各个特征是相互依赖并且初看是难以察觉的。本书第二章所描述的树型结构表示的是一种我们容易看出的结构整体,因为其所有的通路都是建立在同样的二分关系上的。而相反地,我们在这里面对的是独立的关系(W 或 B 的替换、反转、重叠的多样性、与磁铁的对应,等等),它们是通过一种非常复杂的结构整体联系起来的,这个整体只有经过详细的分析才可以理解。因此,我们必须对两种动作或意义蕴涵做出区分:局部的蕴涵和系统的蕴涵,前者附属于一个单一的关系(W 或 B 的替换、Ws 和 Bs 的反转、重叠部分的重复等);而后者则把局部的关系联结成为一个具有一致性的整体,并为之提供"理由"。从这一观点出发,我们的三种水平的划分清楚地显示了系统的蕴涵之逐步建构的过程:在水平 I 时缺乏这种蕴涵,在水平 II 时开始建构它(尽管仍局限于以下类型的"理由":

"在整个游戏中它总是像这样的"），最后在水平Ⅲ占统治地位，这时，系统的内在的"理由"已被儿童所理解。

因此，水平Ⅰ的动作蕴涵仍具有"局部性"，其动作的意义是由他们在织机上观察到的结果所决定的。只有在极少的例外情况下，蕴涵的引出没有任何经验的控制，如当 RIC 声称（甚至肯定地说）：如果 Ws 或 Bs 总是在它们会落下的地方的上面或下面，当存在一种替换时，这种情况并不发生。这样一种替换可以无限地继续下去，这既是一种归纳的推理，也是一个可观察的现实。

在水平Ⅱ，第一个系统的蕴涵出现于把织品的型式加以比较或出现于对织机上什么是可能的、什么是不可能的加以判断之际。然而，如我们已指出的，这些推理并未达到建立在必然的"理由"之上的水平，因为其唯一的理由仍然只在于主体宣称某种关系"总是"或"永远不会"在观察到的情形中发现这种说法之中，而这表明此时的主体是把必然性与普遍性相混淆的。即使如此，这种反应显示了此时主体已有了一个"系统"，而不只是一种局部规则的集合。只有在水平Ⅲ，系统的蕴涵才达到这样的优势程度：例如，Xys 就能够从对磁铁中，推出全部其他的可能性，这表明了"必然性"对"普遍性"的胜利。

最后，我们应注意：甚至从第一水平开始，儿童就建立了与未来运算同构的关系。替换其实就是那种我们所称的"约束合取"或那种不能被分开的关系的合取；而经线织带则导致"自由合取"（即，把紫色线放在黄色线的旁边并不是出于什么强制的规定，因为只有 ldldld 系列是强制的）。反转构成了某种否定。排斥的析取定义了 B 和 W 之间的关系，当 W 在 l 上时要求或者 B 在 d 上，或者 l 在 B 上，我们就可认为它是一种非排斥的析取。这里也有不相容，如此等等。

第八章 集合的意义

合作者：A. Henriques、D. Maurice 和 V. Jacq

本章分为四节，其共同的主题是讨论表示系列或分类结构之集合(即群集)的建构或转换。

第一节 系列的变更

合作者：V. Jacq

第一项研究的程序非常简单：九根大小不同的钉子组成的系列垂直地摆放着，然后要被试指出并描述"中间大小"(即第五个)的元素(M)，然后要求他们回答怎样运用这些钉子使这根"中间大小"的钉子成为"最大的"或"最小的"钉子

1. 水平 I

属于第一水平，即 IA 水平的被试有如下几种解决的方法。

Xav(4岁 个月) 他拿起一个较小的元素去替换中等大小的那一元素。他认为："我们必须像这样扛它。"他做出如何在其两端把它拉长的样子，这表明对他来说长度还不是守恒的。

Fre(4岁6个月) 他拿起最大的钉子，把它放在系列的当中，然而他注意到这破坏了系列，但他只是说："我不会做。"

Car(4岁4个月) 为使那个中间大小的元素成为最大的元素，她满足于它的位置"必须要改变"这一说法，于是她把它放在了系列开头最大一个元素的前面。为了把中间大小的元素变成最小的，她又把它放在另一端，在(那些比它)小的元素的后面。"你刚才做什么了?""我改变了它的位置。" 似乎一旦她以大小建构了正确的系列，确定了大的、中间大小的和小的元素所在的位置后，那么位置本身就会把大小给予其他的元素。

Eri(4岁1)个月) 他用最大的一个元素替换了中间大小的元素，但是他把它斜放着，使它把其他的元素连接起来，这些其他的元素形成了两个分离的垂直序

列："它吃东西了，长大一点了。"

And(?岁6个月) 她为了把中间大小的元素转变为最大的元素，交换了它们各自的位置。她同样用最小的元素与M交换，使M成为最小的元素。然后，主试把钉子混合起来，要求她把一个中间大小的元素改变成"全部元素中最大的元素"。她把它放在一个小的元素边上，似乎依她看来，这个小的元素就足以给M一个新的大小了。

Dar(4岁11个月) 他把最大的元素放在M的顶上使之变长，或把较小的元素放在M的顶上以使之"变短"。

Jen(6岁6个月) 她把最大的钉子放在M的顶上去加长它。而为了把它缩短，她把最小的元素放在M的一端——似乎这样做并不会使它变长，尽管实际上稍有一点加长。

Dav(6岁) 她把整个系列排成一条垂线，把M放在其顶处。为使M变得短些，她只是用全部元素中最小的取代它。"如何使它再成为中间大小的元素呢？"——"我们必须保持它在中间，否则，它就不会是中间的元素了。"

这些儿童没有一个理解：非常简单的移开那些比M较大的元素的动作，就可使它成为全部元素中的最大的元素，或者移开较小的元素也会使M成为剩下元素中的最小的元素。换言之，这些反应还没有成为关系的组合，还局限于我们称之为"配对的属性"之中。其间最经常发生的情况是仅仅"改变位置"(如Car所说)以及把M放在系列的开始和结尾，似乎位置决定大小，而不是相反。对这些儿童来说，这样一种位置的改变会在物质上(materially)作用于M，从而改变其真正的长度。"它吃东西了，长大一点了"，Eri说。对其他一些儿童来说，当元素位置被改变时，它们的两端必定被拉长，这也表明其尚没有长度守恒的概念(Xav)。对还有的儿童来说，他们更是认为：与或大或小元素的相邻关系就足以改变M，即使它被放在系列元素的边上而不是放在系列之中(如And)。Eri把系列分为两个垂直的纵列，用一倾斜的M把它们联系在一起，因而M被认为成了全部元素中最大的元素。还有的被试则满足于以放置一个大元素在其顶部的方式来加长M(Dar和Jen)。

言以蔽之，尽管此时已有了一个初步正确的系列，但它还没有对于涉关系产生运算的组合；而只是代之以由配对的属性所构成的半关系(semi relations)。这些配对的属性是建立在"以什么去适合"这种一般的关系基础之上的。

在水平IB，我们会遇到类似的行为，但它已包括了一些纠正，这些纠正最终导致了一种新的解决方法：把1—9元素系列分成两个系列，使第一个系列(1—5元素)包括了M，并让它作为其最大的元素，第二个系列(5—9元素)也包含M，并且让它作为其最小

* 换言之，在本例中，"位置"属性和"大小"、长短属性是通过伪必然性不适当地"配成对"在一起的(参阅本书英文版第六章，第75页)(P. M. D.)。

的元素。

Avi(4岁3个月)　他开始的反应仍属水平IA。然后对元素做出一种非系列的调整，使得当中的M相对地大　为使它成为"最小"的元素，他随后只是把它水平放置，而让所有其他的元素仍保持垂直　尽管如此，但当他把全部元素系列化并把系列分为两个部分的系列I [illegible] 和 [illegible] 时，达到了正确的解决　在这两个系列中，M满足了既是最小(在 [illegible] 中)，又是最大(在 I [illegible] 中)这两个条件。

Kat(6岁)　他的反应也是通过试误方法进行，但只要实验者(主试)把系列分成 I [illegible] 和 [illegible]，他就立刻理解：从前是M的元素与那些大的元素相比，现在成了最小的元素；它同时也是元素 I [illegible] 中的最大的元素　他也能进一步理解：它"也是当中大小的元素"。

Ari(6岁1个月)　他打乱了系列以使M比某些元素大，然后又使之成为比余下元素小的元素　因此，他发现了一个聪明的解决方法：他把全部元素排列成一个屋顶形状，M是其屋脊，这就使它比前面的元素较大而同时保持其作为中间元素的位置(以3个元素在其左边，3个元素在其右边)　然而，如何使对M成为最小的元素，他没有找到解决方法。

Bd(7岁,1个月)　在一开始，他移开大的元素，使得M成为剩下元素中最大的元素　对使之成为较小元素他也这样做："我们移开所有(元素)，这个留下，它是最小的　不，它是孤单的(大笑)，这没关系"他回到了水平IA的解决办法，把M放在系列的最小元素边上　然后，他发现了正确的解决方法，他从系列中或是移开大元素或是移开小元素，因而使M成为最大的或最小的元素　但他仍以配对属性的表达方式来表示这一结果。

Kir(7岁6个月)　他也是从水平IA的解决方法开始，然后，他构造了一个屋顶，并且以配对属性的表达方式进行分析："挨着这一个，它缩起来了，挨着那一个，它就是最大的。"

因此，水平IB是一个从配对属性向可组织的关系过渡的水平　这种过渡性质在建造屋顶之类办法中表现得十分明显，它把系列 [illegible] 分为上升和下降两个没有水平基础的斜面而使系列获得了折中的解决办法。

2. 水平Ⅱ

在7—8岁时，解决办法被立刻发现：把较大或较小的元素移开以使M成为最大或最小的，同时在整个系列中保持中间大小元素。

Sac(7岁10个月)　他开始时声称解决方法是"不可能的"："在每一种情况下，它都会仍然像原来样子"然后，他把系列分开，显示出M在两个新系列之一中是最大的，在另一系列中是最小的，在整个系列中是中间大小的

Cel(8岁6个月) "我们只有一个办法,就是必须移开这些元素(1—4),然后M就成为最大的,这个(新的中间大小元素)将成为新的中间大小元素。"

Nat(8岁1个月) "在这里(最初的系列),它是在当中,我们移开这个(较大的),那M就是最大的。如果我们移开这个(较小的),那它就是最小的。" "如果我把它放在(整个系列的)一头呢?" "那它仍是中间(大小)的元素。"

Flo(8岁10个月) "为了使它成为最大的,我们只有一个办法,就是必须移开较大的元素。" "要使它成为最小的呢?" "我们移开相反的元素。"

3. 结论

这些发现有助于我们阐明属性之意义的作用和组合本身的作用。我们可以区分出三种属性意义来。

(1)"配对的属性",它们被不可分地连在一起,诸如一个元素的大小及其在系列中的位置——似乎改变一个元素的位置就会同时改变了它的大小(水平ⅠA)。

(2)一种稍有改进的联系是想到:把一个大的元素放在一些小的元素边上或相反,这会改变这些元素的大小,这些元素通过某种接触而成为邻居了。

(3)属性最终被相对化,"大"和"小"一词仅就它们相对于参照框架来说才是有意义的,因此,它们本质上是相对的,"大"意指"比……大","小"意指"比……小"。这种属性意义的发展是离不开协调模式的转换的,它开始只是作为一种图形的排列,最后成为一种适合关系的组织,后者标志着达到了具体运算(水平Ⅱ)。换言之,意义的发展是对应于动作编涵之发展的,动作编涵并不构成纯"形式",而是直接依赖于它们的内容之性质。

第二节 集合的意义和内部的原因(理由)

合作者:A. Henriques 和 D. Aaurice

4. 可变元素的分类

以前我们与英海尔德做过许多关于类的形成的研究[1]。这一次,我们将把研究限制在最简单的程序上:给儿童许多物体,要他们按照他们所希望的那样排列,在实验过

1 英海尔德(Inhelder, B.)和皮亚杰(Piaget, J.):《儿童早期逻辑的发展》(*The Early Growth of Logic in the Child*),New York:Norton,1969。

程中不增加也不减少元素。在以下研究中，我们企望从儿童行为的细节中抽取出其中所涉的意义和关系，特别是我们希望在对要分类的物体集合加以连续改变时分析儿童的反应。

实验材料包括2支大的白色蜡烛、3支中等大小的红蜡烛、5支小的蓝白色相间的条形蜡烛、7支黄色的球形蜡烛。按以下变化进行操作，对每次变化要求儿童对集合加以命名或说出其特征。

1a：儿童观察实验者把1支大的白色蜡烛放到一个盒子中。把盒子合上，然后问儿童应该在标签上写上什么字来表示盒内的内容。

1b：把盒子打开，加进1支中等大小的红蜡烛。问儿童：是否有必要改变标签；如果要改变，告诉实验者应该在新的标签上写什么。每次向盒内加进东西的程序都相同。

1c：加进1支小的条形蜡烛。

1d：加进1支圆的黄色蜡烛。

然后以相反的次序重复取走这些蜡烛：

1c：取走1支圆的黄色蜡烛。

1b：取走1支小的条形蜡烛。

1a：取走1支中等大小的蜡烛。

（为了确定是否呈现方式在意义的归因中会发生作用，我们进行了两种条件控制，一组儿童以递增顺序开始，另一组以递减顺序开始。）

2a：让被试看到盒中有2支大的白蜡烛，要求他们做出标签。

2b：加进2支中等大小的红蜡烛。

2c：加进2支小的条形蜡烛。

2d：加进2支圆的黄蜡烛。

（然后以相反次序每次取走2支蜡烛，按以上同样的程序进行。）

3a：呈现1支大的白蜡烛和一个标签。

3b：加进3支中等红蜡烛和一个标签。

3c：加进5支小的条形蜡烛和一个标签。

3d：加进7支圆的黄蜡烛和一个标签。

（然后，在上面两种情景下，每次取走一种类型的蜡烛。在所有情景下，都是一组儿童以递增顺序开始，另一组以递减顺序进行。）

我们确定了三种儿童的反应水平。第一种水平（4—6岁）以使用没有关系含义的绝对属性为特征。第二种水平（6—9岁）以元素插入到部分的类中为特征（它们本身并未被群集为整个总类中的亚类）。最后，在第三阶段（10—12岁）出现了一种完全的层级化的群集[1]。应注意：如果说在这一任务上完全成功出现得比较晚些，那是因为元素

① 参阅本书（英文版）第二章，第19页，脚注1。（J. E.）

不断地加上和拿走之缘故;这种内容不断变化的群集是较之其内容不改变因而具有稳定的亚类的群集更难建构成，以通常的实验程序，后者早在7、8岁时就出现了。这就提高了本研究的价值，因为它可一举多得地研究意义、推理和所涉及的动作蕴涵。

以下是水平IA的例子。

Tie(3岁7个月) 他同意如下事实:对象是蜡烛(然而以"铅笔"一词称呼它们)，也认为那些圆形的能点燃的也是蜡烛，"这是什么?"——"能点着的球。"但当要他们为盒中的一组蜡烛命名时，他仅限于进行枚举:一支蓝铅笔，不是白色的，一支红的，一支有白线的铅笔(一被称为蓝色笔的那种笔)。"你能找到一个词为现在盒子里所有的东西命名吗?"——"是的，两支白色的铅笔，两支粉红色的，两支小一点的。"——"但如果把这些东西放在一起，我们叫它什么呢?"——"一棵树，它看上去像一棵树。"——"你能把它放成两堆，每堆是你认为适合在一起的东西吗?"(通过一一对应，他做出了有同样蜡烛的两个堆)

Mar(4岁1个月) 他也是枚举内容。对两个亚类(两个盒子)他也通过对应建立了两个同样的集合。——"你能用一个词告诉我盒子里是什么吗?"——"粉红色的、蓝色的、黄色的和白色的。"而且，在整个实验不同情境的情况下，那个大的白蜡烛都被说成为"白色的"。

在水平IB，反应与IA相同，除了出现"一个物体可能有两个联合的属性"这种情况以外，但这些属性仍然是绝对的。

Sim(5岁2个月) "如果我把它们两个都放在一起呢?"——"白的和白的"(White ones and white ones)。——"如果我不能看见它们，你怎么向我描述它们呢?"——"白色的，但它是小的，另一个是大的。"

从水平II起，小的分离的类建构起来了，属性之间的关系也建立起来了。于是大小(体积)就有了三种程度:大、中和小。另一方面，同样的物体可以根据其颜色、体积(大小)或形状来加以定义。特别是，"圆的"和"长的"蜡烛组成了两个类，尽管对它们还没有专属的称谓。

Toi(7岁5个月) 他一开始就能根据元素的数目来为集合命名:"这儿有两个蜡烛，一个在那里，……""我们这里有4个，全都在这里了"等等。但他已会运用大小并区别出3个小的可以序列化的类:"你怎么叫它们?"——"一个是大的，3个是小的和5个更小的。"当被试把蜡烛分成两堆时，他认为一个是由"胖的，中等的和小的组成的"，另一个"全是圆蜡烛。"在堆与堆之间，没有如前一水平表现出的同一性或一一对应的情况。全部集合产生了第一个总的称谓:"装满蜡烛的盒子"，但只要把其中一个取走，Toi就又回复为枚举的回答。

Jos(7岁6个月) 她开始是以一种对内容的枚举方式来回答主试关于"标签"的问题。"用一个词呢?"——"我们可以写上'蜡烛'这个词。"——"如果你把它分成两堆呢?"——(没有一点犹豫，她把圆的放成一堆，其余的放成一堆)"圆的在这

里，长的在这里。"

Car(7 岁 4 个月) 开始时跟 Jos 一样。然后让她构造一些由适合在一起的东西组成的系列。她把它们分成了 5 组，每一组都根据颜色和大小加以系列化；圆蜡烛根据颜色分为 3 束，其余的根据大小(体积)来分。

Ste(8 岁) 他"以颜色"来划分亚类。"我们能按别的方法做吗?" "是的，用大小。"——"那么对整体呢?"——"全部有颜色的蜡烛。"

水平Ⅱ处于分离的类和广泛的类的中间水平，但这时儿童仍多采用前者的分类。因此我们注意到一种属性的相对化现象，从动作蕴涵的角度来说，它有两个后果：一方面，肯定一个属性需要把它与类似的属性通过一种"约束合取"相联系。另一方面，对差别的注意将导致区分出新的亚类 全部运算之"群集"的建构随后就由相似与对立之间一种平衡化了的综合所组成。这种综合早在水平Ⅱ时就在构造中了，但它只是到水平Ⅲ时才告完成。以下是水平Ⅲ的一个例子。

Fra(11 岁 11 个月) 她从范围最广的类开始，立刻就把全部品种的蜡烛聚集在一起，提出一个标记作为属的称呼："各种蜡烛；因为没有同样形状的；有时有同样形状但它们是最小的和最大的……其他有不同颜色(但同时)又有不同的大小。所以它不是很明确的。"当加上元素或减去元素时，她说"不管怎样，它是与以前一样或者是别的什么东西。"这导致她提出一系列可能的亚类，这些亚类聚在一起时，被叫作"各种蜡烛"——如最初所做的称谓。

为了使如此多样性实现统一，其中有些被试开始通过元素的数目来对亚类加以特征化，但这种反应只是暂时的，以后，他们就如 Fra 那样解释自己的理由。

第三节 结构的转换

合作者：A. Henriques 和 D. Maurice

我们的下一个任务是向儿童呈现组成为一个结构化整体的一些物体，看他们是否能够用不同的内容来重新建构同样的结构。我们已经看到：系列结构是如此丰富以致它本身就完全可以根据元素在系列上的位置来改变元素原来的大小性质。令人惊奇的是，我们将看到：当给儿童新的元素让他排成顺序时，他们并不总是模仿或重构系列本身，越是复杂的结构(如包含或相交)情况越是如此。我们的实验材料如下：5 个钉子，各种大小的同样形状的三角形，直径渐次增加的多个手镯，画有 1、3、5、7 或 9 只米老鼠的卡片，10 张色彩度不同的长方形卡片，直径渐大、颜色交替(白、黑，等等)的圆柱体。实验程序是在被试面前把钉子序列化或呈现其他的结构化的内容，要求儿童用不同的材料做出同样的排列。

5. 系列化

我们再次发现二种主要的发展水平，以下是第一水平的例子。

Ina(4 岁 6 个月) 向她呈现 5 个排成良好序列的钉子作为范型。她认为她的再建是正确的。但她只是把它们排成一线，而没有把它们按顺序排列(1，5，4，2，3)："它是一样的吗?" "是的。" "你能肯定吗?" "是的。" "你还能做些什么使得它(跟这个)是完全一样的?"(她把它们反转过来，使它们底朝下，头朝上，但次序仍未变。)"你能同样用米老鼠来做吗?" "像这样。"(她再次只是简单地把它们排成一线，并不考虑元素的数目) "用手镯呢?"(不规则地排列成一线)。

Car(4 岁 4 个月) 以同样的范型进行，她只用 4 个元素(少了一个)做成了一个不规则的排列："我刚才怎么放的?"(她给出了她自己的次序)"这个(同样的次序但是以一种垂直的方式放置)怎么样?" "不。" "用手镯呢?"(错误地排列)。 "用米老鼠呢?"(她做出 1，3，5，7 的排列) "再做一次。"(同样的不规则的次序)

Yor(4 岁 6 个月) 范型是 4 个排成系列的三角形。复制：容纳一个圆的大的三角形，圆本身又包含一个小的三角形。范型：5 个排成系列的钉子。复制：4 个排成一线但是无序的三角形。

Ern(4 岁 10 个月) 范型：5 个排成系列的钉子。"挑选一个集合物，然后做成一个跟钉子同样的样子。"他建立了这样的集合：先是一个大圆柱 A，然后是 4 个不成系列的钉子，然后又是一个圆柱体(B< A)和第三个圆柱体(C <B)。最后是一个大的 这两个系列因而是叠加在一起的(他把它们混合起来了)。"你能用手镯试试吗?"(他把它们又套在上面的系列中)

Fre(4 岁 6 个月) 范型：系列化的米老鼠(1，3，5，7，9)。"你能用绿三角形做一个同样的吗?" "不能。" "像这样呢?"(范型：钉子的系列) "是的。"(他做出了一一对应但没有任何的顺序性)

Nic(6 岁 6 个月) 范型：米老鼠。用钉子进行复制：不规则的系列。"我刚才做的是什么?"——"排成一条线。"——"还有呢?"——"直线。"

因此，从范型中所保持下来的只是其总括的形状：一条线状的水平连续或有时是拓扑性的封闭。特殊的关系被忽视或被错误表示，特别是关于元素的数目和次序。

在水平Ⅱ，进步表现在一一对应的应用上，这导致了大多数情况下的成功，特别在像米老鼠这样的元素量的基础上所建立的系列中。以下是两个例子。

Sac(7 岁) 像 Fre 一样，先是进行双向单射(bijection)的构造，后来，仅在复制同样元素数目的系列中获得成功：他认为 4 个黄色米老鼠与 5 个灰色的物体是

不可比的，"因为这里东西更多"，以3个圆柱体与5个矩形相比："不，我不能。"

R.h(7岁6个月)　类似地，他在等量方面是成功的，他断定当5个元素对1个元素时说："不，你什么也不能做。"

概言之，虽然一一对应对主体来说，扮演了积极的作用，但它限制了其中支配关系的抽象，这支配关系就是不管材料的内容或数量怎样，其次序都是可能的。另一方面，主体已考虑到了如颜色这样的因素及其替换，如此等等。

水平Ⅲ，次序因素最终压倒了其他因素。

Did(7岁11个月)　他处于水平Ⅱ和水平Ⅲ的中介状态。在最初用5个三角形去配5个红色的手镯以及在根据颜色对集合进行分类均获得成功后，他在比较1,3,5,7,9黄色米老鼠与2,4,6,8灰色米老鼠时，偶有失误："它们是不一样的。"10个矩形和5个钉子相比较时也有同样的问题："这是不一样的，因为这里只有5个。""有什么地方是一样的吗？""是的，这里有越来越多的米老鼠，那里有越来越大的钉子。"

在显然属于水平Ⅲ的儿童反应中，我们注意到有一种对次序的即时抽象。

Ver(7岁7个月)　他能用6个圆柱体对应于8个圆(手镯)："我根据宽度(圆柱体)和大小(手镯)来摆放它们。"类似地，他又用9个钉子来做：尺寸的不同并不妨碍系列可以有越来越多数目(包括4和9)。

Ove(8岁3个月)　"这也是从最小到最大"，跟数目无关。

Cal(8岁11个月)　"这里是越来越多，这里也是一样。"

即使他们总是认为有必要根据颜色对集合进行分类(这并不是要求他们做的任务)，但这些儿童仍然复制出系列的本质特征，即一种递减的顺序。

6. 边界和相交

关于包含和相交之范型的再构造问题，有待于我们进一步考察。这种任务包括：或是用新的物体来模仿主试的模式，或是在空白文氏(Venn)图中正确地填上适当的内容。文氏图在学校很早就教了，看看年幼儿童是怎样错误理解文氏图的，这是件很有趣的事。

在水平Ⅰ，给儿童一个范型$(xy)V(xy)$，共同部分xy与其他两个部分没有联系。

Lau(6岁4个月)　在xy中，他放进了"爹爹的家"(3支中等大小的红蜡烛)；在xy中，放了"妈妈的家"。因此，在这两个类之间没有任何联系。

Ced(6岁4个月)　他把一支蓝色蜡烛放在xy中，几支粉红色蜡烛放在xy中，一支白蜡烛放在xy中。当向他显示xy也是y的一部分时，他就在每一处都放上了粉红色蜡烛。

Ste(6岁3个月)　把中等大小的蜡烛都放在xy中，把圆的红蜡烛都放在xy

中，在 xy 中放的与在 xy 一样（因此在 xy 中并没有共同部分的想法），"因为'房子'重叠了"（y 中的 xy）；他并没有看出在 x 中 xy 的互反存在。

Tha（7岁8个月） 她把白色蜡烛放到 xy 中，小的蜡烛放到 xy 中，在 xy 中"放入红的，因为这个颜色我们没有在别的地方看到过"。似乎 xy xy（不相容）。因此，她做出了三个不同的类（xy，xy 和 xy）。

8岁的 Lor 仍然把既不属于 x 也不属于 y 的元素放到 xy 中。

我们可以看到，在这一水平，相交完全没有被理解。Ced 是把物体分为三个不同的类，然后把同样的物体放在所有三个类中。Ste 把 xy 包括在 xy 中。Tha 特别认为在 xy 中既不是 xy，也不是 xy，如此等等。相交还完全没有被理解为 x 和 y 的共同的部分。

在水平Ⅱ，我们观察到一种中间的行为。在这种行为中，交（xy）已被所加的来自 xy 和 xy 的元素所填满。但这并不是去寻找一个共同的属性而不过是加上两个"代表"。儿童可能仍然在 xy 中放上其特征介于 x 特征和 y 特征之间的元素。

Ana（7岁） 把直形的蜡烛放在 xy 中，圆形的放在 xy 中，然后在 xy 中，放入一个直形的蜡烛和一个圆形的蜡烛："一个是这个家的（xy），一个是那个家的（xy）。"

Yve（1[illegible]岁11个月） 把"大的蜡烛放在 xy 中，小的放在 xy 中，中等的放在 xy 中，因为它们在小的和大的当中"。

Ric（11岁11个月） 把黄色蜡烛放在 xy 中，红色蜡烛放在 xy 中，在 xy 中，则放"橙色的，因为红的和黄的（混合）就产生了橙色"。

最后，在水平Ⅲ，正确的解决或是被逐步发现，或是被突然发现。

Rio（7岁9个月） "直的蜡烛放在 xy 中，圆的棕色的蜡烛放在 xy 中，在 xy 中放一个像 xy 中的（蜡烛）那样的长蜡烛，它是像圆蜡烛那样的棕色的蜡烛。"

Jon（1[illegible]岁11个月） 把圆的红蜡烛放在 xy 中，长的白蜡烛放在 xy 中，一支长的红的蜡烛放在 xy 中。

Cer（1[illegible]岁7个月） 对不只是两个集的交实现了正确的解，而且对三个亚类的交也能正确地解决。

尽管在学校里教过学生这些内容，但交集仍难以像通常我们所相信的那样，会迅速被学生理解，这是由于动作蕴涵的不足之故，而它正是类的协调所必需的。

7. 包含

我们使用两个独立的图形来分别表示包含。在第一个图中，（我们称它为"分享"）：一个分为两个部分 A 和 A′ 的圆来表示一个整体（在 A′ 部分画上直线或任何其他线，如斜线）；另一个图，我们称之为"包围"，它以一个大圆或椭圆代表一所"房子"，在它里面

有一个小圆，特指这所房子里的一个"房间"。此时整体为 B，小的圆为 A，围绕 A 的区域为 A′，因此：A + A′ = B。有趣的是：在"分享"的情况下远比在"包围"情况下，更容易理解包含，后一种情况下主体倾向于把 A 和 A′看作是分离的类而不是一个在同一整体 B 内的两个互补的亚系统。

从"房子"开始，以下是水平Ⅰ的例子。

Ced(6 岁 4 个月)　他把一个黄蜡烛放在 A 中，两个圆蜡烛放在 A′中。"对整个房子呢(主试强调'整个'一词)?"　"这些两种蜡烛。"(他指了指 A)

Ala(6 岁 6 个月)　他把一个长蜡烛和一个圆蜡烛放在 A 中，然后他从每种蜡烛中各取出三个蜡烛放在 A′中。"在大房子中有多少蜡烛了?"(主试用手指了指整个圆)　"三个圆的和三个直的。"(而不是四个圆的和四个直的)这一说法描述的是 A′的特点而非 B 的特点。

Ana(7 岁)　"圆蜡烛在大花园内(A)，直的和宽的蜡烛在小花园里(A)。"对整体没有命名。

Dua(7 岁 1 个月)　他把小的粉红色和白色的蜡烛放在 A′，小的蓝色和白色的蜡烛放在 A 中，但需要使用两个标记，对整体没有命名。

Car(7 岁 9 个月)　最初有同样的反应，但当她没有为整体找到一个名字时，她改变了 A 的内容，在其中放入了与 A′中同样的元素　因此现在有了一个整体，对儿童来说在这个整体中 B=A′和 B=A。

如果我们把包含叫作亚类的一种联合(union)，这种联合一方面具有共同的属性，另一方面每一亚类又具有不同的属性，那么在上面所观察到的反应中不存在包含　最清楚的证据是：当问儿童关于整体 B(=A + A′)中的元素的数目时，儿童给出的是 A′中的元素数而非 B 中的元素数。

在水平Ⅱ，整体以在 A 和 A′中的全部元素为其特征，通过一种单纯的加法而不是通过一种综合或一种对共同属性的探求进行的。

Dav(6 岁 3 个月)　他把粉红色的蜡烛放在 A 中，白色的放在 A 中。"那你怎么称呼这整个房子呢?"　"它是有粉红和白色蜡烛的房子。"

Ste(6 岁 3 个月)　他把中等大小的直蜡烛放在 A 中，圆的放在 A′，整个 B 标记为"中等的和圆的"。

最后在水平Ⅲ，达到了直接的成功。

Top(9 岁 8 个月)　他把两个直蜡烛放在 A′中，两个圆的放在 A 中，称这一整体为"四个蜡烛的集合"　即把整体理解为 B 而不只是 A′或一种简单的枚举。

Em(10 岁 11 个月)　他把圆的黄色的蜡烛放在 A 中，圆的红色的蜡烛放在 A′中，对整个 B，他说："全是黄的，不(大笑)，圆的。"

至于在仅以一条线隔开的两个部分 A 和 A′中的共享元素，A 和 A′的包含在整体 B 中要容易得多，因为在 B(=A + A′)和亚类 A′之间没有任何可能的混淆。在前一方

法中，亚类A为A所围，这就使得把整体B与A'相区别变得更为困难。因此现在的任务早在水平I就产生了正确的回答。

Sim(5岁2个月) 他立刻说出B是由"所有白色组成的，但这些(A)是小的，那些是大的"；所以有一个属性对A和A'是共同的，并且A和A'还分别有两种不同的属性。

Ant(5岁5个月) 棕色的圆在A中，在A'则是一堆其他颜色的蜡烛。随后B被定义为"一堆混合的蜡烛"。

Pao(5岁7个月) 圆的在A中，在A'中则是一堆"有不同颜色的长蜡烛"。B被再次定义为"一堆混合的蜡烛"。

Kar(6岁6个月) "它们都是小的(B)，但它们中有一些(A)是站着的，别的都是躺着的(A')。"

Nat(6岁11个月) 在A中是圆的，在A'中是直的，B是"有16个蜡烛的一堆蜡烛=(A+A')"。

当包含是从儿童自己操作的联合运算或联合的动作中产生出来的，显然，它不会有什么问题——除了(当然这也是很自然的)对我们较早研究过的对A、A'和B加以定量化的问题(当A中的元素比A'中的元素少得多时)。这后一种情况多少有点类似于我们关于嵌套圆的问题，此处的包含反映了一种外部强加的关系。

第四节 自发的活动

我们现在重新回到第一项研究上来，对其情景进行再考察：向儿童提供完全无序的异质物体，要求儿童把它们排列成他们所想要的样子并要求他们说明自己的做法是正确的，这时去观察儿童的自发的活动。实际上，这样的活动最后都是儿童根据对象的相似之处对它们加以分类和对每一集合中的元素进行系列化，它是这两种运算的一种综合。然而，这些行为也许可能是尝试性的，我们需要理解它们如何从意义和动作蕴涵中产生，直至它们最终被主体自身视作一种必然。

在水平I，儿童或是通过并列对象的异质部分(他们随后赋予其意义)来建构复杂的对象，或是无序地会集集合，它们是一步步地聚在一起而没有任何预期。

Yol(4岁5个月) 她拿起一个大的三角形，在它里面插进一个小的钉子，然后又放入一个小的圆，小圆本身又包含一个小的三角形。在大三角形的一条边上，她放上了一个小的圆柱体，然后又加上两个小的圆挨着三角形另一条边。整体没有名字。

然后，她把一个矩形卡片和一个三角形边与边地连接起来，再加上一张新的卡片，然后在新卡片上再加上两个圆环，最后在两张卡片之间加上一个圆柱体。所

以，这不只是一组物体，而是一条链索。它这次有了一个名字："它是一头动物园中的大象。"另一有11个元素的链索被叫作"一列装满了狗的火车"。

接下来，三个圆柱体被以嵌套形式放置，空隙塞满钉子。这最后一种形状提示已有了向次序化发展的倾向。五个元素被排成一线，而没有接触：两个内含卡片的三角形，然后是内含三角形的三张卡片。在这五个元素排列的下方，她悬挂着5个长钉，长钉又连着5个较低的卡片，这些卡片排成一线但并未系列化。

Nio(5岁5个月) 他把9个各种不同颜色的三角形以一种非常不规则但又没有空隙的贴瓷砖方式边靠边地连接在一起。其中一个三角形被称为一只"狗"，另一个称为"船"，最大的也叫"船"。在另一排列中，钉子两端相连，先组成了一个不规则的封闭图形状，它有6个不同走向的边；然后又组成了一个圆的弧；最后组成的是一个几乎笔直的系列。一些嵌套的环组成了唯一的半有序(semi-ordered)图形，但仍有两处颠倒。

Las(6岁6个月) 其最后的形状是由6对物体组成，它们一个个紧挨在一起，但没有全盘的计划(2个三角形；2个圆环；2组钉子其底端或是都指向左或是都指向右，2张卡片；最后是2个，然后又变为3个圆柱体)。

这些基本的反应带来了关于动作中的蕴涵和半蕴涵的关系这一有趣问题。一方面，两个元素之间知觉到的相似(通过同化于相同的格式而实现)，这意味着(在衍推的意义上，这种衍推是通过一种前摄的蕴涵而达到的)建立了一种空间相邻的关系，这种关系最初纯粹是局部的，构成了简单的一对对物体。另一方面，即使它是偶然的，这种相邻关系也具有一种分享的意义(见Yol的"大象"和"火车"的回答)并产生一种初步的结构。这种结构既不是一种系列，也不是一个分类，而是我们称之为"链"的东西。因此，早在水平I，我们就注意到儿童有一种进行结构的倾向，只有当这些局部的半蕴涵开始被协调为更系统的蕴涵的时候，这种结构才会被建构起来。

这就是实际上发生在水平II时的情况，此时儿童开始根据形状和颜色对元素进行分类，但还没对每一集合加以系列化。

Tra(6岁6个月) 他做出了"黄色卡片、绿色和红色的三角形、描述米老鼠的卡片"和"手镯"的分类，但只对圆环("手镯")进行了系列化：从最大到最小以交替的颜色进行系列化。

Mar(6岁4个月) "我已把那些一样的东西分在一组了。""怎么做的?""根据颜色，它们都是一样的颜色。"(在每一堆中)但他仅对钉子进行了系列化："啊，可根据大小来放!"

Dia(7岁11个月) 进行同样的分类，以及对钉子进行系列化。然而，在最后的排列中，它们不再是系列化的了，而是被分成两个亚集，一个按顺序排列，另一个则杂乱无序。

Sea(8岁3个月) 把对象正确地分成两个亚集，但只对其中很少的物体进行

系列化，直到她通过突然顿悟式地认识到：这个系列可以概括为："它也是从最小到最大。"从这以后，她甚至对手镯和以数字形式1、3、5、7、9出现的卡片也能加以序列化，因而达到了水平Ⅲ。

最后，以下是关于水平Ⅲ的更多例子。第一个是一个中间情形，这时，对所有集合系列和分类（除了三角形）是联合在一起的。

Nat（8岁1个月）他开始是把三角形结合成一个无定形的图形，有点类似于水平Ⅰ的铺花砖；然后，他对所有其他物体进行正确地分类并立刻加以系列化。做完这些之后，主试再次给他三角形，于是他再次把它们联合成一个无意义的整体。他把钉子系列化，但他也把它们聚成一朵花的形状，其花瓣是从最小到最大加以系列化的（有一个固定的起点）。

Cha（7岁10个月）、Rm（7岁7个月）、Sac（7岁10个月）以及其他一些被试，他们都根据形状和颜色做出了小的分类。对每一集合，他们能立刻得到正确的系列，这些不同的系列，他们都没有漏掉任何元素。

因此，在水平Ⅲ，出现了一种相似与差异的综合。这将引导我们对本章所涉及的一般概念作一回顾。

结　　论

本章篇幅多少有点长了，其目标是阐明蕴涵及其意义的基本形式。所有这些都需要建立各种情景下的相似与差异的关系。

关于动作（它把关系加于主体），最基本的因而也是最一般的蕴涵关系似乎是一句冗余的大实话："一种较大的相似"意指"一种较小的差异"；"一种较大的差异"意指"一种较小的相似"。但对年幼儿童来说，这一点并不是显然的。因为正如E. Marti[1]所揭示的，"更多差异"和"更少相似"的关系并不被4—5岁儿童视为等价的，而是被他们区分为两个系统。而且，我们注意到，在许多情景中，相似关系是以空间上的相邻来解释的，而差异关系则是以空间分离来解释的。在某种情况下，相邻关系甚至产生（创造）或提高了相似性，如本章第一部分所进行的研究中的儿童，他们认为，一个系列当中的元素M在把它放到小的或大的元素旁边的时候，它们就改变了自己的大小。

似乎从本章全部四节的研究中引出的最一般规律是，包含的类最初是没有的，而是，从"配对的属性"和简单的物体之链到渐次包围的和层级化的分类之间存在一个发展的过程。换言之，在一个最初以在相似或差异上的变化的交替和局部的集中为特征

[1] 马蒂（Marti，E.）：《儿童之关于类似的否定：差异性或相异性》（"La negation de la ressemblance chez l'enfant：Difference ou alterite"），*Archives de Psychologie*，1981，第2[illegible]页。

的时期后，在所有情景中的进步就存在于这两种关系的综合之中，这种综合迫使结构整体得以形成。这些结构整体中最简单的就是系列(序列)，它是一种每一元素与其后继元素之间之连续差异的相等性(等价)。相反地，分类包括了一种等价之间的差异：同样位列(rank)的亚类表示了一种等价关系，而类的层级次序则表示了一种差异的关系(越少的类越是包括范围更广的类，层级数越多的类则是包括越小范围的类)。因此，系列和类两者都需要相似和相异的综合，在它们各自的结构中都有一种互反性。无人奇怪，这种综合的发展是很慢的，在本章四个部分中，我们都可发现存在类似的困难。

建构这些综合的工具显然是动作蕴涵，它逐渐取代了最初的配对属性。例如：(1) 建构一个类 A 意味着把相似的项目聚在一起；(2) 但这种联合意味着对立或分化，诸如在 A 和 A′之间的对立；(3) 把相对的类联合起来产生一个更高层级的类(A · A′)→B；(4) 因此 B →(A ∨ A′)；(5) 系列意味着具有同样幅度或增加同样幅度之差异的重复；(6) 一个关系意指对 n 个对象之间的等价和差异加以结合；(7) 差异意味着部分的等价。因为，例如，两个在所有属性上都不同的物体它们仍是两个物体；(8) 相似意指在一个纯同一(pure identity)的界限达到之前，存在各种不同程度的相似。

这样的蕴涵不仅仅扮成了"定义"模样，而是对在主体的物质动作或心理动作之间实际的联结做出说明。这些动作和联结具有意义，并且这些意义之间的关系就是蕴涵，它是(伴随着其他的关系，但独立于动作的因果方面)直接起因于物质的(实际的)动作。

第九章　分类和对称

合作者：S. Dionnet、J. Guyon 和 A. Sinclair

在前面一章中，我们寻求根据相似与差异之间的互反关系来刻画系列和分类的特征。除了这两种类型的结构，还有一种"前运算"也是十分经常地会在所有年龄出现，而且它经常与这两个群集结合在一起，尽管它并不是它们的源泉。这一前运算就是对称的建构。对任何确定的相似或差异的次序，去建构一个对称就是通过一种围绕一个分离的轴的反转或反演去发现与之相对应的次序。

为了对对称进行分析，我们并不去设计一个需要对称的情景，而是运用分类任务去看主体在什么时候和怎样引发那些实际上并非必然的对称。实验材料是 52 个小的方卡片，这些卡片只有大小（两种大小："大的"和"小的"）和颜色（两种颜色：粉红色和蓝色）的区别。这样，P＝大的和粉红色的；B＝大的和蓝色的；p＝小的和粉红色的；b＝小的和蓝色的。主试放置一个含有 6 个元素的松散的集合（集合Ⅰ），它采取以下形式：3P+3b（或 3B+3p）；5B+1p（或 5P+1b）；5B+1b（或 5p+1P）；偶尔为如下形式：1B+3p+2p。然后要求儿童去做出另一有相等数目元素的集合（集合Ⅱ），它们不仅在其内部（在Ⅱ之内），而且在Ⅰ和Ⅱ之间是"适合在一起"的。在这之后，他们可以在Ⅰ和Ⅱ之间，或在Ⅰ和Ⅱ两者与剩下元素之间，根据同样的指导语使之"适合在一起"，继续进行替换的构造。两种对称可能建立起来，在主体已做出的整体Ⅱ中的各部分（或各亚集合）之间的"内部的"对称，以及在集合Ⅰ和Ⅱ之间的"外部的"对称：三个 Bs 对 3 个 Ps 是前者的例子；使Ⅱ中的 3b+3p 对应于Ⅰ中的 3B+3P 是后者的例子。

1. 前运算的反应

关于只是构造一个集合Ⅱ或改变其元素以及把它与集合Ⅰ的范型联系起来的问题，对儿童所谓什么是"适合良好"的反应，我们只区别两种发展水平。这种"适合良好"既是指Ⅰ内和Ⅱ内的关系，又是指它们的相互关系，它主要是由于它们之间的交换所引起的。

　　Nia（4 岁 11 个月）　他认为 3P 不合适 3b，应该用 3p 代替，"因为我们已经有大的了"。之后他以颜色继续进行匹配，但对Ⅰ和Ⅱ中的 5B 和 1p，他都希望通过

这种交换纠正当前的情景：他把1个p从Ⅰ移到Ⅱ中，又把1个p从Ⅱ移到Ⅰ中，并未预见到这种改变是无效的。

Ver(4岁10个月)　她开始有同样的反应，但她用Ⅱ中的元素一个个地替换了Ⅰ的元素。"我们什么时候停止呢？"——"等我们把这些都换了。"这对两个集合之间的关系来说，并未改变什么。然后，她进行了相反的交换，因此再次回到了她最初的集合！

Lym(4岁5个月)　同样地以一个B替换另一个B，没有注意到Ⅰ和Ⅱ两者都没有变化。

Ita(5岁1个月)　对于Ⅱ，他说：3B+3p并不适合，因为它们不是同样的颜色。他把3P+3p放到Ⅱ中。至于3B+3p，他在Ⅱ中复制了这一集合，然后交换了Ⅰ中的p和Ⅱ中的p。他坚持颜色标准，随后加上了大小标准：3P+3p"不适合，因为它们是同样颜色，但这个(3p)是小的"。

Kat(5岁10个月)　他认为3P和3b是"合适的，因为它们都是同样大小"。——"这个呢？"(主试指着其中一个b)——"它是小的但它是另一种方形(因此，大小=形状)。"——"它们真的是合适的吗？"——"不，因为这3个(3b)不适合它们。"在3B+3p的情况下，他做成了3P+3b(集合Ⅱ)，即作了大小的反转。"你必须给我粉红的，我给你蓝色的。"他以5B+1P对5p+1b结束："这里仍有一些是不适合的。"然而，他再次做成了两个同样的系列！然后，对3P+3b，他做出了系列：3B+2b+1p："这行了吗？"——"是的。你已得到了3个小的和3个大的；我得到了3个大的和3个小的。"然后所做的对称是：1P+8b对1B+8p，接着是5P+1b对5B+1p和4P+3b对4B+3p。

Sar(5岁6个月)　对3P+3b，她先在Ⅱ中做出了3B+3p。然而，她补充说道："我们不能(=不应该)把大的和小的放在一起"。她用3P+3B对3b+3p。然后，她做成了7P+1p对7p+1P，自发地把Ⅰ中的小p换成了Ⅱ中的大P。至于对7B+1P，她做成了1b+6p："小的在这里，所有大的在这里"，并不考虑元素的颜色和数目。

Bru(5岁6个月)　他调换了颜色，以7B+3p对7P+3b，然后以3B+1P+2B对3P+1B+2P，并说："它们是合适的，它们都是大的。"然而，他把3P+1p+2P转换成了3p+1P+2p：因而颠倒了大小但却调换了Ⅰ中的元素。类似地，他以7B+1p对应于1P+6p。

Jov(5岁3个月)　当Ⅰ由7b+1p组成时，他做成了1b+7p，然后，当模型为5P+1p时，做成了5p+1P。

Ser(6岁2个月)　他以1P+7p对7P+1p。"它们合适吗？"——"不，它们不

① 原文似有误，此处1p应为3p。——译者注

合适。它们在这里有二个，在这里只有一个。”——“那怎么做呢？”他在两边都放了3P+3p：“每一边都有3个大的，3个小的。”所以这里有一种简单的对应而没有反转。然后，他以6b对3P+3B，但说：“这是不对的：这里有大的Bs和大的Ps。”——“我们不能让它变正确吗？”——“不，我们不能：这里有大的Ps和大的Bs。”他不能改变集合，只是以Ⅱ的7B对Ⅰ的6b+1B，“这样做是可以的：这里都是小的b和一个大的，而这里只有大的(P)。”

Doz(6岁6个月)：通过一种大小和颜色的反转，他开始以3b+3p对3P+3B，然后他以6b对3P+3B。“它们是一样的吗？”——“是的。”——“它们合适吗？”——“是的，它们合适。”——“为什么？”（无回答）。为了符合Ⅱ中元素的异质性的要求，他以5P+1b对5p+1P，然后进行一对一地交换直到在Ⅱ中有6个P，在Ⅰ中有6个p，但他在后者中保留了1个b。另一方面，当他增加元素时（如Sar和Ser所做的），Doz并不关心集合中元素的数目，他把6或8个元素放在一个集合中，而与另一集合中的6个元素并没有任何数目上的对应。

这些最初的反应显示了四个显著的特点。第一个特点是“适合在一起”只与两个集合中的一个集合有关，而与Ⅰ和Ⅱ之间的关系无涉，只有一一对应关系例外，这时两个集合可通过元素的相似性，可能建立一一对应关系（例如，Ser把3P+3p放在两边）。第二个特点是难以同时考虑两个属性“颜色”和“大小”，或是仅涉及一个属性（如Sar只考虑大小属性），或是在转向一个新的属性时忘记了第一个属性。第三个特点是集合Ⅰ和Ⅱ之间的元素交换通常只在主试建议后才会发生，更有甚者，它们会被儿童错误理解，儿童认识不到交换同一类的元素（Nic以P交换同样的P，Lvm以B交换同样的B）是无效的。Ver甚至采取“交换一切”这种方法，他先进行一个方向然后又进行另一方向的全部交换，似乎这能够改变一切。最后，第四种值得提及的特点是：在这一水平，当注意集中于颜色或大小标准时，他们经常忽视集合Ⅰ和Ⅱ之间数目上定量的要求：例如，把6个元素放到一个集合中，却把7个或8个元素放到另一个集合中。

2. 运算的反应

以下是一些7～8岁和更大儿童的例子（对应于具体运算水平）。

Fan(7岁2个月)：“你的元素合适吗？”——“你意思是要用你的元素？”于是，他以3b+3p对3P+3B，一开始就思考如何把两个集合相互联系起来。“它们可以像这样（Ⅱ）和像这样（Ⅰ）。”——“那么你是怎么把两个联系在一起的呢？”——“好的，我们可以把大的Bs与小的bs相联系（通过交换），然后大的Ps与小的ps相对应（颜色）。”——“还有什么联系吗？”——“是的，这里（Ⅱ），都是小的，这里（Ⅰ）都是大的。”对其他情景他也都这样做。

Ani(7 岁 6 个月) 一开始，他就从Ⅰ和Ⅱ之间的关系着手："我得到了大的蓝色的和小的粉红色的，你得到了大的粉红色的和小的蓝色的。"他在每一次情景中都做出了自发的交换，并说："别让我做这么容易的事。"然而，当面对在Ⅰ中为 5P + 1p 和在Ⅱ中为 4P + 1b + 1B 这一情景时，他承认："它们是不适合的。"他不能设想一种会导致对每一集合中的所有元素都适用的一个单一标准的交换。

Sev(8 岁 4 个月) 他认为，在集合Ⅰ中，"它们(3P + 3p)是不合适的，因为它们全部应该是小的或都是大的"。但如果它们分成两个亚类时，"它们是可以的"。当两个集合为(3b + 3p)和(3P + 3B)时，他认为以Ⅱ中的 3P 交换Ⅰ中的 3b 就足够了。对 1B + 5b 和 5P + 1p，通过一种以大小进行的分类，Ⅰ和Ⅱ之间的关系由于交换而得到改变。

Sto(8 岁 4 个月) 以 4p + 1b + 1P 对 5P + 1p，没有令人满意的交换，除非当一个大的元素被认为与 2 个或 3 个小的元素相等。

Sea(8 岁 10 个月) 做出同样的最初反应，他说：当以Ⅱ中 4 个 p 替换Ⅰ中的 Ps 时，"它们总是同样的(颜色)，所以它们不合适。"

Nin(9 岁 11 个月) 她是第一个在使集合Ⅰ和Ⅱ保持同质的条件下，清楚地引入元素的数目(6 和 6)的被试。在前两名被试所面对的情景下，她列举了各种可能的交换，断言：它们没有一种是令人满意的。然后，她对如果一个元素被加进Ⅱ后什么情形是可以接受的，发表自己的观点："(那么)我们可以自由地进行替换，(但是)这不行，因为我的更多。"类似地，在另一情景下，她建议加上允许进行替换的元素，然后她说："啊，不，我们不能，因为(这样在Ⅰ和Ⅱ中的元素的)数目不会一样了。"

Rob(11 岁 10 个月) 他列举了颜色和大小上的各种替换，让集合Ⅰ和Ⅱ进行比较，然后他加上了元素的数目(作为第三个因素)："那就相配了，因为这里是同样的数量，这里也是。"

与 4 至 6 岁大的儿童相比，我们注意到在这些反应中，有了一种明显的进步。首先，被试一开始就理解到"合适在一起"不仅指集合Ⅰ和Ⅱ的内部，而且也指它们的关系(见 Tan 在实验开始时说的话)。其次，他们立刻并同时地对相似和差异都考虑到两个标准：大小和颜色。第三，与 4—6 岁儿童相对照，他们加上了(开始是内隐地，随后是外显地，如 Nin 的反应)第三个标准：以数目相等为条件(每个集合中都是 6 个元素)。第四，每一被试都预估到许多可能的交换(我们只是简单地提及，不把它们都列举出来了)，他们能预见到每一交换的有利和不利之处。最后，他们根据分类的规则把集合分成为亚集合，这些分类规则在运算水平已成为普通的规则了。

言以蔽之，尽管本章的实验非常简单，它似乎不能做出一种与年龄相关的连续水平描述，但我们注意到在前运算水平的反应和达到具体运算水平的被试的行为之间还是存在显著差异的。

3. 结论：对称

虽然以上这些观察似乎谈不上什么重大发现，但它们揭示了：在运算性的系列和分类形成之前，一种非常一般的前运算已经出现了，它是一种在该词最广义意义上的对称的形成或对对称的探求。因此，在第一水平（4到6岁），一旦被试理解了（与Nia、Ver、Lym和Ita的反应不同）：元素的交换或增加改变了集合Ⅰ和Ⅱ，他们就构造了几种类型的对称。例如，Kat很满意地指出："你有3个小的和3个大的，并且我也有3个大的和3个小的"（与颜色无关），后又满意于以1P+8b对1B+8p，以7P+1b对7B+1p，如此等等。Sar、Bri及其他被试也有同样的反应。尽管这些无疑是对称的形式，但给予这一概念以一种非常一般的意义则更为可取，即它并不是要求解决一个有关对称轴的问题，而仅仅是要求建立位置的关系。

为澄清这一定义，让我们回忆一下我们从前一章引出的结论：系列存在于差异之间（例如，在关系"<"或关系">"之间）的相似；分类是相似之间的差异（例如，一个类A和一个类B有共同的属性，它是被包含在B中的；B的属性是弱于A的属性的，但对B中的所有元素来说它又是共同的）。这些特点并不依赖于位置：在一个系列中的元素可以很好地排列成一个空间的顺序a<b<c，如此等等；尽管如此，但是这些关系是同样的——如果a、b、c空间上是分离的，并以测量手段去加以比较的话。换言之，在分类和系列中涉及的相似和差异只与内容有关，而无须考虑位置。于是，我们可以定义对称为一种反转的对应——一种具有某种位置反转的内容上的相似性。

关于对称的意义逻辑，这些定义强调其最初源泉应该回溯到最一般的协调，在这些协调中，其唯一的关系一方面是内容之间的相似和差异，另一方面是内容和位置之间的相似和差异。换言之，早在对称结构本身建构起来之前，它们的内部的联系就已由这些最基本的关系（它们日后将被"群集"化）做好了准备。对称在这一点上是很有趣的：它们似乎早于那些为未来分类和系列作准备的协调。造成这一情况的原因无疑是：对称由于其偏重于位置作用的空间特征而变得较为容易。至于我们所提出的把对称定义为一种反转的对应，当然这并不是指运算的可逆性，而是指"可反转性"（reversibility）。[1]

[1] 法文为reversibilite，它指的是一种与初试状态的比较，它是通过经验手段去建立一种等价（equivalence），它与任何由必然性所决定的等价无关。（P. M. D 本书英文版编者之一）

结　论①

1. 在本书前面各章之研究中所收集的实验资料勾画了导致运算的构造以及导致来自这些构造之必然组合的结构的基本的个体发生形式。每一章都揭示了这些发展的根源是意义和意义之间的蕴涵，它们是从动作蕴涵开始的，在被意识所把握之前最初是内隐的，最后才表现为语言的形式。

作为一种结论，我们把意义和意义蕴涵区分为不同的形式。开始最简单的意义形式是属性的意义，它们可以被定义为是在一个物体中可观察到的一个属性与同时记录的或已知的其他属性之间的相似和差异。

属性通过"类合取"(conjunctions like)的前运算的相互联结，这种类合取的前运算既可能是"约束的合取"(即必然的合取，因此它包含一种相互的蕴涵，如形状和大小共同出现的情况)，或是"自由的合取"(因而是可能的合取，如在一种形状和一种颜色之间出现的情况)。在这两种类型的合取之间，我们在年幼儿童身上还观察到我们称之为"配对属性"的情形(第八章)，这些属性是通过"伪约束的"合取联系起来的；例如，期待一个系列的中间元素的大小通过仅仅改变其位置就能予以改变。

随之而来的结论是：一个物体就是相连属性的一个集合，其意义也就是用它"能做什么"，因此，所谓物体的意义也就是一个动作格式的同化活动(不管此动作是外部的还是心理上进行的)。至于动作本身，它们的意义是由"它们导致什么"所定义的，这种定义根据的是动作在对象上或在它们所应用的情景中所产生的转换。无论是属性、物体(对象)，还是动作，它们的意义总是与主体的活动密切有关，这些活动既与主体之外的物理世界，也与主体先前产生的元素，如逻辑-数学实体(entities)进行相互作用。

我们还可以进一步对意义加以程度上的区分：它们也许仍是"局部的"意义，在这种情况下，它们只与有限的事实和特定的背景有关；它们也可能变成为一种"系统的"意义，为结构的出现提供基础；最后，当它们从属于已经构造成的结构之内部组合时，它们就成为更高层次的"结构的"意义了。

① 此结论为皮亚杰在本书出版前临时所写。(R.G.，B.I.)

② 弗莫苏(Vermsa，H.)：关于在谓词和上下文语境帮助下进行确定认知活动的实验描述("Essai de repesentation de certaines activités cognitives à l'aide de prédicats avec composantes contextuelles")，*Archives de Psychologie*，1976，44，pp. 205-221。

至于上面所说的意义之意义，可以说，它们是主体获得理解的唯一手段。理解是与纯观察不同的，观察在被意义所赋予之前，它只能提供没有任何理解成分的观察范围的延伸（外延）。因此，弗雷格（G. Frege）在Sinn（涵义）和Bedeutung（指称）之间所建立的对立不是一种根本的对立，因为后者是由前者决定的。以此看来，应该以从属于意义的可变的外延取代纯外延的真值表。

2. 既然我们已对意义是什么做出了特别的说明，那么就让我们回忆一下它们为蕴涵所带来的启示。这两个问题是不可分的，如果全部真值是建立在意义基础上的，并且如果所有形式的意义都存在于格式对属性、物体（对象）或动作的归属过程中，那么显然，根本就不会有什么孤立的格式或意义。相反，在它们之间总存在多种关系。这就意味着在所有发展水平，无论多么原始，所有的知识都有一个推理的维度，尽管它可能是内隐的和初步的。换种说法就是：使用一个意义总是需要和要以使用某种蕴涵为先决条件的。让我们现在对这些蕴涵的性质及其各种形式作一考察。

首先，我们已被引导用我们所说的"意义蕴涵"A→B（其中，至少有一个B的意义嵌于A的意义之中，而且这种"嵌有"关系也传递的，即C的意义嵌于B的意义中，D的意义嵌于C、B、A等的意义中，等等）来取代古典的外延蕴涵 $p\supset q\equiv(p\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot q)\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$，此处在 $\bar{p}\cdot q$ 中的 $\bar{p}$ 是指不是 p 的任何东西（不只是指 p 的相对于 q 的互补部分）。

如此定义之意义蕴涵的重要性在于：由于任何动作除了它的因果方面之外（即其被实际执行的物质方面），都具有一个意义，因此在动作之间必然存在着蕴涵，这就是说，在它们的意义之间必然存在着蕴涵。这是一个基本的事实，它远远超出陈述（句子）之间蕴涵的范围，从我们谈及动作逻辑之始，它就显现出来了动作逻辑是运算逻辑的必要的基础。

在讨论这两种逻辑之间关系之前，让我们首先注意：动作蕴涵，正像陈述（句子）之间的蕴涵一样，也可采取三种形式。(1)一种为"前摄的"（proactive）（皮尔斯称之为"预期的predictive"）形式。在此情况下，A→B意指：B是一个派生于A的新的结果；(2)一种为"后摄的"（retroactive）（皮尔斯称之为"回溯的"（retrodictive））形式，根据这一形式，B蕴涵A意指B是A的一个基本的条件；(3)一种证明的形式，它通过必然的联结（connections）把(1)和(2)联系起来，因而达到了"理由"（reasons）的状态。然而，我们必须记住：一个必然的真值的理由R永不可能是孤立的。它迟早会通过一种辩证的螺旋，引起理由R的理由是R′如此等等的问题，这个辩证的螺旋是处于前两种类型蕴涵之间的相互联结之上的。它源于如下事实，现实会把主体拉回到与它越来越接近，因为随着理解的进步，又会有新的问题产生。

3. 这些各种初始的关系，一开始是分离的，然后通过组合，被用来作为构成结构的片断，它们逐步协调，直至大约从7—8岁开始，形成"群集"。这种早期从意义之间相互作用中出现的轮廓结构是特别有趣的，因为它们不仅为具体运算群集，而且也为日后在

形式水平发现的更复杂的16种运算(它对应于真值表上的16个联结词)的形成提供了准备——如果这些更复杂的运算是根据意义来解释，而不是以它们纯粹的外延的形式来解释的话。因此，我们已经看到了交集、不相容等关系的早期建立，不过这是在动作水平上而不是在语言的水平上建立的。这再次表明了动作逻辑和动作蕴涵在意义蕴涵(它与外延蕴涵相对立)的起源上所具有的一般的形成作用。

然而，如我们前面已指出的，如果我们打算去精心打造一种意义逻辑，那么就应区分联结词“和”与“或”及其否定的各种形式，结果将会产生比外延逻辑的16种运算更多数目的运算。合取(“和”)可以或是“自由的”合取，在这种情况下，$p \cdot q$ 并不包含一种必然的配对；或是“约束的”合取，这时 $p \cdot q$ 就成了 $p \leftrightarrow q$ 了。因此，也有两种形式的析取和交(intersections)。至于否定，它们总是与参照框架有关，因而它们或是“近端的”否定($A' = B - A$，如果B是参照框架的话)或是程度不同的“远端的”否定。

在本书的第二部分，加西亚(R. Garcia)将进一步阐释我们所说的运算逻辑，它现在只建立在意义之基础上。

第二部分

作者　罗兰多·加西亚

第十章　逻辑与发生认识论

1. 皮亚杰研究逻辑之方法的认识论基础

首先，皮亚杰是一位认识论者，而且坦率地说，他是一位从生物学出发的认识论者。当然，这并不意味着，他是那种"生物学的认识论者"。一次次地，我们读到——或者听到——皮亚杰"实际"所做的是把认识归结为一种纯粹的生物学过程，或者，试图通过生物学去解释认识系统，或甚至运用理论生物学去解释逻辑和数学。

皮亚杰关于科学之间的联系的全部工作具有如此强烈的反还原论色彩，因此，我们也许想知道到底应该怎样严肃地坚持和维护这样的解释

尽管我们把这种看法视为对皮亚杰认识论理论的一种不尽合理的表征，然而它也有某些易于发觉的根源。我们应该提到他的理论的三个要点，我们认为它们是非常根本的，而且也许这种曲解最初就可能源于此。发生认识论主张：

a. 在一个新生儿的纯生物学过程和儿童的认知过程的最初开端这两者之间没有断裂之点。

b. 虽然生物系统和认知系统在其所具有的**结构**方面是十分不同的，但它们都有**共同的根源**，即一个生物有机体通过那些执行着类似**功能**的同化和顺化之过程实现其对

环境的适应①。

c. 生物系统和认知系统的进化两者都是开放系统，都是在与其环境相互作用中实现进化的实例。正因如此，它们都服从类似的发展机制，尽管它们在各自领域的特征中存在着差异。皮亚杰从未以这些术语来系统阐述这一论题。然而，这似乎包含了他的理论的本质成分。

以上三个要点中的任何一个要点并没有含有对两个领域中的任何一领域——生物学的和认知的——特殊性的否定，也并不意味着要去用一个领域的"法则""解释"另一领域的行为。

发生认识论的另一误解之源（对本书来说，它具有特别的意义）是皮亚杰对逻辑结构的持久关注。我想再次强调：无论逻辑结构在皮亚杰研究中的作用，还是他对作为一门学科的"逻辑"所采取的特殊的研究方法，两者都不是很容易理解的，除非我们脑中牢记一点：他关心的是逻辑和数学的认识论起源。他的心理学研究——概念形成的心理发生——乃是为理解知识怎样发展的提供一种工具。它与生物学的关系更为简单，因为知识是发生在某种特殊类别的生物有机体身上的现象，知识不可能与它分离。"逻辑结构的起源和作用"的问题对皮亚杰来说，就是从一种认识论的角度去系统地阐述它。正是作为发生认识论者而不是作为生物学家的皮亚杰，对此做出了回答。

2. 逻辑起源的认识论问题和逻辑在认识论中的作用

皮亚杰的逻辑理论有两个目的，需要对它们加以仔细的区分：

a. 去解释逻辑关系和逻辑结构如何在主体身上（指的是认识的主体！）逐步显现出来，直至它们达到我们称之为一个正常成人的自然逻辑的水平。

b. 去揭示逻辑关系和逻辑结构怎样起到同化工具的基本作用，使认识主体得以理解和组织知识的对象，因而这种理解和组织就成为任何种类知识的必要条件。

这两个过程相伴而行，它们以我们熟知的形式相互作用：主体在结构他自己的结构手段即他的逻辑时，他就在结构其世界。

第一个问题（逻辑如何发展）事实上与最基本的认识论问题之一有关：逻辑必然性从何而来？它一直是所有知识论的阿喀琉斯（Achilles）之踵，我们可以在哲学史中发

① 参阅 Piaget, e.g.，《适应与智慧：有机体的选择与表型复制》（*Adaptation and Intelligence: Organic Selection and Phenocopy*），Chicago: University of Chicago Press, 1[illegible]，第7[illegible]页。（J. F.）

② 作为一个多水平的、自我激活的动作形式的合作"共同体"，逻辑具有启发性而不仅仅具有确定性。参阅 Inhelder, B., & Piaget, J., *The Early Growth of Logic in the Child*, New York: Harper & Row, 1964, e.g., Ch. 6; Minsky, M., *The Society of Mind*; and M. M. Waldrop's piece on Allen Newell, "Soar: A unified theory of cognition," *Science*, July, 1988, 241，第2[illegible]页。（J. E.）

现这一问题，柏拉图和康德也许对之做出了最系统的回答。但发生认识论是首次让这一问题在科学及其方法的框架内予以研究的。

且如下观点得以建立：逻辑关系不是先天的（也不是先验的），以及它们既不是经验的直接产物，也不是通过语言的媒介从经验中获得的（如逻辑经验论所声称的），那么发生认识论的任务就是去揭示它们如何由儿童建构起来的，答案也许可以简单表述如下：逻辑关系是在经验世界被组织的同时建构起来的，它们是组织化过程的一个固有的内在部分。但是这种说法尽管不错，但也许容易被误导。误导之处是"在……同时"这一表述。这要求我们对之做出某些认真的解释。

所有的认识论理论都是试图以这种或那种方式去解释主体（S）和客体（O）之间的相互作用（简写为S→O）如何产生知识的。① 皮亚杰的理论对之提供了一种解释，它包含着一种真正辩证的相互作用过程。让我们暂时把我们在此处所说的"解释"为何义放置一旁。说知识产生于S→O的辩证相互作用，这并未使问题变得非常清楚，除非我们对这种相互作用怎样发生以及为什么我们称之为是一种辩证的相互作用加以明晰的阐述。首先指出某种说法不是什么意思，这还是比较容易的。它显然不是指什么"作用与反作用"的过程，如辩证唯物论也许会建议的某些过于简单的说法。它也不是指一种黑格尔式的"正—反—合"的过程。通过一种S→O的相互作用而导致知识的产生并不像氢气和氧气之间的火花产生水那样，它是一种困难的和复杂的过程，历经特定的"阶段"（或时期），这些阶段是不能混淆在一起的。

这就是我们所熟悉的皮亚杰理论。然而，有一点——它是那么简单——经常被忽视。主体S面对一个确定的情景，在其与O的相互作用中，他是运用组织化了的（逻辑）手段（这些工具是在以前经历的情景中已建构成的）去解读情景（经验材料）的。通过这些手段，经验材料成为可观察物，即它们被解释了（这意味着它们多少被组织起来了）。反过来，主体S正在面对着的（因而也是正在解释的）新的情景将有助于建立新的同化手段，即组织者和逻辑，主体借助它们，就能解释其他的情景。

也许，我们应该为提醒读者注意皮亚杰理论的这些如此基本的内容而说声抱歉，但我们需要借助它们以提及那些似乎对我们来说乃是一种基本的误解，这些误解我们可以在许多非常杰出的逻辑学家对皮亚杰逻辑的批评中发现。他们的批评指的是所谓皮亚杰的发展之逻辑中的"阶段的神话"，这些阶段是皮亚杰迄来被认为是在逻辑关系的发展中具有重要性的一些时期，而"事实上"他区分了至少具有同等意义的许多"梯级"（steps）。我们承认，这些逻辑学家在作这些批评时，正是作为一名逻辑学家在说话，但他们忽视了这样一个事实，不管什么时候皮亚杰对阶段做出区分，他总是从一名发生

① 进一步的讨论可参阅皮亚杰（Piaget，J.）《当代科学认识论的发展趋势》（"Les courants de l'épistémologie scientifique contemporaine"），《逻辑与科学认识》（*Logique et Connaissance Scientifique*），Paris：Gallimard，1967。（J. E.）

认识论者的立场上去这样做的。让我们在此稍停，略对这句话的含义作一解释。

3. 皮亚杰的阶段和开放系统的自组织化

发生认识论的基本主张之一是认为：认知系统的发展既不是一种连续的成长，也不是一个线性的过程。阶段的存在只是这两个事实的一种表达。在这点上，心理学中的皮亚杰(也许还有弗洛伊德)和政治经济学中的马克思都是我们今天称之为一般系统论的理论先锋。今天我们知道，开放系统，即与环境交换物质、能量、信息的系统，它们是自组织的系统。这意味着这样的系统要求有一个内部的结构，当用以表示与环境进行相互作用的交换之流趋于稳定时，这个内部结构也就趋于稳定①。

这段话中的关键之词是"稳定性"。说一个系统是稳定的决不意味着它是静态的，这也不意味着它处于在经典热力学中赋予该词之意义上的那种平衡条件之下。一个结构可以是稳定的，(1)或是因为它处于平衡条件下，(2)或是因为处于远离平衡条件，通过与环境的交换，保持近稳定态(near steady state)②。在第一种情况下，"平衡"(equilibrium)一词的应用也许并无什么限制性。在第二种情况下，可能不是这样。我们也许随后会谈到动态平衡，或者，我们可以采用另一个词，如皮亚杰所使用的，称之为平衡化(equilibration)。

在认知系统情况下，如同在一个活的有机体的任何表示中一样，我们是远离平衡条件的。如果我们切断与环境的交换，有机体就朝着平衡状态发展。在这种情况下，平衡状态就是死亡。当与环境的交换继续时，生物机体和认知系统就远离平衡条件。

从发生心理学的研究成果中我们已经知道，如发生认识论所解释的，认知系统可被看作是一个开放系统，其动力学很大程度上是由与环境的交换决定的。这样一个系统，其发展经历了动力平衡的时相或"近稳定态条件"(阶段)，随后平衡受到干扰(去平衡化)，以及再组织(再平衡化)，使系统处于新的稳定态。实际上，我们必须对"稳定态条件"和真正"稳定"的条件两者做出区分。远离平衡的条件仍然是稳定的，这是指：该系统围绕着某种中间状态波动。这些波动或是由于内部的变化，或是由于外部的(环境中的)变化所引起。超过某个确定的阈限，波动会产生系统中的不稳定性，这是稳定态条

① 尼科力斯(Nicolis, G.)和普利高津(Prigogine, I.)：《非平衡系统中的自组织》(*Self Organization in Nonequilibrium Systems*)，New York: Wiley, 1977，第1页。也可参阅 Prigogine & Stengers：《从混沌到有序》(*Order Out of Chaos*)，Toronto: Bantam, 1984；及 Prigogine：《从存在到演化》(*From Being to Becoming*)，New York: Freeman, 1980。(J. E.)

② 平衡的一个条件在物理学中通常被这样定义：即指系统的小的干扰会被系统本身抵消，从而使系统又回到它的初始状态，就像自由悬挂的钟摆那样。然而，一座钟的摆，只要它从其环境中接受了能量，它就能维持一种稳定的状态——不停地打拍子。(J. E.)

件中的一个断点(去平衡化)。

皮亚杰的知识发展理论中的阶段是:具有相对稳定性的时期(不是在平衡状态,不是静止的),它具有波动所具有的全部性质,这些波动产生于主体所面临着的变化情景。从一个认知阶段向下一个认知阶段的过渡是一种典型的非稳定系统的情况,这时该系统不再能同化出现的干扰(内部的矛盾,无能力解决某种类型的问题等),必须为新情景重新组织同化的工具。

每一时期——每一阶段——都以主体能够解决某类问题(他能够应付的某种情景)为其特征。这显然是一种对阶段的认识论的特征化描述,而不是逻辑的特征化描述。逻辑的考虑是随后到来的:解决问题,应付情景,对在这样那样条件下发生的现象予以解释都需要应用逻辑关系。在每一时期——在每一阶段——主体运用具有某种特征性的逻辑关系,这些逻辑关系不是一种,而是许多。不是只有一种逻辑结构,而是有许多逻辑结构。它们中的每一个都有其自身(非常复杂)的发展过程:这些发展的线路并不重合,它遵循如下原则:发展的阶段不是由单一的逻辑关系所建立起来的。(我们怎能给予哪一个以特权呢?)

我们说在每一阶段的动作中存在着特殊的结构,但这并不是说阶段是由一个逻辑结构所确定的。皮亚杰关于阶段的表述与第一种说法,而不是与第二种说法有关。让我们看看(非常扼要地说明)这些阶段具有怎样的特征。我们只考虑概念化的水平而不考虑感知运动阶段。

1. 认识阶段和逻辑-数学联系

我们可以在逻辑-数学联系的进化中区别出三个重要的梯级。这些梯级对应于三个发生心理学中所描述的典型阶段,我们称之为"前运算思维"、"具体运算"和"假设演绎推理"。不久前,我们又把这些阶段与心理发生和科学史之间的共同机制的研究相结合,它们又以一种逻辑-数学联系为其特征,这些联系被称之"内运算"、"间运算"和"超运算"。我们认为,这样的命名较之以前的说法更能表示阶段的真正含义。皮亚杰也同意这样的命名,他在我们合作的一本书中这样写道:

"……这些三个阶段……对应于'内'、'间'、'超'这三个连续体。这就是我们在解释(阐述)使得这样一种发展是一种必然发展顺序之原因(理由,以及证实统一的三个阶段(如在古典辩证法中'正'、'反'和'合')取代任何其他数字的合理性之前,想通过例子

皮亚杰(Piaget, J.)和加西亚(Garcia, R.):《心理发生和科学史》(*Psychogenesis and the History of Science*),New York: Columbia University Press,1989。此书亦为本译丛之一种。——译者注

予以揭示的东西。"①

4.1　运算内的联系

运算内的联系是这样一种联系，它仅指内部的结合(articulations)。在运算内水平上尚缺乏可逆性，这意味着其关系仍然是孤立的(isolation)，还没有组合成转换的系统，也没有(即使有，那也很少)组合成结构。这种联系主要有两类，它们之间很少或根本没有什么协调。

(a) 比较和对应，它们在函数关系建立之前就逐步形成。在这类联系中，我们发现了同一(性)(不管怎样，它们不是一种简单的关系)以及那些从重复、相似和相等中产生的对应。这里会有函数关系出现，但这是仅就它们不涉及转换及其不变性而言的。

(b) 产生变形的动作，它们具有不同类别，如：

- 分为亚集合的物体的集合(例如，一个类 B 被分为鸦思的亚类 A 和 A′，但并不具有任何基于包含关系的定量的理解)
- 各种不同大小(size)的物体 A、B、C、…的序列化(仅当它们来源于经验的证实而并不涉及传递性)
- 自然数(但没有任何量的守恒)

4.2　运算间的联系

运算间的联系是那种涉及基本的运算的联系，如随着运算之间的组合形成集合、序列化，等等，导致第一批理性的逻辑-数学结构。在这一水平上，我们发现在对应和转换之间已有了协调，以及守恒的原则。以下的关系建立起来了：

- 可逆性(reversibity)
- 循环性(recursivity)
- 传递性(transitivity)
- 可交换性(commutability)及其线性形式：交互性(commutativity)
- 有限的结合性(associativity)
- 互反性(reciprocity)

需要解释的是从"内"向"间"运算联系的转变。尤其需要对儿童如何从仅仅是把东

① 皮亚杰(Piaget, J.)和加西亚(Garcia, R.)：《心理发生和科学史》(*Psychogenesis and the History of Science*)，New York: Columbia University Press，1989，第 174 页。

② 参阅皮亚杰(Piaget, J.)：《认知结构的平衡化》(*The Equilibration of Cognitive Structure*)，Chicago: The University of Chicago Press，1985，第 96—97 页。(J. E.)

再"放在一起"的协调者和进行连续协调的协调者转变为对运算的使用(它出现于后阶段)做出说明。这一转变中,皮亚杰理论现在认为交换性的逐渐获得优势起到了中心的作用,尽管这一思想在其理论中很晚才得到完全清晰的表述:"发生在"达到之点"的变化是与发生在"离开之点"的变化有关的。事实上,理解这一点是这一时期的转变中最根本的一步。它产生了两个重要的结果:(a)直接的转换与反演(可逆)的转换相协调,因而导致了超越了单方向动作的运算的产生;(b)儿童因而可以理解守恒。

此外,倒行动作(retroaction)和反观(retrospection)将导致循环性、传递性和可逆性。

于是,这一阶段的中心问题来自如下事实:它可能建立的特有的结构——群集——尽管已经具有很高的内部一致性和高度的概括性,但它仍是非常"低级的",表现出重要的局限。记住:群集是这一阶段的特有的结构(事实上,它们构成了这一时期的定性逻辑中的唯一有效的结构的组织),但它们并未为这一阶段提供定义。

我们不想在群集的著名的局限性方面过于纠缠。然而,似乎值得提及的是它所蕴涵的认识论的问题:为什么会有这些局限以及如何克服这些局限?

第一个局限是指这一结构执行其功能的方式。实际上,它表示了某种外部内容的定性的性质。这样,群集就总是从属于给定的内容,即逻辑内的内容。这就解释了为什么从形式的观点来看,它是非常弱的原因,尽管它们具有内部的一致性可使之被形式化。而且,对逻辑内的内容的从属地位也解释了为什么这一结构在心理发生水平上具有这样一种程度的概括性:它可能覆盖从7岁到11岁这一漫长的时期;在这一时期内,主体开始从逻辑上协调其运算但并不能超越具体内容的组织化(由于缺乏形式的、假设—演绎的机制)。

群集特征的第二个局限是如下事实:除了在相邻的元素(或亚集合)之间的结合外,不存在别的结合。在这一水平,已存在一种量化但它只是局限于"全部"、"一些"或"没有"的量化上。要能够把任何两个元素(或亚集合)加以结合,这要求外延的概括化,而

Inhelder, B., Blanchet, A., Sinclair, A., & Piaget, J., "Relations entre les conservations d'ensembles d'éléments discrets et celles de quantités continues." Année Psychologique, 1975, 75, pp. 26—60.

在麦克莱恩(S. MacLane)范畴论的意义上,群集(groupings)已被视为范畴。这为它们的发展提供了比加西亚站在逻辑的立场上对之所做的正确批评更具启发性的背景设想。对这一问题进一步的考查,可参阅 Easley, J. A., Jr. "Mathematical foundations of forty years of research on conservation at Geneva." *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 1978, 1(1), 第7—?页;以及 Davidson, P. M., "Piaget's category-theoretic interpretation of cognitive development: A neglected contribution." *Human Development*, 1988, 31, 第225—244页。对它们的发展的全面了解,可参阅 Piaget, J., *Morphisms and Categories: To Compare and Transform*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.(J. E.)——此书在 Piaget 和 Garcia 写作 *Towards a logic of meaning* 时,尚未出版,后于1990和1992年,此书法、英文版相继问世,它亦为本译丛之一种。——译者注

这是儿童此时尚未发展的。另一方面，就组合从属于逻辑内的材料而言，还不存在与形式发生联系的可能性，因此，主体仍局限于那些与内容相联系的联结上。

第三个可在群集中系统发现的局限与儿童对类的相交想象困难有关，这导致儿童只能去处理分离的类，因而在分类时，只能进行二分的分类。

最后一个局限(它也许可以总结所有这些局限)是，不能从整个系统的性质出发去推演出其一个亚系统的性质。这是我们把群集视为弱结构的根本原因。

4.3 超运算联系

超运算联系是能导致一种具有清楚的代数性质(如群、组合、比例等)的逻辑-数学结构的联系。在对应于11—12岁儿童的这一水平上，它们自发地出现但并没有超越一种工具的使用。它们还没有被"主题化"(thematized)，它们只是对主体"知道怎么做"加以特征化，并不包含对以上所说之结构的理解。然而，在这种没有任何反省目的的简单利用形式下，这些结构产生于一种非常具有建构性的把运算应用于运算之上的过程。以下几个例子清楚显示了这一过程：

(a) 排列(permutations)，它要求在各种不同可能的系列之间建立一种次序，因为排列的集合是通过所有系列的系列而得到的。

(b) 组合(combinations)，它是所有分类的分类。在这一水平引入的新异之处是：儿童不是仅运用分离的类来进行操作，而是运用具有越来越多的交的类来进行操作。

(c) 亚集合的集合，它通过加上一个新的因素，即代换(或目替换)而从前面的结构中产生出来。从一个代换到另一个代换实际就是：从一个包含系统变换到另一包含系统，因而意味着会有对集合的多种划分和交。

一个给定集合的全部亚集的集将产生于这一过程的概括化。

(d) INRC群，它包括反演和互反。

每当两个不同的系统被组成为一个单一的整体时，这种类型的群就会出现(仅仅是在工具意义上，不是公理化的意义上)。例如，以一个单一的运动联结两个不同的参照系时(表现为相对运动)，在它们之间就有必然的协调。[1] 具有真假两值的命题逻辑也是这种群的一个例子。

从"间"向"超"的过渡

"表明：不管运算是否十分接近日常动作中的排列之序，但只要一旦形成，就不再是被动和孤立的('内'阶段)了，它迟早将成为向着'间'和'外'阶段发展的结构作用的内

---

[1] 参阅英海尔德和皮亚杰(Inhelder, B. & Piaget, J.)，《逻辑思维的发展》(*The Growth of Logical Thinking*)，New York: Basic Books, 1957；及小伊斯利(Easley, J. A., Jr.)评INRC群(Comments on the INRC group.)，*Journal of Research in Science Teaching*, 1964，第233—237页。(J. E.)

核，而这些‘间’和‘外’阶段可无限延伸至严格意义上的结构的形成。”①

5. 历时性(Diachrony)、同时性(Sychrony)和逻辑结构

以上引文中要强调的是“结构的核心”。全部结构化的发展路线都是趋向于和来自于这一“核心”，但这并不是同时发生的。再一次地，它表明了皮亚杰的阶段是由彼此孤立的逻辑关系的发展所决定的思想是站不住脚的。

从适当的角度去看待皮亚杰的阶段，还有两点需要考虑。让我们从同一文章中再引一段话：

“这些认知层次包括两类嵌入。第一类嵌入是向前的，这是因为在知识建构的连续时期中范围的扩大。但是，第二类嵌入是向后的，因为在 n 阶段获得的知识能在事后充实以前在阶段 $n-1$ 中建立的关系。”②

这引导我们再考虑第二点，而这正是我们想强调的：

“如果情况就是这样，那么我们能得出系列Ia，Ir，T不是简单的和线性超越之结论，就像人们在任何基本的辩证连续过程中发现的系列一样。但我们应该探讨超越工具本身的一种连续超越，赋予认知工具以丰富性和特有的复杂性。”③

这里，我们找到了我们所讨论问题的核心：每一阶段不能被简单视为前一阶段的自然的“成长”；每一阶段都要重新组织主体已经使用的全部手段。以这种观点来看，我们怎么能设想把这种阶段之间的过渡建立在一种“成长”的观点上(如L. Apostel所建议的④，寻找一种成长的规则系统)，以它来表示儿童概念网络的实际发展呢？这种思想如此固执，这真是令人十分吃惊，尽管事实上皮亚杰在多年前已澄清了这一点(以我们的观点来看，他是以一种最后结论的方式阐明这一点的)。例如，他在为发表在《发生认识论研究》第15卷(*Etudes d'Epistemologie Genetique*)上Apostel的一篇文章所写的评论中，反对如下观点，即可以先验地通过一种本质上是代数的结构分析的手段，推断出这样一种发展从其最早的开始到其“最后”的状态必定是什么⑤，应用这种方法的结

---

① 参见皮亚杰和加西亚，第180页。

② 参见皮亚杰和加西亚，第183页。

③ 参见皮亚杰和加西亚，第183页。

④ Apostel，L.，皮亚杰逻辑的未来(“The Future of Piagetian Logic”)，Revue Internationale de Philosophie，1982，第142—143页。

⑤ 皮亚杰(Piaget，J.)，亲子关系结构问题导论(“Introduction：Le probleme de la filiation des structure”)，In L. Apostel，J. B. Grize，S. Papert，& J. Piaget，亲子关系的结构(“La filiation des structure”)，*Etudes d'Epistemologie Genetique*，Vol. 15，Paris：Press Universitaires de France，1963，第10页。

果皮亚杰对之有明确的评价:"它可能导致某种概括化,这种概括化从一种形式观点来看是有趣的,但它可能不具有发生的意义。"①

请读者原谅我对皮亚杰这段话的意义在此还要多说几句。

我们难以设想:费力建构一个关系系统的时间过程,它与对该系统的各组成成分之间的严格的形式联系进行一种理性的再构造过程,两者是完全平行的。事实上的情况应是这样的:让我们考虑一个阶段 n 和它向阶段 $n+1$ 的过渡。n 和 $n+1$ 两者都是以逻辑结构的工具性的使用为特征的,我们把这些逻辑结构分别称之为 S_n 和 S_{n+1}。于是我们面临两个**不同的**问题:(a)关系系统 S_n 怎样在操作上,即在动作中产生系统 S_{n+1};(b)系统 S_n(它包括在系统 $n+1$ 之内)如何在形式上插入到 S_{n+1} 之中。对第一个问题的回答要求一种对一名主体的心理(mind)是如何进化的**历时性**的研究(一种经验的研究)。而对第二个问题的回答则要求一种对各种结构之间的形式进行的**同时性的**研究。第一个问题是逻辑认识论的任务。第二个问题则是逻辑学的任务。

毫不奇怪,逻辑的分析会发现:"事实上"从形式 S_n 向形式 S_{n+1} 过渡要有许多路要走,其路之长要比发展认识论学者们愿意承认的长得多!这清楚地意味着儿童的或青少年的心理并不遵循形式逻辑学家们的严格的路线。它没有必要这样。儿童(在行动中)掌握一个结构和运用它进行操作,并不考虑形式逻辑学家的警告。在这一点上儿童是不同于科学家的。"纯"数学家严肃地反对迪拉克(P. A. M. Dirac)②的 delta 函数。幸运的是,迪拉克对此并不在意,继续在他的量子力学著作中使用它们。施瓦兹(L. Schwartz)为这种函数提供了一个适当的基础,他构造它们的严密的方法是完全不同于迪拉克之方法的。

反过来也是如此。我们非常了解逻辑学家不能把一个认识的(knowing)主体在其"逻辑思考"中所做的一切都加以形式化。形式论的著名局限现在已成了陈腐之言,但它提醒我们自己:甚至在集合之间做出一一对应这样简单的运算,当它涉及无穷性的时候,也不能被完全地形式化。这样的提醒也许不是多余的。这一著名的 Lownheim-Skolem 定理③的结论正是表明直觉不能被完全形式化的论据之一。当然,这一定理也有可避免如此结论的可能的解释,但这总是以牺牲"果断的解决方法"为代价而要求对

① 同上,第11页。

② 迪拉克(Paul Adrien Maurice Dirac),英国理论物理学家,量子力学创始人之一,首创量子力学的变换论和辐射的量子论,与奥地利物理学家 E. Schrodinger 共获 1933 年度诺贝尔物理学奖。——译者注

③ 例见 John Myhill 所做的巧妙的分析:论 Lownheim-Skolem 定理的本体论意义,再印于 I. M. Copi & J. A. Gould:《当代心理学读本》(*Contemporary Readings in Logical Theory*),New York: The Macmillan Company,1967.

所产生的数学理论高度关注。[1] 甚至在这样的情况下，问题仍没有解决，它只不过转移到了其他的领域。

在从心理发生学角度来看“结构的起源”与在程度越来越复杂的逻辑结构之间的内部的、同时的、静止的相互联系之间试图寻找一种紧密的平行论的思想，表现在 Apostel 和其他学者的这样的研究项目中：他们试图在那些能够部分地或完全地反映系统之间发生的渊源关系的代数之间（系统的运算形式可由这些代数来表示），发现一种结构的次序关系。[2] 我们已经提到了皮亚杰对这一建议的回答：可能的发展路线的多样性是非常丰富的（它可以通过这样的纯粹的理论分析而发现），但只有对心理发生的经验研究与认识论的分析加以有创意的结合才能对发展的这些可能路线中哪一条路线实际发生提供答案（儿童和青少年在这方面是很固执的）。但这只是一种部分的回答，涉及的只是试图构造一种“发生代数”所面临的问题之一。第二个回答（我们前面已经提到），是与形式化的局限有关的，在此我们不想详细说它。

然而，这里还有第三种回答，以我们的观点来看，就一种认识论的观点而言，它要更为基本。对一种“发生代数”的主要的反对意见来自认知发展理论，如我们在上面已指出的，认知发展是与开放系统的自组织的理论密切相关的。让我们对此稍加说明。

6. 结构的不连续性和机能的连续性

认知系统发展的历时性和同时性的性质，以一种特殊的方式相互联系。这样一种发展我们把它描述为一种阶段的连续，即一种经历平衡中断的近稳定态条件的连续，这些阶段中的每一阶段典型地使用不同的“同化的工具”，它们确定了主体能够解决的问题的种类以及他将为某种情景提出的“解释”的种类。

对儿童的认知成长来说，同化的工具主要是逻辑的关系。从一个阶段向下一阶段的过渡不能视作就是把新的元素加到已有的元素之上，每一过渡意指一种先前“阶段”的完全的再组织。这又意味着以前的动态的平衡已遭破坏。因此，关于从一个阶段向下一阶段的过渡理论首先是一种平衡态中断的理论。与此相平行的物理学理论就是一种平衡态的不稳定性（instability）。一旦这种不稳定被触发，系统就被去组织化，并且在某种条件下，它可能找到新的组织化的型式。我们将回到这一点的讨论上（它远不仅是一种单纯的类比）。对认知系统而言，“失平衡化”表示一种过程，这时主体不能用他

[1] 参见 Hao Wang（王浩）在其论文《论形式系统的可数的基础》（“On denumerable bases of formal systems”），载 Th. Skolem 等：《形式系统的数学解释》（*Mathematical Interpretation of Formal Systems*），Amsterdam：North Holland，1955。

[2] 阿波斯特尔（Apostel，L.）：《结构与发生》（“Structure et genèse”），载 L. Apostel，J. B. Grize，S. Papert，& J. Piaget，见前引注，第 61—68 页。

目前为止所能建立的同化结构去处理某些问题，于是整个系统进入一种危机状态。

当我们谈及"整个系统"时，当然我们指的是认知系统的结构方面，不是指它的机能方面。建构知识的工具和机制继续存在于动作之中。正是通过这些工具和机制的应用，主体才能够重新组织他的系统。这种再次的组织化意味着在从一个水平到下一个水平的过渡中，产生了一个明显的非(不)连续性切割。但这种非(不)连续性是结构上的，而不是机能上的。认知发展因此是以结构的非连续性①和机能的连续性为其特征的。

在发生认识论的理论之中，再组织化的过程被看作是通过某些特别的认知工具的使用而发生的过程。这里，皮亚杰所说的"反省抽象"发挥着巨大的作用。正是它进入到建构新的结构关系过程之中的方式阻止了任何将发展或成长看作是一种连续路线的思想。我们可以对这样一种用来描绘实际认知发展的建构过程的真实有效性提出疑问。但是，这种质询必须从心理发生的立场出发，而不是在逻辑的基础上来提问。在此我们将再一次地涉及皮亚杰的认识论。没有足够的形式逻辑的证据可以解决这一问题。

尽管如此，我们今天所理解的开放系统在各种环境条件下的进化之路，它在同样的方向上向我们提供了进一步的和强有力的证据。事实上，当一个物理的(开放的)系统变得不稳定时，它的随后的发展(进化)本质上是不可预测的。表示系统的进化路径上的不稳定状态的点实际上是一个分支点(branch point)，系统存在着不止一条可能走的路径。一个系统随后到底走哪条路径的内在不可预见性(它经历了连续的不稳定的，以及平衡化的时期)，这似乎是所有开放系统的一种特征。认知发展中的阶段理论完全符合这样的观点。

我们再回到我们刚才中断的话题。逻辑运算不是孤立建立的，也不是立刻全部建构起来的。读者通过阅读本书，对此可能看得更清楚了：逻辑关系是缓慢建立起来的，这些逻辑关系作为结构的部件逐步自身协调，直至某些新的具有更加一致性的内部组织的结构出现。举例来说，这就是"群集"出现的情形。一名儿童只是对物体进行分类或把它们以某种次序放置是不能获得群集之运用能力的。所有这些需要一种准备，这种准备由各种类型的逻辑联系的构造所构成，其中有些逻辑联系与命题逻辑的联结词是同构的，但仍远未协调成为一个单一的系统。这种协调的发生方式表现为一个非常复杂的过程，至今还未有充分详细的研究。在某一给定的时刻，可能存在一种各种结构部件在我们上面所指的"一种结构的核心"中实现会聚。并且，正如我们已经指出的，每一"部件"可能在一不同的"发展水平"上从其他的部件中找到自己。因此，阶段不是由这些发展的单一路线中的任何一条路线所确定的，而都是由儿童运用他迄今已经建立

① 从一个水平到下一水平的结构之非连续性形成了一种障碍，如前面已指出的，它横亘在任何试图建构一种"发展的规则系统"的途中（法文版中无此注释）。（上下）

的结构的所有部件能做什么所确定的 心理发生水平上的过程的复杂性几乎未给(任何)一种发生的“代数”留下什么希望。

第十一章　外延逻辑和内涵逻辑

1. 支持外延性(extensionality)的论据

形式逻辑,传统上开始于《数学原理》(*Principia Mathematica*)——即使在此之前还有弗雷格(G. Frege)以及某种意义上皮尔斯(C. S. Pierce)和施勒德尔(E. Schroder[1])的工作,总的说来是外延的逻辑。几乎近半个世纪,这种逻辑(及其许多变式)在该领域一直处于支配地位。我们之中所有从事“现代逻辑”课程教学的人在授课时都会回溯20世纪中叶的学科发展,向学生说明:尽管传统的哲学家还在努力使亚里士多德的逻辑保持活力,但后者已不能解释那些基本数学所要求的逻辑推理了。这部分的教学就像是一场“战斗”,但很容易打赢,因为我们能够给出清楚的例子说明“传统”(亚里士多德的)逻辑的局限。

但“战斗”的第二部分——真值函项逻辑的引入——却无法幸免困难。让学生学习如何使用真值表也许是个好方法,向他们强调如下事实:逻辑联结词“合取”和“析取”的“真值表”就是我们在说“和”与“或”的时候我们的“真正所指的意思”。麻烦来自“蕴涵”($\supset$)。我们经历过同样的困难,这种困难当我们还是学生的时候我就从我们自己的逻辑老师的身上体会到了。对所谓“实质蕴涵”怀论该怎么办呢?

对 $q\supset p$ 来说,当 p 是真的,即使 q 是假的且与 p“没有任何关系”,$q\supset p$ 的真值函项值也是真的。所以我们必须承认并且去教这样的陈述:“如果所有瑞士人都是穆斯林,那么法国人就是欧洲人”是“可以接受的”的陈述,并且它还是一个真的陈述——当然没有任何人会这样说——甚至一名“外延逻辑学家”对他妻子也不会这样说。

我们很快学会怎样使学生相信:尽管由“$\supset$”的真值函项的定义而得到的结果看上去似乎有点怪诞,但没有什么可担心的。我们以如下几个步骤来处理它。首先,我们回避“蕴涵”一词的通常涵义,以“条件”(conditional)一词取而代之。然后,我们把条件词

[1] 弗雷格(G. Frege)引用了E. Schröder的*Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*,Leipzig,1873。参阅G. Frege,*The Foundations of Arithmetic*,英译者J. L. Austin,第二次修订版p. xx各处之有关论述,New York:Harper & Bros.,1960。(J. E.)

“$\supset$”与通常的读法“如果……则……”相分离。再后，我们甚至避免使用任何真值表去引入“$\supset$”，只说“$p \supset q$”不过是$p \cdot q$的省略，如此，“·”和“—”我们就能保持唯一更合适的真值表。随后，我们提出如下忠告：不要把“$\supset$”和通常的“如果……则……”当作同义词：一个真正的科学家不需要“如果……则……”来进行他的研究。我们这个时代第一流的逻辑学家奎因(W. V. O. Quine)以值得称赞的简洁语言表达了全部上述观点：

> 让我们首先把形式逻辑描绘为一名假设的个体(物理学家、数学家等)的研究活动的一个阶段。现在，这一假设的个体对普通的语言很感兴趣。再让我们假设，他只是把它作为研究物理学、数学和其他科学的一种手段。后来，当他发现一种更方便的不寻常的语言策略之际，他很高兴终于离开了普通的语言，这种不寻常的语言策略同样适合于他在系统表述和发展他的物理学与数学等等时的需要。他放弃“如果……则……”而选择了“$\supset$”，不再坚持认为它们是同义的这种错误观念；他做出了改变，这仅仅是因为他发现他在进行的具体的科学研究工作时，他一直需要使用“如果……则……”，这一目标碰巧也可以由一种略有不同的“$\supset$”的使用和其他策略进行令人满意的操作。他使用它并做了其他一些改变，使其科学研究变得简化而效率提高，使他的算法获得了最大化的简易性，以及最大地扩大了他对他目前所做工作的理解。他并不在意他的逻辑的符号作为一种语言的反映是怎样不合适的，但只要它可以被用来为所有特殊的需要服务就行，否则，对这些需要来说，他在进行他的科学研究时就会依赖于自然语言。他甚至不需要把这些自然语言转译成逻辑记号，因为他已学会以他的逻辑记号去直接思维，或甚至(这当然是美妙之事)让它去为他思维。①

30年前的逻辑学教师可能被奎因的这番话说得放下心来。然而，我们当中从事经验科学的那些人却并不对他所说的感到同样的放心。只有一名“纯”逻辑学家(或，就这件事而言，一名“纯”数学家)才能“让逻辑记号为他思维”。真正的物理学是不可能从这种“思维”中产生的。这种令人不舒服的感觉还没有消除，其他的困难又接踵而至了：即运用“$\supset$”的真值函项定义的某些结果并不与科学理论的实际建构相一致。最严重的情况是由公式$p \cdot \bar{p} \supset q$的真值函项之有效性所引发的，这一公式表明：借助于断言矛盾，一个人就可以断言任何的陈述。这样，逻辑就变得不足道了。

这一结论不仅是一个“奇怪的结果”，而且是站不住脚的。在物理学中它不是真实的。例如，如果一个理论包含一个矛盾，则任何的断言不管它是什么就可以在此理论之内成立。当然，一名“纯”形式逻辑学家可能回答：“你现在正是应用‘如果……则……’的表达方式，你不是已经同意把‘$\supset$’与‘如果……则……’分开了吗，所以你的结论是不正确的。”然而，奎因说的是“物理学家、数学家、等等”(原文如此！)，只要在他们自己的研究有要使用“$\supset$”时，就可以使用它。那么我们到底能赋予对于任何q的“$p \cdot \bar{p} \supset q$”

① 奎因(Quine, W. V. O.)：斯特劳森先生的逻辑理论(“Mr Strawson on Logical Theory”)，*Mind*，1953，63。

之有效性以何种意义呢？

面对这种"矛盾"，安德森和贝尔纳普提到克里尼(S. C. Kleene)说过的一段话(大意是)：在奎因的《数理逻辑》(*Mathematical Logic*)第一版中，罗瑟(B. Rosser)能推断出布拉里-弗蒂(Burali-Forti)悖论①，而不是康托尔(Cantor)悖论②。这显然意味着罗瑟和克里尼两人都接受了如下事实：包含一个矛盾(布拉里-弗蒂悖论)的逻辑理论并不蕴涵任何陈述(命题)(例如，康托尔悖论)。

以上的这种考虑已引导某些逻辑学家对真值函项的合适性提出疑问。在逻辑中重新引入"内涵"的努力在20世纪50年代末就开始了，现已逐渐发展成为另一种显著不同的逻辑理论。这种发展的最广泛的表现可以在安德森和贝尔纳普的著作中找到③，它发生在阿克曼(W. Ackermann)发表论文"严格蕴涵的建立"(*Begrundung einer strengen Implikation*，1956)④的二十年之后。

2. 相干与必然的逻辑

我们将以"相干与必然的逻辑"为题，尝试对本书提出的基本思想作一个非常简短的总结。当然，它是非常不完全并且不很准确的。我们这样做是为了展示在这样一种逻辑与皮亚杰的逻辑研究两者之间有一种会聚。我们强调"会聚"一词，因为我们并不认为由安德森和贝尔纳普所提出的各种可能变式的相干逻辑是皮亚杰逻辑的形式化。我们甚至也不知道，如我们在第十章中所指出的，"皮亚杰逻辑的形式化"其意义所指到

① 本奇(Bunch, B. H.)在其《数学的错误和悖论》(*Mathematical Fallacies and Paradoxes*)(New York: Yan Nostrand Reinhold, 1982)中写道，"布拉里-弗蒂悖论当它出现在奎因所发明的逻辑系统中的时候，这是很不令人满意的，他感到在这系统中要被迫做出重大的改变。"

"布拉里-弗蒂悖论产生于如下事实，你可以从每一前面的序数出发建立一个新的序数，这个序数的系列也有一个序数。这个序数应该在这个系列的某个地方。但就像在证明一个集合的子集合的数目比该集合之元素的数目更大时的集合丁一样，这个序数也可不在序数的这个系列中。这是一个矛盾，但在这种情况下，与上述证明不同，不存在对矛盾的假设——除非放弃整个理论。"(第129—13[illegible]页)(J. E.)

② 本奇(同上，第13[illegible]页)把康托尔悖论总结如下："康托尔为我们揭示：对无论什么集合，这集合的子集的集合包含有比该集合本身更多的元素。那么对于所有集合的集合呢？……"

"由于所有集合之集合包括了一切可能的集合，所以它的每个子集合肯定都是其元素。因此，不可能有比所有集合之集合的元素更多的子集合。"(J. E.)

③ 安德森(A. R. Anderson)和贝尔纳普(N. D. Belnap)：《衍推：相干与必然的逻辑》(*Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*)，Princeton and London: Princeton University Press, 1975.

④ 阿克曼(Ackerman, W.)："严格蕴涵的建立"("Begrundung einer Strengen Implikation")，符号逻辑杂志(*Journal of Symbolic Logic*)，1956，21，第113—128页。

底是什么。尽管如此，在相干逻辑（简写为 LR）和运算逻辑（简写为 LO）之间的会聚，它对我们来说似乎并不仅仅是一次在解决关于逻辑理论的结构中某些关键问题时的途中巧遇。我们应该稍稍向前跨越一步。

LR 和 LO 之间的会聚体现在三个基本方面①：

(a) 逻辑开始于推理，而推理主要是意义之间的蕴涵。

(b) 命题逻辑中的逻辑联结词是经由推理（即蕴涵）引入的。

(c) 真值函项逻辑只是命题间的非常多的可能联系中的一种特殊情况；其中某些联系可能较之另一些联系更合适于描述科学推理中命题之间的关系。

让我们从 LR 谈起。安德森和贝尔纳普把那些希望重新恢复"如果……则……"全部权利，使之返回到逻辑理论的逻辑学家的群体联合在一起。他们希望能有这样一个逻辑系统，其中"蕴涵"和"条件"的意义非常接近于它们在日常语言中的意义（假定这些日常语言远不是内部一致和精确的）。为此他们引进了"衍推"（entailment）的概念以取代以如下一些语句所表示的逻辑蕴涵概念：如"如果……则……"、"意蕴（implies）"、"使之有（entail）"等，以及对这些结构的回答使用诸如"所以"、"由……而得出……（it follow that）"、"因此"、"因而"等这样的逻辑词句。他们采用"→"这一符号，"$A \to B$"被解释成"A 衍推 B"之意。②

为了实现以上企望达到的目标，需要有两个条件才能断定 $A \to B$：即相干和必然。一个"纯衍推演算 $E_{\to}$"就是"在某种明确的数学意义上具有必然和相干的概念"③。

蕴涵"$A \to B$"成为"必然的"，这一条件超越了真值函数逻辑所使用的"有效性"的思想。我们可以说"必然性"在这里指的是一种"必然的有效性"。一个必然的蕴涵因此要求 A 和 B 具有"某些共同的东西"——它们不能彼此完全无关，如在所谓实质蕴涵的情况下。这就要求 B 是与 A 有关系的（相干的）。

指出如下一点是十分重要的："相干"可以给出独立于"必然"的定义，而一个并不包含相干的"必然的蕴涵"的定义在对"自然蕴涵"希望进行的那种形式化中是不可接受的。因此，很显然，无论何时当我们提及"→"这种必然的关系，我们指的就是一种"带有相干的必然性"。

把"必然性"的要求与"→"这种关系联系起来的思想，早在 1932 年就由刘易斯（C. I. Lewis）提出来了，后被引入到模态逻辑之中。为了实现其目标，刘易斯将一个一元算子"□"作用于一个真值函项关系上。于是，"$A \to B$"（其意是指：A 必然蕴涵 B）就被解释为"$\Box F(A,B)$"，这里的 $F(A,B)$ 是 A 和 B 之间的一种真值函项关系。然而，一个像

① 关于这三个基本方面的这一段文字在本书 1987 年法文版中没有。

② 同上，第 5 页。

③ 同上，第 6 页。

"□"这样的算子不可能满足 A 和 B 之间相干之要求的。

LR 不考虑模态算子，它采取了另一条途径达到保留带有相干之必然性的衍推解决办法。这条途径是在一个可接受之推理的系统的基础上来定义"→"的。因此其出发点就是一个自然演绎的系统，于是推理成了逻辑的中心点(node)。

安德森和贝尔纳普已经揭示——以一种可信服的方式——对根岑(G. Gentzen)的自然演绎系统作一些微小的修改后，就成了这样的系统：(a)在如下意义上，它是"可接受的"，即：它适合于表示那种在科学研究中实际使用的推理(不管若以更"精确"的语言表示，它可能意味着什么)；(b)允许建立一个形式系统，只要用来定义"自然蕴涵"以及所有其他的逻辑联系的工具具有所要求既是相干的又是必然的之特征。

以上所建议的构造也就是主张：$A \to B$ 成立，当且仅当存在一种在演绎上从 A 到 B 联结起来的可能方式。这个意义上的"衍推"于是成了可演绎性(deducibility)的逆运算(converse)。

这一方法是建立在"衍推引入"($\to I$)的规则基础上的。其大意是指：不管何时只要存在一种从 A 到 B 的推演，或者，换言之，存在一种从假设 A 出发的 B 的证明，那么我们就能说 $A \to B$，其证明可用如下格式表示：

— A　　　　假设
•
•
•
B　　　　结论

这里，我们必须根据非常严格的规则来填补其中的黑点：实际上，一个自然演绎的系统就是由一组规则所定义的，这些规则使我们能把上述黑点所代表的间隙填满。

这样一个系统的例子就是安德森和贝尔纳普所指的称作 FE 的系统，它有如下五个规则：③

1. 衍推引入规则($\to I$)：如果一个像上面这样的格式是一个从 A 到 B 的有效的推演，那么 $A \to B$ 就可从那个推演中得出。

2. 衍推消除规则($\to E$)：只要 $A \to B$ 一经断定，我们就有权从 A 推出 B。

3. 假设规则：在一个从某个假定的 A 开始的推演过程中，我们也可以开始一个新的推演，作为一个子证明，它也可以具有一个新的假设 B

① 参阅在安德森和贝尔纳普所著《衍推：相干与必然的逻辑》一书§29.12，第162—163页，梅耶(R. K. Meyer)所写的部分："相干不可还原为模态。"

② 即 $A \to B$ 当且仅当 B 可以从 A 中推演出。(J. E)

③ 安德森，贝尔纳普所著，《衍推：相干与必然的逻辑》，第7—9页。

4. 重复规则：我们可以在一个外部的证明或在一个子证明之内重复我们自己。

5. 重述规则：在外部证明中从 A 引出一步（如规则 3 所指出的）也可以在子证明中的假设 B 之下予以重复。

以下是一个关于衍推传递律之证明的例子（附加的直线用来把两个子证明分开）：②

1	$A\rightarrow B$	假设
2	$B\rightarrow C$	假设
3	$A\rightarrow B$	1 重述
4	A	假设
5	$A\rightarrow B$	3 重述
6	B	4, 5 $\rightarrow E$
7	$B\rightarrow C$	2 重述
8	C	6, 7 $\rightarrow E$
9	$A\rightarrow C$	4, 8 $\rightarrow I$
10	$(B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C)$	2, 9 $\rightarrow I$
11	$(A\rightarrow B)\rightarrow[(B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C)]$	1, 10 $\rightarrow I$③

尽管以上的证明是令人满意的，但这样的系统却是不能令人满意的，因为它是如此顾及“证明”，而此处所断言的最后蕴涵并不满足既是必然又是相干的条件。因此，除了对重述规则要加上一些严格的条件之外，还需要一种技术，即允许一个 A 仅当 A 与 B 在 A 是被用于达到 B 的意义上是相干的时候被引入。这一技术是使用几组数字作为公式的下标。也许可以有我们所需的许多套叠的子证明，但每一个子证明都必须有一个不同的数字来表示其假设，它的每一步应该按照这些所标的数字来进行。这样导出的系统 FE，使上述的规则以如下方式进行了修改：④

1. 假设：一个步骤可以作为一个新的子证明的假设引入，每一新的假设都接受一个单元素集 $\{k\}$ 作为其下标，此处的数字 k 也是新的。

2. 重复：A_a 可以被重复，保留相干标记 a。

3. 重述：$(A\rightarrow B)_a$ 可以重述，保留 a。

4. $\rightarrow E$：从 A_a 和 $(A\rightarrow B)_b$ 推断 $B_{a\cup b}$⑤。

---

① 规则 5 似乎无意之中从 1957 年的法文版和英文手稿删去了。在这两种版本中是如此表述的：提及 5 个规则但仅列出 4 个。规则 4 在以下列出的修订的规则中，也被发现如同规则 2。以上规则 4 的说法与安德森和贝尔纳普的看法相近。（同上，第 7 页）（J. E.）

② 同上，第 9 页。

③ 这里的 A、B、C 是语句变量，不是数字（值）的或物体的变量、谓项，或常数。它们通常在皮亚杰的著作中，是以大写字母来表示。所以，在句子 A、B 和 C 之间的衍推的传递性不应与客体之间关系的传递性相混淆，后者通常写成 $A>B>C$ 和 $C<B<A$。（J. E.）

④ 安德森，贝尔纳普所著，《衍推：相干与必然的逻辑》，第 23 页。

⑤ $\rightarrow E$（衍推消除）要求：结论的下标 $\{1,2\}$ 表明 B 是相干的来自 A 和 $(A\rightarrow B)$。因此，我们可以从 $(C\rightarrow A)_{1}$ 和 $(A\rightarrow B)_{2}$ 推断出 $(C\rightarrow B)_{\{1,2\}}$。（同上，第 7 页）。（J. E.）

5. $\rightarrow I$：从一个建立在假设 A_k 基础上的 B_a 的证明推断 $(A \rightarrow B)_{a-k}$，只要 k 是在 a 之中。①

这些规则的应用是非常麻烦的，但它证明了：这样一种自然演绎系统（作者称之为 $FE_{\rightarrow}$）是等价于一种建立在以下法则上②的纯衍推演算（$E_{\rightarrow}$）的：

$E_{\rightarrow}$：1. $A \rightarrow A$（同一性）

$E_{\rightarrow}$：2. $(A \rightarrow B) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)]$（传递性）

$E_{\rightarrow}$：3. $(A \rightarrow B) \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C]$（限定的断定）

$E_{\rightarrow}$：4. $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$（自我分配性）

一旦这一逻辑的组件建立起来，LR 的构造就一步步继续进行下去。首先，否定被加到衍推（$E_{\rightarrow}$）上，这表明：一种衍推和否定的演算能够独立于其他真值函项连接词而进行。其次，通过考虑"一阶衍推"，即公式 $A \rightarrow B$，这里的 A 和 B 可以是不包含衍推的任何层级的真值函项而把其他的连接词包括进来。最后，这一系统的所有组件可以一起组合成一个单一的衍推演算（$E_{\rightarrow}$），它保持了必然性和相干的必要条件，因而避免了外延逻辑的悖论。

上面提到的第二步对我们具有特别的意义。作者称这些有效的一阶衍推为"重言衍推"（tautological entailments）。这里主要关心的是说明当前件和后件都是纯真值函项时，从前件到后件的相干。处理这个问题的方法是要考虑两者的内容。让我们非常简单地看看它是如何进行的。

我们来看一个由命题变元组成的有限集 $p, q, r, \cdots$。以下的定义可以导出：

原子（ATOM）：一个命题变元或其否定（即：$\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \cdots$）

初始合取：如 $A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n$ 这样的一个表示式，这里的每一个 A_i 都是一个原子。

初始析取：如 $B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n$ 这样的一个表示式，这里的每一个 B_i 都是一个原子。

初始衍推：一个衍推 $A \rightarrow B$，这里的 A 是一个初始合取，B 是一个初始析取。

衍推范式：一个衍推 $A \rightarrow B$ 具有 $A_1 \vee \cdots \vee A_n \rightarrow B_1 \cdot \cdots \cdot B_n$ 的形式，这里每一个

---

① $\rightarrow I$（衍推引入）减去一个元素，如它从两个元素的集合{1,2}减去{1}，表示一个假设｛导入的前提已被合并和排除。因此，从上一脚注的结论中，合并了假设{1}，我们就能够推断[$(C \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow B)$]。这一下标（用来认出未排除的假设 $A \rightarrow B$，它仍是被假设的），阻止了不相干性（irrelevance），而这一不相干性是真值函项、$FH \rightarrow$ 和其他形式演绎能力系统所允许的，例如，从假设 B 和公理 $A \rightarrow A$ 去推断 $B \rightarrow (A \rightarrow A)$。（同上，第 18 页）。（J. E.）

② 这里的 A、B、C 是语句变量，不是数字（值）的或物体的变量、谓项，或常数。它们通常在皮亚杰的著作中，是以大写字母来表示。所以，在句子 A、B 和 C 之间的衍推的传递性不应与客体之间关系的传递性相混淆，后者通常写成 $A>B>C$ 和 $C<B<A$。（J. E.）

③ 安德森，贝尔纳普所著《衍推：相干与必然的逻辑》，第 24 页。

A_i 是一个初始合取，每一 B_j 是一个初始析取。

√显重言初始衍推：一个初始衍推 $A\to B$，且 A 的某些(作为合取支的)原子与 B 的某些(作为析取支的)原子是相同的。

√显重言衍推范式：一个衍推 $A_1 \vee \cdots \vee A_m \to B_1 \cdot \cdots \cdot B_n$，这里，对每一个 A_i 和 B_j，$A_i \to B_j$ 都是显重言的。

衍推范式当且仅当是显重言的，它们才被认为是有效的。确定一阶衍推有效性的程序是把它们转换成范式，然后，通过应用以下的规则建立其有效性。

规则Ⅰ：$A\to B$，这里 A 和 B 都是原子，当且仅当 A 和 B 是同一原子时，它才是有效的。

规则Ⅱ：$A\to B$，这里 A 是一个初始合取，B 是一个初始析取，当且仅当 A 的某些元素 A_i 与 B 的某些元素 B_j 相同，它才是有效的。

例如：$p \cdot q \to q \vee r$ 是有效的

$\bar{p} \to q \vee p \vee r$ 不是有效的

$p \cdot \bar{p} \to q$ 不是有效的

规则Ⅲ：一个衍推 $A\to B$ 是有效的，当有一个范式 $A_1 \vee \cdots \vee A_m \to B_1 \cdot \cdots \cdot B_n$，对于它的每一对 A_i 和 B_j，衍推 $A_i \to B_j$ 按照规则Ⅱ是有效的。

例如：$p \cdot \bar{p} \cdot q \to p \cdot q$ 是有效的

$(p \vee q) \cdot (q \vee r) \to (p \vee r)$ 不是有效的①，因为 $q \cdot q \to p \vee r$ 不是有效的，于是前式的范式 $(p \cdot q) \vee (p \cdot r) \vee (q \cdot q) \vee (q \cdot r) \to (p \vee r)$ 不是有效的。让我们稍稍细看以上这些规则的应用。

(a) 有效衍推的例子

(ⅰ) $(p \cdot q) \vee p \to (p \vee p) \cdot (p \vee q)$ 是有效的，因为以下衍推是有效的

$p \cdot q \to p \vee p$

$p \cdot q \to \bar{p} \vee q$

$p \to p \vee p$

$p \to p \vee q$

(ⅱ) $p \cdot q \to q \cdot (r \vee p)$ 是有效的，因为以下衍推是有效的

$p \cdot q \to q$

$p \cdot q \to r \vee p$

(b) 非有效衍推的例子

(ⅰ) $(p \cdot p) \vee q \to q$ 不是有效的，因为 $q \to p$ 是有效的，而 $p \cdot p \to q$ 不是有效的。

(ⅱ) $p \to p \cdot (q \vee q)$ 不是有效的，因为 $p \to p$ 是有效的，而 $p \to q \vee q$ 不是有效的。

指出以下一点非常重要：以上规则会导致这一结果，即所有有效的衍推都是重言

① 原文似有误：$(q \vee r)$ 被错印为 $(q \vee r)$ 了。——译者注

的，而并非所有的真值函项（外延）演算的重言式都是有效的衍推。关于这一点，以下的例子是很有启示性的：

$$p\cdot q\rightarrow(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$$

不是有效的，尽管它表示了应用于 $p\vee q$ 的情形（它等价于 $p\cdot q$）的"$\vee$"的真值表。为了说明这一点，可把以上表示式简化为范式以证明前件 $p\cdot q$ 中的每一原子并不衍推后件中的每一个合取式。

尽管如此，但以下的衍推是有效的：

$$(p\cdot q)\rightarrow(p*q)\rightarrow(p\cdot q)\vee(p\cdot q)\vee(p\cdot q)$$

这里的 $p*q$ 是完全肯定：

$$p*q=_{df}(p\cdot q)\vee(p\vee q)\vee(p\cdot\bar{q})\vee(\bar{p}\cdot\bar{q})$$

以上所描述的这种重言衍推（一阶衍推）可以形式化为以下形式：

衍推：

规则：从 $A\rightarrow B$ 和 $B\rightarrow C$ 推出 $A\rightarrow C$

合取：

公理：$A\cdot B\rightarrow A$

$A\cdot B\rightarrow B$

规则：从 $A\rightarrow B$ 和 $A\rightarrow C$ 推出 $A\rightarrow B\cdot C$

析取：

公理：$A\rightarrow A\vee B$

$B\rightarrow A\vee B$

规则：从 $A\rightarrow C$ 和 $B\rightarrow C$ 推出 $A\vee B\rightarrow C$

分配：

公理：$A\cdot(B\vee C)\rightarrow(A\cdot B)\vee C$

否定：

公理：$A\rightarrow\bar{\bar{A}}$

$\bar{\bar{A}}\rightarrow A$

规则：从 $A\rightarrow B$ 推出 $\bar{B}\rightarrow\bar{A}$

这些重言衍推的形式化只是衍推的一个完全的演算的一部分（一个组件）。由于应用真值函项联结词但通过一种内涵的蕴涵关系这一特点，使我们避免了著名的纯外延的陷阱。

一个包括上面提到的各种组件的系统可以由各种方式建立起来。安德森和贝尔纳普提出的 E 系统有 11 个假设条件及两个规则：

---

① 安德森，贝尔纳普所著，《衍推：相干与必然的逻辑》，第 158 页。

② 安德森，贝尔纳普所著，《衍推：相干与必然的逻辑》，第 232 页。

$\rightarrow E$:给定 $A \rightarrow B$,从 A 推断 B

$\& I$:从 A 和 B 推断 $A\&B$(这里的符号"&"代表合取,上面是以"·"来表示的)

为何需要这两个规则,作者对此进行解释:

E 系统被设计用来包含形式逻辑的两个分支,这两个分支是(这一点我们在整个过程中一直常说的)根本上不同的。第一个分支,在历史上,它关心衍推中的相干和必然性的问题,相干和必然性两者从很早时代起就处于逻辑研究的基础。第二个分支,外延逻辑是较近代的发展,对它的注意部分的是由于如下事实的结果(我们相信如此):第一种逻辑是过于顽固了(recalcitrant)——纯外延逻辑能够以一种数学上有趣的、完全忽视相干和必然问题的方式发展起来,这使逻辑首先脱离了它最初的基础。由于 E 涵盖了两种逻辑的领域,这就不令人奇怪:两个原始规则是需要的:第一个是 $\rightarrow E$,它与真值之间的联结有关,在这里,相干并不是一个问题。①

除了把内涵的和外延的逻辑两者的特点相结合之外,这种建立逻辑形式的方法也具有如下特点:它也可以引入其他种类的逻辑联结词,这些联结词具有真值函项联结词的某些性质,而并不具有其全部性质。因此,内涵联结词在逻辑体系中找到了一个自然的位置,它们有权取得合法地位,如同外延逻辑的形式系统在当前教科书中那样。

众所周知,由真值函项关系表示的所谓析取三段论:

$$A \cdot (\bar{A} \vee B) \rightarrow B$$

如果用它来表示一名科学家(更不用说一名"普通人")进行其推理的方式,会出现各种困难,特别是,接受这一析取三段论会产生意想不到的结果:

$$A \cdot \bar{A} \rightarrow B$$

对任何 B,我们已经拒绝了,因为它不能表示科学理论的逻辑结构。然而,当不用一种外延的"∨"(它可能把彼此完全独立的命题 A 和 B 联系起来),我们定义另一种"或"来取代它,这种"或"由"∨"表示,以此来表示上式,即:

$$[A \cdot (\bar{A} \vee B)] \rightarrow B$$

它具有

$$[A \cdot (A \rightarrow B)] \rightarrow B$$

的意义,其中"→"为(内涵的)衍推,这意味着:"∨"被定义为

$$A \vee B =_{Df} A \rightarrow B$$

另一方面,如果我们接受关于合取和析取的德·摩根(De Morgan)律,以上"∨"的定义

① 安德森、贝尔纳普所著,《衍推:相干与必然的逻辑》,第 234 页。

就变成另一对应形式，它类似于由以下给出的内涵的合取（由○表示）：[1]

$$A \bigcirc B =_{Df} \neg(\neg A \vee \neg B) = \neg(A \to \neg B)$$

这样一种联结词已在刘易斯、古德曼和其他学者的著作中被提到。安德森和贝尔纳普采用"合成"（cotenability）一词来命名这种联结词。虽然，它具有外延合取的某些性质：交换性、结合性和传递性。然而，它不具有其他一些性质，特别是 $A \bigcirc B \to A$ 不是有效的。

在下一节我们将回到这一问题上。

我们对 LR 的某些部分的勾画只是试图引入介绍一些构造逻辑系统的丰富方法的基本元素。这样的方法论是一种纯形式的方法，它的作者把它表示为规则的集合，它们既是为达到某种目的的特别的工具，也是工作的假设，它有助于看清任何确定的规则会使"我们达到哪里"。这种研究逻辑的高度灵活的方法对"发生认识论者"来说是一个有价值的工具，发生认识论者正在那些未受逻辑理论影响的成人身上寻找"自然逻辑"之根。

3. 相干与必然的蕴涵逻辑和意义蕴涵逻辑之间的关系

在前一节，我们已经提到了在衍推逻辑（LE）与运算逻辑之间的某种"聚合"。关于后者，我们必须对皮亚杰在《运算逻辑试论》一书[2]（LO）中所写的和根据意义逻辑对之所做的修改之间做出区别。

这一"修改"应该主要体现在 LO 中与命题逻辑有关的部分，它在此书所提供材料的基础上，与一种意义逻辑相结合而重新撰写这些内容。显然，这是一项有待完成的工作，但我们相信，应继续走的路是清楚的。我们将把这一新版本的运算逻辑称为 LO′，它是产生于 LO 和意义逻辑的融合。

在 LE 和 LO（不用说，LO′更是如此）之间的聚合可以在逻辑理论建立的方式中，寻觅到它的起源。逻辑，根据经典的《数学原理》（*Principia Mathematica*，PM）的传统说法，它诞生在罗素（Bertrand Russell）的逻辑原子论的哲学时期。随后，这一哲学立场又成为物理科学中占统治的范式直到19世纪末。没有人怀疑逻辑理论的"建筑砖块"就是基本的命题及通过简单"联结词"而构成的命题组合；也没有人怀疑基本的命题被称作"原子"，它们的组合被称为"分子"。以这种方式开始，PM逻辑必须在纯语言方向

---

① 因为使用德·摩根律的类似方法：$p \cdot q = \neg(\neg p \vee \neg q)$，根据上述 $\vee$ 的定义，$A \bigcirc B =_{Df} \neg(\neg A \vee \neg B) = \neg(A \to \neg B)$。(J. E.)

② 皮亚杰（Piaget，J.）：《运算逻辑试论》（*Essai de Logique operatoire*），Paris，Dunod，[illegible]年第一版。此书为格里兹（J. B. Grize）根据皮亚杰所著《逻辑通论》（*Traite de Logique*）（[illegible]）一书所做的修订版。

寻找它自己的基础。在这方面，逻辑经验论是非常合适的。逻辑经验论通过展示其自己的逻辑哲学，清楚说出了这样一种处理逻辑的方法其自然的认识论的含义是什么。实际上，根据这一哲学的观点，逻辑联结词表达的不是别的什么，只是我们的语言的内部结构。这一认识论观点使之具有另一含义（这是我们在此处对之感兴趣的原因之一）：从这一立场产生出的命题逻辑必定是外延的。因而外延性（extensionality）并不是现代逻辑的缔造者们随意决定的。它是由逻辑缔造者的认识论立场所引导的一种自然的选择。

我们在 LE 和 LO′之间发现的第一点类似是：它们对逻辑的表现均表示不满。然而，各自的不满的理由却是不同的。在 LO′中，逻辑的建造是由认识论的考虑所指导的；而在 LE 的情况下，其构造是纯形式的。尽管存在这一差异，但两者都把推理（inference）视为建造一个逻辑的开始过程。

从发生认识论的观点来看，当一名儿童能够预期动作之间存在某种关系的时刻，逻辑就已开始了（关于这种关系什么时候以及怎样发生，这是有待发生心理学去回答的问题）。动作的预期意味着推理。皮亚杰的权威说法是"在所有水平上，甚至在最原始的水平上，任何知识的形式都包含一种推理的（inferential）性质，不过它也许是内隐的或是原始的"。这种推理的性质是他的认识论理论的基石。我们坚持以下立场——鉴于我在第十章所说的观点，这一点怎么强调也不为过分——这是一种建立在发生心理学的经验的发现之基础上的认识论的主张。

因此很显然：从发展的观点来看，逻辑在命题出现之前很久就已开始了。逻辑的关系不是建立在语言关系基础上的，命题演算不能声称自己总必然地占据逻辑学教科书之开篇第一章的位置。

推理已经涉及一种逻辑的关系：蕴涵。正如本书所揭示的，蕴涵可首先在动作水平上发现（事实上，动作之间的关系就是一种蕴涵）。命题之间的蕴涵出现得很晚。然而，这两种情况在本书各章所解释的意义上，它们都意指蕴涵——"纯"外延性一开始就在此被排除。

LE 以一种类似的方式进行思考，但它有不同的理由。其主要的思想是要离开外延性以避免它的破坏性的后果：实质蕴涵悖论、析取三段论的困难等。从推理开始以及在推理的基础上确定（可接受的）蕴涵即衍推，实际上是其所走的道路。但这样做是在严格的形式基础上，通过确定非常精确的规则完成的。它们看上去似乎有一点像人为的，但这正是它们的特点：特别是正是由于这些规则才能保证达到它们想要达到的目标。

我们将回到对这一点的讨论上，但首先需要作两点说明。首先要说明的是：通过在"可接受的"推理的基础上在 LE 中引入衍推关系，于是随后引入的各种逻辑联结词（与命题之间的大量可能的衍推相对应）就被极大扩展了。联结词的这种多样化是十分符合在心理发生水平上所发现的情况的，并且它成为 LO′的本质特点。

第二点说明（当然绝非不太重要的）是：通过以上的程序，外延联结词找到了它们适

当的位置，它们被引入但不再有传统命题演算的著名悖论。

LE 和 LO′的这些特点事实上已经在《运算逻辑试论（LO）》一书中出现。不过对有些人来说，这种说法也许被认为是错误的，因为他们打开皮亚杰的这本书并发现：命题演算仍是外延地呈现的，而且其演算的结构是通过分析真值函项和真值表而得到的。造成这种情况乃是缘于如下事实：LO 包含了一种奇特的元素混合，它们中有些属于外延逻辑，有些则不是。在这方面，我们敢于说：LO 的这一部分的内容，在其写作的方法上，并不是自然地沿循前面的章节。而且，我们相信：这种命题逻辑表达是对现时怀特海—罗素传统中的逻辑呈现方式所做的一种让步，而且我们相信，皮亚杰从未对这样一种解决方式感到心安。

我们记得皮亚杰在今年初，在国际发生认识论研究中心，当本书中的研究要开始报告时说过的一句话——“我们必须澄清我的逻辑。”这是对我们以上看法的一个证明。皮亚杰处理 LO 中命题演算时使用“混合”的方法表明了他是在对外延逻辑持有很大戒备的情况下使用它们的。当然，这也是事实：他对逻辑联结词引入了外延的定义，特别是，他是通过真值表来表示蕴涵定义的。尽管如此，他对命题逻辑的解释（建立在类之间的包含关系的基础上）并不受实质蕴涵悖论之累，而且，它似乎也是采取了一种 LE 意义上的衍推的解释。

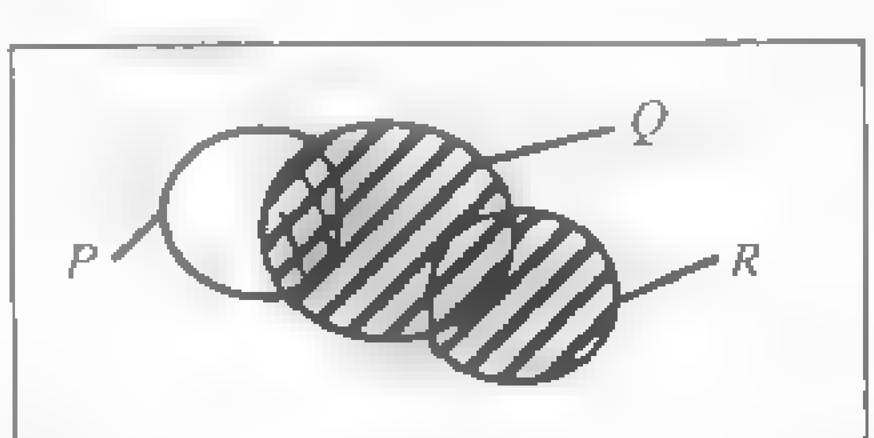
在这一背景下，LE 与 LO（以及——更有理由说——LO′）之间的聚合并不是完全重合的。我们刚才提到的 LO 的解释为衍推逻辑的“规则”提供了清楚的意义，这些规则在 LE 中出现似乎仅仅是作为一些特别的禁忌，采用这些禁忌是为了达到某种预设的结果。而这在 LO 中并不是十分明显的，但在 LO′中则变得更明确了。

事实上，对一种“可接受的”衍推来说，其规则已经在前一节中提到，它只是表达了某种关系，这种关系皮亚杰把它描述为“一个部分与一个整体或与其自身的嵌套关系”。在规则Ⅰ（本书第 127 页）的情况下，对应是不重要的，因为它只是表示了一个类与其自身的嵌套。

关于规则Ⅱ，以如下形式的典型的例子就足以说明：

$$P \cdot Q \to R \vee Q$$

其根据“类”做出的解释是



它与 $P \cap Q$ 嵌套于 $Q \cup R$ 相对应。

规则Ⅲ只是规则Ⅱ的扩展，它可以归结为是后者的连续的应用。

运用以上解释，衍推的规则不再是什么特别的规则而获得了清楚的意义。

当其他联结词通过衍推而被引入，以及当我们试图去分析由此产生的命题演算的时候，有一个问题出现了。显然，存在许多可能的公理系统，它们可以在内涵蕴涵的基础上建立起来。安德森和贝尔纳普仅描述和分析了在近 20 年来已经提出的多种系统中的很少一部分。他们对这些公理系统进行了系统的研究，揭示了它们的内部的联系和我们所能进行的演算类型。

我们已经提到对 LO 具有十分重要意义的两个成果。首先，衍推，即*内涵的*蕴涵并不排除以“非”与“和”的外延解释进行的演算。其次，有许多可能的内涵的演算方式。

与我说的第二点有关，它提出了关于确定某个联结词是否“真正”是一个“合取”或是一个“析取”的标准问题。上一节提到的联结词“合成”（“○”），它并不被安德森和贝尔纳普认为是一个合取，因为从 A○B，我们不能推断 A。然而，我们相信，“○”可以被看作是表示 A 和 B 之*合取*的唯一正当的手段——当 A 和 B 属于一个系统，在这个系统中，其*部分*不能被肯定独立于它们所属的整体时。在这方面，对 LO′的逻辑特征的某种形式的心理发生的研究就变得非常有用。它们将揭示某些逻辑关系会从中出现之情景的复杂性，并且对这些逻辑关系也可进行某种程度的形式化。

最后，应该再次强调，当前应做的工作是要对 LO′做出清楚的形式化。

第十二章　总的结论

本书的目的是描述儿童对简单问题的一些基本的反应形式，为的是揭示逻辑关系的心理发生根源，这些逻辑关系将导向运算及其在结构中的组成(compositions)。

皮亚杰提出的中心论题是，甚至在最初步的水平上，知识也总是包含某种推理的维度。问题是要去寻找这些推理维度是由什么组成的。答案可以说得非常简单：在最基本的水平上，推理只是意义之间的蕴涵(它被归属于性质，归属于物体和归属于动作本身)。这需要在某种发展心理学的基本成果的基础上对之加以澄清。

1. 意义产生于把同化格式归属于客体的过程中，其性质不是"纯"观察物(observables)，而总是包含一种对"材料"的解释。为与格式的经典定义相一致("一个格式是能在一个协作中被重复和概括化的东西")，我们要说的是：一个物体的意义就是用该物体"能做什么"，这一定义不仅可应用于感知－运动水平，而是也可应用于始于符号功能的前运算水平。然而，意义也是指物体当对它们加以分类或把它们联系起来时等等情况下，能被说到(即描述)什么，以及能被想到什么。

至于动作本身，它们的意义是：根据它们在其所影响到的对象(物体)或情景之中产生的转换，它们会导致(导向)什么。无论涉及的是属性、物体，还是动作，意义都意味着：主体的活动或是与一种外部的、物理的现实，或是与主体自己先前产生的现实(它是作为逻辑-数学实体)进行相互作用。

2. 基本的动作以及更高级的动作，若它们之间彼此没有联系，那么它们就既不能存在也不能发挥功能。因此，动作的格式从来不是孤立状态的。在格式之间——因而在从它们的应用中产生的各种意义之间——存在着各种类型的联系。最一般的一种联系类型就是蕴涵的关系。

在这方面，重要的是要在动作之间关系的两个不同的方面：因果关系和蕴涵关系，做出明确的区分。前者是关注于物体，它们关注的是一旦动作执行后，所观察到的结果。后者则是意义之间的关系，因此它们能被预期。

实际上，从物质的动作及其协调(当运动被执行了，仅仅只有部分的意义从中产生出来)到其结果可能被预期之动作的协调，两者之间存在着一个逐步进步或过渡的过程。在后种情况下，意义正是在预期水平上普遍形成的。换言之，任何意义都需假定和要以某些蕴涵的运用为前提，这些蕴涵并不会损坏命题之间的蕴涵，并会介入从动作协调到推理的组成的早期过渡中。这里我们已有了逻辑的开端。即使一个动作既不是真

的，也不是假的，它只是根据其对于实现某一目标来说是有效性的或者有用的做出评价，但预期中涉及的动作蕴涵却可能是真的或假的，因此，它们从最原始的水平开始构造了一种逻辑。

我们现在可以重新系统阐述我们上面所说的本书的中心论题：存在一种先于命题之形式逻辑的意义逻辑；这样一种意义逻辑是建立在意义之间的蕴涵，或者说(它们说的是同一回事)是建立在动作之间的蕴涵之基础上的。

3. 由儿童先在动作水平上，随后又在命题之间所精心构造的逻辑联系的最具特征化的特点是：这些精心构造是在意义蕴涵的基础上发生的。不管它们是内隐的，还是外显的，这些蕴涵可以在理论上(即从观察者的角度)简化为蕴涵和否定的组合。换言之，在所有水平上，任何逻辑的基础都是推理性的，就意义逻辑而言，它就是自然的推理。

在第一章，我们所获得到的经验研究的结果揭示了三种类型的推理之发展过程，这三种类型的推理表现出完全不同水平的特点：

(a) 预期局限于由可观察的排列或修改的重复(它们在经验上已被观察到的)所允许之物上。在这一水平，主体仅对一个经验物体的领域做出推理或推断。

(b) 预期中的推理，它超越可观察之物和建立在那种即使它们是必然的，但并不提供自己"理由"的蕴涵之基础上。它们是动作蕴涵，这种蕴涵并不是只局限于引出经验抽象的逻辑结果，而是建立在一种"反省的"抽象类型基础之上。

(c) 建立在"理由"或可能的展现之基础上的推理。

另一方面，意义蕴涵经历了一个非常有特点的发展过程。在第七章，对这种蕴涵的形式或层级(阶次)我们做出了区分，发现它们有三种不同的水平：

(a) "局部的"蕴涵：在这种情况下，动作的意义由观察到的结果所决定。蕴涵受限于材料和背景。

(b) "系统的"蕴涵：蕴涵被插入于一个关系的系统中，它是通过一步步的理解所建立起来的。在这一水平，首次出现了对可能性和不可能性的判断(参见第七章的"编织"实验)。然而，这些推理并不足以达于必然的"理由"。必然性和一般性(generality)仍然是未分化的。

(c) "结构的"蕴涵：它们是建立在先前构造之结构的内部组合之基础上。在这一水平，主体对所观察的一般事实，有了一种对"原因"的内在的理解。原来(b)水平上的那种一般的关系现在成了必然的关系。

4. 意义蕴涵还以另一种方式表现出它的二元(维)性。这种动作蕴涵可以采取以下的形式：

(a) 前摄(proactive)蕴涵：它们从涉及的命题(前提)中引出结论，即，它们断言：如果 $A \rightarrow B$，那么 Bs 就是从 A 中引出的新的结果。

(b) 后摄(retroactive)蕴涵:它们不是处理结果,而是涉及原始的条件;它们表示的是如下事实:如果 $A \to B$,那么 A 就是 B 的一个初始条件。

(c) 证明(justifying)蕴涵:这种形式的蕴涵是通过能达于"理由"的必然联结把前述的形式(a)和形式(b)联系起来。

换言之,蕴涵会在三个方向发展——建立在结果基础上的扩大;建立在初始条件基础上的条件作用;导致理由的深化。

5. 一旦符号功能由主体精心做成,则动作蕴涵就可以陈述(命题)的形式进行。因此在陈述之间的意义蕴涵就形成了。同样地,这时的蕴涵仍由意义所决定,不可能被归结为外延。因此,我们能够而且必须建构一种意义逻辑,其中心运算将是"意义蕴涵"。在这种逻辑中,符号"$\to$"用来表示这一性质的蕴涵。当 A 的一个意义 M 包含在 B 的意义中的时候,并且当这一共有的意义 M 是传递性的时候,我们可以用 $A \to B$ 来表示这种关系。在这种情况下,内涵的意义的具体体现("内在性 inherences")就与外延的嵌套相对应,因此也与真值相对应。然而,后者是局部性的并由意义所决定的。因此,根据其作为参照框架的嵌套,就有了一种否定的相对化现象。我们下面将回到这一问题上。

6. 让我们现在考虑意义之间的另一联系,在本书各章的研究报告中对此都有所揭示。这里,我想提及一个重要的研究结果:在运算形成的早期,在动作水平上,运算当然还不能集合成一个结构的整体(如"群集"),但当我们分离地并且在其意义背景中来看待它们就可发现,它们是与命题逻辑的16种二元运算同构的。

这一发现的重要性在于:它可能被用来作为与发生心理学而一直认为的关于"形式运算"阶段的说法相矛盾的根据。事实上,16种二元命题逻辑运算是在11—12岁建构之系统的特征,这是很明确的。发生心理学的这一经典论断是建立在两个理由基础之上的。第一个理由是:假设演绎思维——即一种仅从假设而不是建立在可观察材料的基础上(如在7—10岁的具体运算水平)引出必然之结果的能力——只是在这一水平才开始的。第二个说明它之所以如此晚形成的理由是:16种二元运算是通过反演N和互反R而联系起来的,它们组成了四元群(INRC群,在此群中,C是R的反演,也是同一性运算I的对射),主体可在物理的情景中使用它(例如在著名的"钟摆"实验情景中)。

16种二元组合在动作之间协调的水平上被发现——即在假设—演绎思维很久以前,特别是在使用INRC结构之前——也可以被视为与以上说法相对立的。因为尽管如此,两者的情况是完全不同的。我们在早期水平上所实际观察到的只是动作的16种可能的配对组合,并不存在什么整体的结构,每一种组合是分别根据不同的情景而进行

① 此处在前摄的(proactive)和后摄的(retroactive)蕴涵之间所做的区分与很久以前皮尔斯(C.S. Pierce)所做的区分是一致的。皮尔斯称这两种形式为"预期的"(predictive)和"回溯的"(retrodictive)蕴涵。

的。

7. 因此，主体在各种情景中努力做成的逻辑联系的建构是一个很长的过程。逻辑联结词在这过程中获得了各种可能的解释，有各种不同的"和"，有各种不同的"或"，有各种不同的否定的形式，它们因所涉的"内涵"的不同而有所不同。本书各章中所描述的实验就是试图确认出这些不同的逻辑联系。例如，在第二章关于贴瓷砖的实验中，显然，在动作之间存在着蕴涵、不相容，等等。分析显示：实际上，儿童使用了大约16种二元运算中的11种。本书其他章中所描述的实验显示了另外一些组合，其中包括第二章未涉及的组合。因此，我们观察到"交"、"不相容"等等的早期形成，它们都是在动作水平上，而不是在陈述水平上使用的。这再一次地显示了动作逻辑和动作蕴涵的一般构成作用，其间意义蕴涵的起源远远早于外延蕴涵。

这些初始联系中的每一种最初都是分别形成的，然后，它与其他的结构组件逐渐地协调直至7—8岁以后"群集"的构造。这些最初的结构化（它开始于意义的相互作用），在以下一点上是很有趣的：它们不仅为具体运算水平的群集的形成作了准备，而且也为更复杂的命题逻辑的运算形成作了准备。

8. 现在，由我们举几项关于这些逻辑联结词的研究结果。关于合取，多种研究清楚地揭示了这种类型的联系可以表现为几种不同的形式。一开始，有两种形式的合取。当 p 和 q 都是同一集合的部分并且 p 不能与 q 分离的时候，推理就以"约束合取"的形式出现。另一方面，当一个联系和一个合取在两个项目之间并非必然存在的时候，就使用"自由合取"的表达方式。

显然，上述区别在非常原始的水平上就开始了。最简单的情况涉及属性的意义。它们可以被定义为在一个观察到的性质与同时得到或已知的属性之间的相似与差别的全部集合。因此，属性可以通过前运算的合取而联系起来，用皮亚杰的话说，它可以是"约束的"合取（即必然的，以一种相互蕴涵的方式，如在形状和大小之间），或是"自由的"合取（只有条件的，如在形状和颜色之间）。在这两种形式的合取之间，我们已观察到皮亚杰在第四章所说的"配对属性"（coupled predicates）的现象，它是通过"伪约束"合取而联系起来的。（例如，在一个系列中，似乎当中元素的大小可以通过位置的改变而改变。）

关于各种类型的析取的情况，类似的区别也是可在本书中找到。

关于否定，在上面已提到的两个不同的意义之间，有一明显的区别需要指出。在外延逻辑中，否定的参照框架是整个言谈所及之的范围（universe），而有些否定只是相对于一个给定陈述的最接近之嵌套（集合）。例如，在经典外延蕴涵 $p \supset q = (p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q})$ 中，在 $\bar{p} \cdot q$ 或在 $\bar{p} \cdot \bar{q}$ 中的陈述 $\bar{p}$ 是指非 p 的所有东西，它不是在 q 之下的 p 的补。例如，如果类 B 包括亚类 A 和 A'，那么 $B - A' = A$。这里的否定参照的是包括两个亚类的类 B。皮亚杰谈到的"近端的"否定就是相对于最邻近的嵌套（集合）而言的。另一方面，他也谈到了一种"远端的"否定，它是指在言谈所及的范围内非 p 的所有

情况，它与可能的集合无关。

一旦这些区别为我们所接受，我们就可能注意到：二元运算包括16种情况，而且根据实际观察到的合取、否定和甚至析取的种类，它们会有更多种数目的情况。这种运算的多样性依赖于背景和参照框架——即依赖于所涉及的嵌套（集合）。

9. 为了对这些研究成果做一总结，还有两点要说。首先，这里没有对弗雷格（G. Frege）所说的“Sinn”（connotation，涵义）和“Bedeutung”（denotation，指称）两者之间的重要区别做出说明。Sinn是意义；而Bedeutung是其外延[1]。它们永不能分开。它们是同一过程的两个方面，它们本质上对应于同化过程的两个方向；皮亚杰认为这两个方向是：一个是归属的（attributive）同化，它是从一个已知的格式到一个新的客体（换言之，即一个新的客体经由一个已知的格式而被理解）；另一个是整合的（integrative）同化，它是从一个新的客体到一个格式。第一种类型的同化不必修改格式就可使新的客体得以丰富。而在整合的同化的情况下，主体知道新的客体意指什么，并因为像以前格式的同化是已知的而认识到它是什么。

如果我们要说到本书的重要观点（根据这一重要观点：逻辑的心理发生的根源可在意义中及在意义之间的蕴涵中找到），那么由此可得到一个重要的结果：作为一个知识的对象（客体），客体不是别的什么，它只是一个结合在一起的属性的集合，它的意义就是“能用它来做什么”，即同化到一个动作格式中去（不管动作是物质的动作还是心理的动作）。同化过程的双向性表明：一种意义逻辑（它先于一种陈述的逻辑并为后者提供了准备），必须既沿着一种内涵的逻辑理论又要沿着外延的逻辑理论（它起源于整合的同化）这两条路线发展。

第二点要说的是：从推理开始和把意义蕴涵的关系作为基本逻辑联系的逻辑理论具有巨大灵活性。我们应该不断强调，在本书各章所报告的研究中，逻辑的联结词根据合取、析取、不相容、互反蕴涵等等而“内涵地”具有各种意义，并且主体在意义蕴涵的基础上，然后又在蕴涵和否定的组合的基础上进行构造。于是，我们发现许多实际处理析取和合取“种类”的方法（途径），它们对应于内涵的逻辑联结词。这就是“联合可守性”（“cotenability”）的情况，即本书导论中所定义的内涵的合取：

$$p \bigcirc q = p \cdot q$$

10. 现在我们该总结一下我们的研究成果，并将之置于《运算逻辑试论》（LO）的更广泛的背景之中。

所报告的研究使我们能够把LO的内容按照三个不同的方向加以重新阐述，它们中每一方向都需要（不言自明的）进一步的研究努力。

(a) 这本书的主要目的是揭示一种动作逻辑的构造在儿童期就已具备了。它是运

[1] 如本书后面所清楚说明的：在内涵逻辑中，一个意义的外延是十分不同于一个谓项（属性）或一个命题的外延的，外延逻辑以它作为自己的参照。（J. E.）

算逻辑的一种必要的基础。为了实现这一目标，就有必要对意义蕴涵，特别对那些由动作之间或运算之间的蕴涵所组成的意义蕴涵作进一步分析。动作蕴涵的概念是本书引入的最具独创性的概念。为进一步分析这种形式的蕴涵，我们必须在动作水平和最原始的推理的水平上尽可能远地向前追溯心理发生的进化过程。

(b) 研究的第二个目标已经达到。此目的是揭示：在非常早的阶段，在动作的水平上，我们观察到了运算的早期形式，其中每一种形式（当我们分别看待它们并在其意义的背景中）都是与命题逻辑的16种二元运算同构的。

(c) 第三个目标是不仅揭示逻辑联结词在“运算的”阶段以前很久就开始了，而且这种逻辑关系是由逐渐结合成为逻辑结构的组件所构造起来的。

最后我们要说的是，让我们再次回忆一下发生认识论的中心论题（它形成本书报告的研究的基础）。

认知的(knowing)主体（包括他们本身一直在努力构造的标准——不需要哲学家或心理学家去规定它们），是不能基于认识的开始阶段和认识的结束阶段，也不能基于其历史或形成的任何阶段客观地予以理解的，因为它们是永不会终止的系统。主体的真正的本质在于它是一个自组织的过程。这一过程是一个连续的过程，其一般的过程只有一种认识论的意义。我们面临的主要的问题是去重构这一过程，尽管它们永远不可能完成，只能通过再构而决不能通过先验的演绎去把握它。再多的哲学思辨、再有力的逻辑分析也不能取代这一再构的过程。

原版人名索引*

* 注:人名索引及主题索引的页码,为英文原文的页码。

Z

原版主题索引

S

策划者后记

皮亚杰其人其说的历史和学术地位国内外学界早有共识，笔者此处无须赘言。但笔者想说的是，皮亚杰不愧是一位老而弥坚、与时俱进的一代大师。直至垂暮，他都在从相邻学科汲取营养，不断修正和完善他的理论，其创新之显，改变之大，以至于人们足有理由称其晚年理论为"皮亚杰的新理论"，以区别于之前所谓"皮亚杰的经典理论"。概括而言，新理论主要体现在两个方面：其一是以抽象代数中的态射—范畴论取代早年的群、格等代数系统作为思维运算的形式化工具；其二是以注重意义蕴涵的内涵逻辑取代传统的外延取向的外延逻辑，从而改造了运算逻辑，使之更符合心理逻辑的实际状况。当然，新理论的产生并未使皮亚杰的理论变成了数学和逻辑学。正如英海尔德所言："皮亚杰从未试图，当然也从未宣称自己是一名逻辑学家。他只是选择和采用某种数学和逻辑的模型，为的是能够分析儿童所做出的对知识和范畴的建构。"①知识的个体发生、发展的心理学研究仍是其发生认识论的主题，这是他终其一生未曾放弃的主要目标。

遗憾的是，皮亚杰的新理论并未受到人们的足够重视，国外如此，国内犹然。如从网上检索可知：有关态射—范畴观的文献竟只见寥寥数篇。近年见著报刊者更付阙如。笔者以为，这种状况并不正常。我们也不能把这一现象仅归咎于是皮亚杰新理论"曲高和寡"之故。或许，它与当前学界只勤于所谓实证研究的数据积累而疏于理论的概括和提升而有一定关联。这种局面应该打破。皮亚杰所主张并身体力行的发生认识论的跨学科合作的研究特色应予继承。

基于上述指导思想，笔者主持了此套译丛的引进和翻译工作。目的是引起国内心理学界更多同行对皮亚杰新理论的兴趣和重视。本译丛五本书均为皮亚杰晚年著作。《走向一种意义的逻辑》和《态射与范畴》更是皮亚杰及其合作者直接阐述其新理论的经典之作。前者采用新的内涵逻辑取代外延真值表逻辑作为刻画儿童认知发展的工具；后者以更具动态性和建构性的数学工具作为描述认知的过程、程序和机制的数学模型。另三本则与新理论之间存在或多或少的关联：《心理发生和科学史》探索儿童思维的心理发生和科学概念的历史演变之间的连续性和同构性，揭示新理论和新模型的普适性；

① 见 B. Inhelder 为 H. Beilin & P. Pufall 主编 *Piaget's Theory: Prospects and Possibilities*（1992，LEA. Inc.）一书所写的前言。

《可能性与必然性》和《关于"矛盾"的研究》则是皮亚杰以新理论为视角，继续发生认识论关于可能性和必然性以及否定、矛盾等逻辑范畴的个体发生研究。当然，同属于皮亚杰晚年新理论之范围的著作还有《关于"对应"的研究》(1980)、《概括化研究》(1978)、《反省抽象研究》(1977)和《认知结构的平衡化》(1975)等。这些著作我们拟在本译丛的第二辑中向读者继续推出。

现在，当本译丛的五本书呈现在读者面前的时候，我想表达对日内瓦大学皮亚杰文献档案馆馆长雅克·弗内歇(Jacques Vonèche)教授及 Jean Piaget Archives Foundation 的由衷感谢。这五本书的入选是笔者1999—2000年在文献档案馆访学期间与弗内歇教授商定的。弗内歇教授是该基金会的主任，他慷慨地答应由基金会作为主要出资方，购得它们的中文版权(华东师范大学出版社同样也在资金上给予了支持)。尽管基金会确有鼓励和支持皮亚杰著作在世界范围内以多语种出版的宗旨，但由于基金会近年的财政情况并不理想，因此，我们获得这笔资助应该说并非易事。弗内歇教授还亲自出面与原出版社交涉。在中译本成书之际，作为现今日内瓦学派的代表人物和皮亚杰的当年同事，弗内歇教授还为之撰写了精辟的总序，并积极约请有关的皮亚杰研究专家为它们分别撰写中文版序言。所有这些，自然为本译丛增色不少，同时也更有利于读者对皮亚杰新理论的理解和把握。

关于本书的译者，笔者想略作介绍。笔者本人实际只译出其中一本(《走向一种意义的逻辑》)，此书中涉及相干与衍推逻辑的部分还承蒙华东师范大学哲学系终身教授、逻辑学家冯棉同志审阅，笔者从中获益良多。《心理发生和科学史》由复旦大学心理学系姜志辉副教授直接从法文译出。姜先生曾为商务印书馆译过多部学术名著，是一位心理学专业知识与法文水平俱佳的知名学者。其余三本书的主译者均为笔者的已毕业或在学的博士(生)，笔者虽忝为审校，实际上主要是他们的辛劳成果。熊哲宏教授曾以其博士论文《皮亚杰理论与康德先天范畴体系研究》(2002)及《皮亚杰哲学导论》(199[illegible])等专著和有关皮亚杰发生认识论的一系列论文，名噪中国理论心理学界。复旦大学心理学系副系主任吴国宏副教授研习皮亚杰理论多年，在弗内歇教授来华讲学期间作为现场翻译，其专业知识与外语水平均深得弗内歇教授的好评，至今教授在与笔者的来往信函中还屡有提及。刘明波、张兵与孙志凤三位同志着力合作翻译《态射与范畴》一书，应该说他(她)们完成了一件十分艰巨的任务。孙志凤同志受过数学专业的本科训练，因此可以期待在此书涉及数学的内容上，译文当无大的错误。另外，在本译丛译文的后期整理、打印等繁杂事务中，蔡丹同志做了大量工作。当然，本译丛最终能够出版，华东师范大学出版社社长朱杰人教授给予了鼎力支持，心理编辑室的彭呈军同志和版权部的龚海燕同志更是付出了极大的辛劳。没有他们的决心和帮助，别说这套译丛的最终出版，或许连其最初的动议都是不可能产生的

最后，我想再次引述英海尔德的话与国内有志于皮亚杰研究的同仁们共勉：

“我们用不着赞美皮亚杰已完成的工作.对他的最好的纪念礼品是推进他的研究。”①

对皮亚杰的新理论更应作如是观。

李其维

2005年7月7日 华东师范大学

---

① 见B. Inhelder为H. Beilin & P. Pufall主编*Piaget's Theory: Prospects and Possibilities*(1992, LEA. Inc.)一书所写的前言。

附　　录

形式运算理论

——一篇评论文章

〔英〕彼得·卡斯卡特·华生　著
李梦霞　译
孙志凤　审校

形式运算理论——一篇评论文章

The Theory of Formal Operations - A Critique

作 者 Peter C. Wason

原载于 *Piaget and Knowing: Studies in Genetic Epistemology*, edited by B. Geber, London: Routledge & Kegan Paul, 1977, pp. 119-135.

李梦霞 译自英文

孙志凤 审校

形式运算理论
——一篇评论文章①

对我而言，尝试详细说明皮亚杰称之为形式运算的人类智力最成熟阶段的所有特征是很冒昧的事。实际上，我将主要集中在我自己的研究和与我的研究相关联的领域，虽然我应该在开始强调，它的缊涵是巧合的；我自己的实验不是用来检验皮亚杰(Piaget)的理论的。

而且，在他的启蒙性的书籍《皮亚杰和智慧》(1969)中，提醒我们这个理论的范围："根据结构的变化，虽然形式运算阶段被认为是最后一个阶段，它被认为是一个动态的平衡，这个动态平衡对精细动作和特殊应用是无限开放的。"

然而，可以断言的是，那个范围在理论中不是一个优点。正如波普尔(Popper)曾经争论精神分析一样，他也可能会争论说理论的力量在于规定某一时间发生的内容。实际上，弗洛伊德(Freud)和皮亚杰存在相似之处。这里，再次引用弗思(Furth)的话："对精神分析学家弗洛伊德而言，梦意味着什么，对认知论者皮亚杰而言，发展的观察就意味着什么。"维特根斯坦(Wittgenstein)指出，对很多人而言，精神分析的魅力，也是发生认识论的魅力。它的魅力的一个方面存在于随着知识的增长，内容逐步分等级形成的思维中蕴涵的美学吸引力。然而，安妮·克拉克(Anne Clarke)(个人交流)曾指出这个理论对于教育家的吸引力更多的在于它的儿童通过探究"自然地"学习的思维。为了抵抗魅力的诱惑，我必须特别的挑剔，永远铭记批评通常是尊重的象征，并且我希望在此情况下，批评将最终证明是建设性的。

说明关于被假设为是先于形式运算(formal operational)思维的具体运算阶段(concrete operational stage)的某些特征对我的论点而言是必要的。前运算思维(preoperational thought)的亚阶段本质上是以不可逆(irreversibility)为特点的；它缺少一个使内化的动作与智力联合成为可能的结构。通过选择，孩子完全(并且出人意料的)不同于成人思维的一个特点是最好的阐述；著名的物理性质守恒缺乏可能已经被援引过了，但是我将提出类包含(class inclusion)的不太知名的研究。我们仔细分析一个被呈现了一排七个蓝色环形，五个蓝色方形和两个红色方形的五岁儿童的口语记录。

我们有什么？　　蓝色环形，红色和蓝色方形(正确)。　　所有的环形都是

① 来源：In B. Geber (ed.) Piaget and Knowing, *Studies in Genetic Epistemology*, London: Routledge & Kegan Paul, 1977, pp. 119-135.

蓝色的吗? 不是(错误),因为这里有(蓝色)方形和环形。 所有的红色是方形吗? 是的,因为他们是仅有的方形。 所有的环形是蓝色的吗? 不是(错误),这里有方形和环形[蓝色]。

正如环形的分类一样,蓝色事物的分类被认为有相同的延伸:孩子错误地认定所有的环形是蓝色的,因为有些蓝色形状不是环形。从前运算思维到以习得的不可逆为特点的具体运算本身的转换是关于连续的最好说明。

许多年以前,皮亚杰和斯泽明斯卡(Szeminska)使用9—16.2cm的10①个系列小棒,中间额外插入一个较长的小棒,研究了连续的发展。我们发现了三个区别的阶段。第一个阶段,儿童不能按顺序排列这十②个初级序列。他按照2、3或4的要素的次级顺序排列这些小棒,他不能把它们排在一起。在第二个阶段,他通过以经验为主的尝试错误(trial and error)加工排列初级序列,并且他必须从头再开始。他仅能通过再一次的尝试错误来插入额外的小棒。在第三个阶段,开始于7—8岁,儿童通过寻找最小的(或者最大的)小棒,有组织地开始,然后从剩下的小棒里再找出最小的,以此类推。这个过程,并且单独这个过程,可以被称为真正的运算,因为它意味着一个任何给定的小棒比排好的系列中小棒大或者小的意识(如,$E>D$,C等,并且$E<F$,G等)。这个运算的不可逆通过正确地插入新的要素而不用尝试错误的能力来获得(Inhelder and Piaget,1964,p.250)。

在皮亚杰最后的著作(1972,p.35)中,他简单地总结了转换:"因此,在这个阶段,新方法的引入由同时地使用关系<和>,而不是排除其中任何一个或者没组织地尝试错误构成。"

在具体运算思维的成熟阶段,皮亚杰假设了在逻辑"分组"和被假设为儿童外显反应基础的结构中存在一个同构的关系,这是一个完全不同于美式心理学和认识论的观点。这个观点显然假设儿童没有沿着一个基本的演算(发展)。实际上,运算被称为具体的是因为它们还没有独立于内容;它们局限于事物的操作。

形式运算思维假设运算可以在运算之上被执行。数学的分组(Klein分组)被假设为一个关于具体运算的复杂思维"反射",并且正如任何可能中的一个一样,具体运算允许实在的东西被看到。英海尔德(Inhelder)和皮亚杰(1958)主张青少年可以使复杂因果关系问题的变量抽象化,使它们隶属于组合分析之中,这个组合分析可以精确地排除(任何)可能性。皮亚杰承认这样的加工并不总是有意识的,但是成绩被认为是一种认知结构,这种认知结构是完全可以用命题演算(propositional calculus)的逻辑来描述的。例如,一个典型的任务是利用4个无色液体的烧杯制作出黄色液体的推论的必要且充分条件。青少年将系统地依次检验4个烧杯组成的16个组合中的每一个组合,这

① 此处原文是"10"。——译者注
② 此处原文是"ten"。——译者注

一点是有争议的。重要的是，有人声明他知道他必须去操作的方法；他处在比尝试错误阶段更高的阶段。

这样一个解释并非没有争议。在1969年后期，西里尔·伯特(Cyril Burt)与我通信，并且表达了他对皮亚杰结论的总体质疑。一封信尤其有历史价值：

> 接近第一次世界大战，当时我是约翰逊的一个演讲者，住在崔尼蒂(Trinity)，我非常幸运跟罗素(Russell)做邻居。他当时正在修订他的"原理(Principia)"。当我问他的理论和概念是否可以有效地应用在我的推理研究中时(代替我在牛津时提出的Keynes Joseph"逻辑")，他回答说："作为分析方法的使用，它可能既合适又具有启发性，但是作为一个批评性评价的标准，它可能不但不合适，而且还非常有误导性的。"这表示对我而言，皮亚杰似乎是使我落入了陷阱。经过一系列的独创性的实验和有价值的心理学观察，他假设哥伦比亚逻辑学家的学术增长，并且根据罗素-怀特海(Russell-Whitehead)系统主义连续的修正来判断儿童的表现。我在思考他理想中的青少年，这个青少年假定执行了一个组合的分析产生的16个可供选择的组合，并且系统地检验了这些组合。他忘记了罗素-怀特海-卡尔纳普(Russell-Whitehead-Carnap)逻辑在数学家的思维里是模式化的；它不是日常的逻辑。

我认为罗素的要点是当被引入反射和思维定量时，他曾经为之付出大量心血使其正式确定的命题演算可能被误用了。

在他的著名的关于英海尔德和皮亚杰(1958)的评论中，布鲁纳(Bruner)(1959)对形式运算的存在持有较少的批评态度，但是更多地对从具体运算到形式运算转换的假设原理持批评态度。对皮亚杰而言，这个转换是由于一个自动调节的"平衡"这样的模糊概念缺少了稳定性而产生的。但是，对布鲁纳而言，这个转换是因为社会和文化因素提供驱动力：

> 青春期不同于儿童，不仅仅是因为他们使用了命题演算来处理各种可能性，而不是使用现实存在的实物来处理各种可能性，宁可说是通过他承担任务的本质特性，他促进延伸和发展的本质特性以及填补他们所要求的社会连接来被迫处理各种可能性。如果不平衡，那么会使他退回到具体运算阶段，而不是促使他达到一个新的平衡。这就是处理内部和外部要求的变化。逻辑结构的发展支持了在与世界互动时的新形式。这只是一个朴素的被父母保护的、不需要操作物体的世界，直到不得不独立地面对世界无助时进行操作的儿童的案例，而这时具体运算已经出现了。因此，处于具体运算阶段的儿童不需要操作可能的(除幻想的水平之外)世界，直到压力来临，儿童的思维开始出现了命题主义的特点。并且，实际上，这是一个这样的命题思维从来没有在任何全面的感官出现的例子。然而，没有意外的是，智力上处于特殊家庭成员或者体力劳动者之下的儿童根据责任心倾向于较少的挑战，并且没有发展出我们通常称之为抽象的天赋。

相反，伦塞(Lunzer)(1973)质疑了形式运算思维的阶段存在，因为在实践中它的独特的定义特性很难去界定。在一系列小心翼翼的研究中，他和他的合作者们提供了青少年推理的简单解释。实际上，他现在否定了他自己早期(Lunzer，1965)的观点，并且认为从儿童到青少年思维并没有改进，它们非常同质并且在保证使用与"具体推理"(concrete reasoning)概念相对的一般"形式推理"(formal reasoning)概念方面很有特色。

在1966年我发表了一个由四张卡片和一个句子组成的问题(Wason，1966)。当时，这似乎仅仅是一个使人迷惑的奇事。然而我开展了一个关于它的实验(Wason，1968)，因为假如一个人发现某个事情聪明人不会解决，那么似乎意味着尝试探讨为什么他们不会解决这些问题就是非常有价值的。它作为一个"选择任务"为被试熟知是由于最近伦塞给了它一个更合适的名字"四张卡片问题(the four card problem)"。公平地讲，我的某些德高望重的同事认为这个名字是荒谬的(尤其是在未能理解它之后)，因为它无论是在实验室内还是实验室外，均与之前人们看到的不同。远非表面上的限制，因为它提供了一个潜在的手段通过英海尔德和皮亚杰设计的有独创性的现实因果关系任务去自然地探讨推理力，这作为一个特殊优点使我震惊。

在卡片问题的最初形式中分别包含以下4个符号：A，D，4，7。被试知道每张卡片的一面有一个字母，另一面有一个数字。他们的任务是在判断以下句子是否真实时，说出这些卡片(并且仅仅是这些卡片)中的哪一张应该被翻开。如："假如卡片的一面是元音，则另一面是偶数。"解决方案是"分别翻开印有A和7的两张卡片"，而不是大部分非常聪明的被试所说的"分别翻开印有A和4的两张卡片"。这个问题是相当有难度的。两个逻辑教授在深思熟虑之后，失败了。一个数学心理学家也失败了，他的独特的评论是没有启发性的："计算机可以很容易通过程序解决这个问题。"有的人花费了很长时间去寻求解决方案，并且有的人甚至争论它的正确性。然而，与这些专家认为的相反的是，这个问题形式上是一个非常简单的问题。在我看来，是努力尝试去解决这样的非同寻常的问题，这个问题允许聪明的人去理解完全想象不到的困难至它的结构：困难仅存在于他们的大脑之中。(我强调这一点是因为我曾被告知德国的一个团队正在致力于探讨它的哲学蕴涵。)

在广泛的系列实验之后(Wason and Johnson Laird，1972)，我们假设对这个问题完整的理解应该是对实验所用句子(Johnson Laird and Wason，1970)的证伪而不是证实。最近，乔纳森·埃文斯(Jonathan Evans，1972，1975)质疑称落后的解决方案更少的由证实自身来支配，而更多的由原始的用卡来"匹配"句子的趋向来支配。他解释呈现一个以"假如p，则非q"的句子时，被试正确地选择了p和q的名称值。我立即回应他的研究是怀疑论之一。在我看来，因为它的众所周知的困难，使得被试忽略了否定。因此，我建议我们合作一个实验，在这个实验中，要求被试写下他们选择每个卡片的理由(而不是选择)(Wason and Evans，1974)。结果显示，我的假设是错的。被试倾向于

对选出否定的结果给出逻辑的无懈可击的理由。这意味着他们获得了对问题结构的深刻理解,但是我们认为这样的理解没有获得。而在我们看来,根据任务的否定内容,这些理由有直觉反应的合理性。关于这样的"双重加 1"的当前研究或许能使我们更好地理解它。

问题的这个最初解释可能会使你相信,这不是因为它困难,实际上是因为它有趣。说它有趣是因为在"正常任务"(含有非否定的实验句子和抽象的材料)中错误是一致的,并且被试没有依照他们自己对实验的解释事实,例如,他们知道"p 和非 q"扭曲了句子,但是仍然错误地选择非 q 作为潜在的相关。他们被表面的简单欺骗了。

正如我们的美国朋友倾向于去做的那样,单独看回应,我们会公平的宣称我们的结果与形式运算是不一致的。我们的被试明显地不能"分离变量并且将它们隶属于组合分析"。但是,表现的特定特征是非常有启发性的,因为他们令人联想到具体运算。这些被试再三地显示出与知觉数据相关联:"在句子中没有提及的卡片,不用对它做什么";"假设仅有我可以看到的这些是正确的。"下一个实验(Wason,1969)揭示了更精细的相似性。

我研制出一个通过询问被试关于两个正确的卡片的另一面的两个备选方案来探索错误的技术。这个技术会使他们陷入矛盾的或者概念不一致的情境。在这个实验中,他们知道每张卡片的一面有一个三角形,另一面有一个圆形,但是他们仅仅知道另一面的颜色是红色或者蓝色。这些卡片(表面朝上)分别由红色三角形、蓝色圆形和蓝色三角形组成。实验句子是:"每个一面印有红色三角形的卡片,另一面印有的是一个蓝色的圆形。"以下是与一个发音清晰并且自信的但从来没有获得任何顿悟的被试的对话。

埃文斯:"你的任务是告诉我,为了去证实句子正确与否,你应该去翻开哪张卡。"

被试:"红色三角形在一面……虽然也有一些卡片两面都是红色……我不知道有多少张这样的卡片。目前我们有两张卡片满足这样的条件……因此,你仅仅有两张卡片来从以下中选择:红色三角形和蓝色圆形。"

埃文斯:"红色圆形的另一面应该是什么?"

被试:"一个红色圆形或者一个蓝色圆形。"

埃文斯:"假如有一个红色圆形在另一面,对于这个句子正确与否,你会说什么?"

被试:"它可能是错误的。"

埃文斯:"假如有一个蓝色圆形,对于这个句子正确与否,你会说什么?"

被试:"他可能是对的。"

埃文斯:"顺便说一下,为了证明在你面前的句子是否正确,哪个卡片是你的选择?"

被试:"红色三角形和蓝色圆形。"

埃文斯："你对这个选择非常开心吗？"

被试："非常开心，因为其他的两个与陈述不一致。"（仅数了被提及的卡片。被试失败地提出一个虚假的假设条件实验：他同意在另一面是红色圆形可能是错误的，但是未能看到红色卡片的关联。）

埃文斯："红色圆形的另一面可能是什么呢？"

被试："一个红色的圆形或者一个蓝色的三角形。"

埃文斯："假如红色圆形的另一面是红色的三角形，对于这个句子的正确与否你有什么判断？"（这是一个强假设的矛盾实验，因为它所指的是一个未经选择但是相关的卡片。）

被试："这个句子可能是无意义的，因为它不适用。"（这在之前的实验中曾经发生过：被试拒绝支持推论的有效性。）

埃文斯："实际上它可能是错的。"

被试："可能是，但是你没有这样做　不管怎样，这个陈述可能是错误的，不管在另一面是什么。"（原文如此）（不可逆性？）

埃文斯："假如在另一面是蓝色的三角形，对于这个句子的正确与否你有什么判断？"

被试："不对。"

埃文斯："为了去检验这个句子正确与否，需要去翻开红色三角形和蓝色圆形，你开心吗？"

被试："是的。"

埃文斯："请翻开红色三角形和蓝色圆形，并且告诉我句子是否正确。"

被试："句子是正确的。"（红色三角形的另一面是蓝色圆形，并且蓝色圆形的另一面是红色三角形。）

埃文斯："我现在要翻开红色圆形，并且我想让你告诉我你是否坚持认为句子是正确的。"（这是一个具体矛盾实验：另一面是红色圆形。）

被试："等一下　好像句子不正确。这个句子既是正确的，又是不正确的。你刚证实了一件事，然后你又证实了另一件事。你证实了一个定理，然后又证实了它的推论，因此你不知道你在哪。不要问我蓝色三角形的问题，因为它可能是没意义的。"

埃文斯："为了去检验这个句子正确与否，仅仅需要翻开红色三角形和蓝色圆形，你开心吗？"

被试："为了准确地证明句子正确，仅需要翻开一张卡片：红色的三角形。严格来说，不需要翻开蓝色圆形。必须找到每张有红色三角形的卡片并且翻开它，但是这里只有一张。"

埃文斯："但是你刚才说当红色圆形被翻开的话，句子是错的。"

被试："恰好相反。"

埃文斯："这个问题非常难。很少有人能正确地完成它。我们感兴趣的是为什么人们不能正确完成它。"

被试："我是门萨俱乐部成员。我直到后来都不打算告诉你。"

这是与一个5岁男孩的另一段对话。"你有兄弟吗？"、"有"、"他叫什么名字？"、"吉姆"、"吉姆有兄弟吗？"、"没有"。它说明了前运算思维不可逆的特点，但是它比承认红色圆形在红色三角形的另一面是错误的，并且否认红色三角形在红色圆形的另一面也是错误的更不可逆吗？

最近的一个实验是与伊芙琳·戈尔丁(Evelyn Golding)合作开展的，这种不可逆性变成了口语记录的最大的独特特点。被试必须对两个同义句子的真假性进行判断。这两个句子是："每个数字(N+)之上都是字母(L+)吗？"或"字母(L+)在每个数字(N+)之上吗？"(我们提供的纸没有使用逻辑数字，部分原因在于心理学家似乎不喜欢p's和q's，但是主要原因在于命题演算的数字似乎不恰当。)实验句子有表层的陈述结构；他们是断言。并且，他们的深层结构是以下条件："假如有一个数字在下面，则有一个字母在上面。"去处理讨论中的现象不是一个有条件的表层结构函数的建议是一项绝不轻松的事实。

我们第一次做了一个尝试，即编制通过呈现全部4个揭开的卡片的条件真值函数程序，让被试来选择可以证明句子是错误的卡片。如，没有字母(L－)在数字(N+)之上。随后的任务材料有4个一半遮住的卡片构成(见图1)。既然被试几乎总是选择其中的一个卡片，如(N+)，但是总是不选择其中的另一个，如(L－)，他们面临着一致性并且要求对其做出解释。同样地，假如被试正确地选择了非字母(L－)，但是错误地选择字母(L+)，另外的两个卡片是没有掩蔽的并且显示的完全一样。然而，我们不应该干涉尝试去更正小的错误。以下的口语记录是典型的为他们自己辩护。(第一个符号指的是卡片最初看到的部分并且第二个指的是最初遮蔽部分的约定是被接受的。)

(ⅰ) N+L－："我看到有一个数字在下面，因此这个句子可能是对的，也可能是错的。"

L－N+："我看到上面是空白的，这意味着没有字母，因此句子必定是错误的。"

(ⅱ) N+L－："这里有一个数字……另一部分被遮住了，可能遮住的部分有一个字母。"

L－N+："这里是空白的，并且它防止了句子的正确性。我已经知道了。"

(ⅲ) N+L－："如果这一部分是空白的，并且没有字母的话，句子是错误的。"

L－N+："错误都是因为没有字母吗，因此它肯定是错的。"

(ⅳ) N+L－："因为他是数字，因此很有可能是错的。"

L－N+："可能是两个空白。"

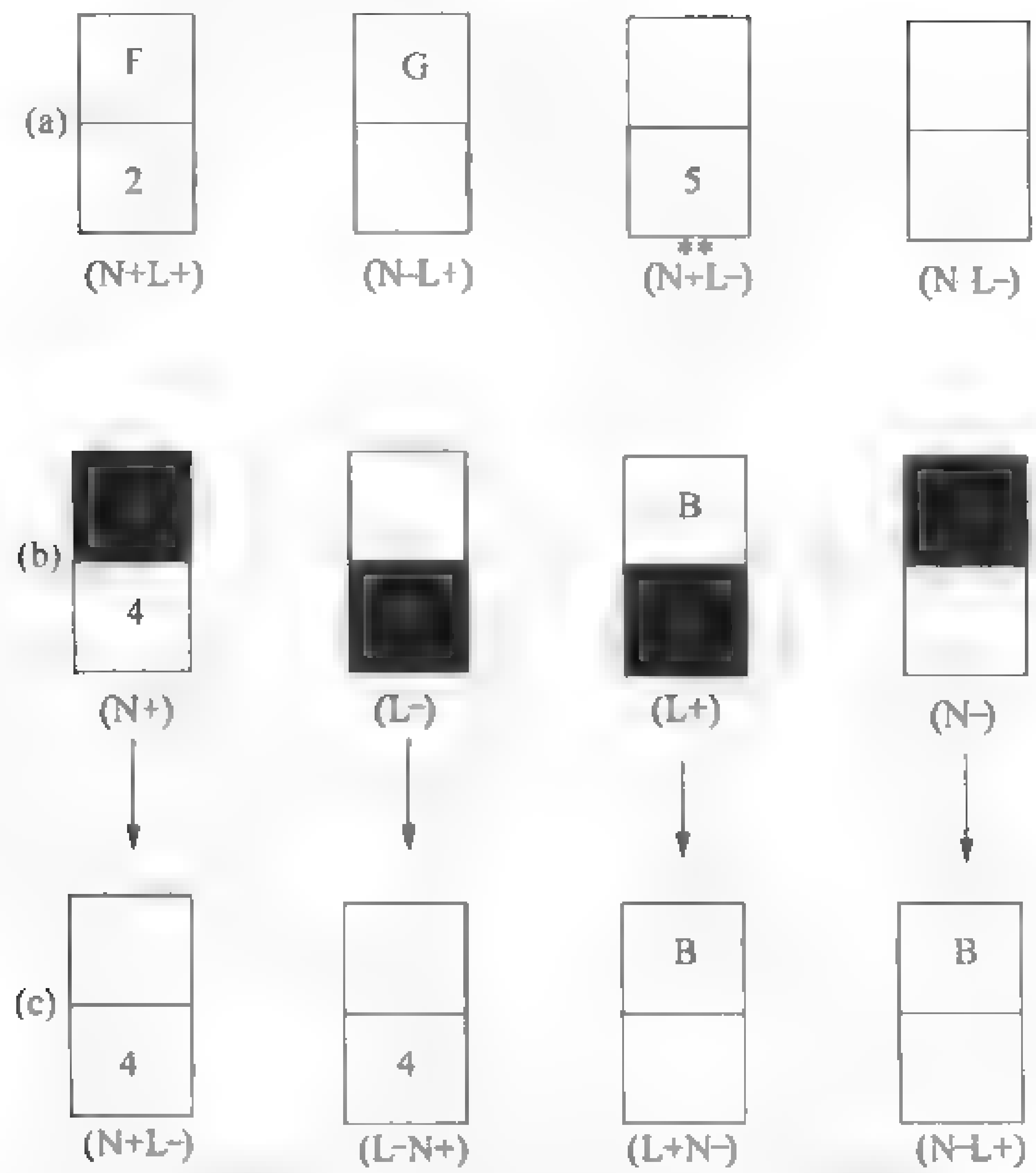


图 1　华生和戈尔丁(Wason and Golding,1974)使用的材料
(a) 检验卡;(b) 掩蔽任务卡;(c) 无掩蔽任务卡。
对于(a)证伪卡由星号标示。实验句子是每个数
字上的是一个字母,还是字母在每个数字上。

(Ⅴ) N+L-:"我知道有数字,并且加入有字母在数字上面的话,就可以证明了。"

L-N+:"我不认为有数字,并且可能有不能证明任务事情的两处空白。"

(Ⅵ) N+L-:"那是仅有的一个可以证明句子是错误的。"

L-N+:"假如有空白,这个空白又是你不知道的,不管怎样,句子不正确。"

这些标记了错误的合理性了吗,或者它们反映了刺激材料的最初解释吗?无论怎样,看上去推论仅在一个方向被支持,例如,当它有一个看得见的符号开始;空白不能带来这样的保证。乃至于当卡片被作为完全相同的事物揭开,思维加工趋向于不是逆转。当任务再次被完成时,少于三分之一的被试是正确的。(在讨论这个实验的时候,出现了一个有趣的评论。一个知道先前的实验并且熟悉符号逻辑的同事被要求给出一个解决方案,因为非 p 意味着非 q 的知识作为掌握条件句表示成肯定句子的算法是没用的。)最近我们通过比较被试和矛盾引出的不一致的表达在大脑左半球和右半球有起源的差异获得了一些证据。当临界信息通过右手的触觉刺激被直接提供给左(言语)半球,执行实际上就被改进了(Golding, Reich and Wason,1974)。

然而，一些早期的研究缩小了我的问题与英海尔德和皮亚杰的问题之间的差距。我的第一直觉是用一个现实主义的伪装呈现问题。这样做的有益效果已被戴安娜·夏皮罗(Diana Shapiro)、戴维(Davey)(1971)以及伦塞·哈里森(Harrison)和戴维(1972)证明。夏皮罗使用了一个关于四段旅行的故事，这个旅行中目的地和交通模式是由卡片命名的。伦塞等人使用了图像材料。但是最精彩的实验是由约翰逊-莱尔德(Johnson Laird)，莱格伦齐(Legrenzi)和索尼诺·莱格伦齐(Sonino Legrenzi)(1972)所做的。在实验("主题式")条件中，被试必须想象他们是邮政工人，他们的任务是判断下面的规则是否被违反了："假如一个信封被封住了，则信封上有一个5d.邮票。"任务材料由4个分别显示了后密封、后未密封，d.的邮票在前面和4d.邮票在前面的信封构成。解决方案是选择后密封的和4d.邮票在前面的信封　在控制("符号")条件下，路线所指的是信封的前面和背面的任意符号　每次接受不同顺序的两个版本主题问题和两个版本符号问题的被试共有24名。结果见表1。

表1　解决两个问题、一个问题和没解决问题的情况

(N=24)(在Johnson-Laird，Legrenzi and Sonino Legrenzi，1972之后的研究)

	主题式	符号
两个问题正确	17	0
一个问题正确	[illegible]	[illegible]
两个问题都不正确	2	17

显而易见，不管怎样，两个问题之间没有迁移效应；实际上，仅有2名被试承认了两者之间的任何逻辑关系。伦塞等人(1972)也获得了相似的结果，这使得他反驳了形式推理理论的"强的"形式。

> 假如"强的"形式是真的，被试一旦留意到问题的逻辑结构……他将按照这个"强的"形式来推理，与一个类似的，但是稍微有难度的问题出现的时候，同一被试应该不会立即退回到思维的直觉模式。

最近的研究(Gilhooly and Falconer，1974；Bracewell and Hidi，1974；Van Duyne，1974)尝试隔离那些有助于伪装有略微困难结果的有益效应(beneficial effects)变量。在我的研究中，佩特鲁斯·万·达因(Petrus van Duyne)成功地在一个由64个trial(4个刺激各由16个block组成)构成的系列任务实验中操作了实验句子的随意性。这个实验中有4个独立组：

(a)抽象的　如，"假如信封的一面有一个元音，则另一面有一个偶数"。完整的洞察力反应=19.3%。

(b)随意的　如，"假如信封的一面L. B. MILL，则另一面有PRINTED)

MATTER REDUCED RATE"。完整的洞察力反应＝19.0%。

(c) 模拟的——如，"假如信封的一面有 PRINTED MATTER REDUCED RATE，则肯定是打开的"。印有词语的卡片代替真正的信封。完整的洞察力反应＝87.0%。

(d) 现实的——如，"假如信封的一面有 PRINTED MATTER REDUCED RATE，则肯定是打开的"。真正的信封作为刺激物。完整的洞察力反应＝98.0%。

这四种条件的趋势是非常显著的，但是当分解开时，随意的和现实的条件下差异是最显著的。为了说明被试对问题理解的定位为"现实伪装"效应的差异成分，万·达因(个人沟通)结合先前的研究，绘制了结果图(见图 2)。曲线很好地说明了问题解决中语义的重要性，但是它也有些让人沮丧，因为它显示出现了歪曲的关键增值不是通过演算，而是通过同化更平常的经验增值的。并且当这些经验随后被除去，看起来像抽象结构的知识也消失了。实验不仅仅对引导理解是必要的；实验对保持理解也是重要的。有点讽刺的是，经过这么多的研究之后，包含着严格限制的推理力结论可能对外行人而言似乎是似是而非的。

总结：我们的结果表明推理以一种系统的方式完全受内容的影响，这与皮亚杰主义在形式运算思维中问题的内容至少隶属于其关系形式的观点不一致。当几乎所有的被试不仅仅是理解力强的青少年而是更高选择的大学生时，我们的研究结果与皮亚杰主义的观点更加不一致了。伯特(个人沟通)认为我们早期的研究结果"提供了形式运算理论需要修正的最重要的结论性证据之一"。然而，我可以勉强接受哈尔福德(Halford)(1972)提出的更谦虚一点的结论："假如成人拥有皮亚杰称之为形式运算的思维阶段，则皮亚杰在详细说明他们在观察中获得的条件方面做得远远不够。"

从另一方面来看，我们的研究结果是对深刻理解皮亚杰的思维中不可逆和具体运算概念的一个证据。这是我们研究的最大的与众不同的特征。但是它们作为新奇问题的函数出现在似乎错误的阶段。正是这个新奇问题使得成人的推理像儿童的原因。

正如阿波斯特尔(Apostel)和乔治契尔(Jonckheere)(个人沟通)对我指出的那样，假如理论被解释为能力而不是成绩，批评就是有偏差的。因为假如那样的话，标志个体可以被期待达到上限的阶段仅低于理想条件。但是，在设计理论的临界实验时又带来了困难，因为反证通过援引水平的参差(horizontal decalage)——在程度上任务不同于它们抵制和抑制认知结构的应用事实的概念总是可以被规避。我们所做的一切是为了揭示即使成熟的智力也会更多地受到内容或者意义的影响，而不是形式运算理论的影响。

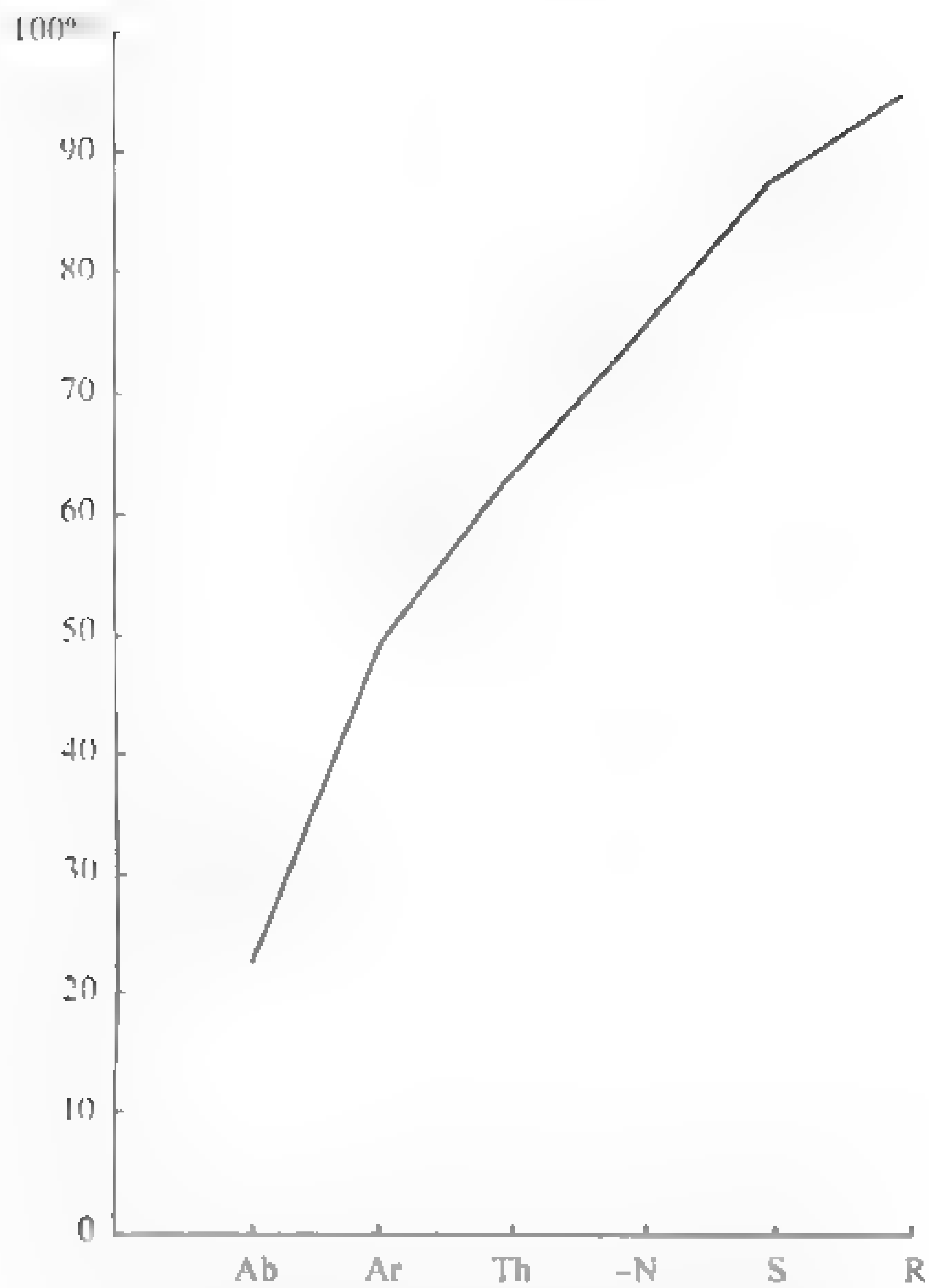


图 2　平均完整的洞察力反应的百分比与任务材料的函数
(N=184)(在 Van Duyne 之后的研究)

Ab=由 Wason 和 Shapiro(1971)Johson-Laird 等人(1972),
Van Duyne(1974),Van Duyne(准备中)计算而得的抽象条件 N=72
Ar=由 Van Duyne(准备中)计算而得的随意条件 N=24
Th=由 Wason 和 Shapiro(1971)计算而得的主题条件 N=16
-N=由 Van Duyne(1974)计算而得的缺少自然现实主义的现实条件 N=24
S=由 Van Duyne(准备中)计算而得的刺激条件 N=12

文献总汇

Bracewell, R. J. and Hidi, S. E., "The solution of an inferential problem as a function of stimulus materials," *Quarterly Journal of EXperimental Psychology*, 1974, vol. 26, 480-488.

Bruner, J. S., "Inhelder and Piaget's The growth of logical thinking: I A psychologist's viewpoint." *British Journal of Psychology*, 1959, vol. 50, 363-370.

Evans, J. St. B. T., "On the problem of interpreting reasoning data: logical and psychological approaches," *Cognition*, 1972, vol. 1, 373-384.

Evans, J. St. B. T. and Lynch, J. S., "Matching bias in the selection task." *British Journal of Psychology*, 1973, vol. 64, 391-397.

Furth, H. G., *Piaget and Knowledge*, London: Prentice Hall, 1969. Gilhooly, K. J. and Falconer, W. A., "Concrete and abstract terms and relations in testing a rule." *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 1974, vol. 26, 355-359.

Golding, E., Reich, S. S. and Wason, P. C., "Inter hemispheric differences in problem solving," *Perception*, 1974, vol. 3, 231-235.

Halford, G. S., "The impact of Piaget on psychology in the seventies." in *New Horizons in Psychology*, 1972, vol. 2, ed. P. C. Dodwell, Harmondsworth: Penguln Books.

Inhelder, B. and Piaget, J., *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*, London: Routledge & Kegan Paul, 1958.

Inhelder, B. and Piaget, J., *The Early Growth of Logic in the Child: classification and seriation*, London: Routledge & Kegan Paul, 1964.

Johnson Laird, P. N. and Wason, P. C., "A theoretical analysis of insight into a reasoning task," *Cognitive Psychology*, 1970, vol. 1, 134-148.

Johnson Laird, P. N., Legrenzi, P. and Sonino Legrenzi, M., "Reasoning and a sense of reality." *British Journal of Psychology*, 1972, vol. 63, 395-400.

Lunzer, E. A., "Problems of formal reasoning in test situations." in *European Research in Cognitive Development*, ed. P. H. Mussen, *Monogr. Soc. Res. Child Development*, 1965, vol. 30, 19-46.

Lunzer, E. A., "The development of formal reasoning." in *Cognitive Processes and Science Instruction*, ed. K. Frey and M. Lang, Burn Stuttgart, Vienna: Huber and Baltimore, 1972.

Lunzer, E. A., "Formal reasoning: a reappraisal, paper presented to the second annual conference of the Jean Piaget Society," *Philadelphia*, 1973.

Lunzer, E. A., Harrison, C. and Davey, M., "The four card problem and the development of formal reasoning," *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 1972, vol. 24, 326-339.

Piaget, J., *The Principles of Genetic Epistemology*. London: Routledge & Kegan Paul, 1972.

Van Duyne, P. C., "Realism and linguistic complexity," *British Journal of Psychology*, 1974, vol. 65, 59-67.

Wason, P. C., "Reasoning," *in New Horizons in Psychology*, 1966, vol. 1, ed. B., M. Foss, Harmondsworth: Penguin Books.

Wason, P. C., "Reasoning about a rule," *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 1968, vol. 20, 273-281.

Wason, P. C., "Regression in reasoning?" *British Journal of Psychology*, 1969, vol. 60, 471-480.

Wason, P. C. and Shapiro, D., "Natural and contrived experience in a reasoning problem," *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 1971, vol. 23, 63-71.

Wason, P. C. and Johnson Laird, P. N., *Psychology of Reasoning: structure and content*, London: Batsford, 1972.

Wason, P. C. and Golding, E., "The language of inconsistency," *British Journal of Psychology*, 1974, vol. 65, 537-546.

Wason, P. C. and Evans, J. St. B. T., "Dual processes in reasoning?" *Cognition*, 1974, vol. 4.

形式运算思维中的真值函项逻辑

〔美〕特雷尔·拜鲁姆 〔美〕詹姆斯·托马斯 〔美〕劳伦斯·韦茨 著
李梦霞 译
孙志凤 审校

形式运算思维中的真值函项逻辑

Truth Functional Logic in Formal Operational Thinking: Inhelder and Piaget's Evidence

作　者　Terrell Ward Bynum, James A. Thomas, Lawrence J. Weitz

原载于 *Developmental Psychology*, 1972, Vol. 7, No. 2, pp. 129-132.

李梦霞　译自英文
孙志凤　审校

形式运算思维中的真值函项逻辑

摘要：根据英海尔德(Inhelder)和皮亚杰的观点，一个充分发展的形式运算思维者在解决问题中使用所有形式运算的16个二元运算。他们提供的唯一的证据是来自于他们物理任务"看不见的磁铁的作用"的单一的口语记录。使用这个口语记录以及英海尔德和皮亚杰的分析方法，我们尝试去复制英海尔德和皮亚杰的研究结果。我们仅发现了16个中的8个证据和例子；并且我们发现8个英海尔德和皮亚杰的分析是错误的。我们提出几个重要的问题，例如，充分发展的形式运算思维者真的使用了所有的真值函数的16个二元运算了吗？

形式逻辑思维者在解决问题中，实际上使用了多少个真值函数？英海尔德和皮亚杰(1958)声称，完全发展的形式运算思维者使用了所有的16个真值函数的二元运算。然而，他们提供的关于16个真值函数被使用的唯一证据是一个简单的来自他们的物理任务"无形磁力的作用"的口语记录(Gou的口语记录)。

本论文的研究者——两个逻辑学家(第一和第二作者)和一个临床发展心理学家(第三作者)假设，与英海尔德和皮亚杰的研究结果相反，对Gou口语记录的逻辑分析显示，完全发展的形式运算思维者没有使用了所有的16个运算；尤其是，他没有使用非蕴涵(nonimplication)，反蕴涵(converse implication)，在相对 p 的关系中 q 的独立逆，完全的肯定，或者完全的否定。

我们提出假设有四个原因：

1. 在超过一年多的时间里，我们没有成功地重复了尝试找到或者设想出六个指定运算的日常语言公式的实验。

2. 在几年的教学和研究逻辑中，当分析种种推理和语言时，第一和第二作者发现：除了在技术逻辑的书籍或文章外，从来没有将六个指定运算的任何一个使用讲清楚。在这些情况下，这些被逻辑符号或技术术语表达的运算没有出现在典型的形式运算思维者的日常语言中。

3. 在大学生的逻辑教学中，第一作者和第二作者发现即使在解决复杂问题时，学生们仅仅使用一些常见的真值运算，并且从来没使用六个指定的运算。

4. 可以被六个指定运算操作的所有逻辑任务也可以经常更简单地被一些更普遍的真值函数运算操作(Quine，1961)。

方法

我们使用了英海尔德和皮亚杰（1958）运用的传统真值分析评分方法（例如参见，Quine，1961）分析了一个被试的口语记录，来鉴定该被试使用的所有真值运算。每个调查者甚至独自尝试复制英海尔德和皮亚杰对Gou口语记录的结果。最后，调查者对Gou口语记录中的16个运算进行了逐一的仔细分析。对每一个指定的运算达成的一致的决定是，它是否可以在Gou的口语记录中被鉴定。

结果

对每一个指定运算得出以下分析。

析取（Disjunction）

被试的口语记录中使用析取。他的陈述，"它既是距离，又是内容（盒子的，或两者），"是正确的析取的例子。在标准的真值函数中，这个析取可能被称为"包含的"或"弱包含的"。然而，值得注意的是，英海尔德和皮亚杰对析取的定义是循环的；也就是说，他们通过析取来定义析取——他们使用一个概念来定义这个概念本身。这样，他们来自于口语记录的例子就是正确的，但是他们的定义是有误的。

合取否定（Conjunctive Negation）

被试的口语记录中实际上没有使用合取否定；但是英海尔德和皮亚杰曾列举被试可以使用合取否定的合理证据。他们认为"（通过）改变盒子的位置（被试）验证了颜色和重量均不是决定因素的假设"。从口语记录中显而易见的是，被试在某一时刻说它不是重量，并且在此后说它不是颜色；但是他实际上没有使用合取否定的既不……也不……的短语。然而，我们接受了英海尔德和皮亚杰的判断，即口语记录包含了被试能够使用合取否定的证据。

合取（Conjunction）

被试的口语记录中使用了合取——实际上，他使用了几次合取。英海尔德和皮亚杰的例子是，被试陈述了内容和距离均是有效因素。

不相容（Incompatibility）

被试的口语记录中使用了不相容。他陈述，"当被靠在一起的时候，盒子是唯一重要的。"英海尔德和皮亚杰低估地分析这个陈述"移动盒子远离指针，与他们有效用是不相容的"。真值函数术语中，这个可以表达为：关于"盒子远离指针"的陈述和关于"盒子有效用"的陈述不是真正在一起。研究者认同了英海尔德和皮亚杰的解释，因此，被试在口语记录中使用了不相容。

蕴涵（Implication）

虽然被试的口语记录中没有使用真值（实质的）内涵，他使用了一个与之紧密相关的日常语言。实质蕴涵与日常语言相反（见Quine，1961）：例如，这里没有英国人、法国人或德国人等。一个与之相似的日常语言是一个因果蕴涵的陈述。英海尔德和皮亚杰

引用的口语记录中蕴涵的一个例子是："假如一个磁铁与指针相吸，它将会在装有烙铁的盒子前面停下来。"

非蕴涵(Nonimplication)

在被试的口语记录中，我们没有发现使用非蕴涵。在英海尔德和皮亚杰引用的例子中，也没有短语或者段落可能被合理地解释为相应的非蕴涵。

英海尔德和皮亚杰的例子是，"当它(指针)没有停止，非蕴涵出现了。"这个例子中所指的口语记录中的推理是：假如一个磁铁与指针是相吸的，则它将在装有烙铁的盒子前面停下来；假如磁铁没有停下来，则磁铁与指针是不相吸的。这是一个标准的否定式例子，否定式仅仅在蕴涵和否定中使用。此处没有非蕴涵。因此，英海尔德和皮亚杰没有给出一个非蕴涵的例子。他们似乎曲解了被试的口语记录中不存在的例子。

反蕴涵(Converse Implication)

被试的口语记录中没有使用逆蕴涵。包括在英海尔德和皮亚杰的例子中，我们也没有发现短句或者段落可能被合理地解释为相应的逆蕴涵。

英海尔德和皮亚杰引用的例子是，"假如盒子里有一个磁铁，它将使磁盘停止。"然而这个例子有一个蕴涵的陈述形式，即，假如 p 则 q。它没有逆蕴涵的形式，即假如 q 则 p。英海尔德和皮亚杰的例子是错误的，因为他们错误的定义了逆蕴涵。他们使用了蕴涵以及 p 和 q 的逆顺序，而没有使用逆蕴涵，同时保持 p 和 q 的顺序。他们混淆了转换运算对象和转换运算本身。

p 相对于 q 的独立逆(Inverse of Independence of p in Relation to q)

被试没有使用 p 相对于 q 的独立逆。英海尔德和皮亚杰的陈述——"没有使任何一致的颜色停下来，或者它们不存在。"——最多相应地使用了真值复杂合取("也一致")和析取("或")。即使它们的陈述与问题中的运算不一致，被试本人既没有说出它，也没有使用逻辑操作暗示它。

在做出陈述之后，被试立即暗示"重量是无关的"，"颜色是无关的"。这个与英海尔德和皮亚杰认为是他陈述的最为接近。然而他们的解释是，仅有任何可能解释中的一个，不同于问题中的那个陈述，大部分的陈述使用了真值运算(如，合取、析取、互反性)。英海尔德和皮亚杰没有提供理由使大家去接受他们的解释是正确的解释。

逆反蕴涵(Inverse of Converse Implication)

被试口语记录中没有使用逆反蕴涵。英海尔德和皮亚杰他们自己错误地引用了被试的陈述。他们简单地指出逆反蕴涵可以被用来定义一些被试使用的运算(如，析取，非蕴涵，互反性)。然而，他们没有提供被试可以或者可能通过逆反蕴涵来定义其他的运算，或者他们在要求这样一个定义上的某点上使用逆反蕴涵的证据。

互反排斥性(Reciprocal Exclusion)

被试使用了互反性。英海尔德和皮亚杰引用的例子——"飞机既是水平的，重量也是没有作用的或者重量有作用并且飞机不是平的"——这是在标准真值函数中对强析

取的正确地一致(互反性)。

等价(Equivalence)

被试的口语记录中使用了等价。英海尔德和皮亚杰的例子是"为了坚信重量是一个效应与坚信指针因为飞机的倾斜而停止是等价的"。这是他们对被试陈述的解释,"可能它跌落了并且此处它是相对重的(重量可能低于飞机,因此结果导致指针在最低点停止移动)……(他把一个记事本放到板下面为的是齐平这个记事本并且看到结果是一样的)……"我们同意被试的陈述以及英海尔德和皮亚杰的解释均假定双重条件(等价)陈述:假如,并且仅仅假如倾斜是有效的前提下,重量是有效的。

p 相对于 q 的独立性(Independence of p in Relation to q)

口语记录中提供了被试使用或者能够使用 p 相对于 q 的独立性的例子。在某一处被试陈述,"重量是无关的",并且暗示,"颜色是无关的"。我们认为被试隐含或者可能使用了陈述句,如"不论颜色是否出现,指针都停止了" 因此,我们认可英海尔德和皮亚杰的被试可能使用 p 相对于 q 的独立性的结论。

q 的独立性和 q 相对于 p 的独立逆(Independence of q and Inverse of Independence of q in Relation to p)

被试的口语记录中没有使用任何这些运算。英海尔德和皮亚杰他们自己没有引用陈述并且我们也没有找到短句或者段落可以合理地被解释为问题中的这两个运算中的任何一个。总之,英海尔德和皮亚杰对这两个运算的定义有误 而不是使用这两个运算并且保证 p 和 q 的顺序相同,他们使用了不同的运算并且反转了 p 和 q 的顺序 他们混淆了转换运算对象与转换运算本身。

完全肯定(Complete Affirmation)

被试没有使用完全肯定。英海尔德和皮亚杰对完全肯定的解释是所有可能的 p,非 p,q,非 q 的二元组合是可能的,即(p 和 q)或者(p 和非 q)或(非 p 和 q)或(非 p 和非 q)是可能的。然而,被试没有说出这样的陈述,也没有给出假定任何一个组合的证据。而且,英海尔德和皮亚杰的定义依赖否定、合取和析取;因此,即使被试做出了一个与他们的定义相一致的陈述,根据他实际使用了完全肯定而不是否定、合取和析取的联合,这个假定也可能是不充分的。

完全否定(Complete Negation)

被试没有使用完全否定。这个运算可能要求使用一个单一的与以下组合相应的简单短语:非(p 和 q)、非(p 和非 q)、非(非 p 和 q)和非(非 p 和非 q)。然而,英海尔德和皮亚杰的例子是:"为了拒绝重量是有效的,并且断言它是有效的,可能是矛盾的。"这个一致仅仅是"p 和非 p",这与完全否定不同。我们在口语记录中可以发现没有短语或者陈述能合理地被解释为完全否定。

讨论

通过对唯一的口语记录的逻辑分析,它也是英海尔德和皮亚杰提供的充分发展的

止式运算思维者使用真值函数的16个二元运算的唯一证据，得出以下结果：

1. 英海尔德和皮亚杰正确地定义了口语记录中6个二元真值运算的例子（析取、合取、不相容、蕴涵、互反性和等价）。

2. 英海尔德和皮亚杰正确地定义了部分口语记录，其中，虽然没有给出二元运算的正确的例子，但可以解释为被试使用了2个更多的运算（合取否定、p相对于q的独立性）的合理证据。

3. 英海尔德和皮亚杰给出了使用剩余8个二元运算的错误例子，口语记录中也没有包含任何的例子或者他们引用的任何证据。

通过这个分析，许多问题出现了（进一步的讨论见Weitz,1971）：

1. 充分发展的形式运算思维者真正地使用了所有的真值函数的16个二元运算吗？

2. 假如他们可以真正地使用，英海尔德和皮亚杰的物理任务"看不见的磁铁"可以有效地检测这样的使用吗？

3. 假如所有的16个二元运算没有被使用，在这些被使用的运算中，某些发展的趋势可以被发现吗？

文献总汇

Inhelder, B., & Piaget, J., *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*, London: Routledge & Kegan Paul, 1958.

Quine, W. V. O., *Mathematical logic*, (Rev. ed.) Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1961.

Weitz, L. J., *A developmental and logical analysis of Piaget's sixteen binary combinations*, (Doctoral dissertation, State University of New York at Albany) Ann Arbor, Mich.: University Microfilms, 1971, No. 71-26797.

(Received December 28, 1971)

一种批判的观点

——皮亚杰的《逻辑通论》

〔英〕内森·艾萨克斯　著
孙志凤　译

一种批判的观点——皮亚杰的《逻辑通论》

Critical Notice: *Traité de Logique* by Jean Piaget

作　者　N. Isaacs

原载于 *British Journal of Psychology*, 1951, 42, pp. 185-188.

仆志风　译自英文

一种批判的观点
——皮亚杰的《逻辑通论》[①]

我们也许应该提醒那些没有数学与逻辑业余爱好的心理学专业的学生：表面上，皮亚杰所著的《逻辑通论》这本书，并不适用于你们。因为书中的子标题明显采用了严格的逻辑形式，它似乎可以视为逻辑学（逻辑运算）。当然，逻辑可视为与心理学部分（或与社会心理学）互补，虽然实际上它与心理学一直是独立的研究领域。逻辑表达了思维运算的自我限制、细化或者纯粹的模型，而心理学则是在具体的情境中对思维运算进行研究，两者不存在重叠与相互作用。皮亚杰在《逻辑通论》一书阐释了两者的基本关系之后，就在其主要的章节中首先系统地确立了命题内与命题间的符号运算；接着分析与讨论了逻辑的形式基础和公理；最后讨论了所有现代逻辑学家都感到极其困难的重要问题——逻辑与数学之间的关系。

毫无疑问，专业的逻辑学家会公正对待这种全新方法的价值以及由它所激发的人们对于主要的逻辑主题的研究兴趣。关于这样一种公正的对待，哪怕仅仅是对皮亚杰非常技术化观点进行具体介绍，一般的杂志都很难有那么大的篇幅。不管怎样，关于皮亚杰研究的整体观，以及其最值得关注的著作与反复出现的主题，任何心理学家都是会有兴趣的。在此著作中，这位卓越的发生心理学家的思想与观点，不只是表达了他对于其他知识分支领域的偶然兴趣（就像他曾经研究过的考古学与钱币学），而是表达了“逻辑应在心理学研究主题中占据一席之地”的主张。这也正是对皮亚杰三十年来发生认识心理研究的修正与完善。实际上，对于此书的阅读也应密切结合他最近的里程碑式的著作《发生认识论导论》和《智慧心理学》（English Routledge 出版，1950）。后一著作本身也是对皮亚杰关于儿童各种智慧功能和过程的一系列实验性研究的简要总结。这些系列实验最终以反映智慧的心理本质和功能的特殊概念达到顶峰，然后又返之作为其严格的形式化的必要补充。不管怎样，这正是这部著作想完成的逻辑的操作化概念。

心理学专业学生，应高度关注逻辑的广阔图景，因为逻辑是形式上的对应物以及由皮亚杰提出智慧发挥作用的理论。而且所有的形式符号，绝对是心理学家甚至是发生心理学家的图景，皮亚杰的研究早已揭示了逻辑与心理事实的普遍联系。逻辑是“演绎运算的形式理论”。这些运算对于推理成为可能是必需的与充分的。我们通过运算，才能从真值至真命题，或者更确切地说，通过运算，我们才可能从任何集合或真、假命题的

① 来源：《英国心理学杂志》第 42 卷，1951，第 185—188 页。

组合，产生有效的真与假。这样的运算构成了整合的整体结构，这些结构最基本的特征是可逆性。可逆性实际上是“理性的最复杂、最普遍的标准”。运算自身也是“可逆的变换”。思维或智慧心理学（皮亚杰常常视为同一概念）表明：这些运算是如何通过开始内化的动作分阶段逐步获得发展的，以及是如何通过从最早的感觉运动水平发展至随后的每一个阶段的动作而获得发展的。在儿童思维发展的过程中，这些内化的动作，可以视为到达连续的更高的分化与组织水平、灵活性与组合性，直至到达个命题水平以及完全的可逆性的载体。当儿童能够有效地操纵形式逻辑关系，也即能够自由地将它们彼此相加、相乘、关联与解除联系、替代与转化，一般性开始操作所有的形式可能性，这便是智慧的水平。逻辑就是这些可能性以及智慧实现的理论。

有关逻辑与智慧之间的联系，首先是发生心理学家所使用的方法。这是需要不断重复强调的。每一个逻辑运算的起点，都是主体的动作，它包括将事物放在一起或是以某种序的方式放在一起。因而，表达这些动作的命题，是类与关系的前提，就像是判断使之产生的概念，一般而言是其结果的行动的前提（这是皮亚杰逻辑观中最基本的心理主题）。逻辑不但解答了类别、关系与命题的运算，而且还发现每一个运算复制了同样的运算结构，且与其他的运算同构。类别与关系自身在功能上也是相关的：类别对应于概念的外延，关系对应于概念的内涵，就像刚才所提及的，它们依次从判断中推导而来，或是从逻辑上来说，是由命题推导而来。命题系统的所有形式或逻辑的属性，在逻辑运算中，都有其对立面及真正的基础，它们在最后的分析中又是心理的动作。

广义上来说，这是皮亚杰逻辑建立的格式。但是，这幅图景看上去比实际上复杂太多。我们似乎要考虑每一种可能运算的基础，包括其数学的基础。总之，这似乎是皮亚杰对此的主要观点。但是，实际上，在皮亚杰提出了第一个普适性的方法之后，他在逻辑方面的著作就局限于运算的具体发展，并假设它们不是数学的。现在，他使用与数学截然不同的逻辑术语，将两学科都视为具有特定的共有属性，而且每一学科都超越了其自身独立的领域（当然，他并不否认，两学科有时与我们容易理解的形式思维理论有交汇）。与此同时，他将逻辑视为与更基本的操作水平相关，尤其是指内涵的量方面的特征（与外延相对），以及在部分整体关系和分层的定性的类包含之上（例如，分类的动物学及植物学方面的格式）。这些形成了他所强调的逻辑及逻辑学核心概念的基础（狭义上），也即是，群集的概念。它是介于数学的群与格之间的结构类型，它提供了自身不属于集合的属性。皮亚杰的逻辑运算正是以此为基础的。但是，他似乎打算将这种基本的运算系统描述成前数学的，而且在他的整个方法论中多处表明：他将非常严格的限定范围的运算系统视为数学的。他所建立的所有认知装置仅仅为逻辑与智慧的最后居所的入口或是接待室的差异。

上述介绍（如果我们正确理解了皮亚杰教授）只是帮助我们理解皮亚杰关于逻辑与心理的一般思想，当然这对于理解其重要著作的观点与主旨还不够充分。既然皮亚杰的著作表达了逻辑是建立在心理发生的前提之上，那么最终会超出它的范围。它也超

出它的其他价值，心理学家受此激发思考心理与逻辑关系问题便是标志之一。现在，任何关注智慧过程的学者都不能忽略心理与逻辑的关系，虽然这真的不是心理学家的事务。对心理学这方面的理解与掌握水平的缺乏，因为皮亚杰，我们可以暂时放下了。然而，我们是否可以接受他的解决方案作为一种完满方案，这于我而言不太确定。显然，任何的包容性怀疑（就像他的研究结论一样），必定能应用于他的智慧概念，就像应用于他对逻辑的阐释一样。将智慧与逻辑这两者放在一起，真的能解决问题吗？作为一个心理学专业的学生，在我们所有人都将运算及成绩视为智慧的表现时，他在思考这种涉及面如此宽泛的问题，能够感觉对受限制的形式推理运算装置进行操纵的纯粹能力，它包含了整体的本质与秘密吗？无可否认，类包含或者部分——整体关系的基本复杂性肯定不是，那么这真的是与数学联系在一起吗？

在此，我们不太可能对此进行更详细的批判性分析，只是提出以下问题以作建议：

（1）形式逻辑运算，无论其范围及效能是什么，都能构成充分的以及令人满意的逻辑吗？当然，逻辑学家可以按照他们想要的进行定义，去呈现他们的主题；但一个具有心理的历史与现实感的心理学家，会感到颇受束缚。在更宽泛的生物学领域，更像是解剖名词被限定在脊椎动物结构的科学上进行定义一样。这样，我们也许可以获得关系密切的知识体。但是，每一个生物学家都知晓这之中一些更重要的东西被遗漏了。我们仍旧需要为所有生物体的结构的更宽更基础的科学，提供名字与空间，而且这个科学在其范围内也将包含脊椎动物形成自身的那些结构，以及它们的位置与其他的关系。按照这种方式，皮亚杰的著作分成两个部分，其中之一是实际的运算，另一是对其基础的探寻，它们与数学的基础进行比较。大多数人会认为这是对真正的基本逻辑基础的必需的探寻，并不是什么运算（不管是“群集”、“群”或者是“格”）。非常明显，后者在应用逻辑中只是一个特别的结构。

（2）那么，作为真正的逻辑内容，由皮亚杰提出的这种特别的运算——以“群集”为中心的运算——真正的价值与范围又是什么呢？他自己似乎对此有两种或三种想法。正如我们所理解的，不仅仅是他自己的逻辑超越了运算，他所提出的特殊运算也显然独立于数学，这些都是他对逻辑的正式定义。他还将其逻辑运算的局限性和基础特性与数学运算的丰富性和能力进行比较。至此，几乎没有人怀疑它代表了最本质的部分。但是，就其本身而言，这又相距多远呢？我们也许注意到，实际上他的具体实例及推断对此观点的支持是非常微不足道的。为了简要的说明，这样描述也许是最合适。而且，另一方面，这也正是从本质的关系格式的限制所期望的。在缺乏真正令人印象深刻的实证研究的情况下，除了数学，还有什么对更复杂、更困难的智慧表现，以及对于智慧表现的多样性是充分的证实呢？它可以表现对处理隐性问题的阐释，或者经由其自身导向未来的与意料不到的结果？毫无疑问，只是关注逻辑运算范围之外，是为了从已有定义与规则去展示其结果。但是，会不会再次表明这类特殊的逻辑运算并非是我们真正需要的？我们再一次被导向如皮亚杰自己诉诸实践的逻辑，分析和评估，比较与讨

论，而且到目前为止已超越了皮亚杰在其上的形式主义的假设

(3) 作为心理学家，如果我们再深入思考运算本身，那么实际上我们想要探寻的运算的基础存在很多问题。我们真的清楚所有这些被如此想当然的核心概念的心理意义吗？在诸如"和"、"或"、"等同"这些概念背后，具有复杂的心理现实感的个体，应该愿意接受这些核心概念所具有的价值是模糊的和自明的吗？同样，逻辑学家们使用的"命题"、"重言式"的概念的应用也是如此："蕴涵"的核心概念，以及甚至是"真"、"非真"、"有效性"的基本的指导思想。在它们中，指向多重模糊与困难过于容易，绝大多数逻辑学家的确发现至少对他们中一部分进行讨论是有必要的。但是，心理学家常常不同意此观点，他们认为这是无关紧要的。然而，这也正是皮亚杰所期望达成的那样，某种意义上，对于所涉及的复杂性方面，心理的理解与掌握是重要的(例如，对于意义的所有变化，以及"或"的转折的变化)。当然，相关的心理分析与说明，它与表达成自洽的演绎系统的运算框架并不匹配。在说明的能力方面，这种心理分析再一次确切无疑地，对于其意义是如此的必要，就像运算的有效性一样，它需要足够宽泛的逻辑概念，以便为之留出空间。

(4) 从另一个角度来看，如果略去皮亚杰对运算边界的界定，那么整个智慧的推理应用领域会不会立即变得清晰？如果不使用更广义的逻辑，我们又从哪里以及如何处理这些？为何它们比具有其认可的基本特征和局限性的特别运算，在其规范上包含具有更少的价值？这只是解决了"二价"逻辑，即只是区分真或非真，只是将其置于完全的排中律支配下。这些限定首先排除了庞大的不确定性与概率、有疑问的真值与推断、对证据的评价以及试图在最大可能达至平衡等方面。其次，它排除了世间所有排中率不适用的情形(由于其传统上的高估)，只是作为一个隐藏的困难：世间所有中间状态和情形、混合物和融合、波动和变化的程度(数学的确需要考虑这些，为其提供一定条件去实现它；但是它们中的大多数仍然未能实现)。在每一个智慧领域，会不断呼吁理性、推断与判断，智慧在更好与更坏、在多少有点说服力与成功的表现之间存在着巨大的差异，可以对这些差异予以研究与分析，并至少可以在一定程度上以适当的方式，将之编撰为逻辑的一个分支。与智慧所涉及的范围相比，皮亚杰对运算限定在形式上的有效性，排中律仅表达了思维的极少的方面。如果我们从心理学家假设——最发达智慧的实际操作水平可以定义逻辑领域，那么这似乎背离了最不相关的理由，他的运算所应用的领域的过分狭窄的界限。

也许，皮亚杰对先前问题的主要回答大部分涉及思维心理学，他自己也承认逻辑≠逻辑学，但是出于各种理由，他仍然偏爱定义它。即使我们认可这种定义，那么这样的心理学与"智慧心理学"有非常大的差异，这只是他的形式运算逻辑的互反。这样一种截然不同的终端图景的出现包含着逻辑运算本身。这里，并不存在一个单一的特别厉害的部分，思维心理学会渐渐变成更广泛的逻辑，运算的结构也只能形成一个部分。这很可能仍然保持自洽的，其价值和重要性在其范围内不需要被低估。然而，概率与居中

逻辑至少有其同等重要的地位，因而也肯定会有科学的方法或方法论。皮亚杰在早期忽略了这方面，完全没有将之视为逻辑的一部分，并认为这是研究人员个人的科学素养问题。总体的研究方案无疑更像早期不太积极的与专业的逻辑学，形成更大的整体的部分的内容，而且巨大的差异恰恰在于其新发现的心理上的连续性。也即，过渡区的存在可被中立地以皮亚杰的术语称之为心理逻辑，或者逻辑心理，或者"规范性事实的心理"(例如，规范性的心理事实——概念和原理)。这个中间的科学关注推理运算(前数学的)和数学运算的心理基础，因而会表达出两者的共同要素。但它同样会关注每一个其他类型推导的心理基础，或智慧发挥的规则和程序，它们与数学的关系以及纯演绎。复杂的心理和所有思维的普遍工具的逻辑并不能解释一些问题，比如语言。因而，这样的心理逻辑将涵盖皮亚杰教授那些不仅仅在文章中表现，而且还似乎隐含在对所有心理与科学方面推动上的研究框架的基础。然而，问题的根源在其独特的发生心理方法，它是如此特殊的与相应的逻辑数学能力结合在一起。如果他不是对于智慧和逻辑进行狭义的界定致使自相矛盾，那么他极有可能贡献一个完全逻辑的心理学基础以及对应于完整的心理学的逻辑。又或者，他仍然可以被说服去扩展并完成他的研究。

意义逻辑和有意义的蕴涵

〔法〕吉尔伯特·皮埃劳特 李·勒庞　著
李梦霞　译
孙志凤　审校

意义逻辑和有意义的蕴涵

The Logic of Meaning and Meaningful Implication

作　者　G. Piéraut-Le Bonniec

原载于 *Reasoning, Necessity and Logic: Developmental Perspectives*, edited by W. F. Overton, New York: Erlbaum, 1990, pp. 67-85.

李梦霞　译自英文
孙志凤　审校

意义逻辑和有意义的蕴涵[1]

这篇论文的主要关注点是“如果……、那么……”命题和这种关系在解决问题情境中影响逻辑推理的方式。尤其是，当以相关事件（如，实质蕴涵）为基础，考虑“如果……，那么……”关系和当以一个从句与另一个从句是有意义关联的方式（如，真实蕴涵）为基础，考虑“如果……，那么……”关系时，产生的不同结果将会引起争论。伴随这个争论的发展，我们将列举出真实蕴涵可以作为问题解决模型的方式的例子。

众所周知，皮亚杰描述思维的逻辑结构发展不是以分类的强度或者意义为基础的，而是以分类外延的角度出发的分类逻辑为基础的。数学运算恰恰也是以这个外延的逻辑为基础，怀特海（Whitehead）和罗素（Russell）的《数学原理》（*Principia Mathematica*）就是这种形式逻辑分类的参照。然而，当推理被理解为意义的隐性组织时，中心国际②最后的研究——日内瓦发生认识论（见 Piaget 和 Garcia，1987）试图要超出外延理论去检验意义和推理的互补相位。这个观点的变化提供了排除某些研究者在形式逻辑领域和形式逻辑推理领域面对障碍的可能性。

实际上，很久以前，逻辑学家们自己发现了有些作者称之为“实质蕴涵的悖论”困境，心理学家早就意识到形式逻辑不能提供思维的完整、充分的模型。尤其是，对各种各样的推理而言，所有的研究者面对的一个主要的问题是如何理解蕴涵的本质问题。

让我们来思考两个命题，p 和 q，假如提供了决策标准，这些命题既可以是真，也可以是假。合起来，就会有四个可能的组合：a）p 是真，并且 q 是真，b）p 是真，并且 q 是假，c）p 是假，并且 q 是真，d）p 是假，并且 q 是假。假如我们没有 p 是真，并且 q 是假（或者 p，并且非 q）的前提，“如果 p，则 q”的关系，可以见表1。

① 来源 In W. F. Overton (ed.) *Reasoning, Necessity and Logic: Developmental Perspectives* (New York: Erlbaum, 1990), pp. 67-85.

② 原文用的“中心国际”，而不是用的全称，按原文直译。——译者注

表 1　命题"假如水是由氢和氧构成的，则圣诞节是 12 月 25 日"的实质蕴涵真值表(　)

p	q	$p \supset q$
水是由氢和氧构成的	圣诞节是 12 月 25 日	
真(或 1)	真(或 1)	真(或 1)
真(或 1)	假(或 0)	假(或 0)
假(或 0)	真(或 1)	真(或 1)
假(或 0)	假(或 0)	真(或 1)

注："⊃"读作"如果 p，则 q"。

让我们给 p 和 q 分配一个意义，例如：

p＝"这个动物是狗"。

q＝"这个动物是哺乳动物"。

蕴涵"如果这个动物是狗，则这个动物是哺乳动物"有效，因为没有例子证明狗不是哺乳动物(——所有的母狗有乳头)。这就是我称之为"有意义的蕴涵"，在其中人们乐意承认在存在狗和存在哺乳动物的事实之间的意义关系。

现在让我们再来为 p 和 q 分配另一个意义：

p＝"水是由氢和氧构成的"。

q＝"圣诞节是 12 月 25 日"。

蕴涵"假如水是由氢和氧构成的，则圣诞节是 12 月 25 日"也是有效的，因为圣诞节总是 12 月 25 日是真的。这个称之为"实质蕴涵"的关系是有效的事实可能在日常生活中显得价值很小。然而，在区分命题的意义和真值时，它是有用的。许多人会同意以下蕴涵的有效性："假如 X 是失业者，则 X 是懒惰的。"这个关系不是没有意义的。然而，这种类型的蕴涵的有效性是受到挑战的，因为它很容易去解释某一个失业的人是懒惰的。这就是为什么数学家和逻辑学家更喜欢在试图证明他们的定理时，减少命题的真值，消除意义。

然而，许多逻辑学家尝试去建构逻辑系统，在这个逻辑系统中，无意义的蕴涵是不可能的，他们的尝试有两个方向。第一个方向在于，通过在 0 和 1 之间引入中间值，如，卢卡西维奇(Lukaciewicz)的 1/2 值，或者像刘易斯(Lewis)和朗格弗德(Langford)(1932)所做的那样，通过引入模态算子(modal operators)(如，逻辑的必要性和逻辑的可能性)尝试将真和假之间的对立缓和。另一个方向，也是我们有兴趣的方向是，以称之为针对性关系(pertinence relation)的形式，尝试再次引入部分理解的外延逻辑。这正是安德森(Anderson)和贝尔纳普(Belnap)(1962)通过引入意义的约束条件，尝试去做的，但是他们在思维中是考虑到形式的，逻辑证据方面尝试这样做的。他们采用了一个符号，当适用于一个给定的陈述时(它本身是根据 ps 和 qs 等构成的)，在连续证据过程中抑制了一个不相关前提的引入。因此，安德森和贝尔纳普尝试使关联或者针对可以应用于任何陈述的形式化概念。

可惜没有一个被提及的逻辑系统能为被设计用于解决的问题提供满意的解决方案，而且这些逻辑系统也包含了安德森和贝尔纳普的逻辑系统。然而，这些尝试为非逻辑学家带来了有限的权益。外延逻辑被建构，对数学家而言，假如被建构的外延逻辑被适当地使用并且没有从水的化学成分推论圣诞节的日期，他们会发现这样的系统是符合要求的。

心理学家处理这个问题时各有差异。正如一个美德论著不能被看作是人类行为的一般描述一样，逻辑学家的推理模型不能被认为是思维过程的一般模型。实际上，已有的大量文献（如，Piaget，1962；Johnson Laird，Legrenzi 和 Legrenzi，1972；Wason，1966，1968，1983；Wason 和 Johnson Laird，1968，1972）表明，当 p 和 q 的关系完全任意时，在检验蕴涵的真假时，人们不会自发地采用形式逻辑规则；当这些条款本身是抽象的；或者当蕴涵被还原为它的互补相位（如，蕴涵被还原为一个除了命题的意义之外的真值的可能组合的唯一考虑）（见 Matalon 1962，第 5 章）。

这个领域的研究者们（如，Griggs，1983；Overton，Ward，Noveck，Black 和 O'Brien，1987）集中于假如 p 和 q 的内容有更少的任意性，更少的抽象性，并且被试更熟悉的话，在条件推理（蕴涵）任务，即被称为"选择任务"或者"四张卡片任务"中，成绩是否可以被提高。他们的研究发现：通常，在被试发展了必要的逻辑能力之后，他们关于问题内容的知识和关于反例的经验就可以提高他们的成绩。然而，欧文顿（Overton）和他的同事们（Overton 等人，1987）开展的一系列研究说明，事实可能并不像它最初看上去的那样。也就是说，对几个内容应该完全熟悉的条件语句"例如，假如一个学生在一个学年中缺勤超过十次，则这个学生必须重修一年"；"假如一个学生在学校，则这个学生没有在玩收音机"，所有被试，包括十几岁的（13～18 岁）被试的成绩相对差。这意味着这些青少年没有达到形式逻辑的阶段吗？结合这些研究的其他数据（也可见 Byrnes & Overton，1986；Overton，Byrnes，和 O'Brien，1985），这个可能性很难被接受，似乎问题必须以不同的方式呈现。因此，我可能会怀着阐明这个问题的希望，思考在过去的几年中，由中心国际组织实施的发生认识论的研究。

皮亚杰指出（1987）逻辑学家关联形式逻辑和自然逻辑的最卓有成效的努力是安德森和贝尔纳普所做的研究，他们引入了蕴涵性运算符（entailment operator）的概念。使用这样一个运算符是不中肯的，除非两个命题 p 和 q 有某些共同性。逻辑学家制定的实质蕴涵和蕴涵性符号的区别可能相当于形式逻辑和皮亚杰称为符号化蕴涵的区别（比较，Piaget，1986；也可见 Matalon，第五章）。形式蕴涵存在于 p 和 q 是简单关联的情景。可能是马特隆（Matalon）提出的方法（1962）中的一个例子是，红灯和绿灯间断地按照实验者选择的任意规则开关："假如红灯亮，则绿灯亮"。蕴涵命题 p 的意义"包含"在 q 的意义的情景下存在符号化的蕴涵。

皮亚杰认为这样的符号化蕴涵的先行知识在儿童发展的早期就已出现。因此，这样的先行知识在人的一生中出现得比较早，婴儿能理解了假如一个吸引他们的玩具在

支撑物上，他们可以通过把支撑物拉过来得到玩具。婴儿的行为说明了他/她已经理解了玩具和支撑物关系的原因；婴儿理解关系的必要性的实验是假如玩具远离他时，他没有拉支撑物。因此，对逻辑活动水平的操作，婴儿会由符号化的蕴涵来指导。

皮亚杰强调了一个事实，即现实世界不存在儿童简单抽象出的有意义的规律。儿童通过赋予实物于意义探索了一个给定状态的原因。用这种方式，她/他建构了越来越大的模式，这个模式可以使他/她逐渐地消除皮亚杰称为"虚假必然"的事物(例如，被试相信是必然的，但当考虑到情景扩大以后，是逐渐意识到不是必然的约束条件)。这些虚假必然逐步地被被试理解为是意义系统建构的结果的原因代替。

这个新方法隐含了新的认知概念。遗憾的是除了皮亚杰的《人类发展》(1977，1986年被译为英文版)外，介绍了符号化蕴涵和推理，仅有的材料是一些未发表的论文和我们在发生认识论国际中心讨论的回忆。结果，很少的证据能支持我们中的任何人正确地理解了皮亚杰的思想观点。为此，我希望强调，即使我们呈现的观点完全依赖于我们亲切地称之为"老板"的人，我不能保证它们是可靠的，同时，对可能出现的前后矛盾或者乏味之处我将承担全部的责任。

首先，我想澄清我关于推理的理解。陈述A是真的推理，不能与可能提供陈述有效性的正式说明的证据相混淆。推理是允许我们理解A的意义的事物：它是如何解释A的(对比 Halbwachs，1981)。

请思考一个两组有相同数量的项目但排列不同的例子。在组1中，项目很靠近，在组2中，他们相距甚远。我们知道年幼的儿童会认为两组在数量上是不等的，他们经常认为占最少空间的组在数量上也是最少的)。直到儿童能够使用他/她的手做出一一对应时，他/她才能理解两组有相同数量的项目。这不是一个正式的示例，但是它是一个解释。事实上，组1的每个项目对应于组2的项目是推理两个集合有相同的项目数。陈述A，"一组的每个元素恰好对应于另一组的每个元素"，来自于陈述B的内在意义，"两组是相同的"。一个有意义的蕴涵将加入两个命题，因为陈述A被恰好地理解为B的原因。

$$A \xrightarrow{R} B$$

在意义中产生"p 蕴涵 q"的命题：

$$p > q$$

假如第三个陈述C的意义包含在A和B的意义中，这个关系是可传递的。例如，把C陈述为，"两个组的项目顺序是两个两个的，是不重要的"。这个产生："A是B的原因，并且这个原因是C的原因。"

$$(A \xrightarrow{R'} B) \xrightarrow{R''} C$$

或者，p 蕴涵 q，并且这个蕴涵又蕴涵了 r，

$$(p > q) > r$$

第二个蕴涵，在某种程度上是前一个蕴涵的结果，皮亚杰把这个蕴涵叫作前摄蕴涵(*proactive implication*)。

被试也想知道第一个符号化蕴涵的原因。假如这样，她/他可能将建构一个包括 A 和 B 的意思的陈述。例如，此处，D＝"A 数量(N)必定只有一个且仅有一个后续，那就是数字加 1"。这是推理，即假如一组的每个项目均与另一组的项目对应，则这两个组是相等的：

$$D \xrightarrow{R} (A \xrightarrow{R'} B) \xrightarrow{R''} C$$

或者

$$s>(p>q)>r$$

这个蕴涵被称为倒摄(retroactive)蕴涵；它依赖于当被试在理解一个问题时，她/他能够提出的问题。值得注意的是，皮亚杰提到的前摄蕴涵和倒摄蕴涵的区别最早出现在皮尔斯(Pierce)的著作中(预言性和追溯性蕴涵)。因此，产生推理可以被称为建构涉及先前阐述意义的模型，参阅 Johnson-Laird(1983)。

对于前述"意义""推理"和"符号化"蕴涵的类型的本质和关系的问题仍然存在争论。事实上，这涉及这些认知概念是否可以充分地解释行为的问题。在下文中，我试图通过呈现一些实验数据来解释这些概念，这些概念的确可以充分地解释问题，解决行为。然后，这个解释通过发展的假设变得更复杂了，这个解释也被检验。正确使用蕴涵的能力与以下事实有关：在给定条件下，被试具有或者不具有一个有效的模型，反过来，被试根据推理假设了一个意义的组织。

我们将呈现来自两个问题解决研究实验的数据。第一个是我在日内瓦发生认识论国际中心(Pieraat Le Bonniec 和 Rappe du Cher，1982)统计的发展研究数据。第二个是由 J. B. 格里兹(J. B. Grize)和我自己统计的关于成人推理的研究数据。

在这些研究中，都是向被试呈现一个问题并且要求他们推理问题的解决方案。询问的焦点是被试是否产生意义蕴涵，并且被试产生意义蕴涵是几岁儿童的水平(如，关于问题解决的意义假设)；被试使用证据情景的方式[如，案例 1(p 和 q)，2(p 和非 q)，3(非 p 和 q)，4(非 p 和非 q)见(如，证实或证伪)]当呈现矛盾情景时，被试的假设和理解蕴涵的方式。

为了恰当地领会这个研究，最好将它与传统的条件推理问题进行简略地对比。例如华生(Wason)的"选择任务"或者前面提到的"四卡片问题"。在华生任务中，给被试呈现的是以条件语句("如果……，那么……")的形式构成的外显假设。在当前的研究中，被试必须产生他自己的意义蕴涵或者假设。存在或不存在意义蕴涵，意义蕴涵的本质，意义蕴涵的假设都需要研究者从被试的口语记录中提取。在华生任务中，伴随着假设的提出，给被试外显的证据情景，并且要求他们去验证假设。在当前的研究中，证据情景由被试自己组织，并且组织和验证也是从被试问题解决的口语记录中提取。

实验 1：正方形的周长

正方形是一个几何图形。换句话说，正方形这种形状是数学家赋予它属性的结果。正方形在自然界中并没有，但是人类有时候会在现实世界中辨认形状（如，由四条相等的边和直角组成的图形区域）。任何指定边长 N 的正方形的周长 P 都等于它的边长 N 的 4 倍（$P=4\times N$ 并且 $N=P/4$）。附加的约束可以通过规定数字 N 来提出。因此，周长不能是奇数。但是，偶数同样也有约束条件。例如，假如我们接受整数的约束条件，则 20 由 4×5 构成，是可行的，但是 18(18/4＝4.5)不可行。

正如我们使用的构成周长的基本元素不能被割成更小的块，每个小棒的长度构成一个单位，我们提供给儿童的推理问题正是这样的情景。每个正方形由每条边的小棒的数量来决定。因此，它的周长由所有小棒的数量决定，而且这些小棒是固体，并且很坚硬，除了可以直角连接或者直线连接之外，不能以任何方式连接在一起。因此，他们只能组成正方形或矩形，不能组成椭圆形。

给被试呈现的是如图 1 所示的三种正方形。他们的注意力每次都集中在组成每边的小棒数量和组成正方形的所有小棒数量上。有两个实验主试。盒子里装有很多小棒，被试和主试 1(E1)每次拿 4 个黄色小棒，12 个绿色小棒和 2 个蓝色小棒，给每个被试 18 个小棒做恒定元素（我们检查了被试知道如何成功地计算 18）。

主试 2(E2)问被试几个问题：(a)“你面前有什么东西，你可以摆一个每条边有 1 个木棒的小正方形吗?”(b)“Eddy(E1)面前有什么，他可以使用绿色小棒做一个每条边有 3 个绿色小棒的大正方形吗?”(c)“你认为 Eddy 可以使用他面前的所有木棒，并且不能有剩余的，来做一个更大的正方形吗?”

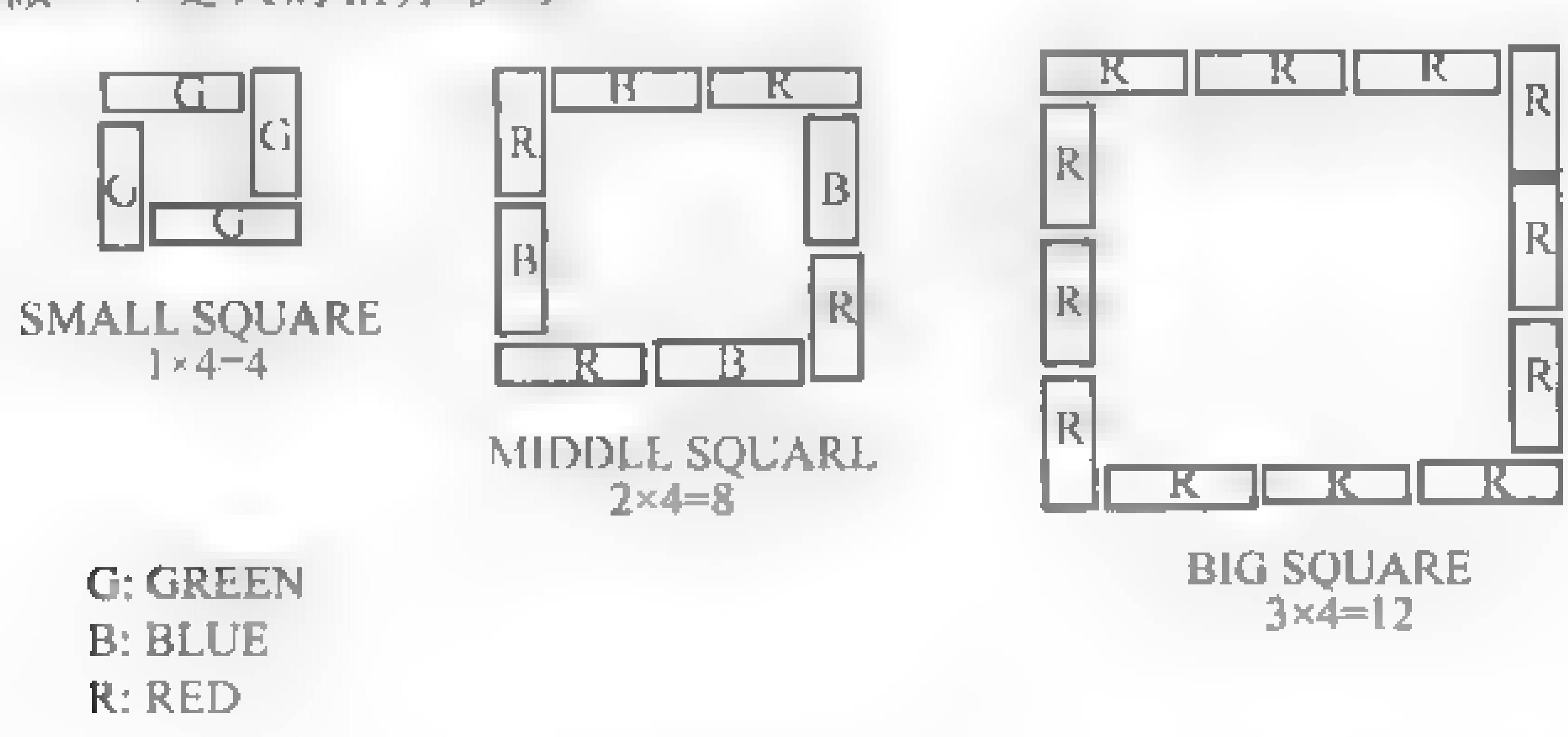


图 1 三种正方形

实验期待被试对关键问题做出的反应是说 Eddy 不可能完成，因为如果他每条边用 4 个小棒，会剩余 2 个小棒；如果他每条边用 5 个小棒，又缺 2 个小棒。假如一个被试回答了这个关键问题，主试 1(E1)假装从藏在屏幕后面的盒子里拿出一些小棒。然后问被试：“现在我有足够的木棒来做一个比我们之前所做的所有正方形更大的正方形。你认为我拿了多少木棒?”实验期待被试回答的是：“至少 2 个，或者 6 个，或者 10

个，等等。”

最后，问儿童假如实验者拿出 1000 个或者 999 个木棒等等会怎么样。“你认为 Eddy 可以用他的木棒做一个非常非常大的正方形，而且木棒不会有剩余吗？”

被试被分成三个年龄组：5 岁—7 岁 5 个月组（$N=13$），7 岁 6 个月—9 岁 11 个月组（$N=14$），10—13 岁组（$N=14$）。

根据对关键问题的回答，可以分成五个推理水平。

水平 0

问题根本没有理解。有两类固定模式的反应：“可以组成正方形，因为有很多小棒，”或者“小棒不够。”当要求他们尽量用他们自己的小棒做一个正方形时，被试试着将小棒首尾相连，并且试着闭合图形。在这一水平中，正方形仅仅意味着闭合的图形，它是由图形的大小和需要的小棒数量组成的一个粗略的关系。

水平 1

对于关键的问题，被试陈述为他们不知道，但是他们会去试一下。然后他们意识到不可能用 18 个小棒做正方形。他们解释的非常好，即既有可能会剩下小棒，也有可能小棒的数量不够。但是他们没有说为什么。在这一水平中，正方形的基本属性之一（如，它有四个相等的边）被建立了，并且被试常强烈地感受到了这个限制条件。然而，没有建立周长等于四个边相加的总和的概念，并且被试没有问这个问题。正方形不能由 18 个小棒组成，因为有 2 个被剩余或缺少的“干扰”小棒。

水平 2

被试没有使用小棒，而是思考了想象中的正方形。他们通过使用增加每边需要的小棒数量来推理（如，4+4+4+4，等）。他们得出用 18 个小棒不可能做出正方形的结论，但是他们没有解释为什么。假如问使用 19 个小棒是否可以做出正方形，他们又开始数，4+4+4+4 或 5+5+5+5 等。在这一水平，正方形的周长等于四条边相加的总和这一概念已经建立。然而，儿童没有将正方形有四条边的事实和正方形的边长是由整数测量的数字属性相联系。

水平 3

儿童通过使用奇、偶数的数字属性来推理。假如小棒数是偶数，可以组成正方形。例如，Lac（11 岁 2 个月）说：“每边有 4 个？不，这里有更多的小棒……不，不够……啊哈，是的，既然是偶数，可以组成正方形。”对于 22 个小棒能否组成正方形的问题，他回答：“是的，既然是偶数，可以。”这个儿童没有发现使用小棒去检验他的答案是必要的。

在这一水平中，正方形的几何属性与正方形的周长是整数这一属性有关。正方形是一种要素成对出现的形状；被试组合正方形时经常使用成对的方式。当要求去“尝试”，他们首先组合由直角构成的两边，然后组合另外的两边，最后把两组组合在一起。因此，正方形是对称的，这就意味着只有偶数可以测量它的边长。根据这一推理，可以用以下方式表达：

A = 一个图形是对称的。

B =度量这个图形的数字是偶数。

$$A \xrightarrow{R} B(A \text{ 是 } B \text{ 的原因})$$

$$(A \xrightarrow{R} B) \text{ 是 } C \text{ 的原因}$$

C = 正方形有周长，它的周长是偶数。

$$(A \xrightarrow{R} B) \xrightarrow{R'} C$$

深入探讨正方形的意义就是深入探讨“它的周长是偶数”的意义。这产生了意义的蕴涵：“假如一个数字是正方形的周长，则这个数字是偶数。”这个条件的真值表见表2。

表 2 命题的意义蕴涵(→)：“如果一个数字是正方形的周长，则这个数字是偶数”的真值表

证据情景	p	q	$p>q$
	数字 N 是正方形的周长	这个数字 N 是偶数	
案例 1	真	真	真
案例 2	真	假	假
案例 3	假	真	真
案例 4	假	假	真

正如表2中所示，有四个可能的证据情景可以用来支持(如，真 $p \to q$)或者证伪(假 $p \to q$)这个蕴涵。这个证据情景与以下案例相一致，案例1)p 和 q 可以在证据中被发现，2)p 和非 q 可以被发现，3)非 p 和 q 可以被发现，4)非 p 和非 q 可以被发现。案例1(N 是正方形的边长，N 是偶数)可以由数字16，20，24来证明或者支持这个蕴涵。案例2假如在实验情景中被发现，可以对这个蕴涵证伪，因为小棒不能被割开。因此这个案例没有为被试提供信息。案例3(N 不是正方形的周长，N 是偶数)在实验情景中被发现：18，是这种情景的例子，但是它不能对蕴涵证伪。因此，它不再能为被试提供信息。

对案例4有相似的思考。它是逆蕴涵，“假如数字 N 是偶数，则这个数字是正方形的边长”，它是有信息的。在这一推理水平，被试开始理解两个属性“N 是偶数”并且“N 是正方形的周长”是不等价的。承认这个属性的非等价意味着被试也理解了蕴涵($p \to q$)并且它的逆运算($q \to p$)是非等价的。这出现在 Stephane(8岁11个月)的推理口语记录中：

E2：“假如你有25个小棒呢？”

S：“不能。”

E2：“解释为什么。”

S：“不，不能。因为会剩余1个小棒；组成正方形需要偶数。”

E2：“好，那22个怎么样呢？可以吗？”

S：“不，它不能组成正方形，因为每边需要5个，仍然会剩余1个。”

E2：“但是它是偶数。”

S:“可能需要 26 个?”

E2:“为什么 26 个就可以呢?”

S:“因为 12 加……因为假如每边放 6 个,则需要 24 个——不,不行。”

E2:“但是它是偶数。”

S:“是的。”

E2:“所以你的想法不可行,你怎样知道一个数字是不是可以组成正方形的?”

S:“我不知道……我数了它们,假如数的不行,就是不行。”

被试理解了案例 2 的证据(N 是偶数,N 不是正方形的周长)对之前指导他做出判断的蕴涵证伪。这个困难使得一些被试重新思考他们的推理,例如,Sebastien 和 Cyril。

Sebastien(10 岁 4 个月)

E2:“你认为他用所有的小棒可以组成正方形吗?”

S:“是的。”

E2:“为什么?”

S:“嗯,因为它是偶数。”

E2:“他组成的这个正方形每边有几个小棒?”

S:“5 个。不,因为那将是 20 个,而他总共有 18 个。我认为他不能组成正方形。”

E2:“为什么?”

S:“因为不行,因为 18 不能被 4 除。”

E2:“刚才你说必须是偶数。22 个可以吗?”

S:“不行!”

E2:“为什么?”

S:“因为太多了。”

E2:“如果有 26 个,你怎样判断是否可以组成正方形?”

S:“我用两个倍数表。”

E2:“使用两个倍数表,你认为你可以判断 26 个小棒是否才能组成正方形吗?”

S:“我不知道。”

E2:“有更好的图表吗?”

S:“哦,有,假如除 4 的话,就知道可不可以组成正方形了。是的,我确定,26 不能除 4。”

Cyril(10 岁 10 个月)

“必须是偶数……但是你必须试试它。我可以通过乘 4 来做……乘 4 总是偶数。”

水平 4

儿童使用除 4。他理解了我们正使用对所有数字都有效的一般规则，不管这个数字有多大。他所做的事情就是去验证这个数字是否是 4 的倍数，例如：

Robert(9 岁 10 个月)

E2："44，你要怎样判断？"

S："44……44……你需要 4 的倍数，但是不确定是不是有效……啊哈，可以是 11 的 4 倍。"

E2："整除有用吗？"

S："是的，假如剩余 0 的话，你看。"

Francois(12 岁)

E2："例如，920，你怎样知道是不是可以组成正方形，还没有剩余的小棒？"

S："我可以除 4。"

在这一水平，正方形被看作有双对称。它有四个相等的元素。根据推理有以下缊涵：

A ＝一个图形由 4 个相等的边组成。

B ＝它的周长是每个边长的 4 倍：

$$A \overset{R}{\longrightarrow} B$$

C ＝正方形的周长是 4 的倍数。

$$(A \overset{R}{\longrightarrow} B) \overset{R'}{\dashrightarrow} C$$

探讨正方形的意义，即是探讨"它的周长是 4 的倍数"的意义。这产生了缊涵的意义："假如一个数字是正方形的周长，则这个数字是 4 的倍数。"

这最后的缊涵将被称为"直接符号化缊涵(direct signifying implication)"，因此正方形的特性正是通过思考获得的。现在，思考回答给被试提出的最初问题的逆缊涵("他用 18 个小棒可以组成正方形吗？")。逆缊涵是："假如一个数字是 4 的倍数，则这个数字是正方形的周长。"

正如表 3 所示，案例 1 直接显示了缊涵和逆缊涵的有效性。案例 2 和案例 3 更复杂。案例 2，直接的蕴涵(N 是正方形的周长，N 是 4 的倍数)在实验情景中是不可能的，并且这个水平的被试知道为什么不可能。逆缊涵(N 是 4 的倍数，N 是正方形的周长)没有在实验情景中出现，有两个原因：第一，小棒只能组成直角，并且明确规定的是只能组合正方形。第二，其他的实验情景可能存在，其他的几何图形可能被允许，如方块或者长方形(16 也可以是边长为 3 和 5 的长方形的周长：3＋3＋5＋5)。案例 3，直接的蕴涵(N 不是正方形的周长，N 是 4 的倍数)与案例 2 的逆缊涵相同。逆蕴涵(N 不是 4 的倍数，N 是正方形的周长)没有在实验情景中出现，因为小棒不能被割开。但是在小棒可以被割开的情境中，18 是可接受的数字，因为它是 4 的 4.5 倍。

表 3　命题的直接符号蕴涵和逆蕴涵："如果一个数字是正方形的周长，则这个数字是 4 的倍数"的真值表

	直接符号蕴涵		
	p	q	$p>q$
证据情景	数字 N 是正方形的周长	这个数字 N 是 4 的倍数	
案例 1	真	真	真
案例 2	真	假	假
案例 3	假	真	真
案例 4	假	假	真
	逆蕴涵		
	p'	q'	$p>q$
证据情景	数字 N 是 4 的倍数	这个数字 N 是正方形的周长	
案例 1	真	真	真
案例 2	真	假	假
案例 3	假	真	真
案例 4	假	假	真

探究 5 个水平中的一个建构在关系中产生模型的概括化可能是有趣的事(如，在被试对其他几何图形的理解和其他数字属性的关系中探讨)。

不同年龄的推理水平见表 4。正如表 4 所示，在这个特殊情景中，水平 4(承认 $p\to q$ 和 $q\to p$ 非等价)直到 10—12 岁组才出现被试的显著比例。

表 4　不同年龄组的推理水平

年龄	水平				
	1	1	2	3	4
5 岁—7 岁 5 个月(N=13)	61	[illegible]	[illegible]7		
7 岁 6 个月—9 岁 11 个月(N=14)		.35	.37	.11	.11
10 岁—12 岁 11 个月(N=14)			.[illegible]7	.28	.34

这些结果意味着什么？我们研究关注的是几何属性和数字属性关系概念的发展。正是两个属性和它们之间交集的建立，使得儿童产生了为什么一个数字可以是或者不可能是正方形周长的推理。反过来，推理引起通过各种证据情形实验蕴涵的产生。我们研究的兴趣点则是儿童从情境中获得什么兴趣和他们询问什么问题。从上述研究可见，某个领域蕴涵模式的发展依赖于意义和推理的结构，并且充分地检验蕴涵的能力包含探索推理蕴涵可能是无效的技巧的发展(案例 2)，并且对 p 或 q 的推理可能是真或者假。

实验 2：在逻辑论证情景中的成人推理

这个研究主要为了说明成人被试怎样证明他们在论据情景中对蕴涵的理解。J. B. 格里兹和我(1983)研究了在争论中反驳是如何被使用的——驳倒对手的最好方式之一是证明他所说的是自相矛盾的，或者他的行为与他/她所说的是矛盾的——我们通过分析已发表的不同类型的文本来开展这一研究。这些文章选自于政治、科学领域以及几篇小

说。最初筛选的评价标准是作者明确地否认存在自相矛盾之处，并且解释了它包含什么。我们把这些文本提供给被试，并要求他们回答作者是否正确，假如作者不正确，解释他们通过什么方式认为作者不正确的。正如我们经常选择有争议的文本一样，被试也经常激烈地投入在辩论中。

以下是选自一篇小说并在研究中使用的文本(Martin du Gard，R.，*Les Thibault*，之一)：

> 每次 Antoine 思考 Jacques 的观点时，他发现他自己面临一个基本的矛盾：他那痛恨暴力的兄弟怎么能带着他所有智慧的激情，成为并且他已经证明了的确是成为了，与为了宣扬手足情谊，为了破坏战争，他会毫不犹豫去牺牲自己的生命——既然社会革命最坏的类型的暴力，这么多年他怎么能赞同社会革命(我们翻译的。Martin du Gard，R.，1955，第二卷，p. 838)。

必须要理解的是，在小说中，雅克(Jacques)在第一次世界大战开始时，死于去往德国线坠落的反军事坠落物。

在对他兄弟的行为做出评价之前，安东尼(Antoine)发现以下蕴涵是有效的："假如一个人痛恨暴力，则这个人不会赞同社会革命"(见表 [illegible])。假如这个蕴涵是有效的，则案例 2 不会产生：p("一个痛恨暴力的人")是真，并且 q("这个人不会赞成社会革命")是假，因此，得出"一个痛恨暴力的人会赞成社会革命"。假如这样的案例会发生，它肯定是一个疯狂的人所做的事！提供了这个文本的被试中，有一半被试与作者的意见一致，他们没有质疑蕴涵，并且解释了文本。然而，另一半的被试努力表示这不是自相矛盾的，并且努力说明雅克的行为是一致的。一些被试首先说："有些人喜欢暴力，但是不赞成革命。"这是案例 3 的证据。但是他们没有意识到这不能解决问题，并且真正的解决方案在于证伪(案例 2)。随后，被试争论说有的人，比如雅克，他们痛恨暴力同时赞成社会革命是正确的，而且他们找出证明案例 2 的理由。其中，常被提到的原因是有不同类型的暴力，其中有的暴力虽然是不好的，但它至少是可以接受的(如，暴力必然导致社会革命)，它可能是防止对外战争的一种方式。实际上，为了辩护雅克行为的一致性，被试选择的解决方法在此处我们很少关注。我们主要关注的是当寻找允许他们做的原因时，他们处于不能组织并且/或者改变意义的情境下，被试怎样正确地操作蕴涵。

表 5　命题的符号化蕴涵"如果一个人痛恨暴力，则这个人不会赞同社会革命"的真值表

证据情景	p 一个人痛恨暴力	q 这个人不会赞成社会革命	$p \supset q$
案例 1	真	真	真
案例 2	真	假	假
案例 3	假	真	真
案例 4	假	假	真

讨论

本章中的研究在本质和没有达到更明确的研究状态中是有建设性的。这个研究状

态是指实验条件允许数据的统计处理。然而，这项工作旨在说明个体的推理不能与个体关于所思考的主题的知识相分离。此外，人们可能会问，实验情景对被试而言意味着什么。思考一下关于华生选择任务的经典例子。实验情景给被试一个假设或者蕴涵，并且要求被试通过从四张卡片中选择卡片来检验这一蕴涵，这个卡片或者这些卡片包含可以证明蕴涵是真或者假的证据。

使用这个研究方法的某些研究中（如，Wason，1966，1968；Wason 和 Johnson Laird，1972），被试使用的蕴涵之一是："假如卡片的一面是元音，则在另一面是奇数。"除非被试曾经接受过这种类型的游戏训练，否则当给出这样的蕴涵时，他肯定会非常吃惊。什么类型的意义对这个蕴涵可能证实，什么类型的意义对这个蕴涵可能证伪？考虑这样的一个意义情景，被试倾向于用随机的方式选择卡片，因此，根据实验者建立的任意的标准，被试的成绩很差。

正如第二个例子，让我们来看由考克斯（Cox）和格里格斯（Griggs）（1982）制定的并且欧文顿等人使用过的对华生选择任务的修正。给被试呈现的是以下蕴涵："假如一个人喝啤酒，则这个人肯定过了21岁。"此处实验的本质同样也是从有证据的卡片中选择一个卡片或者几个卡片，对蕴涵证实或者证伪（四个反应选项是：卡片1：一个人喝啤酒，p；卡片2：一个人喝可乐，非p；卡片3：一个人22岁，q；卡片4：一个人16岁，非q）。在这个任务中，被试的成绩异常的好。但是创设的问题是他们要回答的提问的选择是卡片1和卡片4。实验提问被试：哪张卡片或者哪些卡片可以对蕴涵证实或者证伪；例如，当到达其他国家时，人们可能不知道这个蕴涵是否正确，但是在本国，21岁以下的人不能喝啤酒，或者禁止喝啤酒。但是这不是普遍情景；或许被试会想，在本国有法律规定21岁以下的人禁止喝啤酒，并且被试相应去回答问题："法律被正确地执行了吗？"被试可以想象他是警察，这个警察正在绕着酒吧兜圈子，并且要查明喝啤酒的人都是21岁以上的人，而那些比21岁年幼的人不能喝啤酒。要求选择相同的卡片，这个情景很容易建构，这也是为什么被试得分格外高的原因。

接下来，比如说以下在本章较早表述过的蕴涵，这个蕴涵欧文顿等人（1987）也对青少年组使用过："假如一个学生在一学年中缺勤多于10次，这个学生必须要重修一学年。"这个问题把学生带入困境，并且，正如前面提到的一样，他们回答这个问题的成绩很差。既然这个决定是由学校当局制定的，实际上，学生没有理由去质疑这个决定是正确的还是错误的。而且，他们没有理由质疑这个决定的在实践应用。低于21岁的任何人都有可能违反法律去喝啤酒，但是当老师决定学生必须重修一学年时，学生并不总是可以自由地拒绝老师对他们提出的不升入高一年级而是要重修一学年的要求。这个规则既不能质疑，也不能违反；伴随着困境，学生只能随机地翻卡片。

实际上，在思维中，当儿童达到十几岁时，她/他可以根据规则相应地推理，在这个规则中形式逻辑可能被认为是抽象模式。但是，只有当在推理应用于被试有知识和经验的情景下，或者对他们而言有意义的情境下，它可能是对的。对被试而言，为了能在

条件语句的形式下检验他/她的假设，她/他必须问正确的问题，并且找到可以阐明问题情景的原因。

假如我们接受了智慧对生活的最高发展的适应，这个生活是自然曾经创造的，我相信推理必须在意义是对被试有价值的情景中学习。这是一个心理学主题；但是学习作为逻辑学家使用的蕴涵是一个教育学问题。我希望通过引入此处提出的推理，符号化蕴涵的概念，产生新的、更严谨的研究，这样的研究可能会增加我们对人类思想的理解。

文献总汇

Anderson, A. R., & Belnap, N. D., "The pure calculus of entailment." *The Journal of Symbolic Logic*, 1962, 27, 19-52.

Byrnes, J. P., & Overton, W. F., "Reasoning about certainty and uncertainty in concrete, causal, and propositional contexts." *Developmental Psychology*, 1986, 22, 793-799.

Copi, I. M., *Symbolic logic* (2nd ed.), New York: Macmillan, 1965.

Cox, J. R., & Griggs, R. A., "The effects of experience on performance in Wason's selection task," *Memory and Cognition*, 1982, 10, 496-502.

Griggs, R. A., "The role of problem content in the selection task and in the THROG problem," In J. St. B. T. Evans (Ed.), *Thinking and reasoning: Psychological approaches* (pp. 16-17). London: Routledge & Kegan Paul, 1983.

Grize, J. B., & Piéraut le Bonnlec, G., *La Contradiction: Essai sur les opérations de la pensee* (Using contradiction in argument situations). Paris: Presses Universitatres de France, 1983.

Halbwachs, F., "Significations et raisons dans la pensee scientifique (Meaning and reason in the scientific thought)," *Archives de Psychologie*, 1981, 19, 199-209.

Johnson Laird, P. N., *Mental models: Toward a cognitive science of language, inference, and consciousness*, Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

Johnson Laird, P. N. Legrenzi, P., & Legrenzi, M., "Reasoning and a sense of reality," *British Journal of Psychology*, 1972, 63, 395-400.

Lewis, C. I., & Langford, C. H., *Symbolic logic*, New York: Century, 1932 (2nd ed., 1959).

Lukaciewicz, J., "A system of modal logic," *Journal of Computing Systems*, 1953, I, 111-149.

Lukaciewicz, J., *Selected works*, L. Borkowski (Ed.). Amsterdam: North

Holland,1970.

Martin du Gard, R., *Les Thibault Epilogue*. Paris: Gallimard. 1940 (1955, *Oeuvres complétes*, volume Ⅱ, pp. 759-1011).

Matalon, B., "Etude genetique de l'implication (Genesis of implication study)," In J. Piaget (Ed.), *Etudes d'Epistemologie Génetique*, Ⅶ. Paris: Presses Universitaires de France,1962.

Overton, W. F., Byrnes, J. P., & O'Brien, D. P., "Developmental and individual differences in conditional reasoning: The role of contradiction training and cognitive style," *Developmental Psychology*, 1985,21, 692-701.

Overton, W. F., Ward, S. L., Novec, I. A., Black, J., & O'Brien, D. P., "Form and content in the development of deductive reasoning," *Developmental Psychology*, 1987,23, 22-30.

Piaget, J., "Le possible, l'impossible et le necessaire (Possibility, impossibility and necessity)," *Archives de Psychologie*, 1976,44, 281-299.

Piaget, J., "Essai sur la necessite (Essay on necessity)," *Archives de Psychologie*, 1977,45, 235-251.

Piaget, J., *Introduction* (24th Genetic Epistemology Symposium), Geneva: International Center of Genetic Epistemology. Unpublished manuscript,1979a.

Piaget, J., *La Raison: Introduction* (The Reason: introduction), Geneva: International Center of Genetic Epistemology. Unpublished manuscript,1979b.

Piaget, J., *La raison en tant qu'objet de la comprehension* (The reason as an aspect of meaning understanding), Geneva: International Center of Genetic Epistemology. Unpublished manuscript,1980a.

Piaget, J., *Documents preparatoires au Symposium* (Introductive papers to the 25th symposium), Geneva: International Center of Genetic Epistemology. Unpublished manuscript,1980b.

Piaget, J., "Essay on necessity," *Human Development*,1986,29(6),301-311.

Piaget, J., & Garcia, R., *Vers une logique des significations* (To a logic of meaning), Geneva: Murionde,1987.

Pieraut Le Bonntec, G., *The development of modal reasoning*, New York: Academic Press,1980.

Pieraut Le Bonntec, G., & Rappe du Cher, E., *Le perimètre du carré Exemple de construction d'une coordination de significations* (The perimeter of the square: a meaning network to be built up), *Archives de Psychologie*, 1982,50,285-301.

Wason, P. C., Reasoning. In B. Foss (ed.), *New horizons in psychology* (pp.

135-151), Harmondsworth, England: Penguin Books, 1966.

Wason, P. C., "Reasoning about a rule," *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 1968, 20, 273-281.

Wason, P. C., "Realism and rationality in the selection task," In J. St. B. T. Evans (Ed.), *Thinking and reasoning: Psychological approaches*, 1983 (pp. 44-75). London: Routledge & Kegan Paul.

Wason, P. C., & Johnson Laird, P. N., *Thinking and reasoning*, Harmondsworth: Penguin Books, 1968.

Wason, P. C., & Johnson Laird, P. N., *The psychology of reasoning: Structure and content*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1972.

人类发展的规范与规范性事实

〔英〕莱斯利·史密斯　著
蒋　柯　译

人类发展的规范与规范性事实

Norm and Normative Factual in Human Development

作　者　Leslie Smith

原载于 *Norms in Human Development*，edited by L. Smith & J. Voneche Cambridge，Cambridge University Press，2009，pp. 103-140.

蒋　柯　译自英文

人类发展的规范与规范性事实

棋盘的边界就是世界，棋子就是宇宙的现象，游戏规则则是我们所谓之自然之法则。（赫胥黎，1868）

规范不是事物内在本质的一部分，而是完全不同的东西。它们被理性生物的意志奉为圭臬，并依据其构念而行事。（布兰登，1994）

1　规范性与发展心理学

现代心理学不是唯一研究心智的学科——亚里士多德的《论灵魂》创作于两千多年前——但却是唯一对心智进行经验性研究的学科。这引出来两个问题，一个是关于规范性，另一个则是关于发展。

规范性

在19世纪，心理学成了精神世界中的科学，与物理学相提并论。在这些领域中的因果关系被经验性地研究，形成了物理学的自然法则，以及心理学的心智法则。这些心理学法则也被称为思维的法则。显然，在物理学和心理学的法则之间的平行性是很成问题的。在科学与哲学之间的雷区业已昭然，并随时可能被引爆，其间所包含的问题诸如：心-身关系问题（笛卡尔，1931；纳格尔，1965），自由意志问题（康德，1993；塞尔，2001），以及脑中的意识问题（亚里士多德，1987；仓尔莫斯，1996）。

规范性（normativity）就是这样一个导火索。其重要性长久以来被视作一个基础性问题，也是一个尚未解决的问题。这里引用一位神经科学家的话：

今天的哲学和科学的基本问题是，区分这二者之间的本质性和合理性：事实的（factual）——是什么——，和规范的（normative）——应该是什么。（尚热，2000，第11页）

以及一位哲学家的话：

与规范的理念不可分的是，有人能够服从并遵守他自己的规范。在这一点上，存有构成自治性的两个关键理念之一：与规范关联的自同主体（self same subject）。（利科，2000，第212页——我做了修饰性翻译）

物理世界是规范免除的（norm free）；人类发展的领域则是规范负载的（norm

laden)。于是，心理学面临一个一般性问题。心理学能够成为因果性的科学吗？就像物理学那样，并且与此同时是否还能保持规范性的解释？

发展

在发展心理学（Developmental Psychology，DP）领域，一般性的追问尤其尖锐，其中的经验心理学的分支倡导对心智的考量要从儿童开始直到终生。其中有规范，它们管束着人类的动作和思维的运作。当然，这种管束是规范的决定性（normative determination），而不是因果决定论（causal determinism）。这里有一个问题。规范在时间上有一个起始点，当然，这既不是大本钟上的刻度，也不是任何宇宙论的时间刻度。地球大约形成于46亿年前；哺乳动物则出现于6500万年前，人科物种的出现则是在最近的600多万年之内（霍金，2001）。如果因果性从地球前一形成就存在了，规范性则出现得稍微晚一点，这怎么可能呢，为什么规范会成为原因的后果？同样，在个体性的和社会性的生命中，规范具有某种发生性，于是，必然有某种发展机制对应于这些规范吗？

规范的存在是有条件的（contingent），经验性的事实，（在其中）规范是“历史性的”，即，它们逐渐形成，并存在一段时期，然后逐渐消失。（冯·赖特，1983a，第68、18 页）

人类的主体可以基于规范而活动，或者抗护它们，甚至可以取消旧的规范创造新的规范。几乎所有的儿童都会在不同程度上抵制年长者施予他们的规范。不然的话，我们至今依然生活在山洞里，靠狩猎和采集维持生计。那么，发展心理学能不能言说规范能力（normative capacities）的发展呢？

这里存在两个问题，都很复杂。将游戏规则类比于自然法则是尤其滑稽的（赫胥黎，1868）。心理学已经做出努力对规范做出描述性的解释（史密斯，见本卷，第1章）。当然，我们已经有了一个更好的解释。在这一章，我的目的在于要指出，针对人类发展任务中的规范做出规范化的解释，说明它如何能够对发展心理学的发展做出贡献。对此，我认为，远行必自迩（reculer pour mieux sauter），后退一步是为了跃得更远。

2 思维的法则和规范性的法则

第一步，我们要沿着戈特洛布·弗雷格的脚步批判性地再次造访“思维的法则”。第二步则是回顾让·皮亚杰的发展认识论（developmental epistemology）。这两步工作都是理论性的。同样，他们都被认为对人类发展的规范性做出了贡献。进而，他们都引领了发展心理学研究的经验化步伐。关于此，后面的第3章会有详尽的阐释，这一部分的其他内容则旨在讨论它的理论基础。

2.1　弗雷格关于逻辑学和心理学的讨论

戈特洛布·弗雷格是现代逻辑学的奠基人，同时期，经验心理学也在蒸蒸日上（卡尔，1994；汉弗莱，1951）。他的主旨便是摧毁性地批判心理主义（psychologism），即，经验心理学所言说的思维的法则就是逻辑学的规范性法则的观点（达米特，1981；肖尼，1996；库什，1995；斯卢加，1980）。弗雷格用这个问题发难：这些思维的法则究竟是什么？它们是因果性法则还是规范性法则？他的回答使得他在两个方面扬名立万。一个是一般性的影响，决定性地确立了弗雷格在20世纪哲学以及社会科学中的地位（布兰顿，1994；达米特，1981；凯切尔，1992；麦克纳马拉，1994；波普尔，1979）。另一个则是特别地影响了年轻的让·皮亚杰，使得他将逻辑学看作是用来言说人类发展的可能的模型（史密斯，1999a，b，2002a，b）。

按照弗雷格的说法，逻辑学是关于真理的形式化科学：

正如“美”指向通往美学之路，“善”指向伦理学，而“真”则是属于逻辑学的。（并且）它原尊于逻辑学以彰显真理的法则……依据真理的法则，我们就可以对断言、思想、判断和推理做出评判。尽管我们非常希望用同样的方式来言说思维的法则，但是这是一种危险的诱惑。（弗雷格，1977，第1页）

在这一段表述中，真理是规范性的观念。进一步，它与人类的知识发生互动，因为知识必须是正确的认识（弗雷格，1977，第18页；莫泽，1999）。弗雷格（1979，第2页）还认为人类的知识具有因果性起源，可以通过因果性心理学予以考察。在这一点上，“思维的法则”体现出了三个方面的危险。

致命的暧昧（fatal ambiguity）

“思维的法则”这个称谓掩饰了弗雷格（1964，第12页）的“致命的暧昧”的评价①。对弗雷格而言，规范性法则是关于“应该是什么”的法则，因此根本性地区别于关于“会怎么样”的因果性法则。在这个论题下，心理学可以探索因果性法则，或者规范性法则，但是两者都是在“思维的法则”这个名称的统领之下。

未知类型的顽愚（madness）

尽管人类的思维能有所建树，但也有错误。人类思维的错误无处不在。人类的心智颟顸而疏于理性。

原因仅仅引发了判断活动，此动作的依据是心理学法则：这些法则欲往真理实则南辕北辙。（弗雷格，1979，第2页）

心理学研究的错误常见于错觉、“虚假记忆”，伪概念，以及误解等等。于是，人类的

---

① 弗雷格所指的“致命的暧昧”在这一卷中有印证（史密斯，第1章）。

错误也因此而被合法化，取得了心理学的合法性。如果心理学仅仅局限于言说人类的错误，那么这没问题。但是，如果心理学想要担当更多责任，就会带来两方面的问题。一个问题是，人如何确认记忆的真实性、概念的正确，以及真实地理解某个事实，如果仅仅基于因果性心理学的话。另一个问题是心理学的研究者如何能够立足于此并确信他们的因果性法则能够成为思想的规范性法则。从规范性的角度而论，矛盾律陈述了这样的一个事实，即如果A和B是矛盾的，则它们二者不能同时为真或同时为假（奎因，1972）。从因果性的角度而论，矛盾律的应用则有所不同，在某种关联、语境或文化中，人们能接受A，而同时在另外一种（关联、语境或文化中）接受与之矛盾的B。对弗雷格而言，这就是顽愚（madness）——所表现为，有可靠的证据表明：人们可以在一种条件下接受了A并且在另一种条件下接受与其矛盾的B。因果性研究者

只能接受这样的事实，只能说：那些法则适用于他们，这些法则适用于我们。我会说：我们在这里遭遇了迄今尚未知的某种顽愚。（弗雷格，1964，第14页）

这里提及的"顽愚"并没有被弗雷格的继任者所忽视。维特根斯坦（1987，第97页）继承了这一说法，他认识到这种"顽愚"不是简单的执拗，而是一种多侧面的综合征。在今天，这种综合征的主要表现是，在人类的生物学（道金斯，1999）、进化心理学（科斯米戴斯，托比，2004），以及神经科学（尚热，2002）等领域内，因果性相对于规范性占据了绝对性的优势。

作为漩流的心理过程（mental processes as eddies）

在逻辑上，一个陈述，诸如"今天是星期五"不能与其矛盾（contradictory）陈述"今天不是星期五"同时成立，也不能与之对立的（contrary）陈述"今天是星期六"同时成立。因果性过程则是另一回事。漩流是水在与主流方向相反方向上的流动，譬如在湍急的河流中形成的漩涡。尽管它们在相反的方向上运动，但并没有触及彼此的法则——同时的流动形成了漩流。这种现象被推延到其他的心理过程中。在脑中推延则是，相反的神经过程可以同时活跃。在心智中的推延则是

（所有的心理表征）都彼此相抵触，就像水中漩流往来相冲一样……思维，当它实际发生时，在符合逻辑法则这方面，并不比人们的实际行为吻合于心理法则的表现更强。（弗雷格，1979，第144—145页）

容纳（liability）自相矛盾是人类生命的事实，这已经得到心理学的证实（彭，& 尼斯贝特，1999），即便质疑来自理性的抗辩（也不能否认这个事实）（普里斯特，1998）。容纳（liability）（矛盾）是一回事；觉察到并消除矛盾则是另一回事。规范免除，即所有的心理表征都可能与任何其他内容同时存在，而依规范性而言，一对相反的事物必须不能同时存在。一个将心智还原为因果过程的模型不能言说这样的方式，即通过它矛盾被鉴别并得到化解。

通过以上讨论，有两个结论形成了——一个是，弗雷格自己的结论。他非常谦恭地下结论道，必须根除心理主义。在任何一种规范性的教义中，所遵循的原则是

决然地区分开心理学的和逻辑学的，区分开主观的和客观的。（弗雷格，1950，p. x，我做的翻译）①

为了证明逻辑定律，逻辑学家不必援引经验研究的证据，诸如心理学家的做法。这个关于心理主义的结论很明确——心理学和逻辑学是两个不同的学科，也就是说，这两个学科是相互排斥的。第二个结论比第一个更强。许多评论者曾提出更强的结论，即这两个学科的区分不仅仅是排斥性的，而是非此即彼地对立的。也就是，所有的学科要么是形式的和规范的，要么经验的和因果的，不会两方面兼具。这个更强的结论的蕴涵推论是很粗暴的：没有一个学科可以应对同时这两方面的问题。这个蕴涵推论影响了整个20世纪，推进了（学科的）"分工"，其结果是（研究者）必须在规范性科学和因果性科学之间做出选择。其中一个体现在社会科学中，其中，规范实际上被解释为非实体性的，统计均值，社会规律或社会控制，即，是非规范性的（史密斯，本卷，第1章）。另一个则体现在哲学中，尤其是逻辑实证主义，分析哲学以及语言哲学。但是这个更强的结论超出了弗雷格本人结论，在弗雷格的结论中，规范性法则和因果性法则之间的关系是开放性的。

我的结论更靠近弗雷格，而不是那个更强的结论。在他的较为温和的结论的支持下，现在的问题变成了，规范性学科和因果性学科的排斥性如何能够在一个学科内得到尊重的同时并聚焦于它们之间的关系——这就是现在要讨论的议题。

2.2 规范化和心理学的再审视

物理世界与心理世界并不是两个此消彼长的现实。为了说明为什么，（我们）先讨论两个问题，一个是形而上学的，另一个是认识论的②：

(A) 实际上，什么是规范性？

(B) 我们如何认识规范？

针对这些问题，弗雷格和皮亚杰分别给出了不同的回答。

---

① 他的德语原文如下：Es ist das Psychologische von dem Logischen, das Subjective von dem Objectioven scharf zu trennen. (Frege, 1950, p. x)

标准的英语翻译是由语言哲学家J. L. 奥斯汀所做，他个人的观点渗透到了他的翻译中：

Always to separate sharply the psychological from the logical, the subjective from the objective. (Frege, 1950, p. x)（总是决然地将心理学的和逻辑学的相分离，主观的与客观的相分离）。（弗雷格，1950，p. x）

第一个单词always是衍加的。类似的衍加一共有三处，always是第一个，第二和第三是never。这种衍加是对弗雷格本人立场的过渡推演。

② 形而上学和认识论的有价值的参考书很多，参见：奥迪，1998，塞尔，1995）

弗雷格对问题(A)的回答

弗雷格的回答是实在论的版本,即规范性是思想的属性。基于这种观点,诸如毕达哥拉斯定规律这样的思想既不是物理的也不是心理的。

我们不能将思维(thinking)看作是一个产生思想(thoughts)的过程。将思想和思维动作视为同一是错误的,因此,思想与思维的关系正如跳(leap)与跳跃(leaping)……我不会因为看见一棵树而创造了树,或者因为握着一支铅笔而创造了铅笔,同样,我也不是因为思维而产生了思想。(弗雷格,1979,第137页)

因而,思想属于第三个世界:

第三个世界必须得到认可。任何属于这个世界的东西和表征类似,即都无法通过感官而被知觉到,它们都是不需要所有者的东西。(弗雷格,1977,第17页)

如此看来,物质和心智分别存在于两个不同的世界中,但是思想不在这两个世界的任何一方[①]。这种实在论的观点持续地吸引了不少拥趸(波里特,2002;波普尔,1979)。

弗雷格对问题(B)的回答

弗雷格认为,思想需要在把握动作的意义上才能被理解[②]:

我们不能把思维看作是产生思想的动作,而是抓住了思想……抓住某种思想以及做出一个判断都是主体的动作,这是属于心理学(研究的问题)。但是这些动作都涉及了某种不属于心理学的东西,这就是思想。(弗雷格,1979,第206,273页)

这种看起来挺诱人的观点似乎在思维和思想之间建立了联结。在2005年7月,英国的记者问道:"您对伦敦的炸弹恐怖袭击事件有什么看法(think)?",来自纽约的人回答道:"我们的心(thoughts)和你们在一起。"按照弗雷格的观点,这里需要有一个理解(grasping)的过程以确保这种联结。

这种立场也遭遇了巨大的困难。理解一个思想是一个过程,正如理解这个词的字面意义一样。于是,这个过程是有问题的:

只要我们被引向了如此这般的考量,即未来的发展必定在某种程度上呈现在理解使用(grasping the use)的动作中,以及尚未出现的动作中。(维特根斯坦,1958,第197节)

维特根斯坦的质疑如下。理解使用作为一个词语,我现在所做任何事情如何能够决定我未来的使用——对其他任何人也一样?如果美国的交通信号灯显示"红灯停",这意味着不能通行,即是说,当出现这个信号时,我、你以及其他任何人都不允许通过这个路口。如果我不顾这个信号灯而执意通过,这就是一个错误的事件。但这是规范性

① 弗雷格认为,思想的世界是"第三"个世界,是不能被还原到另外两个世界的。关于表征性思想的心理学将思维与思想之间的区别合并了,参见:史密斯,1998,1999c)。因而,这开启一项关于人类知识的抗辩(比克哈德,2003;利科,2000)。

② 英语 grasp,德语 fassen,法语 saisir。

的问题。我学习词语这样的事实又如何在动作上具有这种规范性的结果呢？其困难是突出的，在著名的有关加法问题的讨论中曾经被揭示出来(克利普克，1982，第8—9页)。现在，“+”对你意味着“加”，如：

$$8+7=15$$

如果我把同样的“+”称为“砌”(quus)，并且我的相加的答案与你的一样，那么说明你的关于加的意义与我的意义是一致的。但是“加”和“砌”并不是同一个意思。当按照“加”的意义的时候：

$$68+57=125$$

而当按照“砌”(quus)的意义时，则有：

$$68+57=5$$

你和我使用了同样的数字和同样的符号(却得到不同的结果)，而这是真实发生的事件。进一步，你和我在同样的情景中以同样的方式使用这些材料，尤其是在相加等于15的情景中。但是有些东西是不同的，在相加等于15以后，某些规范在我们之间发生了分裂。如果你说：“‘+’意味着‘加’，所以你错了。”而我则能够说：“如果‘+’的意义是‘砌’(quus)，那么就是你错了。”一简而言之，这种质疑是一种反证法(reductio 归谬法)。从因果性的角度来考量词的意义，就像学习词语这样的事实，同样的事实在当前是协调的，但是在将来的使用中却是对立的。这是一个毫无希望的未来愿景，直接指向了巴别塔(克利普克，1982，第26、37页)。理性的脚步一定要拒绝这种无望的目标，由此而衍生出来的一切也将要被勾画出来。这就是拒绝了关于词的意义做任何因果性的解释。于是，弗雷格关于把握思想的考量极容易受到相应的质疑。事实就是事实，没有任何事实需要特殊的规范(参见《休谟的法则》，史密斯，见本卷，第一章)。如果思想被成功地把握了，那么规范性也形成了。如果你说“68+57不等于5”，这表明你是在做一个规范性的判断。于是，如果把握思想的过程仅仅是因果性的，那么它将不足以解释规范性的形成。也就是说，如果规范性是后继的产出，那么它一定被包含在同样的过程中。而这正是弗雷格在回答问题(A)时所排除了的：规范在他的第三个世界中。

① 这个对话将以这样的方式进行：

你：你开什么玩笑?! 68+57应该，也必须等于125。

我：对我则不同。我看不出“68+57”有任何意义，也没有任何必然性。对我而言，它等于5。

如果有人认为这样的对话是聪明反被聪明误，则说明他是受到了两方面的影响。一是他认同了刘易斯·卡罗尔(1895)的道德规划。另一方面则是他被儿童数字发展的事实所震惊。儿童面前有两个容器，位置高一点的 H 通过一个斜坡与位置较低的 L 相连。儿童被要求将1个小球放进 H 中，一次放一个(皮亚杰，& 加西亚，1991，第45页)：

成年人：在第三个球滑下去之前停止放球。

儿童：那么 L 中将会有3个球。

成年人：那么在 H 中呢?

儿童：4个。

同样在他关于问题(B)的回答中,也强调了作为人的主体存在于第一个物理学的世界和第二个心理学的世界中。而从这两个世界出发能否进入到第三个世界是值得怀疑的。

综上所述,弗雷格关于心理主义的三个世界的评论让他在规范性法则和因果性法则之间划清了界线。这引起的问题则是,这个评论是否能够在指向这些法则之间关系的学科内得到认可。作为检验的标准,任何旨于此的学科都应该回答两个问题,即关于形而上学和认识论的规范的问题,关于规范是什么以及我们如何认识规范的问题。弗雷格关于(A)的回答使用了实在论的形而上学话语。这样的回答受到的质疑是,其作为针对(B)的认识论回答是有缺陷的。这种缺陷的基础已经在维特根斯坦-克利普克关于法则使用的辩护中体现出来了。于是,其选择既放弃了对新学科的探索,同时又希望在别处找到它。正是由于这种倾向让我转向去考察皮亚杰关于问题(A)和(B)的回答。

皮亚杰对问题(A)的回答

皮亚杰的回答是建构主义的版本,即规范性(normativity)是动作协调的属性。

存在一种属于动作协调的逻辑。(皮亚杰,1971,第113页)

请注意以下几点。第一,动作从来不是单独存在的,于是,任何动作主体都需要协调他们先前的动作和随后的动作。这将协调定义成了一种逻辑成分,而不仅仅是因果性成分。逻辑属性也就是规范的属性。如果动作的协调中有逻辑,那么就有规范性。第二,协调的规范性特征即相当于逻辑框架(frameworks),进而也就是规范的框架。尽管这样的框架并不是非常完整。一个框架可以是不同逻辑的不同原理的杂合体;或者仅仅只包含了一个完整系统的某些支离破碎的部分;或者只是一种伪逻辑[①](pseudologic)。一个结构化的框架是具有良好形式的,即使这样,它也可能只是在某些局部是完备的,也就是,处于一种局部的平衡。对人类的发展而言,可能不存在最终的结构,也没有终点(皮亚杰,1970a,第10页;1971,第155页;1986,第314页)[②]。第三,动作协调的逻辑是一种"一般性逻辑,无论是对群体还是个体而言"(皮亚杰,1995,第94页)。于是,这里需要有一个交换系统,使得社会中的个体相互之间能够理性地表达同意或不同意的意见。人类的动作主体所使用的规范的框架主要有生物学和文化领域内的因果性语境。于是,这里同时体现了因果性和规范性。这种双向关系导致了它们之间的协调的问题。

规范有一个形成的过程,于是这引发了一个问题,即它深深地植根于动作,一直触

---

① 例如,混合逻辑——义务联合(obligated conjunction),即,道义逻辑中的义务与命题逻辑的结合(皮亚杰,2006)。逻辑框架——没有类别包含的类别成员(class membership)(皮亚杰,1992;史密斯,1998)。伪逻辑——词语使用中的过渡概括化(皮亚杰,1962;史密斯,1998)。

② 在达尔文的生物学中,终极性和过程性都被排除在进化发展之外(尚热,2002)。在皮亚杰关于人类知识的发展的模式中,终极性是被排除的,但保留了过程性。其意义在于——新物种的形成与新知识的形成不是同一回事,新知识从来不是无中生有的(ex nihilo)(皮亚杰,1971

及到了意识和有机的根本关系。(这使得在生理学和由一套蕴涵系统所构成的意识之间发生了解离)，构成意识的这套蕴涵系统所具有的必然性，本质地区别于适用于解释物质事实的因果性关系。(皮亚杰,1950,第30页)

规范在时间中发展，并且与生物学和文化领域内的因果性运算(causality operative)相互依存(史密斯,2002b)。

于是，皮亚杰回答了问题(A)。生命体所拥有的规范性能力既不是来自生物遗传(biological inheritance)，也不是文化的传递(cultural transmission)①。他的立场在他的第一本书里有所介绍：《求索》②，他此后一直坚持同样的观点：

即(人类)总是"规范负载的"(norm laden)③(皮亚杰,1965,第159页)

这种立场具有三个优势：它避免了世界的增生，因为动作的因果性和规范性都是在现实世界中运作的，只需要一个世界就够了(塞尔,1995)。它使得规范性成了动作主体所表现的动作层面上的工作，并且能够让规范性强加于其他无规范的世界(布兰登,1994,2000)。即使如此，规范性不是因果性，两者是一个连续统中的共例(coinstantiated)，这个连续统能够开放地接纳来自它们双方面的贡献(普特南,2002；利科,2000)。

皮亚杰对问题(B)的回答

在他看来，动作主体在规范的使用和发展过程中，能够主动地认识到规范的存在：

寻求避免非连贯性，这样的理由总是会(让主体)趋向于某种形式的平衡性　(皮亚杰,1985,第139页)④

非连贯性和矛盾性不是因果世界的内容，它们也不能被脑和心智的因果机制所接受。相反，如果人类动作主体拥有了规范能力(normative capacities)，这种能力则能够被发挥于关于规范的认识与使用。对皮亚杰而言，规范是通过管束(regulation)，即协调(coordination)来实现的，是对系列动作的约束而同延(coextensive)于动作主体的生命。每一个动作主体的运动的规则都需要使用逻辑，也就是规范——这种使用可能是无意识的(unrecognized)和缺损的。但这就是规范性，它能在其使用过程中发展。它是动作的逻辑，而不是"心理逻辑"(mental logic)(布雷恩,欧布利恩,1998；约翰逊-莱尔德,1983)。同样，凭借其在动作中的使用，这种逻辑能冲击到随意性动作、意向性活动以及判断活动(法拉利,皮纳德,郎宁,2001)。关键是，它在整个发展过程中的许多表现形式

---

① 皮亚杰的立场既不排斥生物学的影响，也不拒绝文化的影响——两者都是必要的事实(史密斯,2002a)——但是的确否认了生物学的充分性(皮亚杰,[illegible],第[illegible]页,参见里克尔,2000,第[illegible]页)也拒绝了文化的充分性(皮亚杰,[illegible],第227页,参见范·赖特,1983a,第34页)

② 《求索》(皮亚杰,1918,第1[illegible]页)。简介参见格鲁伯和弗尼奇(19[illegible])，评论参见史密斯(2003)。

③ 《人总是"规范的"》("Un sujet est toujours'normé'")。

④ 《人努力回避非连贯性》("Le sujet cherche à éviter l'incohérence")。

都已经得到了证实：

从一开始，甚至是对我们的最年幼的被试而言，物理事实都是被通过逻辑-数学框架来报告的，无论它是多么基础性的内容。（皮亚杰，2001，第 320 页）

逻辑-数学框架是规范性的框架。这种能力的内容和特征从来都没有完全形成过，实际上，从婴儿阶段的动作主体开始，在整个（发展）阶段中都没有形成。在这种建构主义的版本中，中心问题不是心智如何完全地受到因果性的统领，从而弥合了与规范性规则之间的鸿沟。而是，因果性规则和规范化规则如何在动作中联合为一个统一的心智。

皮亚杰关于问题（B）的回答具有两方面的优势，也遭遇了一个挑战。第一个优势是它在所有人类动作和思维中追求因果性和规范性的互动，这里遇到了维特根斯坦-克利普克的异议，这种异议削弱了弗雷格的回答。另一个优势也来自同样的追求，谓之它与休谟法则的兼容性（史密斯，本卷，第 1 章），因为，规范性框架正是体现为人类动作和思维中的运算，从孩提时代就开始了。在皮亚杰的模型中，没有一项规范性的"必须"（has to）独立地发生于因果性的"是"（is）。但是挑战也是严峻的。皮亚杰（1985）关于进步解释机制是平衡化，这个过程的标志是连续地形成不同程度的平衡，每一个阶段都在其后序列动作的扰动中失去完全的平衡化。他关于这种机制的考量在很多领域被认为，其在两个方面的表现是不够充分的。首先，它很难作为一个形式化的模型，因为"皮亚杰关于这个机制的描述很深晦涩"（克拉尔，1999），同时，它也很难成为一个可检验的模型，因为"其难以解释皮亚杰所倡导的机制如何通过经验研究而得到检验"（布莱恩特，2001）。这样的质疑不在少数，但是它们是可回应的（史密斯，2002b）。首先，皮亚杰的模型是有据可依的，也是对理论的和经验的思索都是开放的（皮亚杰，2001，2006）。其次，半个世纪之前，皮亚杰的发展心理学被冠之以"规范事实之心理学"之名（艾萨克斯，1951）。这个标签的意义在后来的质疑中已经被遗忘了，现在是（我们要）找回这种认识的时候了。

3　规范和规范性事实

如果（我们的工作）第一步是追忆弗雷格，那么第二步就是回顾皮亚杰的著述。实际上，皮亚杰（关于上述问题）的回答可以被看作是问题迁移（problem shift）（拉卡托什，1974）。这可见于他对第三个问题的回答：

（C）规范性法则和因果性法则如何能被系于同一个模型之中？

我认为皮亚杰对问题（C）的回答非常高明。他的回答是很聪明的（史密斯，2002b，2003，2004）。这种回答还能够得到进一步的发展，通过识别这样一些原理，其包含了在人类动作和思维的工作中的规范性的框架。在之前的 2.1 中，（我们曾叙述过）一个公认的观点，即因果性法则和规范性法则是相互排斥的（exclusive），而留下的一个开放

性问题是，它们二者是否也是相互抵触的(exhaustive)。皮亚杰认可它们排斥性，表达为他既拒绝心理主义也拒绝逻辑主义。正如逻辑不能提供因果解释，因果性也不能提供规范性解释(皮亚杰，1963，1966)。但是，他不认为它们两者是相互抵触的。按照皮亚杰的说法，存在一条中间路线(tertium quid)，即第三种选择，既不是规范性的逻辑学也不是因果性的心理学。皮亚杰的中间路线是发展认识论(developmental epistemology，DE)[1]。发展认识论是聚焦于规范性法则和因果性法则之间关系的科学，同时也保持了二者的独立性。发展认识论具有双重视野，联合了认识论的规范和心理学的规范性事实。

如果规范不是一个事实，那么规范性事实是什么呢？皮亚杰(19[illegible]，第29页；1965，第19页)承认了一种得到广泛认同的观点，即规范并不来源于关于现实世界的观察，也就是，规范不是事实。尽管如此，也不是所有的事实都是因果性事实。对皮亚杰而言，同样存在规范性事实，存在

这样一些事实，它能够在经验中被观察到，并且动作主体认为他或她自己遵循了某种规范，而不考虑它在观察者的立场上的合理性。(皮亚杰，197[illegible]，第30页)

规范性事实就是个体对规范的使用。这种使用是可以被观察到的，所以是经验性的。但是它同时也是对规范的使用。于是，这种规范性成分是使用的本质。这种观点的进一步发挥，规范性事实意味着

某种必要的法则，起源于所有类型的社会互动，按照它们的次序，在个体相互作用的语境中实现因果性的活动。(皮亚杰，1995，第69页)

个体关于规范的使用通常具有社会性起源和社会焦点。其逻辑是祈使命令，即是义务模型。尽管这种使用可能具有因果性效能，规范性事实却不同于因果性事实，否则，因果性-规范性的区分就可以被忽略了(史密斯，本卷，第1章)。这里留下的问题是，通过双重视野来对因果性和规范性事实进行一般化的考量。这种版本的发展认识论需要有一个联合点，从而聚焦于：

关于事实数据的协调以及规范的合法性(被置于)相互的对应的关系，而不是将一个还原为另一个。(皮亚杰，1966，第153页)

这是一个解放宣言(liberating claim)。即使认识是一个因果性的过程(布鲁纳，1966)，它同样也是一个规范性的过程，这种洞见是由艾萨克斯(Isaacs)从皮亚杰的模型中精微地凝练出来的。简言之，皮亚杰关于问题(C)的回答使用的是他的发展认识论话语，这套话语体系将因果性规则和规范性规则联合为同一个模型。

[1] 发生认识论(Épistémologie génétique)，或者叫关于知识的科学理论，其基础是关于知识的发展的深入分析(皮亚杰，1950，卷I，第7页)。发生(genetic)这个词[illegible]意味着：开始并成为。由于20世纪生物学的影响，这个传统的意义已经被掩盖了，结果是genetic成了遗传(hereditary)的同义词。发展认识论(developmental epistemology)这个词避免了genetic这个词被混淆的意义，并也没有否认遗传在知识发展过程中的贡献。

长期以来，规范性规则被看作是人类心智的核心。亚里士多德在他的《论灵魂》(De anima，1997，第41页)书中说道，心智具有表征的能力，同时也是一种控制能力，控制了对真理和虚假的断言和拒斥。在康德看来(1997，第41页)人类心智具有两种规则能力，一种是获得真知识，另一种则是形成自由之活动。科尔斯戈德(Korsgaard，1996，第46—47页)说，规范性判断构成了道德理性(moral reasoning)的本质。利科(Ricoeur，2000，第71，93页)则认为，规范判断构成了科学思维的基础性支撑，这种支撑在神经科学将人的(规范性的)能力还原为生物学(因果性的)能力时被忽略了。布兰登(2000，第79—83页)则说，对规范能力的使用并未受到笛卡尔对心智的发现的理性之光的照耀，而更倾向于是康德式的义务承诺，即人所能从事者分为思想(得真)和活动(成真)。通常，一个动作主体具有能力去做或去想。这种能力是规范性的，同时其解释也不排除使用了因果模型。这就是为什么心理学与生理学是有区别的。一个联合了规范性和因果性焦点的模型应该具有四个原则：

3.1 双侧路径(Dual access)

所有的规范都有两条可达路径(double accessibility)：

(a) 通过个体活动或思维的模范而显现出来；

(b) 通过其对个体的约束力而体现出来。

每一种规则，包括行为和思维的模范，能够在路径(a)中以其因果的话语予以考察；规则性是在路径(b)中通过规范性话语来言说的。例如，有两种关门的路径。一条是因果性的，如果有重物通过铁链被约束在门上，它的效能是能够开或关门——重量导致了门的关闭；另外一条路径是规范性，如果有一个指示标志说“请关上大门”，其效果(与重物)可以是同样的。但是，这个过程却因为人的活动的规范负载而有了不同——规范即指令：你必须要关上门。于是，同样的结果——门被关上了——可以服从于不同的基于(a)或(b)的原因论。另一个例子是：有两个纳税人——一个隐藏的间谍会说“我纳税是因为我不想露馅(blow my cover)”；而另一个守法公民则会说“我纳税是因为这是我的义务”。在这两种情况下，税收都缴纳了——其起点是不同的，间谍的动作服从于指令，而公民的动作则是在良好意识条件下规范力量的体现。①

在(a)与(b)之间的一般性区分是著名康德的道德规范(1993，第72节)：“每一个符合法律的活动(因此)不会因为法律的原因而发生。”这种区分过于一般化，超出了道德规范的范围。在布兰登的考量中，良知(sapience)——不仅仅是感觉性(sentience)——的标志是人能够认识到或认可某种规范：

① 在历史上，conscience(意识)在英语中具有两个意思——认知的意识和道德的意识。法语中也一样。

我们的活动建立了规范，将规范性的意义强加于自然世界中，其原本是没有意义的，也没有关于活动的指导与评估。规范性意义是被强加于一个无规范的世界的。

（布兰登，1994，第30，48页——斜体字由作者添加）

规范性活动改变了原本没有意义的自然世界，由(b)而形成的就是意义。这里体现了规范能力的使用而带来的创造潜能。

(a)与(b)之间差异的中心便是逻辑规范。这种逻辑是一种双路径模型，其一是模态-义务逻辑（modal deontic logic），即"应该做什么"（what has to be done）（霍尔蒂，2001；范·怀特，1983a），其二是模态-真值逻辑（modal alethic logic），即"应该是什么"（what has to be）（克诺斯维尔、修斯，1996；范·怀特，1983b）。规范性在这些模态逻辑中得到了良好定义，因此可以在规范性框架的形式化描述中被揭示出来。

第一，模态逻辑定义了规范的特征，即，在其中活动发生的方式（义务模式），或者，在其中思维为真的方式（真值模式）。无论哪种方式，都有三种不同的模型，可以用第一章中卢瑟和斯宾诺莎的例子来说明。

卢　瑟

他将他的论文钉在了教堂的门上	我站在这里，我不可能在别的位置	
我的活动——但是它能发生吗？		
义务的	被允许的	被禁止的
我的活动是义务的		
	这意味着	
	对不被允许的否定	对被禁止的否定

斯宾诺莎

假如有数字1、2、3，那么下一个数字应该是……	1对于2就如3对于6	
我的思维，就是我如何思考——真的这样吗		
必然的	可能的	不可能的
我的思维是必然的		
	这意味着	
	对可能性的否定	对不可能的否定

① 发展认识论的启发性在于："那种结构的存在是为研究者的审视和分析之用"（皮亚杰，1973，第16页——我做了修正性翻译）。在皮亚杰的最后的著作中，他承认他的逻辑需要"清理"，通过求助于模态-真值逻辑（皮亚杰、加西亚，1991）。于是，就有了两种逻辑：模态-真值逻辑和模态-义务逻辑。它们并不是相互对立的类型。

观察揭示了哪些活动被实施了（卢瑟），以及哪些思想被判断为真（斯宾诺莎）。但这导致了更进一步的问题。于是有：这样的活动，它是义务性的呢，还是被允许的，或者只是对被禁止的反抗性动作？还有，最应该是的数字——它是必然的呢，还是可能的，或者存在某种潜在矛盾性？

第二，规范的模态特征的可定义性只是通过相同模态家族中的其他成员来实现的。卢瑟认为他的活动是义务性的，却不是逻辑必然的。斯宾诺莎的命题是必然的，但它也不是义务的。进一步，义务在同样的道义家族中拥有同样的意义——义务意味着其否定是不被允许的，即，其否定是被禁止的。另一方面，必然性在同样的真值家族中却拥有不同的含义——必然性的否定不是可能性，而是不可能性。

这些模态的等价关系很微妙。当活动主体在使用某种规范能力时，并不需要能够认识到所有这些等价规则。人类的动作主体真正拥有的理性很有限，因此人的理性还有很大的发展空间（皮亚杰，1953，2006）。进而，动作主体在使用任何一种模态等值性时所犯的错误，又进一步渲染了动作和思维的规范性的模糊性，即使它已经完全规范化了（史密斯，2002a，第5章）。模态等值性的彻底的非现实性是对模态立场的误读。所有的中介都发生在"全或无"之间。这种等值性的连续的现实性是人类发展的核心。

3.2 规范使用于规范意识（norm-use and norm-consciousness）

规范可能被动作主体无意识地使用，当我在做或想时，可能并没有意识到规范的运作。与之不同的是，动作主体可能意识到规范的合理性却没有实际操作规范——我能够辨认出对你有约束的规范，但是却不能同样辨认出作用于我的规范。于是，在关于规范的呈现——不呈现，以及使用——意识两个维度上构成了四个相应的单元格[①]：

规范的违背：规则既没有运作也没有被意识到

对规范的违背可以体现为无视它的存在、怠慢或敷衍它。[②]违背可能处于无知，尤其是在孩童时代，当杰奎琳和杰克在玩一个游戏，将大理石弹珠排成一堆，并把一个橡胶小球放在上面，他们说道"这是法老球（Mummy ball），那些是宝宝球（baby ball）"（皮亚杰，1932，第25页）。用弹珠玩的创造性游戏在社会语境中则不是用弹珠执行在规则之下的游戏。

规范的拒绝：没有执行规范但是能认识到规范

规范的不运行可能源自人的错误——动作主体即使认识到了规范的强制性，但依

① 在英语中use-consciousness的区分对应于法语的pratique-conscience（皮亚杰，1932）。

② 规范永远不可能是单独的，而是一定与其他规范相关联的。出于便利性考虑，在这里只讨论单一的规范。多重性规范在3.3节中讨论。

然无视它。[1] 另一种情况更明显且清晰。在萨达姆·侯赛因被捕以后，他于 2004 年受审，有如下对话：

> 法官：你是谁？
>
> 萨达姆：我是萨达姆·侯赛因，伊拉克总统。你又是谁？
>
> 法官：我是联合国机构提名的（法官）。
>
> 萨达姆：这意味着你在用侵略者的法律强加于我。

萨达姆的第二段话显示，他不承认在“侵略者”的法律之下对他的审判，即，“他们”的规范对他而言是非法的，因此不应该对他有限制。

规范的压力：规范在执行但行动主体却没有意识到规范的存在

规范很自然地会在代际之间、群际之间和个体之间传递。

> 学习某种组织化的行为形式，并努力参与其中，这是一种典型的动机性活动。我将这种动机称为规范的压力。（范·怀特，1983a，第 39 页）

有效的传承才能保证服从，规范则可以在个体没有意识到的情况下传递。于是，运作的规范能够有效执行，实现因果性的活动，而不需要动作主体觉察到规范的存在，不需要意识到规范能在动作主体的主动控制之下运行。只有更进一步的发展以后这一切才会被觉察到，这就是

> 遵守一套模式的原因，在整体上，它不应该是来自规范压力的影响。（范·怀特，1983a，第 39 页——他做了重点标注）

在这个意义上，皮亚杰（1995，pp296ff）专门引证了社会化作为一种规范的传承。实际上，在他的模型中，确保发展到自主性是拥有发展的优先性的。毕竟，因为理性而服从和因为服从而理性是不同的事件。（皮亚杰，1995，第 60 页）

规范的自主性：运作的规范同时也被觉察到了

在格拉比学院的装饰墙上，陈列着一个纪念牌，以纪念 1823 年的威廉·伊尔斯，他不认可当时流行的足球的规则，而是用手抱着球在球场上奔跑。这个动作成了英式橄榄球的起源，最终形成了这项运动自身的规范性规则[2]。规范在代际之间传承，以确保持久稳定。而当新一代创造规范时，则带来了规范的更新和发展。皮亚杰通过一个思想实验揭示了这种创造的潜质，他考察了儿童与同龄人的社交活动，社交活动是违背因果性的，但是在规范性方面则不然。每一个个体——尤其是年幼的儿童——都应该被引导认识群体的主流观念，在其中，人的社会交流都是在对这些观念的反思（皮亚杰，

---

[1] 规范永远不可能是单独的，而是一定与其他规范相关联的。出于便利性考虑，在这里只讨论单一的规范。多重性规范在 3.3 节中讨论。

[2] 即使这个故事只是一个传说，这个观点依然是正确的——参见：www.nationmaster.com/encyclopedia/William Webb Ellis。其他的范式例子包括，伽利略拒绝亚里士多德的物理学（库恩，1970），或者马丁·路德·金（1968）在非种族区分的公民权问题上所做的贡献。

1995，第57页)。这种考量即是"返回个体化和远离群体压力"(皮亚杰，1995，第290页；关于这个思维实验的评论，参见史密斯，2002b)。

3.3 多重性规范

显然，多样性规范在任何语境中的显现都取决于其他人，尤其是来自他种文化的人。在个人的生活中，关于多重性规范最有力的证据是，规范的两难问题。两难问题可能来自两个不同的方面：

相冲突的规范

一个动作主体可能面对相冲突的选择，如果有两种规范分别指向了相反的方向，而同时却只能有一个活动(霍勒博，2002)。在1940年，纳粹占领了巴黎——萨特的学生做了什么？(梅森，1996)他可以留在巴黎照顾他年迈寡居的母亲(OA)。同样，他也可以去伦敦，加入自由法国军(OB)。但是他不能同时做这两个选择——在这个语境中，OA和OB是冲突的。如果他选择了OA，那么，对当事人而言，OA就被赋予了更高的权重。这个选择并没有完全排斥OB——相应的活动义务依然存在，即使被其他规范压倒性地拒绝了。

同一个规范的冲突性解释

有的规范即使很复杂，但其意义表达是清晰的。以停车的规范为例：

驾驶员同志请注意：

本停车场计费停车：

前2小时免费；

2小时以上，24小时以内8元。

有的规范则有歧义解释。船长下达了命令(范·怀特，1963，第78页)：

有一个人必须要离开这条船。

船要沉了，船上的每一个人都会有危险，但是如果有一个人离开，其他人就会获救。那么，谁将被这一条有歧义的命令"踢出去"呢——男人、成年人，还是最后一个登船的人？每一个属于这一类的动作主体都会问——为什么不是女士、不是年轻人，为什么不是第一个登船的人？这个例子中的两难性在于不两立的行动——留在船上或者离开船——都是源自对同样的规范的歧义的解释。

两难的发生，一个原因是规范需要与之协调的框架。两难揭示了一些潜在的问题：框架是始终稳定的吗？我们至今未发现任何始终稳定不变的系统，例如，如果它经历了社会传递，或者在传递中发生没有被察觉的偏差，等等。事实上，任何稳定性都是暂时的，都会受到来自同一个动作主体之后的协调的冲击。动作主体会改变他们的想法。后来的行动可能与之前的行动相对立。

3.4　规范的推理

这条原则是对 3.1 的彻底否定。推理可以通过线索(a)而建立因果性的学习。推理同样也可以在线索(b)中获得规范性的指导。这两者之间的区别并没有引起已有研究的足够重视。所面临的问题是，主要的歧义来自这两个表达"必须"(has to)和"一定"(must)。这些表述方式在学龄前儿童的语言中就已经被广泛使用了(伯恩、杜夫，1989；斯吉尔尼克，方，1997)。由此产生的一个问题是，儿童如何能够理解这些词汇的含义，对成年人也一样，仅仅在逻辑意义上对比它们彼此的意义就够了吗。但是，不幸的是，这里存在太多的不明确性，尤其是在这种情况下，即义务推理所研究的案例，正好在一般性意义上是因果性心理学所研究的典型。这些讨论将在接下来的 4.2 中予以详细解读。

这里有一个发生学方法论的议题。在因果性心理学中，研究者所赖不外乎是在所控制的条件下(观察)的被试的反应，而不考虑被试做出这些反应所依据的推理是什么。按照因果性而言，反应本身就是充分的；以规范性而言，这些反应的理由应该被揭示出来——只要这些反应是规范性事实，受作为理性基础的规范的约束(史密斯，2002，第 5 章)。通常，动作和思维中的规范都是合理的——赞成和反对它们都可以给出明确的理由。因果性只是在"那里"，在物理世界中发生，无论我们是否喜欢它(都不能改变它)，规范则不一样，它们可以被接受或拒绝，做详尽的阐释、批评，以及评价。因此，它们能够被适应，也能被改变。规范的推理是实现这个目标的罗马大道。当然，这并不是一条平坦的道路，但却是我们所能够通过的唯一途径。

4　人类发展中的规范

第 3 节中呈现的规范性模型作为一个理论模型，并没有得到过经验的验证。即便是这样，它仍然是可验证的。心智中的这种模型，通过对其典型证据的述评，我们发现集中为以下五类：不相容的(incompatible)，非决定性的(indeterminate)，相容的(compatible)，似真的(plausible)和使然的(convincing)

4.1　不相容的证据

在神经科学和进化心理学看来，心理学是一门具有排他性的因果性科学(比约克隆，佩列格里尼，2002；尚热，2000)。同样，将心理学视为一门纯粹的经验科学也是没有

错的。以此看来，规范性是被排除了作为两条路径之一的可能[1]。一条路径是让非因果性的规范性从因果性中起源。另一条则是将非因果性的规范性还原为因果性。

对这两条路径的质疑都是同样的。规范性作为一种现象是无疑的——参见第一章中的多种例证。第一章第2节中有弗雷格的评论，这些评论显示，要作为规范性的唯一解释，因果性不堪此重任。因此，无论是起源还是还原的做法不外乎都是无视规范性的规范本质。进一步，这两种选择将两种解释合并为同一个术语，即起源。这个术语可以意指那些传承于因果性的东西，也可以意指之前那些不属于因果性的东西。即使智人作为一个拥有因果性传承的物种，这并不意味着人类的动作主体有能力辨认动作中的规范。只有先具备使用规范的能力，规范性才有可能被认识（利科，2003）。最后，这种选择也排除了规范性作为变异来源的可能性。规范性被边缘化，只不过成了一种"噪声"，这是实验范式的重大疏忽。

4.2 非确定性的证据

在心理学关于推理的研究中，选择任务被看作是单独的，得到最多考察的问题（伊万，2002）[2]。这种任务的设计基础是真值表，真值表则是受真值函数逻辑的约束。主要的发现是，条件推理是一项很困难的任务，即使是在成年的大学本科学生中只有大约不到10%的正确率（伊万，2002；约翰逊-莱尔德，1999）。这个发现被华生（Wason，1977）用来说明皮亚杰的模型的解释局限，即过度信赖规范性而低估了因果性，而皮亚杰并没有明确地表达过这一观点（参见莫夫，1957，pvi）。在最近的20年间，选择任务被重新设计为义务逻辑的表述方式（成、霍尔雅克，1985；科斯米戴斯，1989）[3]。这些新设计的核心是义务条件，它的前件指向一种活动，而其后件则陈述了一个前提条件[4]。一个典型的结果是，当引入了进化论的解释之后，正确选择的概率提高了5倍（费迪克，2003）。这暗示了两方面的含义。其一是规范性的解释力太小——证据是在真值函数版本中的高错误率。另一方面，生物学的因果性的解释力要大很多——证据是义务版本中的高正确率。

---

① 如果要问发展心理学（DP）中规范性的解释是什么，2001年在伯克利的会议上有过开放性的讨论，一个发展学家一字一顿地说道："我们不搞神秘主义。"

② 通常我们都认为选择任务是彼得·华生（Peter Wason，1966）所设计的，参见伊万，2002）。这显然是忽略了日内瓦的先驱，其先行版本是阿尔伯特·莫夫（Albert Morf，1957）的"九月 钟"任务（史密斯，1993，第117页）。

③ 科斯米戴斯（1989）采用经典华生选择任务考察大学生的条件推理，结果显示实际上正确率大约是30%。——译者注

④ 例如："前件：如果你要吃肉（某种活动，应得的权利），后件：那么你必须要去狩猎（前提条件，应尽的义务）。"——译者注

从两个方面来看，作这个结论为时过早。第一，尽管规范性被卷入了旨在拒绝这些研究的解释之中，但是它在这些方法和结论中并没有得到足够多的重视。选择任务是一个范式例证，显示了拒斥因果事实的发生性的那些任务。具有讽刺意味的是，其设计是通过反应的正确/不正确来记分的，这本身就是一种规范，因此，规范性系统已经被研究者所使用了。但是这一事实在被试那里却被否认。研究者已经屈尊于将他们的任务置于规范性事实的发生性领域之内。其二，义务版本的选择任务中，关于"必须"(must)的界定模糊不清，并且在逻辑上有多重定义之嫌①。总而言之，这些事实导致了规范性的不确定性。

4.3　相容性证据

一系列的认知加速进程被开发出来，旨在基于发展规律而提高学校学习的质量。使用皮亚杰的推理任务，以诊断性调查(n＝12，000)作为基线，结果发现只有三分之一的青少年的发展达到了皮亚杰模型的形式运算的标准(沙伊尔，阿迪，1981)。使用皮亚杰的和维果茨基的程序，在科学课堂上采用准实验设计，对7—8年级(11－12岁)的儿童进行了为期两年的研究，其目标是让这"三分之一"的儿童在三个科目上提升更多，分别是英语、数学和科学，以他们在11年级(16岁)时参加公共考试(GCSE)的成绩为衡量指标。研究结果显示至少两方面的干预是有效的(阿迪，沙伊尔，2002)。作为参照，同一所学校的控制组儿童以"良好"成绩通过公共考试的通过率在三门课上分别是79%、51%和53%，也就是，大约有21%的"附加值"。对照性干预的研究还在进行，其中还包括了小学阶段数学的对照研究(沙伊尔，阿达米，2003)。这些项目的主要特点是用三年的时间间隔——7、8年级启动(的项目)在11年级时评估——来评估持久的学习带来的改变。这种证据适合于关于心智作为"一般化处理器"的模型。无论心智发生什么由学习引起的改变，都不是专属于某一个科目的，也不是因为这门课程的(独有的)教学背景(pedagogical context)。心智作为"一般化处理器"则契合了这里所呈现的规范性模型。

这个证据在两个方面是不完备的。第一个缺陷是规范性法则既没有在教学环节体现，也没有出现在评估中。特别是缺少了关于规范的"约束力"的关注，缺少了关于运行并自觉的规范的关注，以及缺少了关于情态(modality)的关注。干预的效果是令人震惊的；但是，它们是支持了因果性规则还是规范性规则呢？第二个缺陷是，这个证据的效力是基于公共考试的，也就是一种稳定的客观化的评估手段。尽管规范在课堂教学中体现为具体化的内容——学习的规则，教师提出的纪律，学生的被认可的权限，以及在(学习)评价中的规范性活动等(沙伊尔，1997，第54—78页)——但并不表现为测验

① 参见附录。

中的评分标准。争议的点在于"良好通过"是什么意思。按照 3.1 中的区分，正确的理解和基于规范的理解并不是同一回事。

4.4　似然证据

我有两项研究（史密斯，2002a）揭示了年幼儿童如何在推理中使用似然证据。100 名来自英格兰西北部公立学校的儿童参与了研究。男孩和女孩平均分布，都是义务教育学校的 1—2 年级（5—7 岁）的儿童。

数字守恒：运行但不自觉的规范

这项研究是为了考察儿童的数字守恒，有 1/3 的儿童给出了非常不一样的答案。儿童被呈现两组同样间隔排列的棋子，每一组有六个棋子（白色和蓝色），他们都认为数量相等。然后下面一组白色棋子的间隔被拉开：

初始呈现方式　　　　转换后的呈现方式

现在问棋子还相等吗，这一部分（1/3）儿童现在的回答是"蓝色的更多"，即，上面一组，没有拉开间隔的一组更多。儿童给出的理由如下：

- 蓝色更多是因为你拿走了两个（白色的）
- 白色的更少是因为有两个被移开了

按照这些孩子的回答，拉长白色棋子间隔的动作导致了两端两颗棋子不被记数。于是，白色棋子只剩下了四颗，而蓝色组有六颗。有趣的是，这种理由不是计数的错误，而是规范性的误解——两颗白色棋子——只不过向两边移动了数厘米，依然存在于视野内——不被计数了。对这些孩子而言，它们"不在那里了"，它们"被移开了"。这些孩子使用了他们自己的规范，从将白色组两端的两颗棋子排除在计数范围之外。通过类比可以澄清这个事实。裁判将两名足球队员罚下场，这意味着他们离开了球场，但是他们可能还站在边线外。因此，他们不再作为球员而被计数。同样地，"蓝色更多"的答案是一个对数字非守恒性的惊人抗辩。

关于这种回答的解释是基于儿童的规范——是在儿童的立场上的合理性，但是在我们看来却是不合理的。当涉及道德推理时，有的儿童诉诸相等动作原则："在任何情况下，每一个人都应该得到同样的对待"（达蒙，1977，第 75 页；特里尔，1983，第 158—159 页）。通过平等议论，这些儿童能够通过对比法则来进行数字推理：两组并行的排列应该任何情况下都具有相同的属性。这个法则是规范性的，并具有约束力，使得这些儿童能够领会他们的观察学习。

数字推理：运行的并自觉的规范

这项研究考察的推理是数学归纳。其中一个版本的任务是，（研究者）向儿童呈现两个盒子，A和B，A中装有一些棋子而B是空的。当检查过装置以后，儿童分别在三种条件下往两个盒子里增加等量的棋子：可观察的条件；不可观察的条件；假想的增加。在最后一种条件下，有一个问题是关于增加一个"极大数字"：

莱斯：如果你往一个盒子里增加一个极大数字，往另一个盒子也增加同一个极大数字，它们两个的数量会一样吗？或者这个（指向）多一点，或者这个（指向）多一点？

约翰：这个会到达天顶上，这个会一直到上帝那里，它们必须要一直更多一些。

莱斯：天顶上是什么？

约翰：是上帝住所的顶。

这个奖比的回答印证了儿童的创造性推理。约翰相信上帝居住的天堂在世界的最顶端，当增加了一个"极大数字"，盒子里的内容物就会到达上帝居所的高度。但是，因为有一个更高的起点，所以另一个盒子里面的内容会更高一些，会到达天堂的顶。所以，后者中的内容应该比前者更多。这个优雅的推理正好匹配了规范的AEIOU五部曲框架（史密斯，2002a，2003）：

自主的（Autonomous）：约翰的自主性是一个自由的心理活动，拥有他自己的特征，并且是他个人独有的。

衔约的（Entailment）：必然性的规范性关系被明确地表达为"必须一直更多"，而不仅仅是"会一直更多"。

主体间的（Intersubjective）：约翰的推理是不同思考者之间的"公共领地"，即，其他人也可以做出与之同样的推理。

客观的（Objective）：关于一个容器里面的内容比另一个"更多"的回答是一种断言（真、正确），是一种永真论证（truth preserving argument）的陈述。

普遍的（Universal）：这个结论是普遍化的，在这个语境中，约翰认识了什么总是这样，在其他的语境中也一样。

简言之，约翰在他自己的推理中已经认识到了规范的运作，并以如此独特的方式表达出来。

反对的意见是：这样的证据不是因果性有效的，因为缺少足够的（实验）控制。我的回复有两个。从因果性来说，这是关于事件的规范的陈述——证据是在任何研究范式中的连续变化。事实上，这个任务还使用于一个新颖的范式中，但没有引起重视，尽管它起源于大约半个世纪之前的日内瓦研究中心（史密斯，2002a，第22页）。从规范性来

看，这个证据显示了在规范性上跨越卢比孔河(Rubicon)[1]的决定性的一步。

4.5 使然的证据

据我的认识，(关于这个问题)的最好的研究是通过儿童的弹珠游戏来进行的经典研究(皮亚杰，1932)。弹珠游戏是一个规则管理游戏(rule-governed game)，在范·怀特的分类学中被界定为规范性的研究(史密斯，见本卷，第一章)。皮亚杰的研究是经验性的，却指向了规范性事实。首先，研究的议题是儿童的尝试(pratique)或者对规则的使用，然后他们有意识地或者反思性地理解了它们作为规则的特征(参见：函数16)。在他们的推理中明确地表现出了模态观念(modal notion)。简言之，这项研究所揭示的，大多数都是规范性模型中的原理，在最后部分有所描述。

游戏的规则：尝试

争论的焦点是，儿童在游戏中是如何使用规则的。这项研究的设计在两个关键方面与义务版本的选择任务的设计截然相反。一是适应了第一人称视角——研究聚焦于当儿童在从事弹珠游戏时儿童自己的规范。这区别于其他研究中的第三人称视角。另一个区别是，儿童理解的模式特征是被外显表达的，因而避免了义务版本的选择任务中的一些混淆(参见附录)。

首先，请注意即使非常年幼的儿童就能创造性地玩这个游戏而不用考虑规范——负载的规则——参见之前3.2，杰奎琳在游戏时解释道"我做了一个小巢"(皮亚杰，1932，第25页)。她的游戏是创造性的，但却无视了弹珠游戏的规则。第二，在中龄儿童中，规则能够被主动认识到，但是和其他规则合并，显示出不合理的使用。这里有一些例子：

如果一个人赢得弹珠，那么弹珠必须被弹出去。

鲍姆和皮亚杰玩弹珠游戏，并有了以下的交换：

皮亚杰：谁赢了？

鲍姆：打球的那个人赢了，好吧，他赢了。

皮亚杰：嗨！谁赢了？

鲍姆：我，然后是你。

鲍姆能够正确地陈述规则，接下来却把它与另外的顺序规则合并了。然后，皮亚杰有四颗弹珠，鲍姆有两颗：

皮亚杰：(现在)谁赢了？

---

[1] 卢比孔河(Rubicon)是意大利东北部的一条小河，传说公元前49年，凯撒率军渡过卢比孔河进入罗马，从此迈出了征服欧洲，创建罗马帝国的第一步。凯撒在渡河时说了一句名言"The die is cast"，和当年项羽的"破釜沉舟"异曲同工。——译者注

鲍姆：我，然后是你。

然后，皮亚杰没有了弹珠，鲍姆有两颗弹珠：

皮亚杰：谁赢了？

鲍姆：我赢了，你没有了。

于是，在这里关于输赢的规则得到了正确的应用（皮亚杰，1932，第 28 页）。另一个例子：梅和维蒂一起玩，他掷出四颗弹珠（第 30 页）：

梅：我现在能玩四次了。

维蒂：（这是违反规则的，因此他也是共犯。）

第二，年龄更大一些的儿童，规则能够被认识并能被合理地应用。好几个规则可以同时调用。（第 34，40 页）：

本：你必须从你开始的地方开始。

努斯：在游戏时，每个人必须一样。

格罗斯：与一个人赢得太多时，其他人说"Coujac"，他就应该去玩其他游戏了。

请注意这些模态观念——必须（must），能够（can），应该（bound to）——都是在回答中明确地、正确地使用的。

如果游戏者的弹珠进入这个方块，那么它就被对手赢去了。

这条规则在游戏中得到了清晰的应用。（第 35 页）

皮亚杰：（他的弹射器依然停在方块里。）

本：你作弊了。你不能再发射了，除非你先从方格里出来。

另一个规则覆盖的意外。（第 36 页）

皮亚杰：（他的弹珠冲手上滑落。）

罗斯：你说"输了"（Leshe）。如果你不说，你就不能进入下一轮。这是规则。

我们注意到，模态观念再一次被明晰地和正确地用于这些情况，即禁止——而不仅仅是不要做——的情况。一般性规则也发端了，例如，如何进行一些特别的游戏，诸如皮克牌（Piquette）与轮盘赌（Roulette）有完全相反的规则（第 31 页）：

努斯：当你玩皮克牌（Piquette）时，每个人都应该以同样的方式来玩。

以同样的方式来玩，这不是一个一致性的限定，而是要求所有参与者使用——并且受约束于——同样的规则。

游戏规则：意识

这里有两个有趣的问题，一个是关于创造一个新规则，另一个则关于改变一个既有的规则：

能够用一种新的方式来玩原来的游戏吗？

对于中间年龄的儿童，这个问题的回答是：不能（第 47，50 页——我做了修正性翻译）：

法尔：我不知道别的方式怎么玩。

菲阿：你不能用其他方式。

基奥：我觉得你可以，但是不知道怎么玩啊。

这些回答的都是同样的。情态观念　　任何其他方式、不能，能　　得到了明确的表达。略有含糊的地方是这些孩子的伦理性解释　　有些事情是可能的或不可能的　　或者，义务性的解释　　有些事情是被允许的或不被允许的。本表现出来的变化尤其具有启发性(第 55 页)：

本：我不能发明一条像那一样的规则。

皮亚杰：(迫使本设计一条新的规则)

本：那么我们规定，当你在方块中时，你不会被抓住。

皮亚杰：那么我们可以这样玩吗？

本：哦，不能，因为这是欺骗。

本一开始不认为自己可以发明一个新规则；然后，迫于压力，他显示出可以做得到。这是一个极好的例证，表明动作主体关于自己能力的信念是不可靠的，并有可能是错误的。同样，他的"创造"也是不稳定的，实际上只是伪规则，这显示为本又返回到，认为实施他制定的新规则是一种欺骗，即，破坏了他所认可的"真的"规则。

一个既有规则可以被改变吗？

儿童晚期的被试在这个问题上提供了更完善的回答(第 58，59 页)：

罗斯：如果它们(指新规则)经常使用，就会变成真的规则……所以，我们不必争论是否必须要有规则，以及你是否必须要按照规则来玩。

格罗斯：哦，是可以的。有人希望改变，也有人不想改变。如果大家都按照这种方式(改变了的规则)来玩，你也应该像他们一样。

在这些回答中，情态观念得到了清晰的表达。罗斯代表了伦理性的例子(必须按照应该的方式去做，il faut jouer comme it[1] faut)，格罗斯则代表了义务性的例子(我们应该像他们那样玩，on est oblige de jouer comme eux)。

几个可能的反驳：

a. 这个研究不是实验性的，不足以支持因果性。

的确，但是(我)可以做这样的回应，(这项研究)同时考察了因果性和规范性。关键是，这项研究聚焦于活动的规范性。

b. 我们有理由怀疑"临床方法"。

错误。这种方法是经过检验的，在方法论上具有必然性，因而是可靠的(史密斯，2002a，第五章)。

c. 理性水平不是最大化，在所评价的规范能力中没有一项是"符合标准的"，其中

---

① 应为 il。——译者注

一些甚至是"第一次出现"(参见:弗拉维尔、米勒,米勒,1993)。

这有一定的道理;但是,成年人的规范也会面临同样的质疑,难道不是这样吗?我们有充分的理由相信,在成年人的思维中所使用的规范是合理的规范,但并不排除它还在进行进一步的修正。在这个漫长的规范化旅程中,儿童才刚刚起步。

d. 这个研究没有涉及道德规范,所以它是非规范性的。

这不正确。道德规范只是多种规范类型中的一种(史密斯,见本卷,第一章)。这项研究事实上考察了人类发展进程中的规范性问题。

小结

第3节中的规范性模型已经得到了充分的考察和检验。但这只是经验性的考察。基于之前评论的可得性证据,它是可靠的(it shows promise)。

5 结 论

我在第1节中的出发点是两个问题,一个是针对一般性的心理学的,另一个是专门针对发展心理学(DP)的,问题是关于规范性和发展:

• 心理学能否既作为像物理学一样的因果性科学,又作为解释规范性的科学?

• 发展心理学能够解释规范能力的发展吗?

我论证了,这两个问题都可以回答"是的",只要我们可以把关注点同时置于因果性和规范性之上。在这样的论证中,心理学不能和物理学一样,仅仅作为关于物理世界的因果性科学。物理学世界是无须规范的,人类的活动和思维则是规范负载的。因果性和规范性不是同一种东西。这种区分的结果是,因果世界只是现实的一部分。这意味着心理学可以选择两条路径——一条是成为专门性的因果性科学,从而远离规范性的价值考量,另一条是坚持作为因果科学的同时,包容性地聚焦于规范性。在我看来,前者遗漏太多,几乎丢掉了关于人的心智所有的独特内容。我选择第二条路径的理由在第2节中做了阐释。从弗雷格反对心理主义的论证开始,直到皮亚杰关于发展认识论(DE)的论证。在解释弗雷格的论证时,我揭示了两件事,一是规范性和因果性法则是有区分的,另一件是,两者的区分能够与覆盖了两者之间关系的学科相协调。在这个论证中,皮亚杰的发展认识论的版本结合律理论的和经验的部分。至关重要的是,在两个部分中都有规范性的存在。在第3节中,关键的一步是联合了以下两个前提:即规范不是另一种事实,以及,不是所有的事实都是因果性的。特别是,规范性事实是一种对经验研究保持开放性的事实,因而不需要被还原为因果性事实,也不是从因果性事实中引申出来的。我给出的特别性建议是,发展心理学(DP)能够对规范性的解释做出贡献,只要其所关注问题扩展到覆盖率规范性事实和因果性事实的范围。这将导致四个原理,在规范性模型涉及规范的双臂取值(dual access)时,即同时通过因果性和规范性进

行取值；关于规范的使用和意识；在关于规范的两难的和冲突的解释中的多重性规范论证；以及，作为情态推理的规范性推理。尽管这个模型还没有得到全面的检验，却是可以进行经验研究的。在第 4 节中，这个模型在五种证据的项目中得到了评估，五种证据分别来自五个范畴内的可得性研究：不相容的、非确定的、相容的、似然的和使然的。阶段性的结论是，规范性模型呈现出了可寄予希望的迹象。

皮亚杰的发展认识论(DE)正是建立在这些讨论之上。在 21 世纪，认知科学的主要目标已经成为联合哲学的洞见和心理学的证据(戈德曼，2001；参见凯切尔，1992)。正好，这也是皮亚杰的发展认识论(DE)的目标，即在规范认识论(NE)和经验科学，诸如发展心理学(DP)之间成为一门联结性的科学(史密斯，2003，2004)。发展认识论(DE)在三个方面与众不同。第一，DE 类似于 NE，因为二者都是规范性的理论。(二者的区别则在于，)DE 的独特之处在于它的理论基于对双向关系的关注，即在规范与规范性事实之间的双向关系，而 NE 则只关注规范。第二，DE 与 DP 的相似之处在于，两者都是经验理论；区别在于，DE 关于与受规范性法则和理论约束的因果性法则，即，关注于规范性对因果性的驱动性。相反，DP 则主要应对这些规则，或分别地或联合地，但是并不会将因果性分派给其他内容。第三，NE 和 DP 都对 DE 提供了必要的贡献，即，两个方面都不能被忽视。在关于 DE 的讨论中，NE 付出了高昂的代价，因为它专门性地聚焦于规范性理论中的规范，这使得它由于缺少了经验性的支持而显得苍白无力(史密斯，1993，第 3 节)。在同样的讨论中，DP 也付出了沉重的代价，它作为一门专门的或者绝对优势性的因果科学，因为它的关于人类动作和思维的标准问题具有明确的规范性维度，至今为止并没有得到充分的研究(史密斯，2002a，第五章)。或者，DP 可以扩大它的问题域，通过考察规范性事实，从而驱动那些相关的因果性研究，并结合研究方法、研究结果和模式的适当变化。

简而言之，当被问及心理学的未来时，我站在皮亚杰(1970b)这一边："保持乐观。我们的问题每天不一样。"

附　　录

在这一项关于义务推理的心理学研究中，使用了混合条件：

• 如果信封是封闭的，就必须贴 20 分的邮票(成，霍尔约阿克，1985)；

• 萨利，如果你要在外面玩，你就必须穿上外套(哈里斯，努内，1996)；

• 如果你喝坦卡(一种饮料)，那么你必须要给你的妻子一个礼物(费迪克，2004)。

这些条件是混合的。它们包含了一个作为前件的叙述性命题，和作为后件的用词

条必须(must)的陈述。既然它们是混合式的,那么这个提示值得每一个买家①注意。

a. 这些条件都被设计为义务条件。在义务逻辑中,义务(obligation)的情态属性是必须(has to)。但是指向命题的义务和指向动作的义务之间却是有区别的,指向命题的义务是"必须是什么",指向动作的义务是"必须做什么"(霍迪,2001;范·怀特,1983a)。这两者是不同的,因为命题具有真值的判断,而动作却无所谓真或假。在范·怀特(1963——参见史密斯,本卷,第一章)的分类学中,理想法则是前者的例子:

如果明天是你的生日,那么明天一定不会下雨。

而后者是祈使性的,

如果狗吠,必不能跑。

关键的区别在于,受到这些义务条款约束的动作主体应该或不应该实施某个动作。这在后一个句子中得到了明确的表述,这个句子是个人化的,但是在前一个句子中则表述不明确,因为它是非个人化的,在任何情况下,你的生日与我都没有关系。与之有关的首先是在动作中的第一人称视角,在操作的和意识的规范之间的区别在之前的 3.2 中讨论过了。在(以往的)心理学研究中,(研究者)并没有控制这些区别。关键是,实际情况很可能是这样的,(任务)被假定为命题性解读,而这意味着其动作性解读完全被忽略了。

b. 如果采取命题性解读,那么必须(must)的作用域(scope)在各种条件下将会有很大差异。有两个选择,但是二者都不是明确的义务逻辑(范·怀特,1985)。如果我们用符号 O 来表示必须(must)的"应该"(ought)意义,那么,心理学关于儿童规则形成的研究中一个典型的条件是:

如果你在室外玩耍,那么你必须(must)穿上外套。

我们之所以说这种条件下"必须"(must)的使用是模棱两可的,因为它可能呈现为:

$$p \to Oq$$

即"如果 p,那么必定有 q"(if p, then it has to be q),此外,它还可以是:

$$O(p \to q)$$

这变成了"必定是:如果 p,那么 q"(it has to be that if p then q)。这两者是有区别的,进一步的分析呈现在(c)中。现在,我们能够充分地注意到,在第一种条件下,作用域 O 只限定于结果。即,只有结果是被义务限制的。困难在于,这种条件违背了休谟法则,因为它混淆了事实前件和义务后件。其结果是因为它的概括化而导致了(义务的)庸俗化(trivialization),例如:

如果你读了这句话,那么你必须支付我 100 万英镑。(if you read this paragraph, you must pay me £1 million)

---

① 隐喻对此研究做出挑剔性检验的读者。——译者注

这是一个带有欺诈性的后件，无疑，这完全是一个无厘头的结论。你不可能严肃地接受这样一个假言命令！相反，对于第二个命题，作用域()限定的是整个条件式。即，整个条件式是一个完整的义务。这导致了两个困难。第一，这个条件式没有启用(invoking)更进一步的义务性规范，这是成问题的。在室外要穿上外套不会对狗有约束力，这多半是因为(狗)缺乏对规范的理解，但是这个规范能够依据不同的理由而对人类的动作主体有约束力。这些理由可以是多种多样的，包括规范性压力的因果性(范·怀特，1983a；参见"我母亲让我这样做，但我真的不知道为什么")，以及合法的规范性(范·怀特，1983a；参见"我只是一个孩子，所以我需要小心翼翼")。前者不是规范化的必然性，后者才是。第二，即使有足够的理智，这个条件式本身并没有超然了(detachment)义务性后件。义务对条件的约束没有分散到它的构成部分之中。超然的后件：

我必须穿上外套(I must wear a coat)

启用了情态义务逻辑。在这里，其所丢失的是背景规范。在这个条件下，这些背景规范没有被给出，既没有从研究者那里，也没有从被试那里(被给出)。

c. 用于义务研究的条件式可以被解释为二种形式：它们可以被理解为必然性条件，或者是伦理必然性。这两种情况都是逻辑学的，但都不是义务性责任。于是，问题就是到底是哪一种解释。

在命题逻辑中作为必然性条件的必须(must as necessary conditionship in propositional logic)

有且只有一个事件，是有争议的命题逻辑，即任何命题的真值。条件式居于这种逻辑的中心，并且得到了清晰的定义，这样的逻辑是外延性的(塞恩斯伯里，1991)。于是，在条件式"如果 p 那么 q"中，有争议的命题的真值是：

$$p \to q = df \neg(p \& \neg q)$$

即，前件条件性地与后件关联，只有当前件为真而后件为假时，整个条件式为假。例如，这个条件式：

如果卡西乌斯是瘦的，那么卡西乌斯是饿的(If Cassius is lean, then Cassius is hungry)(奎因，1972)

后件被陈述为前件的必要条件。它可以被读作：

如果卡西乌斯是瘦的，卡西乌斯必须是饿的(If Cassius is lean, Cassius must be hungry)。

这个必须(must)的使用是真值函数的(truth functional)意义，即它仅仅指示了命题的真值。这个条件式本身为假当且仅当前件为真而后件为假。于是，后件的真值是前件为真的前提条件(pre-condition)，即，是前件的必要条件。然而，即使这是事实，事情也有可能有另外的选择——卡西乌斯可能得了厌食症，消瘦是因为他的新陈代谢，而

一个瘦的人可能刚刚结束一场大快朵颐。

情态-伦理逻辑中的必须(must in modal-alethic logic)

情态-伦理逻辑是内涵性的。所讨论的是所有命题的情态性,即,某个事件为真或为假的模式或方法。必要性在情态-伦理逻辑中得到了清晰的定义(克雷斯维尔,休斯,1996;范·怀特,1983b)。如果 p 是必然的:

$$p = df \neg\Diamond\neg p$$

一个命题是必然的,当且仅当对它的否定是不可能的,即,必然性的真值是毋庸置疑的。相对于上面的情态-义务逻辑的模棱两可而言,伦理性条件式可能有两种读法:

$$(p \rightarrow q) = df \neg(p \& \neg\Diamond q)$$

$$(p \rightarrow q) = df \neg\Diamond(p \& \neg q)$$

两种读法都不适合于义务的研究。偶然性的真也是真,但不是必然性的真。假设这个命题为真:

如果我有 7 镑和 5 镑,那么合起来就有 12 镑。

这不是一个必然性为真的命题。事实上,这是一个偶然性事实,可能有若干变化,例如钱因被盗而变少了,因为接受捐赠而变多了。必然性真值则不同,它不会发生改变。如果7+5=12,这不仅仅是唯一的真,并且不为假;更进一步,它不可能为假,它不可能有其他可能。一个数学的条件式是这样的:

如果 7 加上 5,那么和必定为 12。

初学者可能会犯错误,草率地得出了其他的答案。但是这正好是在规范与原因的混淆这一点上犯的错误。加法的和必须等于12,其必然性是独立于任何初学者的思考的,即使这样的思考也可能具有充分的因果性条件

情态-义务逻辑中的必须(must in modal deontic logic)

情态-义务逻辑是内涵性的,处理所执行的动作的模式或方式。假设 A 是一个动作:

$$OA = df \neg P \neg A$$

一个动作是义务性的(O),当且仅当对其否定是不被允许的(P),即,一个义务性动作不能被允许于其他。义务的条件式可能有两种形式:

$$(p \rightarrow Oq) = df \neg(p \& \neg Pq)$$

$$O(p \rightarrow q) = df \neg P(p \& \neg q)$$

其中哪一种形式适合于当前的义务研究,这还不清楚。任何命题,无论是必然的还是偶然的,都有真值。相反,动作则没有真与假的区分。当然,所有的动作都能够被一个命题所涉及,但那是另外的问题了(范·怀特,1963)。同样,当必然性应用于动作时,

则有：

如果门是开着的，那么你必须关上它。

如果狗在吠，你必须开跑。

在这些假言命令中，必然性被明确地作为事实条件被陈述在义务性[必须(must)]的后件中，或者表现为禁止[必不能(must not)]动作。义务条件式是前两种类型的中介。从情态特征来看，在后件中的动作要多于必要条件，但在义务可能被违反的意义上(参见：函数18)，动作少于伦理必然性。即使伦理必然性是无例外的，是必须(has to be)，义务则可以是有效的，也可能被忽视。

这项关于义务推理的心理学研究形成的结论如下。尚不清楚这些研究中的被试是否：

- 有些或所有都混淆了关于必须(must)的三种解释；
- 是否启用了第一种或第二种解释，而不是第三种；
- 启用了第三种解释，但是关于复杂的义务逻辑却只有不完整的、有限的理解。

总而言之，这些研究中关于证据的解释尚不确定。

皮亚杰逻辑的未来

〔比利时〕莱奥·阿波斯特尔　著
孙志凤　译

皮亚杰逻辑的未来

The Future of Piagetian Logic

作　者　Leo Apostel

原载于 *Revue Internationale de Philosophie*, 1982, 142(3).

朴志风　译自英文

皮亚杰逻辑的未来[①]

"En tu cristal que vive(你住在你的水晶里)"[来自博尔赫斯(J. L. Borges)的《葡萄酒之歌》]

1. 本文主旨:逻辑学家和哲学家眼中的皮亚杰逻辑

在专注于皮亚杰思想的研究中,评价他的逻辑是最困难的工作之一。考虑到哲学家们会阅读我们的研究,所以我们必须先解释皮亚杰逻辑为何值得继续研究。我们几乎可以断定:即便对一般认识论思想感兴趣的读者,他们对于皮亚杰的逻辑研究也是持有怀疑态度的(如果不是负面的话)。实际上,在一般的哲学家看来,现代形式逻辑以命题逻辑为基础(使用经典的真值蕴涵、模态蕴涵或者相关蕴涵),然后在一阶函项逻辑(functional logic)演算或者在n阶函项逻辑上来定义量词和命题函数(如果哲学家不是唯名论者)。在一阶函数逻辑的范围内,单个变元的逻辑将会与类的逻辑同构,具有多个变元的函项逻辑会与二元或多元关系同构。对于这些结构的哲学基础的研究则是逻辑的哲学研究。模态逻辑、相干逻辑、直观论逻辑和它的异常否定都可能需考虑到。在所有的情况下,元逻辑(一般语法、语义,蒙塔古之后,甚至语用学),它们的完全性定理,不完全性定理,一致性,以及自指特性都会被讨论。在这方面,哥德尔(Godel)的研究需要关注。它与数学的关系也将需要评论,最后还要讨论一下逻辑真值的特殊状态。我们这里所指的"一般的"哲学家(并不是我们臆想出来的)碰到皮亚杰逻辑研究时,他们会不断地感到大吃一惊。

(1) 首先,他们会吃惊于皮亚杰逻辑中为何没有函项逻辑?

(2) 缺乏函项逻辑这一点非常引人注目,因为它正是皮亚杰致力研究的高级认知发展阶段,两个较重要的逻辑研究之一,即要求青少年基于具体的实例去发现物理规律。显然,对这种物理规律发现过程的讨论迫切需要函项逻辑。查尔斯·帕森斯[2](Charles Parsons)曾以一种非常有影响力和否定的口吻这样评论过。虽然我们在使用函项逻辑去讨论会遇到很多困难,但是物理规律至少是具有下列形式的条件命题,即"对于所有x,y,如果fx则gy"(这个简单的例子使我们可以将量词、n个变元的函数和更多的变量混合起来)。

(3) 命题逻辑是用来描述青少年对这些问题进行思维的行为表现。有些时候,命

① 来源:国际哲学评论,142(3),1982,第567—611页。

题逻辑好像它是我们熟悉的形式(罗素-怀特海的形式)。但有些时候,它的表现方式与我们熟悉的差异较大。那么,这种差异又会是什么呢?

(4) 在杰出的逻辑学家让·布莱斯·格里兹(Jean Blaise Grize)帮助下出版的皮亚杰逻辑教材的第二版中,青少年的认知阶段被假定为有更高能力去"处理命题逻辑问题"的阶段。而此前的发展阶段,个体的注意仅限于具体的事物及关系,这个阶段被视为能处理命题逻辑更早的阶段。此书中还假定处于这个"具体运算阶段"的个体,可以使用类逻辑和关系逻辑。皮亚杰从未提及过此阶段的 n 元关系,因此也没有人提出,7—11岁的儿童能够快速地学会使用类以及二元关系的属性。至此,我们正统的逻辑学家们会惊讶,为何这也可以说成是类逻辑(形式上是布尔代数)和关系逻辑(形式上至少有两个额外的运算充实后的布尔代数;这两个运算是相关的乘积和逆运算)。因为当这两者放在一起时其复杂性将高于命题逻辑的代数(只有在经典的版本中,布尔代数中类逻辑的同构的复杂性才低于关系计算)。当我们对类逻辑和关系逻辑进行形式化时(即使仅限于二元关系),就已使用了命题逻辑;当因为某些原因而考虑所关注代数(皮亚杰一直寻求用代数方法去发现系统的整体属性)的逻辑解释时,我们就应明确区分阿尔弗雷德·塔斯基(Alfred Tarski)与其学生们研究的关系代数和布尔代数(千万不要忘记关系代数比布尔代数更复杂)。这实在是太明显不过的事实。

(5) 那么,我们在前形式阶段真的拥有类计算或者关系计算能力吗?假设我们拥有了这些能力,而且将之细分为八个部分,其中四个涉及类,另外四个涉及关系。在某种意义上,每个序列的第四个部分都是前三个部分的合成,而且最后的整体结构一旦为我们完全掌握,就会到达更高的"形式""命题"阶段。逻辑学家又会感到惊讶了:这种结构建构背后的直觉是什么?我们真的可以通过对这八个部分进行合成的方式,达到对类与二元关系理论的实质性理解吗?那么,划分成八个部分的背后动机又是什么呢?

(6) 另外,皮亚杰很显然只是谈论了我们习惯的类逻辑和关系逻辑(命题逻辑也是如此)。这是不合适的,原因在于他思想的前沿依赖于对"外延"与"包含"的区分。因此,呈现在我们面前的是具有外延和内涵的两个系统,这种双重特征肯定不会出现在经典的类别布尔代数中,或者出现于塔斯基的关系代数之中。

(7) 行文至此,具有想象力的读者,你们已经见识了这一系列非常令人诧异的事情,下文中还有更多的出乎意料。某种意义上,皮亚杰引导我们从类逻辑和关系逻辑的片断至两者的"合成",以逻辑术语来描述,这"产出"或者"产生"了命题逻辑。在另外一种意义上,皮亚杰做的却是另外一件事:他的思想的核心是运算概念,此运算可彼此自由的组合而且都可逆(例如群的概念)。序概念也是他的思想的核心(完全线性的序的结构太贫乏,他所关注的是仅次于最好的部分有序系统的结构:格)。对他而言,发展首次可看成通过类计算与关系计算整合的方式产生命题计算的发展,也可看成从弱半群和弱子格向完全成熟的群和格结构的发展。对代数未必感兴趣的哲学家,他会对这两种"发展"彼此之间关联提出疑问;他也会对群与格的统一性的重要性与作用提出疑问。

他想知道“群集”——这个皮亚杰用它实现群与格的统一，努力寻求守恒与进展、平衡与有序（我们通过三种方式来描述这种对立以便于读者能至少理解皮亚杰想达到的前直觉）的统一而原创的数学结构，到底有何重要性。他也想知道不太复杂的群集发展至更复杂的群集是如何进行的，以及为何在群和格最后的统一中，特殊的“INRC”群会扮演如此重要的作用。

(8) 皮亚杰在其后期著作（部分仍未出版）中所描述的发展概念，我们早已介绍给具有不同概念与假设的读者们了。描述认知发展需要逻辑系统或代数的许多序列彼此间进行映射。对发展进行映射的“范畴”概念，类似于映射，后来似乎也成为描述认知发展的必备工具。某些研究者早已注意到这类研究，有研究者甚至早已归纳出需要通过范畴概念来介绍群集概念。[5]

(9) 在同一时期稍后的研究中，皮亚杰也比从前更加重视矛盾与辩证概念(a)以及包含或内涵概念；他越来越多地使用“意义蕴涵”概念(b)。逻辑学家对皮亚杰早期的研究探索就更加不了解（哲学家也是）。早期的系统被平衡化取代（实际上他们总是出现在平衡的阶段），它的出现总是与无矛盾相关联，无矛盾也总是与可逆性相关联。现在，我们认为必须重新返回平衡化之前，去发现不可逆和不平衡？又或者相反，我们应将（如果这是他们的逻辑描述的情况）不平衡阶段放在更早“平衡阶段”之前？逻辑学家和哲学家都认为较早期的逻辑是一种内涵与外延的系统（不过两者都缺乏内涵特征的外显表达）。[6]这样，我们还必须在经典系统中介绍更多的外显“意义”吗？又或者我们对于意义的表达是不是太弱了呢？

(10) 最后一点，皮亚杰总是被称为建构主义者。但是，范畴论是现代数学中最少具有建构主义特征的分支。那些认为逻辑是通过“反身抽象”来表征人类行动组合属性的学者（因而基本上是有限的、递归的、与认知主体绑定的），难道不应该更接近迪厄多内(Dieudonne)的理念，而非布劳威尔、克雷泽尔和特罗尔斯特拉(Brouwer, Kreisel & Troelstra)介绍的“数学主体”的数学？皮亚杰难道不是把更多的精力集中于发生建构的自发行动者吗？或者我们没能充分地理解他的经典论说，或者相反，我们应构造“对象的逻辑以及为对象而设的逻辑”，即一个具有代数逻辑的递归的有限的现实系统。[7]至此，对皮亚杰的研究感兴趣的普通的哲学家和逻辑学家而言，上文呈现的整体图景已然变得清晰。上述情形非常混乱以至于足以解释这样的事实，即直到现在，在哲学家与逻辑学家的共同体中，关于皮亚杰逻辑的细节及其基本目的，尚没有建设性的互动。本文正是要倡导这方面的讨论。那么，在努力消除所有误解之前，我们需要先尽量清晰地呈现它们。我们相信，皮亚杰的逻辑研究中隐藏着非常深刻与丰富的直觉，这项工作应当重新开启而不应被抛弃。我们同样深深地感觉到，对待皮亚杰与现代代数的争论，就像黑格尔与三段推理争论；在这两种争论中，可以保留其核心主题，但需遗弃许多形式上的细节。

例如：

① 对皮亚杰而言，具有内涵与外延组合的逻辑的确实必不可少。但是，他在《逻辑通论》(见注释 1，下文简称 ELO)一书中所持的关系是类的内涵的观点并不成立的。因为存在完全的外延逻辑，它不能用来满足我们称之为意义的表达需求。

② 在皮亚杰的理论系统中，不应该没有函项逻辑。上文帕森斯对此的批评是曾经发生的对皮亚杰逻辑最好的事情之一。我们将要介绍的由帕森斯提及的多价代数①(Polyadic algebras)是皮亚杰的发展机制所真正需要的。

③ 尽管皮亚杰的命题逻辑为非经典逻辑，但是它是完全的相干逻辑。其中一些非常类似于我们早已介绍过的——汉斯·赖欣巴哈(Hans Reichenbach)在其著作《象征逻辑的要素》第十四章提供的极其类似的情境(在物理定律方面的蕴涵研究)——以及在其"法则运算"上得到更充分的发展。我们称之为"全命题逻辑"，这表明模态逻辑与函项逻辑是与之等价的。

④ 皮亚杰的群集也是分类理论与网络理论非常自然的组件。注意，这里的分类理论不要与类理论混淆，而网络理论则不要与关系理论混淆。然而，即使当我们忽略心理事实时(作为逻辑哲学家，我们在这不考虑心理事实，本文的内容服从于特定的受限的目的)，我们也必须介绍更多子阶段。

⑤ 与皮亚杰的更具逻辑的建构相伴的代数结构，是越来越复杂的行动理论的非常自然的组件。但是，皮亚杰必须从较基本的定义域开始，在更加复杂的环与域上继续，他在这方面所获的进展比其实际的研究工作更小。

⑥ 如果像皮亚杰想要达成的那样，命题逻辑实际上是一套"在操作上的操作"，那么我们就必须设计一个更大的相关组件集合，以及内容与组件的命题逻辑绑定的，且在真值逻辑中它的经典形式不能依然为真。

⑦ "反省抽象"实际上类似于哥德尔式的自我反省。因为生物学方面的原因，反省抽象确实就是这样的(每一个生物系统的 DNA 编码都包括了对于这个系统部分的描述)。

⑧ 范畴论的确是皮亚杰研究的一个自然的工具，但是他使用它的方式没有达成其目的(在一般认识论中很少有其他人使用范畴论)。

⑨ 皮亚杰的逻辑需要一种动态的逻辑，它要能将内涵与次协调特征组合起来。处于思考与探索中的主体，他必然需要逻辑，而且它也应该在其形式化中出现，这样可清晰地揭示逻辑与直觉主义的相似性。探索着的主体是一个不断变化的主体。

我们并不期望哲学领域的读者对上述九点有清晰的理解与领悟。对于上述的 1，2，3，4，6，8，我们将在下文中予以清晰地说明；而对于其中 5，7，9 仅在注释中提示一下。我们需要告诉读者上述这番说明的哲学理由，否则不能要求他努力地跟随我们。

---

① Polyadic 也称 Halmos 代数，它是由 Paul Halmos 介绍的代数。它们与一阶逻辑相关，这种方式类似于布尔代数与命题逻辑的关系。

2. 皮亚杰逻辑的哲学要旨

所有的哲学家都曾着迷于数学在理解自然方面的生命力问题。皮亚杰基本上是这样回答这个问题的：我们如何来探究并非由经验决定，主要受自我驱动而连续产生的迟早会促进我们对外部世界领悟的结构而决定（即使这种探究，在历史的发展中其开始远早于像天文表、记账簿以及土地评估等方面人类的早期经验）。皮亚杰对此问题的解答主要是基于他作为生物学家的训练。他着迷于连续开放的、连续变化的自组织及自我再繁殖有机体的思想。有机体在宏观的生态环境中演化，经过胚胎发育，再由婴儿长大成人，然后又开始衰老直至死亡。所有这些发展变化都是在一种"自创生的系统（autopoietic）"指导下完成的自我改变。首先，新陈代谢与自我复制产生了器官，同时也产生行为。个体认识环境也是一种行为，增长知识也是一种成长、发展与演化（某种限定意义上）的形式。我们对环境的反应不仅通过有机体的变化，而且也通过功能改变：我们是通过修改对于环境的表征，从而来修改我们对环境做出反应的行为方式的。而且，数百万年的演化显然已将有关环境以及改变行为方式的大量信息嵌入人体。如果我们这样看待信息获得的过程，也许可以期待基于这样一种先验基础，只是通过了解这种信息过程，我们的科学就可以获得进展。另一个著名的生物学家康拉德·劳伦兹（Kuno Lorenz），在这方面早就得出与皮亚杰相同的结论。在唐纳德·坎贝尔（Donald Campbell）及其支持者[不要忘记他们杰出的前辈斯宾塞和皮尔斯（Spencer & Peirce）]的影响下，英国的出版物中也都是与此类似的广为人知的观点。但是，多数进化论生物学家，他们或者将智力范畴等同于内在本能，或者将之视为新达尔文适者生存的可能结果（Donald Campbell），他们对于将数学逻辑推导性结构方面差异与丰富性用来解释生物适应并无兴趣。

如果我们断定数学 逻辑思维的丰富性是由于数学逻辑结构（作为生物学家，我们将之视为整体，我们对于整体形式的兴趣要更甚于其原子层面的细节）是对生命本质（也即是生命的开放性，持续的被扰动，连续地通过补偿进行自组织与自我繁殖）的一种镜像，那么，我们就需要回答这个问题：为何逻辑和数学如此神秘地适合宇宙？就好像，逻辑与数学只是再现了高级有机体与其环境互动的功能水平以及生命的自组织特征。

与其说皮亚杰是一位进化论的发生论者，不如说他是一名生物学的发生论者。因为正是他用几何、代数与逻辑方式重新发现了生命的本质。生命的效能本身解释了数学的生命力。

这便是皮亚杰逻辑的核心假设。[16]

因此，本文作者认为，皮亚杰逻辑真的值的我们认真对待。据我们所知，在进化论生物学家中，还没有人尝试将逻辑、数学与基础的理论生物学放在一起，应用理论生物学来解释逻辑与数学。

要想完全弄清皮亚杰逻辑的核心假设，就需要非常强的理论：我们必须以数学的精确方式去定义交互系统，这种交互系统通过其功能发挥，将会增强其功能再次发挥作用

的复杂性与适应性（n 阶规则转换的处理规则）。冯诺伊曼和伯克（Von Neumann & Burk）提出细胞自动机的研究，以及约翰·霍兰德（John Holland）尝试在学习与适应系统方向的继续研究，这是此方向上现有的数学研究尝试。[1] 这些研究从未用来解释逻辑与数学发展的基础。皮亚杰只是隐约地意识到这个研究。他使用过非正式方式描述非规范的进化理论（结合了新达尔文主义者和拉马克主义者的观点），并将他的逻辑研究与这种非规范的进化理论联系起来。在此，我们不具体解释进化理论。我们只是想强调一下：哪怕我们全然反对皮亚杰进化理论的推论，就是只探讨皮亚杰对逻辑与数学生命力的回答是否具有解释价值，依然是有价值的且是有可能的。例如，我们从最经典的新达尔文式的"综合进化论"开始，这个理论目前仍处于被攻击之中，尽力保留其辉煌成功的一面，并对皮亚杰非凡的敏锐所觉察到的数学的发展与生命之间的神秘类比的解释进行了拓展。即使种群动力学、遗传学、细胞生物学和古生物学的新达尔文主义综合进化论可以存活下来是不可能事件，这样的探究仍是有意义的：难道有机体"智人"不知道，从草履虫到人类，基本的生命组织特性并没有改变，都使用自组织作为思维的工具吗？当我们面对数学逻辑结构感觉到的必然性与普遍性，它是我们面对生命本身无意识所感知的吗？那么，对于数学逻辑整体结构价值的解释与启发，它难道不是因为在生物系统自组织过程中，对整个宇宙中自组织运行的一些规则的镜像吗？

显然，对于皮亚杰在自组织系统的动态理论研究方面的概括，是对他的研究做出最终评价的前提。[12]

上述这些都只是对皮亚杰逻辑的笼统概括。显然，皮亚杰逻辑只是他研究计划的局部的、大致的静态实现。这也是我们渴望支持继续这个研究的原因，不要去反对这种学习、发展与自组织系统思想，这些都是皮亚杰基本的直觉。事实上，这些直觉早已在其提出的形式化中有完整的表达。

但是，由他提出的这种形式化也并非没有错误；他们通过将经典逻辑的部分表达为"一般化的组织"开始其研究工作，就像漫长生命旅程的竞技场一样。他们使用不为人们熟知的表达方式，奇怪的术语，归纳成"群集"、"全命题逻辑"、"INRC 群"这些重要思想，尝试去表达静态整体的沉淀物，即表达不断变动发展过后所积累下来的沉淀，以及各个阶段的轨迹。如果哲学与逻辑学领域的读者在阅读皮亚杰作品的时候愿意使用这把钥匙，那么他会在皮亚杰的研究中发现许多有意义的和复杂的贡献（即使在许多方面他迫于压力不同意）。至此，我们希望上文的介绍已经充分地激发读者去理解我们对这部分的解释。

3.1　具体运算思维阶段的八个群集：内涵与外延的分类与划分

现在，我们邀请哲学家和逻辑学家进入完全不同于上文第一段逻辑与第二段哲学的领域。我们来看一个完全不同的场景：经验主义的成人给 6—12 岁的儿童呈现木块、图像、小木棍，请他们对之进行分类或排序。年幼一些的儿童会在理解序列与分类上有一些困难，年长的会比较容易达到成人所提出的要求。而 6—12 岁之间的儿童会表现

出非常奇怪的中间形式。皮亚杰就是通过观察这些中间阶段的数据，并将之作为分析的工具。分类是指会使用类别，排序则是指会使用关系。有没有一种可能的方式，首先介绍年幼儿童简单的能力，呈现对类与关系逻辑的部分表达，然后再呈现对部分整合后的完整的类与关系计算。这样，我们就在探索中跟随了认知者的发生顺序(第一优势)，我们可以对类与关系的各种特征进行分析，从而为发现进化规律作准备，最终应用于生命独有的学习与发展系统。我们认为这是一个可行的思想。而且，它还与我们宏大的哲学问题有足够的关联，不是吗(我们能在这个简单领域去表达生命自组织条件的逻辑规则吗)？皮亚杰认为这种思想可行的主要依据如下：为了生存，所有的有机体都必须进行分类活动(必须区分可食用的与不可食用的；必须区分可追逐的同类配偶与所需躲避的天敌)。有机体获得的越复杂，就会促使它的分类越复杂(对应了其越来越复杂的行为模式)。同理，为了生存，有机体必须也必然要创造顺序(一些行动必须在另一些行动之前或之后，过程必须以精确的步骤来完成与执行)。这种排序与分类是现在的生命所有可能的水平(行为、心理功能、细胞化学反应、神经元的活动、胚胎的发育，甚至在最高的水平上，作为物种分类的有序序列化的进化上)都是必需的。观察儿童的排序与分类行为意味着，要在非常复杂的水平上观察生命与数学两者共同具有的基本特征。

如果上述讨论已经说服逻辑一哲学家这些研究是有价值的，那么，现在我们来尽可能更清晰地描绘一下具体的情境：在一张桌子上面，放有形状、体积、颜色明显不同的 n 个木块。我们要求儿童(以各种方式)将它们放在其所属的那一类，或者想出各种分排法，以这样的一种方式反复尝试，通过这种方式我们能理解和扩展每个儿童行为模式的原因。儿童有可能完成这个任务的条件是，他必须已经发展到能够支持“客体”(个体通过时间维持的一种具体的、个体性的不变量，它具有各个部分与属性)的概念，而且还必须能够在他拥有的各种概念和行动之间进行协调。皮亚杰并没有对这些能力(感觉运动格式的逻辑，整体与部分的前逻辑运算的逻辑的发生)并未论明，这在未来的研究是必须关注的)的前提作逻辑研究，理解这个问题以及评价皮亚杰在这方面研究必须要有足够的语言能力(皮亚杰自己并没有将他的逻辑研究与日内瓦学派的语言心理学联系起来)。

儿童开始行动，就意味着在空间上进行探索，将一些物体放在一起或者将一些物体分开。这是分类的动作建构。然后，到一定的时候，这种分类就结束了。这是操作的产物(指明一些特征、添加或减少)。这意味着分类活动是作为结果。在这些行为表现上，我们可区分出三个不同的方面：

(a) 人类的行动；

(b) 物理的对象；

(c) 为人类认知者所考虑到的物理对象与人类行动的特征。

纯粹的外延逻辑学家立即会意识到这里我们碰到外延(有限的对象集)与内涵(或者由应用了对象的动作实际所界定的，或者由对象或行动的对象特征在本体意义上的

界定)的交互作用。

当皮亚杰在谈论他研究的类逻辑时(儿童所使用那种),他实际上是在研究儿童在不同的年龄,对可见的或可操控的对象建构简单或复杂区分或分类。类从不“孤立”;不管在何种意义上使用“自然”这个词的意义,它们总是会属于分类。然而,逻辑专业的学生都知道在逻辑教科书中,类与分类的研究是独立的,不会嵌套在划分的部分。我们也许会期望外延与内涵定义的类别,在不断发展或修正划分,在时空上延展开,以不同于逻辑教科书里基本的抽象类别的其他方式表现出来。然而,我们所拥有的抽象的类起源于其他的实体。因而,“操作性逻辑”也显然不是“经典的形式逻辑”。我们希望上述说明有助于消除“一些”误解。皮亚杰以他的第一个群集告知我们,儿童已经具备相当复杂的能力:它们能够以下列树形图的方式,对一堆无序的物体进行变换。

$$\begin{tikzcd}
 & & & U \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & & A \arrow[dl] \arrow[dr] & & A' \\
 & B \arrow[dl] \arrow[dr] & & B' & \\
C & & C' & &
\end{tikzcd}$$

这意味着一堆物体也许首先分成一大堆和一小堆(以上文情境为例),然后大堆又分成方形和非方形的,大的方形又分成了黄颜色和非黄颜色的。这个树形是不对称的,在任一水平上,儿童所用的规则(内涵的)将一个"突出的"从剩下部分中独立出来。然后不再考虑剩下的部分;再继续以新标准对子堆进行划分。这样的分类水平层级数小,而且并不是由皮亚杰严格规定的(毕竟这种最简单的分类只是使用一次划分,只有一个水平)。而且,在每一水平上儿童无疑外延地运用了最简单的结构:对分。克劳斯·维茨(Klaus Witz)曾提议即便是这个初始的群集也可视为一个更简单阶段的较复杂的发展阶段:一次二分。[1]皮亚杰没有言及儿童在每一选择上会使用多少标准,那么,为了简化,假设在第一个分类中,任何单一水平都是由一个独特的内涵标准所决定的。外延的发展(我们在追求的)稍后将会由内涵的发展所完成。这是皮亚杰没有机会研究的方面。尽管他非常熟悉内涵发展的存在:所有的复杂的标准将会使用,从而取代单一的标准。皮亚杰以其独特的语言为我们描述了,当儿童在建构这个树形时,他们正在做的是什么;以及他们完成了这个树形意味着能执行什么运算。在这个树形中,向下(S)能分出一个潜在存在的堆(从现在起,我将开始以此树形讨论类,而且我请读者不要忘记这些类具体代表的是什么客体),而向上(J)能将两个类别联合起来。S 和 J 组装会合以及与格理论的衔接,它们明显是不会混淆的。

作为生物学家的皮亚杰,深深地着迷于某种意义上互为逆运算的 J 和 S:J 未完成的正是 S 已经完成的。而且对于他而言,逻辑是有机体生命在抽象水平上的外延,有机体连续受来自外部世界的物质与能量的刺激,它需要对所有的干扰进行反向的补偿。他也因在此处与可逆性相遇感到高兴:在上述 S 与 J 的基础上,另外一些关系可以定

义如下：

(a) 如果 $J(k_1,k_1')=k_2$，那么类 k_1 包含于另一个类 k_2[同样的情况 $S(k_2)=(k_1,k_1')$]；

(b) 如果 $S(k)=(k_1,k_1')$，那么类 k_1' 是 k_1 的补集；

(c) 如果 $J(k_1,k_1')=k$，那么 k_1 与 k 的交集则是 k_1（同样 k_1' 与 k 的交集则是 k_1'）。

逻辑学家和哲学家应该密切留意，这个基本的分类（在萌芽状态中，视为一种已完成的产物或是作为一种儿童可在其上进行操作的材料）从未曾以整体出现在主体认知中（即使是行动时也只是构成临时的整体）：

(a) C' 与 A' 的并对于认知主体而言并不存在：在这个树形中 C' 与 A' 的并不能表达具体的类；

(b) 包含关系不是一种可传递的关系。成人发现这是可传递的，但是儿童在产生这个结构以及之上结构操作时，只能识别连续的关系；

(c) 在任一给定的水平上，会因使用的标准而得到许多空类，而且不同的空类与桌上具体的地点有关；它们在儿童的心理上的存在是不同的，它们不能视为同一。因而，存在 n：$O_1,O_2,\cdots,O_n$ 为空类；

(d) 所有的补集都是相对的补集（处于即时加工的类别）。一些类没有补集(U)。我们认为这是群集 I 背后的皮亚杰直觉。在《儿童早期的逻辑发展：分类与序列化》（见注释 1，下文缩写成 EGLC）的实验性研究中，这些困难就被意识到了；而在 ELO 中，他只能识别出一些限制（例如：并依然保持局部性，而包含是传递性的）。他仅使用了一个空的类。我们认为：出于对一致性以及生物心理意义的兴趣，我们更应密切关注皮亚杰的直觉而不是他实际所做的研究。我们为如此费时来描述第一个群集感到抱歉。但是，一旦这种最初的结构描述清楚了，那么对后面的发展规则的描述（毕竟这才是皮亚杰追求的最核心的部分）将会变得更加清晰。

这个群集有其自身的公理（成人可以一种命题逻辑的外延表达出来，但不会出现在我们描述的发展阶段）。

(1) 如果 $S(k)=(k_1,k_2)$，那么反过来，$J(k_1,k_2)=k$。

(2) 如果 $S(k)=(k_1,k_2)$，那么 $k_1=C_k(k_2)$，$k_2=C_k(k_1)$（C_k 是在 k 作分类的补集）。

(3) 存在一个且仅有一个 $k(=U)$，这里不存 k' 使得 $J(k,k')$ 存在。

(4) 如果 $S(k)=(k_1,k_2)$，那么 $k_1\cap k=k_1$，$k_2\cap k=k_2$（$\cap$ 是相交）。

(5) 如果 $S(k)=(k_1,k_2)$，那么 $k_1\subset k$，$k_2\subset k$（$\subset$ 是包含于）。

(6) $J(kk)$ 是没有意义（不能表达幂等性）。

(7) 这里既不存在普遍的强元素（包含是不可传递，因此不存在元素包括所有的类），也不存在普遍的弱元素（这里没有一个类包括于所有的类之中：$O_1,O_2,\cdots,O_n$ 这些空类的定义与非空类一样是具体的内涵的，且它在分类过程中保持其局部性）。

(8) 如果 $S(k)=(k,k)$，那么 $k\cap k$ 没有意义（未定义）。这显然不同于 $k\cap k=O$。它也不是这样的情况，在树形中，最终也不会出现任何一个空类与这儿的交一致。

(9) 对于许多 k_i，都不能应用 Sk（树形中最低端的那个元素）。

(10) 但是，对于第 9 点中的 k，可以定义 $J(k_i,k_j)$。同样，对于树形中的 U，J 是没有定义的，S 是定义了的。

这是我们对于群集的定义（皮亚杰最初意义上的）。[1]在最初定义群集的这篇文献中还有一些其他的表达。但是，就现在的分类发展研究而言，我们不需要其他的表达。概念的内涵特征在许多不等价的空类中清晰可见。局部的限制非常严格。皮亚杰认为他的群集中已存在结合律。但是，我们认为这是不可能的。如果群集 I 形成 $JJ(B,B')A'$ 的表达式，那么它与树形图中 U 是等价的。如果 I 移动括号（因为结合律允许这样做），就会得到 $JJ(B',A')B$，新引入的类 $J(B',A')$ 在主体的分类活动中是不存在的。因此，慎重对待局部条件的话，结合律就不成立的。我们对于皮亚杰逻辑的判断与分析远不止于此：皮亚杰甚至在开始的阶段，就想坚持幂等性，一个特殊的空类和一个近乎完全的结合律。当然，这并非他的直觉需求。我们可以通过阅读他的作品去觉察他的用意。现在的问题是：我们如何从这个具体且贫乏的起点，抵达在内涵与外延定义上的分类与划分的完备理论呢？[2]接下来，在介绍另外三个群集之前，我们对第一个群集不同的发展方式作一说明：

发展 1：群集 I 能达到 n（任意大）层分类。

发展 2：群集 I 能从二分法（补集就是分类后余下的部分）过渡至三分法再到 n 分法，一些类别在相同的水平可以更主动地去定义，其他部分仍是余下来的那些。

发展 3：群集 I 能以规律的方式，从二分法过渡至 n 分法（在每一层级上有相同数量的划分）或者以非规律的方式（从一个层级至另一个层级，改变划分的数量，以及在同一个层次的类之间作改变）。

发展 4：群集 I 可以根据一种或 n 种标准，内涵地在任一层级上进行划分，而且它也可以在相同或相邻层级间多少不等的严格限定的关系下运作。

皮亚杰从未提及过这些情形，因此我们也不坚持强调这些。但是，为了认清这些未解决的问题（就像哲学的、生物学和心理学的未解决的问题一样），读者就应该意识到发展规律的丰富性以及它们的发展中存在的交互作用问题。我们的目标是皮亚杰逻辑的未来而非过去。以这种外显形式化的方式表达行为结构却不使用命题逻辑，这迫使我们发出这样的疑问：

(1) 我们难道一开始就要介绍命题逻辑的组件吗？

(2) 我们难道一定要将由心理学家理解结构所使用的衍生规则外显化吗？且必须要将由认知主体使用这种结构中所使用的衍生规则外显化吗？

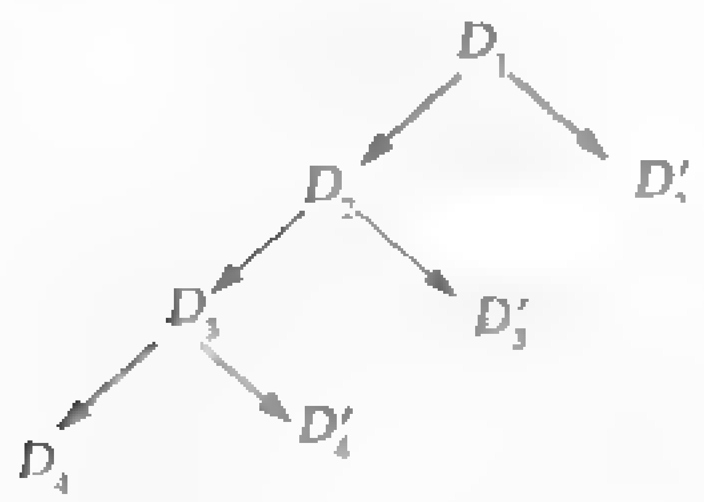
对于这两个问题，我们的回答是肯定的。但是，为了继续密切关注皮亚杰已完结的

研究，我们暂且搁置这个核心的难问题。群集 2 就是对同一领域上的两种分类的组合。但是皮亚杰并没有在 ELO 第 1 9—110 页对此给出明确的说明。

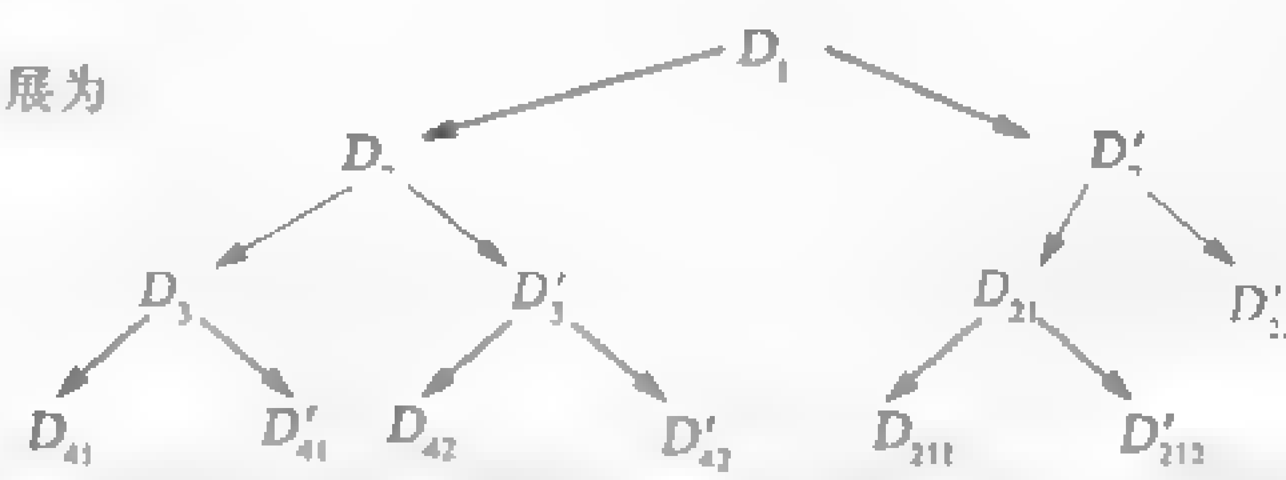
群集 I 考虑到三种意义：

M1：I 可以在同一域没有相互作用的交替使用两个分类（例如：一旦 I 将 D 分为 D_1，D_2，然后 I 再将 D 分成 D_3，D_4）。

M2：I 对类别进行归类（就像在第一个群集中，I 对对象进行分类）以及建构下列系列：



发展为



I 继续发展个完全的对称树形。这个群集的名字（替换群）似乎确认了第二个意义的阐释。但是，这里显然还存在第三个意义和更普遍的解释意义。

M3：在最简单情况下，I 将 D 分成 D_1，D_2，又将 D 又分成 D_3，D_4（显然使用不同的内涵分类标准），$C(D, D_1, D_2)$ 与 $C(D, D_3, D_4)$ 变成了 $C(D, D_1\cap D_3, D_1\cap D_4, D_2\cap D_3, D_2\cap D_4)$。I 真的增加了分类。我们希望哲学家与逻辑学家看到从群集 1 过渡至群集 2 的有趣所在（即使这个信息的含义是多重的）。在群集 1 上加上所有的限制，在类别上利用自身作为元素来操作，我们可以利用对这些类别分类的所有限定（内涵，连续的限定以及其他），继续在更高的水平上进行操作。如果我们的读者注意在 ELO 中证明了这一点的话，这将会使得我们远离皮亚杰所认为存在的零元素、单位元以及结合律的浅层介绍。

读者们将会再次注意到群集 1 的发展系列过程可以复制：具有更多层级，更复杂划分的组合，使用越来越多的复杂的内涵标准进行划分与合并类别，在这里可以应用至越来越多的层级（第二个意义）。逻辑学家们将会发现群集 2 是在分类上的进行全局操作，而且皮亚杰持续地尝试将类上的全局操作转换为在类上的局部操作。这个目标非常自然且易于理解；可是结果总是不成功。所以这个问题一直到现在仍然悬而未决。

群集 3 是在分类上进行 n 次操作的组合（分类应保持一致性，应遵从群集 1 以及更高水平分类上的类别在分类空间上应遵循的限制）。这实在没有什么趣味性，或者，皮

亚杰也应解释如何对分类进行组合才能渐渐从局部限制中解放出来(不管从生物的或心理的意味来看,内涵总是保留着)。

群集 3 尚未产生对同一域所有类别的完全组合:如果 k 是第一次分类,那么操作将会产生同一域 k 类别与其他的 k 的类别的相互作用(或者与 k 处于同一层次,或者更高层次或更低层级)。这种分类的组合并不必然导致自身也成为一个类别。应破除在类别上进行操作会产生树图的思想;在分类理论与类别理论之间可能有一座桥

群集 3 依然保留着基本的特性:一个划分操作 k 保留其基本属性以及它的元素与其他元素进行组合。但是这种操作是不可交换的。在同一 D 上的另一划分与 k 所起的作用不同。如果我们称群集 G 上的组合为"r",那么

$$Cl_1(k_1)+C_1(k_2)\times C_1(k_2)=C_1(k_1)。$$

群集 4 作为早先三个群集发展的顶峰,它具有在 m 层级上对 n 元数组进行类别组合的底层思想(n 和 m 是任意的)。皮亚杰在第 117 页得出了部分结论是这种底层思想的部分实现(3 种情况下的 2 次)。这样,每一分类上的所有类别与其他分类上的类别间的交和并就形成了,$C(k)+C(k)$ 与 $C_1(k_1)\cdot C(k)$ 都出现了,而且是可交换的。

介绍完皮亚杰的类理论之后,我们可以领悟到这真的是一种发育和发展的理论尽管很遗憾是,它只是以这种方式一次性呈现过。这会使得很多人想当然的认为:发展规律在开始时是无法外显的清晰地表达出来。我们至少看到了一些向量:从基于单维标准发展至多维标准的划分,从二分法发展至 n 分法,从负面的类别发展至正面的类别,从具有严格局部限定的分类 J、S 至全局的分类。从一种分类至各种组合分类的发展,从不对称的组合至对象组合的发展。对于群集 2、3,$C(k)+C(k_1)$ 与 $C(k)\times C(k)$(在最简单的一次性划分中)也许集中地使用 J、S。只有在这种情况下,为了简化,以 J 取代后来要变成的并,而以 S 代替它最终到达的目的地。

我们并不期待逻辑学家或哲学家会接受由四个经典群集依次呈现的,越来越复杂的外延和内涵的分类活动的发展。

如此多不同的发展模式可通过生物学类比的功能来检验即那些分类活动所遵循的典型样例,以及驱使分类活动的原因方面的类比。(例如,在层级数、分类标准数与 n 分法这三者的增长之间相互作用是什么?这些又是如何依赖于分类目的和被分类域的属性?)不管怎样,逻辑—哲学家现在已经觉察到皮亚杰以其恰当的有趣的方式,解决了一个具体问题。非正规类在此的表达,在其尴尬的半经典风格背后,隐藏着一个全新的、有趣的问题。

至此,时间不允许我们一一回顾四个群集上的直接运算、逆运算、并、结合律以及幂等性的形式。

总之,我们认为皮亚杰在其四个直觉的清晰的群集中,没有对这些特征进行很好的确认。

逻辑哲学家们应将皮亚杰对这些特征的探寻理解为,他将分类的内涵—外延理论的

组件视为平衡的一种想法的表达。(例如,作为群,它能够使认知系统在每一种情况下都保持动态与稳定。)

作为皮亚杰思想的继续者,我们应该寻找这些理论构件的代数对应物。除此之外,我们还应将进化考虑成一种平衡与反平衡的混合。当然,远离我们正在分析的权威人物的思想,可能会使我们误入歧途。最后,我们还是希望呈现给大家的是皮亚杰在分类研究方面的出发点,以及他的分类组合是原创的、有价值的建构理论。

3.2　关系逻辑:外延与内涵网络或图表

作为生物学家的皮亚杰,只研究了分类树和类逻辑的部分。同样,生物学家也研究了其在子代系统发生的关系逻辑。实际上,进化论提出分类学的分类系统与系统发生学类同。这也许是 *ELO* 第 124 页上所描述的,根据关系逻辑与类逻辑同构(我们不同意这样的判断)所得错误判断的深层基础。在其中的第 122—123 页,我们也碰到一个关系矩阵(那些节点是个体)和一个 n 元数组类别(那些节点是类别)的完全错误的确认。提醒一下读者,我们完全不同意皮亚杰所认为所有的内涵都是关系且所有的关系都是内涵的观点。我们认为,皮亚杰在其实验性研究中也认为:关系可以表现在外延中(像有序集那样的),也可以表现在内涵中(就像这些集合元素之间的所拥有的关系)。

然而,正像此前我们所提出的,这里我们遇到了一个应该去研究与理解的有趣且重要的问题:我们应如何处理域上的排序任务?我们使用排序有哪些不同阶段?群集5仅仅定义了一个线性的序列(例如增加的是体重还是体积)。如果 S 是关系"紧接着的后续者",那么在序列 $abcd$ 上的直接操作就是向右移动一步,相反的操作就是它的逆,就是向左移动一步。在简单代数中,逆运算的直接表达就是相关的乘积 $S\breve{S}$。这种"紧接着的后续者"的关系显然是不可传递的,但是皮亚杰明确地想在这里研究的可传递关系。那么,我们这样定义"紧接着的后续者"的可传递的表面属性,如果此处 S = "与后继者一样",P(=前面的)是它的逆,S^n 与 P^n 都具有可传递的表面属性。而且,如果 aP^nb,bP^mc,那么 $aP^{n+m}c$。群集5的结合律是相关乘积的结合律,代数上的恒等式就像 $(aS)Pb$ 与 $a=b$ 一样。我们这里对于一一可传递的关系(一种特殊的情形)有一个"纯关系逻辑"(无须布尔代数运算,只有逆与相关的乘积)。皮亚杰因为没有认识到这儿的运算完全不同于前几个群集所遇到的前布尔代数运算,因此产生了混乱。他确实也因使用量词与函项逻辑解释各种关系类型而产生了一些混淆。实际上,他在自己著作中并未介绍函项逻辑(与皮亚杰的观点相反,在本文中,我们将函项逻辑作为发展的必要阶段来介绍)。

皮亚杰与英海尔德在一系列的实验研究中都表明,我们应该详细介绍群集5。(比如介绍可传递性的限制;结合律的局部性,不是任何地方都可以定义逆的关系。)

将清晰的全局的"可传递的完全的序"的概念,呈现为一个群集(局部定义)的等价物是一种误导。在 EGLC 中遇到的以及在 EGLC 中未提及的许多阶段,应该满足群集5之前的所有逻辑发展。

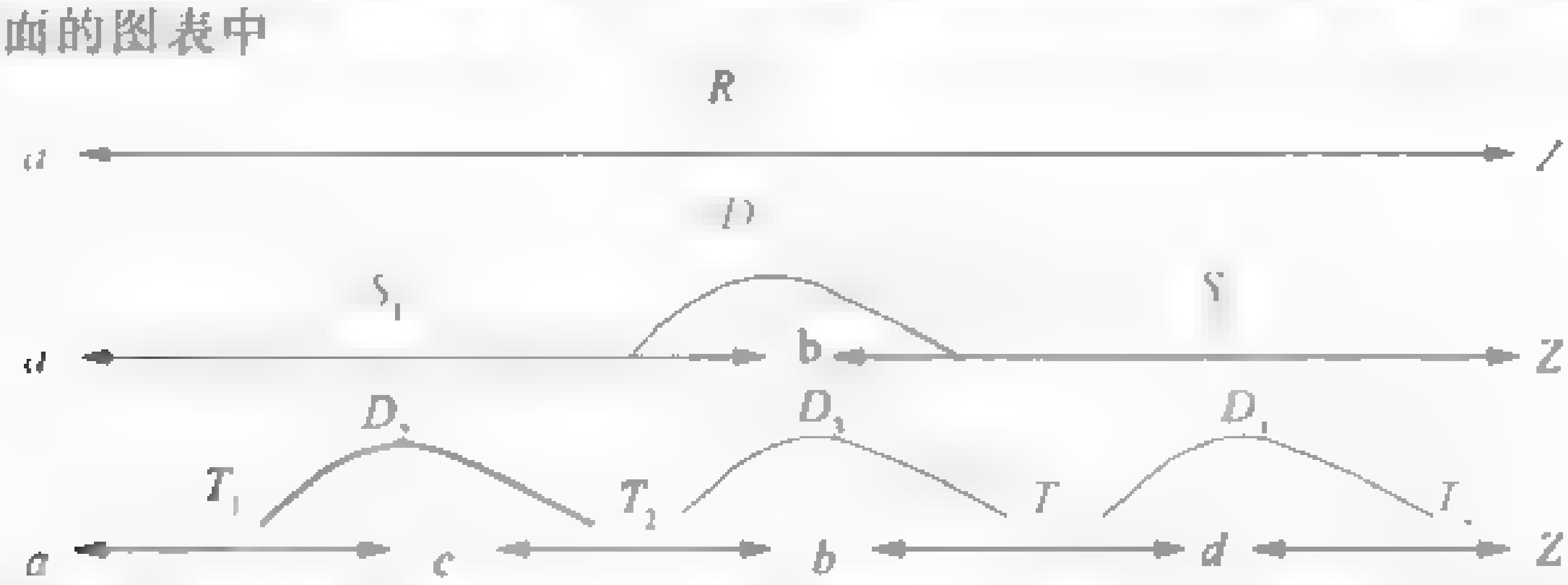
从群集4至群集5的发展，在关系上类似于在群集2与群集1之间的存在物。

在描述这种存在物之前，我们想提及一下，尽管我们避免了皮亚杰著作中出现的类逻辑与关系逻辑的混淆（与其基本的直觉作深度比较），但是对发展目标而言，这种混淆对于将外延—内涵的图表理论与外延—内涵的分类理论的部分结合起来，仍然具有非常重要的启发作用。这也许是从局部至全局发展的辩证的源泉之一。其中的图表理论，是皮亚杰高努力研究的结构，图表中关系的发生就与他在类别理论上所做一样，是以原子论式区分的。

非常奇怪的是，皮亚杰不考虑由可传递的非对称关系的多样性标准进行排序的定义域D（我们期望与群集2类似），他完全将对称关系的序列等同于分类来进行介绍（因此在序列上的运算，就将元素视为更高层级的对象）。皮亚杰为何会这样做呢？原因非常明显：即使我们是以关系逻辑的方式，探讨系统发生树轮廓之前的样子，他仍旧是着迷于分类树。

群集6明显可以分成群集6a（对称的、可传递的和反身的关系）和6b（对称的，不可传递的，不可反身的关系）。其原因是他的对称关系的序列是建立在这两个思想之上：两个个体分享同样的属性（同属于一个类）或不分享同样的属性（不属于同一个类）。

在下面的图表中



因此，在 S 成员与 S 成员之间存在 D 区分的对称关系，同样在 T、T、T、T 成员之间存在对称关系 D、D、D，就像在它们之间存在函数一样。这里纯粹的关系逻辑在关系复杂性上的发展并不独立，因为 S 包含于 R，$S \cap R = S$，aRb，$TS = a$（未分类的全称），$a = aS$。这是群集的直接运算（以经典的混尔的布尔代数与关系直不出字重新书写）。简言之，即直接的运算，同下就在对称关系的有序图表中，反之亦同上。我们将丢弃群集“纯”整体的关系逻辑，转入布尔代数与关系代数的混合中。

试着去跟随皮亚杰的直觉而非其形式表达，为什么在 GR R 上不考虑一个非对称的、一对一的、可传递的关系呢；然后，在同一域上（在其上应用布尔运算），考虑 n 个相似的关系，开始的关系对系列的其中之一具有特权，后来所有的将处于同一水平。开始时关系具有局部的限制（GR R），后来具有全局组合 GR R；一个等价的关系 GR R（对于同样的结果，由两个序的布尔加法获得：系列化的原理应该继续保持其支配地位）；同一域上 n 个不同的等价关系 GR R；单个排序与单个等价关系的组合 GR R；n 个序列与 r 个等价关系（继续通过在序或等式上定义）的组合 GR R。他自己的图表只

是一张自然发展序列的特例。事实上，如果我们想跟随皮亚杰的灵感的话，我们应该意识到上述这些关系都是有序偶对的重述（然而我们并不确知关系的心理内涵是什么：我们的注意力先集中于对象 a，再集中于 b，接着如果可能就聚集于两者；然后再着重于上述两者的部分以便介绍某种不对称）。更一般性的关系概念，可通过 a b c d e f 之间复杂的等比关系的发展获得。因此，是否优先考虑心理的现实（以及我们总结的，生物的和物理的），它既不属于对称的关系，也不是纯的序列关系，而是序与相似性的精略的合并。如果我们认识到，皮亚杰追寻的是一般性的外延—内涵网络的发展，生物学模式化的认知系统的工具，那么在他所谓的"关系的逻辑"中，如果必须从这个核心问题开始的话，甚至我们对于具体的关系群集序列都需修改。我们将不再遵循皮亚杰所解释的细节。我们相信读者早已理解到他的目标：在给定的域上，去了解个体从最简单的序列至这些域上最复杂的网络，这种能力发展的自然阶段，并尽力确定这些阶段。不得不说，他的最后两个群集 7、8 具有模糊性：它们想对具体的关系类型或任意的关系类型进行组合（将组合运算视为关系的积，或者是关系的交或并）。这基本上将导致我们远离图表的分类。而且，皮亚杰总是受阻于其对于发生树的着迷，即通过关系与类的同化或者相反，以及通过关系与布尔运算之间差异所得的不确切领悟，这尤其达至他想要的完全的普适性。具体而言，也即是皮亚杰并没有察觉出他探究的原创的外延—内涵图论是由自然的阶段构成，它是作为生物的必然性，而非人们熟知的二元关系的关系逻辑。逻辑哲学家们肯定会同意，生物有机体为了生存，在它们与外在环境的交互作用中必须完成某种任务。实际上也确实如此，外延—内涵部分与关系网络正是在生物有机体与环境的交互作用中产生了。

如果我们不能理解整体的组织原则，且如果没有研究组织原则的生物基础的话，那么我们是无法理解这种逻辑水平的（即，这种标准）。这一点，我们当然没法做到，但是，我们可以使用最简单的方式对八个群集做出如下直观的解释：

(1) 在一个域①上进行 n 种分类的理论；

(2) 在一个域上进行多重标准的 n 种分类的理论；

(3) 在一个域上进行多重标准的 n 种分类的交互作用的理论；

(4) 在一个域上进行 n 种分类及其交互作用的完备集合的理论；

(5) 在一个域上完备的序列的理论；

(6) 在一个域上对称关系集合的理论；

(7) 在一个域上对称与非对称关系组合的理论；

(8) 在一个域上一个完备的系列集与交互作用等价的理论（即理解关系的变换及相互作用的属性）。

从某种意义上说，后四个群集是前四个群集的逆（通过分类，排序防止了个体特性

① 在抽象代数中，域（Field）是一种可进行加、减、乘和除（除了除以零之外）运算的代数结构。

的失去)。从另外一种意义来说,两个群集其阶(或势)互逆等价,某种分类与其逆序分类等价。某种意义上,群集(4)与群集(8)都是群集(1)－(3)和群集(5)－(7)的黑格尔式的合成。

为了呈现上述这幅图景,我们不得不根据皮亚杰理论伴生的逻辑而忽略代数的发展。

现在,我们可以得出这样的结论:这种尝试,还只是刚刚开始,并不是类或关系逻辑的错误的心理表征,而是另外一些绝对不同的更加整体化与内涵化的,且早已在语言中表达过而非人为的(但是与之相关)。

到现在为止,我们已经在域 D 或 F 上自主限定了运算。很显然,处于思维状态的有机体不可能自己作限制。那么,群集之间的彼此映射以及在不同域上群集之间的映射必须成为我们研究的问题。也因此,皮亚杰认为他的生物逻辑的继续研究需要范畴论,这并非简单的跟随时尚。稍后,我们将讨论这个话题。

4. 全命题逻辑(Full Propositional Logic)

皮亚杰认为,如果我们能对八个群集进行完全合成的话,那么我们将在一定的意义上达到集合论水平。我们不对这个观点作具体评论。据我们的理解,这种说法是不当的或者是错误的。外延—内涵的划分与网络的组合理论完全不同于任何一种经典的集合论。而且,皮亚杰也认为,我们能够对八个群集进行合并时,就可以在命题上开始研究,通过判断认知对象从属于类和关系(类或者关系)以及对它们进行组合。他可以在命题上为我们解释这种更高阶的研究了。但是,他继续在两种解释之间摇摆!一开始的解释,命题运算只是我们熟知的真值函数理论;后来,命题运算是关于类与关系状态的理论(如果不是这样,那么命题又是什么呢?)。显然,对于逻辑哲学家而言,只有第二点解释是新颖的、原创的与有趣的。实际上,皮亚杰在 ELO 中显然不知道这两个观点根本不相容,且这一事实也再次导致了混乱。即便如此,皮亚杰还是为我们提供了一种具体的经典命题逻辑,即总是考虑命题的具体内容,因而它是清晰地应用了第二种解释。但是,正如早就预料的那样,皮亚杰只隐约理解了这部分。下面,我们将在皮亚杰对命题 p 与 q 的十六个命题函数的解释的基础上,试着去呈现这些方面。关于这些命题的解释,他的主要灵感是将命题与类别对应(第 216 页):p 对应于 P(一个类),q 对应于 Q(另一个类),非 p 对应于 $\complement P$(P 的补集);非 q 对应于 $\complement Q$(Q 的补集)。那么,命题逻辑又将如何表达呢?

(1) $p*q$,完全肯定,对应于下列类逻辑中事件的状态:$(P\cap Q)$、$(P\cap\complement Q)$、$(\complement P\cap Q)$、$(\complement P\cap\complement Q)$均非空,事件的状态绝不是重言式;$P$ 即不包含 Q 也没有被 Q 排斥在外,这是一种重要的和可能发生的情形。

下面,我们将上述这四个交集称为:1,2,3,4,那么 $p*q=(\text{def})1\neq 0,2\neq 0,3\neq 0,4\neq 0$。

(2) poq:$1=0,2=0,3=0,4=0$。皮亚杰将之定义为完全否定,这表示类 P 与 Q

两者都是空集时，事件的连续状态。根据上述两个界定，$(p*q)$包含$\neg$①(poq)。因为$\neg(poq)$并不包含$(p*q)$，所以他在ELO中的命题103不真。

(3) 非不包含析取$\vee$：1,2,3非空，4是空集，$p*q$与poq包含$\neg(p\vee q)$，而$p\vee q$包含$\neg(p*q)$与$\neg(poq)$。

(4) 缊涵$p\Rightarrow q$：1,3,4非空，2是空集 这些例子能让读者充分理解皮亚杰所提出的简单系统的本质：在经典的缊涵中，所有情况都为真（在第221页，皮亚杰给出的经典真值表表明他仍延续经典的缊涵意义），显然，严格的不相容$[p\cdot q, \neg(p\cdot q), \neg p\cdot \neg q$，对于$p\Rightarrow q$，必须同时为真。在经典的真值缊涵$[p\cdot q$不包含$(\neg p)q]$中，这显然不可能为真。但是，通过清晰的示例将命题对应于谓词（第221—222页），他重新转换的谓词逻辑中的三种经典的情形应为非空。

这也存在非经典的结果。例如，如果p缊涵q，那么q不能缊涵p，反之亦然；而且，这里存在一种无法将之定义为等价关系相互缊涵的情形。这种情况不真，因为至少，对于$p\Rightarrow q$，$(p\Rightarrow q)$或者$(q\Rightarrow p)$并非总为真。$p\Rightarrow p$，$p\Rightarrow(p\cup p)$，$p\Rightarrow(p\cap p)$都为假，因为“$\neg(p\cup p)$”或者“$\neg p$和$(p\cup p)$”都是不可能的。

转译皮亚杰逻辑中的经典命题逻辑这类简单的练习，我们不应再继续了。上述转译的原则是简单的：在经典逻辑的n种情形之一中，不论何时逻辑联结请都为真，皮亚杰要求在谓词逻辑中重新定义所有这些为真的情况非空（不仅仅是在经典逻辑中）。另外，还附加一个原则：完全确定逻辑空间中两个类的并和交的所有区域（或者为空，或者非空）。尽管在ELO中对此的表达不是很充分，但这种原则的提法具有相当的一致性。但是，它没有清晰表达皮亚杰式直觉的全部。这是因为它并未超越类计算的水平（皮亚杰所说的“类逻辑”与我们所说的“分类逻辑的外延与内涵的部分”之间的进展仅仅是：是孤立地看待两个类，还是考虑两个类别所有可能的组合）。然而，皮亚杰显然完全忽略了下列问题：即使假定p和q总是在较低的水平上对应于实体，那么他们在内涵上所对应的关系又会是什么样的？［例如，如果p是$R(ab)$，q是$S(cd)$，又或者p和q对应于谓词和关系的状态的混合，那么又会怎样？］直觉是：“让所有的命题联系成为‘全’联结”（令所有真值情形适当的变换为现实）在特定的情形下是合乎情理的；实际上汉斯·赖欣巴哈通过反思物理定律和它们的联结（皮亚杰在GLTCA中真正的核心内容），提出的“定律状态”是一个与此非常相似的提法。因此，如果我们想要追赶这种潮流（也是格赖斯会话原理中所描述的简单的缊涵：如果“p缊涵q”，那么这意味着获得所有可能真值情形；如果不是这样的话，你可以通过具体化想要的哪些情形是真，可以给出

① $\neg$为命题逻辑中联结符“否定”。——译者注

更多相关信息。如果你不使用"全命题逻辑"，那么你将违反了相关性与质量的准则)，我们应考虑具有所有可能形式的命题逻辑(坚持或否认类的包含、类中元素的或是关系的存在)。但是，我们应注意避免将转换规则简单化，以至于命题"p"只是对应于一个类 P，命题"q"只是对应于类 Q。皮亚杰的直觉要求：命题是操作，即在分类与分类网络上的进行行动。皮亚杰逻辑的内涵特征应使之远离真值表，即在分类与分类网络上行动理论上的真值表。但是这样的行动又应如何界定的，他们如何才能通过命题内、命题间的特征的相互作用来进行组合？且在何种情境下，这种组合又是如何受情境的分类及其网络特征的影响的呢？这些都是皮亚杰的逻辑发展面临的任务。皮亚杰开拓出这个研究领域，但是没能清晰地认识到它的本质。S. 巴贝尔(Seymour Papert)早就清晰地描述过全命题逻辑[1]，也许因其与皮亚杰意气相投和防御，才未指出其不足；也许因心有存疑，才未指出继续发展皮亚杰逻辑应该做的努力与推进。

5. 全命题逻辑需用应用函项逻辑与模态逻辑

读者肯定早就注意到，这种"全"皮亚杰联结词只有在元语言的形式化中描述过，特定的类别要么空要么非空。我们受限于不能介绍缺省的类别(皮亚杰的直觉——不是他的形式化的——禁止一种特别缺省类)和同一性(自然的同一性是一个非常难以理解的概念)。但是，考虑最重要的逻辑联结词——蕴涵——如果我们以形式化的逻辑语言来表达，那么"p 包含 q"应该具有什么意义呢？

它可以意味着下列的某一事实：

(1) FL I：[(Ex)($px.qx$)]，(Ex)($\neg px.qx$)，(Ex)($\neg px.\neg qx$)，$\neg$[(Ex)($px.\neg qx$)]。因为这三个 x 明显不同，所以我们以非空全称移动时，至少包含3个个体

(2) ML I：[$M(p.q)$]，$M(\neg p.q)$，$M(\neg p.\neg q)$，$\neg M(p.\neg q)$。

如果我们以经典的克里普克式风格(Kripkean style)来解释模态，皮亚杰式逻辑的第二种解释仍能让我们处于命题逻辑的前沿，而且介绍可能多的界；但是函项逻辑解释则使我们留在一个界的限定之内(如果 Kripkean 界被定义为语言，在一种语言的限定之内)，而且推动我们走向函项逻辑。

但是，正像我们在上文介绍的——皮亚杰的逻辑研究即不包括函项逻辑也不包括模态逻辑。只有当我们对皮亚杰逻辑研究有重大突破之时，通过对纯粹的皮亚杰的发展机制的发掘，我们就会也必然会研究到函项逻辑，就像在多价代数中所表征的那样。那个时候，反对皮亚杰形式化的主要论争，则会变成赞成他的主要论据。追随我们的读者将会看出他的耐心受到了奖励，即通过理解导致外延—内涵的分类部分全序列部分的发展机制，从而使我们进入多价代数的中心。

为了尽可能简洁地解释我们的观点，请读者自行参考 PR. 哈尔莫斯(Paul R. Halmos)的《代数逻辑导论：代数逻辑的基本概念》一书[2]。

我们想解释的核心是此书第27页这句话："量词代数和变换代数都不具有逻辑的

显著性；最重要的概念是同时处理两种结构那种概念。”

如果读者想弄明白对这种陈述的强烈的皮亚杰式偏好，那么让我们为读者解释一下什么是量词代数，什么又是变换代数。

让我们从皮亚杰提出的具体运算思维的最后阶段开始介绍。我们在前文给定的域 D 上定义过一些代数（通过分类与网络）。在一些情况下，这些代数可能是布尔代数（大部分情况下不是）。为了便于解释，我们不妨假设它是布尔代数（不管怎么样，这种情况也包含在 Halmos 代数内）。现在，我们的思维有机体已确定不仅在一个域上运行。那么，我们至少还需要考虑另一个域 X。D 与 X 将以一系列的函数彼此联结起来。这种情况是一个自然的皮亚杰式的发展向量：如果你需要考虑两个认知对象，那么可以通过两者彼此映射。在最简单的情况下，两个对象之间映射的一系列函数本身也体现出了一些代数的结构，为了保持最大程度的简洁性，它也会冒现出同样的代数结构来表示 D 的结构化特征（我们所举的例子是布尔代数）。直觉上，如果 X 上的元素被公开地假定为对象 D，那么函数会决定对于哪一个对象而言哪一个命题为真。全命题 p_0 是由常量函数决定的，即对于 X 上所有的 x，这个函数在 D 上都有唯一值：p_0。

现在，我们来看看存在量词对于一个命题函数（从域 X 至 D 的函数）到底意味着什么。$(Ex)(fx)$ 不再是函数而是命题。因此，存在一个简单的任务：在任何一个子集上，它映射了域 X 至 D 的所有函数集（如同常量函数）。以皮亚杰术语来看，这也是一个非常有名的发展向量，即在一个集合内考虑其子集（将分类操作重复地应用于更高层级）。在代数的复杂世界中：存在量词是它本身的布尔代数映射（自同态），并且它遵循一些特殊的规则。我们无须使用皮亚杰的术语就能将此说明清楚，读者也将会发现，当我们审视这些关系及类别结构的发展向量时，他们是如此的合理 Q_1：$EO=O$，Q_2 p 先于 D 阶 EPQ_3 $E(p\vee q)$，也即 $(Ep\vee Eq)Q_4$ $(EEp)=EpQ_5$ $E(Ep)'=(Ep)'$（除了 Q_2，其他都是 Karatowski 封闭代数的定理，已有平衡与封闭之间的关系在其自身中也显示出合理性）。

因而，我们使用的皮亚杰分类操作，至少在从 X 至 D 上的一簇函数上进行的。而且，我们应用它至 X 本身也是自然而然的（从 D 至本身，上文早已应用过，D 的结构部分就是因为分类函数至本身的应用）。接下来，让我们来看看 X 上的分类至子集的映射。X 上的这些类别对应于许多变量的变化范围。量词代数是一个三元组 (A, I, E)，这里的 E 是一个量词集合，A 是 D 上的代数结构，I 是 X 上的一系列子集。为了再说明清楚一点，无须使用皮亚杰式术语（但是再次确认一下根据皮亚杰的原理，它们是合理的），我们规定量词代数的两个定义原理：(1) $(E\ )(E(o))p=p$，无须变量量词可加入命题，而且不会影响命题；(2) $(E\ )E(J)E(K)=E(J\cup K)$，不论 J 和 K 何时是 I 的子集。

至此，我们已将分类操作应用于新集合 X 以及 X 至 D 的函数上。现在，一个皮亚杰式的逻辑学家应期望看到什么，无论其分类操作努力何时完成？他应该期待序列的

出现、分类的合成以及序列的探寻。而且，我们有两种不同的分类：一种是在函数集合上，一种是在 X 的集合上。让我们思考一下 I 上的变换与 S 上的变换联系（我们可以将之设想为序列和改变序列的典型的关系运算）。令 S 为 I 上的变换至函数集上变换的函数，或至集合 D 上的变换（两者都以简化的布尔代数 B 的假设）。如果 d 使（S_1）$S(d)p = p$，S_2：$S(s)S(t) = S(st)$，那么 d 是单元变换，其中 s 和 t 都是 I 上的变换。皮亚杰式的心理学家在上述表达中会察觉到两个熟悉的对合[1]：补集（对分类运算最为关键，导致量词代数、关系序列运算、变换代数）。带有风险性的著名 INRC 群就越发突出了（我们将在最后讨论一些关于 INRC 的重要性及其无关紧要性）。至此，第 27 页上的描述变得清晰了：在两个集合 D 与 X 以及它们之间的函数上进行研究时，在集合与函数上应用分类与排序关系，我们必须发展出一种兼具类别代数（A、I、E）和变换代数（S）的结构，以这样一种方式，即分类的特征和关系的特征彼此相容与关联。多价代数是四元组（A、I、S、E），（A、I、E）是量词代数，（A、I、S）是变换代数，本质上这种相容性条件要求，一旦有变量以量词加以限定了，其上的变换就没有进一步的作用，而且一旦一个变量由另一个排列取代，在被取代的变量上的量词化就没有进一步的作用了。

因此，a. 将命题间运算视为与命题内运算的必然联系，这是导向全命题逻辑的普适性思想（作为许多实现了的事实之一）；b. 全命题逻辑，在客体语言中的表达，会导向函项逻辑；c. 尽管在皮亚杰的研究中函项逻辑是完全空缺的，但是在同时考虑多个域时，函项逻辑则是皮亚杰式发展的必经的后期阶段；d. 这意味着，圆柱代数（cylindrical algebra）的核心领域与高产出领域（多价代数的等价物）处于皮亚杰式发展机制的必经之路。这个了不起的结论促进了对代数逻辑与皮亚杰式思维的理解。

限于篇幅，我们不能对函项逻辑的模态逻辑作更具体的介绍。但是，我们同样认定，如果我们考虑域的多重性，皮亚杰的发展机制会引导我们必然地走向模态逻辑（如果要坚持"全命题逻辑"的直觉，情况就应该是这样）。

然而，在说明这一点之前，先让我们来关注一下未被多价代数穷尽的皮亚杰式发展向量的丰富性。为了便于介绍，下文只考虑两个域的情形。一般情况，我们需要运用多个域。现在，我们只考虑两个域 X、I 上的一种分类系统。一般情况下，从群集 1 至群集 4，在 X 上，以及在 X 至 I 的函数上，我们必须引入许多分类（副作用就是属于多种分类的变量逻辑会失效）。我们只使用了从 X 至 D 上的一个函数集。一般情况，我们需要考虑多个函数集与多个变换系统，以及考虑使我们能够从分类与排序的层级跃迁到可以在其上行动的多重机制（例如，对命题进行陈述的行动）。我们必须将多种类的函数和变换理解成一个新的定义域，逻辑网络图与分类必须在其上进行定义。我们在动作与动作的结果上行动，正如我们必须联合动作及其结果一样。也即，对于皮亚杰式

[1] 在数学中，对合（involution）或对合函数，是自己的逆函数的函数，就是说 $f(f(x)) = x$ 对于所有 f 的定义域中的 x。——译者注

的发展,不存在也不可能存在一个最后的阶段(这是我们与目前有关形式阶段评论的文献主要的不同之处)。

现在,我们继续简单评价一下模态逻辑①。讨论这个具有皮亚杰式代数形式的理论,我们需要考虑基础世界(现实的世界)进行定义。现在,我们考虑代数 B 及在 n 个其他集合上的元素状态(称之为世界)。这次,我们不考虑基本的代数 B 的部分对其他界的部分映射,而考虑其他集合对于 B 上每一命题的整体映射,以及决定是否为真或假。换言之:映射关系是全局的而非局部的(就像在函项逻辑中那样)。界的多重可能性能够很好地用来描述运算的分类特征。然而,在这些不同的界之间,可及的关系得到了定义。如果可及的关系是一种线性的排序(不对称、可传递以及非反身性),那么在克林普里语义中,我们就获得了 $M(p)$(基本界中一个可及的界为真)一系列非常具体的属性。这将会在群集(1)与(5)的命题逻辑中产生组合,且是作为全命题模态逻辑的基础。类似的组合也可以在其他的相关群上得以定义,这些群给定了模态算子的其他属性。

要想了解皮亚杰式的代数对于函项逻辑与模态逻辑的要求为何相差这么远,我们需对模态进行代数研究。在此,我们没有时间进行相关讨论了。但是,另一个丰富的研究领域在此也开辟出来了(皮亚杰对于模态的重视,可见是以一种自然的方式受其在 ELO 中逻辑直觉所驱使)。

6. 皮亚杰式全逻辑的函项与模态特征的推论

(1) 许多心理学家早就思索过,以命题逻辑的方式对思维形式进行实验研究,将会证明或否定皮亚杰的这些思想。现在,读者定会理解这种误解是多么深。对于皮亚杰而言,可能存在的(他的所有论述都是相反方面)都不是"纯"命题逻辑。所有的命题间的关系都是根据命题内关系来获得理解的。我们甚至对这些相反的思想进行了形式化:皮亚杰自身在其著作的描述中并没有达到这样的形式化思维水平(实际上,他只是在命题上减少运算以使在类别上进行运算)。为了判断"p 蕴涵 q"是否为真,皮亚杰式逻辑不仅仅需要在 p 与 q 上的情境数据,而且(就像我们补充的)需要 p 与 q 出现的情境数据(情境使 8 个群集和它们的发展规律得以结构化)。将此 8 个群集应用于命题水平,仍需要结构化(命题的分类、命题的序列化,以及两者的组合),需要考虑正在发生的情境(命题内)、命题间的类别与关系以及情境性的类别与关系,这三者之间连续的交互作用。我们的形式化只是作为一个可行的假定,即在命题上应用纯粹的序列化,或者纯粹的分化的群集,考虑到具体情境限制,会产生内涵与相关逻辑。我们只能构想这个可行的假设,但无法解决它[20]。

因此,我们希望,纯粹的形式化阶段之谜能够隐退。与此不同的观点也许会出现,

---

① 模态是指客观事物或认识存在和发展的样式、情状与趋势等。模态逻辑是处理模态如"可能"、"或许"、"可以"、"一定"、"必然"等限定情境的逻辑,有时也称内涵逻辑。——译者注

但是我们想象不出，如果读者们思考与消化了上述文献资料，还能得出什么其他结论。

如果这种情况发生在命题内水平至命题间水平之间，那么通过类比推理（根据系统的思想），当我们从感觉运动至符号前运算，再至运算水平，也应得出同样的结论。倘若如此，分类与序列化的逻辑将会以其他的方式发挥作用，在具体的感觉运动图式类型的功能上，它会构成我们进行分类与排序的对象的具体类型。

这便解开了其他的迷雾——整体的阶段。建立分类与排序的标准与运算（操作）将依赖于对象构成与符号表达的标准。也即是，这 8 个群集的建立应以皮亚杰称之为"前逻辑"的运算（分体论①中研究的部分-整体运算）为基础，这种运算通过伴随不变对象建构的各种路径，建构不变的对象。在依赖较早水平后期的智能发展过程中，命题间水平对于命题内水平的依赖只是另一种情况，它创生了与认识对象、认识任务以及区域捆绑在一起的各种发展阶段。为了阐明在感觉运动图式以及客体守恒阶段的这种依赖性，应事先假定客观对象及图式的逻辑的形式水平应如何建构。这属于皮亚杰式逻辑的未来而非过去。

（2）在解决了两个谜团（阶段之谜以及纯粹的形式水平之谜）之后，我们的"皮亚杰的翻新"也就免受长期为人们重视的皮亚杰理论的标识——INRC 群的影响了。

在逻辑的发生方面，我们不能将之归因于皮亚杰思考这个问题的核心概念——INRC 群。为什么呢？亨利·韦穆斯（Heri Wermus）对此作过非常清晰的解释：他说可在任何一个至少拥有两个对合的代数结构上定义 INRC 群。对合是指使得 $\iota\iota = I$（对于所有的代数元素 a，假定代数元素的组合为 $\circ$，那么单位元 I 具有 $a \circ I = I \circ a = a$ 的属性）的操作 ι。如果两个对合 ι 和 ι' 是可交换：$\iota\iota' = \iota'\iota$，那么 ι 和 ι' 都可以称为自变量；如果两个可交换的对合存在于一个结构上（其 $\circ$ 是结合的意思），那么它们的乘积也是一个对合。这一点非常容易证明（见 Wermus）。对于皮亚杰而言，对合的重要性是因为它是其自身的逆。皮亚杰一直在寻找平衡状态，寻找能有逆的运算（可以说无须破坏结构，就可以"复原"）。但是，如果我们有三个对合，其中一个是两个对合的积，另两个是独立的，那么我们可以得到所有在 INRC 群上定义的等式（两个独立对合的出现是如此的普遍，以至于它不可能有任何逻辑的重要贡献）。

然而，并不存在人们对逆感兴趣的究竟缘由。因为如果我们对逆有兴趣，也就应该对阶为 2 的运算更有兴趣（例如：它们是自己的逆）。经过 n 次重复返回至具有 n 次逆的运算单位元，我们就有了阶为 n 的运算，这样它们从不包含自身的运算。INRC 群也是对上述两个不太普遍性且非常具体的问题的答案。如果我们对于 1，2，n 个命题，在命题间水平上，能对自身进行所有的基本运算，那么何种运算又足以使得这些基本运算彼此之间能够进行相互转换？这是一个非常好的问题，因为它充分体现了整体的一体化过程。但是，正如我们所理解的，关于皮亚杰式原理本身，经典的布尔代数不是其命

---

① 分体论既指的是谓词逻辑的一种应用，又指的是形式本体论的一个分支。——译者注

题间运算所特有的结构(经典的布尔代数不能表征命题内及命题间水平的相倚性)。因而,即使INRC有意探寻其布尔代数属性,它在皮亚杰逻辑中也不是最重要的核心。而且,巴特和阿舍尔(Bart & Ascher)早就表示过,如果我们离开皮亚杰的逻辑,即使我们取一个具有 n 个生成元(generator)的任意布尔代数,后来也会因为 n 的增长,所有生成元之间彼此映射的结构问题则成了一个比INRC所能回答的更具一般性的问题。

这是我们应用INRC群的逻辑相对论。但是,对于能忆及皮亚杰的基本生物学灵感的哲学家而言:分类与排序对生命而言必不可少,有机体机能适应的基本工具将必定会在认知行为、抽象化以及建模的各种水平上进行分类与排序的组合。N代替命题的否命题,R是命题中序的反演。但是,如果我们放弃过时的观点——经典的否命题都正确(变成直觉主义者),且如果我们放弃同样过时的观点——所有的关系都是二元的,考虑n种关命题,同时顾及皮亚杰的三个最深刻的直觉(1.类与序列从不会孤立的出现,总是会在整体的结构中出现;2.类与序列总是内涵与外延地出现;3.命题间的运算总是与命题内运算相倚),那么序列和分类的合成将不能通过孤立的、原子论式以及重新分类与排序的极简形式,呈现在INRC中。

7. 发生认识论主要的逻辑任务:发展的规律

在本文的结论部分,我们想指出皮亚杰理论的逻辑实际上是定义逻辑活动发展的逻辑。[22]

它的目标在于动态的类别逻辑、动态的关系逻辑、动态的命题逻辑以及动态的函项逻辑或者模态逻辑。我们在这里将会为读者尝试解释上述这些逻辑意味着什么。还是从最简单的例子——分类来开始。

与前文一样,主体S对认知对象进行归类。假设S根据标准 K(例如:颜色或体积)进行归类。让我们对S的行为跟踪观察一段时间。假定在特定的阶段,S无法做决定或者他取走了分类中特定的事物,他会宣称不能进行分类。现在,我们赋予主体S一种发展规则:在 n 次不确定与 r 次未经分类之后,使用分类标准 L(例如重量或者气味),而且当终止应用此标准时,会产生第一个分类的复制。那么,再根据 L 继续进行分类。再一次 $f(d)$ 不确定及 $g(r)$ 未分类,终止第二个分类标准,再产生第二个结果的复制,再试着对 K 与 L 组合进行分类。

这显然是一种非常简单的人工发展的算法。然而,它只是对具体运算阶段一个最初的群集的部分关系进行了镜像。相似的发展算法也可对排序进行定义。

关于命题水平的动态命题逻辑,它似乎更像如下(它实际上存在,见D.贝通斯(D. Batens)的动态的辩证逻辑研究):从前提 P 开始使用规则来证明陈述。然后,继续证明直至你证实为矛盾。这时,审视一下早期的论据,去掉支持矛盾的陈述。接着继续证明陈述。如果完成并修改了 n 个矛盾和 r 个未决情形(这些规则不会出现在D.贝通斯,但是它对于我们是关键的,如果我们必须代表皮亚杰的话),那么,为了保持算法的整个步骤,就必须改变特定的基本前提或特定的规则。什么样的前提要以什么的方式

来修改，什么样的推导规则以什么样的方式来修改，这是完全被决定的。

实际上，在文献中有很多有关发展的算法（它们从未曾与皮亚杰的逻辑放在一起）。对于逻辑代数而言，皮亚杰理论是一种寻找发展算法的尝试，这一点是很确切的。读者将会记得发展出分类是如何与树的生长类似的。让我简单引用一下第50页"发展系统与语言"，对此作一简单说明。象征符号的序列代表树的分叉。每一条线代表在某一时点发展的阶段，用（ ）符号来封闭，意味着一个分叉的开始（在我们的分类树中，这将意味着开始划分出一个子类别）。这个例子就像下面这样：

c

cc

ccc

$cc(c)cc$

$cc(cc)cc(c)cccc$ 等。

这并不表明我们能以林登麦伊尔（Lindenmayr）[1]发展代数的方式找到逻辑发展的实际模型。但是，我们是想说乔姆斯基式（Chomskian）的派生物转换成生物学的派生物，将会如皮亚杰期望的那样，以同样的方式将生物学与代数连接起来。

然而，这在哲学层面就出现了这样的问题：(a)决定变化规律的规则是如何受制约的；(b)这些规则自身是如何发展的；(c)在许多层级上，我们的确需要了解决定变化规律的规则，以及规律在这些层次是如何发展的。皮亚杰对此有两个限定：

a. 假设发展会表现出周期性，这样在这段时期认知系统会表现出一定的对称性。

b. 假设发展存在一个最后的阶段，或者假设发展规律是其外延，各元素或关系的数量和联结的程度，在进一步的发展变化中不会被修改。非单调逻辑以及D. 贝迪斯的动态辩证逻辑具有终极特征（存在不变点：一些状态在系统的进一步发展过程中，没有被遗弃，继续存在）。但是，这些限定成立的可能性是弱的。而且：

1. 我们必须考虑增长的分类、排序与命题系统的多重性的交互作用。

2. 我们也必须介绍模糊或概率算法来取代发展的决定论算法。

这些终极问题，皮亚杰自己并没有研究，但是它们都属于皮亚杰理论系统的未来发展。

具有哲学与逻辑背景的读者应该审视一下，我们早先在举例说明特定发展规律的发展阶段时呈现的理论片断（在人们所意识到的皮亚杰研究中，我们获得了关于这个规律零星的启示）。显然，皮亚杰在其1976年的著作中未提逻辑，只是尽量对当时的研究

1 Aristid Lindenmayr，荷兰Utrecht大学匈牙利裔生物学和植物学家，于1968年提出的有关生长发展中的细胞交互作用的数学模型L-system，这是由一系列不同形式的正规语法规则，多被用于植物生长过程建模，但是也被用于模拟各种生物体的形态。L-system也能用于生成自相似的分形，例如迭代函数系统。——译者注

发现进行了一般性的描述。在其逻辑研究中，尚未出现普遍性的描述。例如，皮亚杰后期将矛盾的研究与其对于群集(1)的描述结合起来，我们就可以说群集(1)不是一个稳定的分类，因为后来的类别（补集）不完全具有第一个类别那样的定义：在产生矛盾的肯定与否定之间，存在着不对称性——定义良好的一堆事物应像类别那样起作用，但并不具有类别的所有特性。类似的，如果在一个域上进行两次或者更多次的分类，那么在分类之间就不存在关系和分类的标准。而序列与不对称相同，仍可以在连续排序的对象之中，创造出一种平衡，这些对象不能以纯粹的非对称性表达——事实上，在某种等价的意义上，对称关系仅仅作为两个非对称关系的混合才是可以理解的（关系是非对称的）。我们可以在已描述过的命题间与命题内运算的独立性与相倚性的趋势之间加入张力。因而，我们可以这样断定：

a. 逻辑研究并没有真的与1976年的算法一有关联；

b. 表达逻辑构件(fragments)的方式意味着发展的规律得以清晰地呈现。决定改变规则的规律及其发展在哲学上的困难仍然存在，它们仍是重中之重。这些表明哲学、生物学以及心理学探寻的必然性，也表明了这是一个重要的数学逻辑研究问题。它也是皮亚杰逻辑未来的最后贡献：埃里奇·威特曼(Erich Wittman)完全没有参考发展的规律，他早就认为皮亚杰的群集可以用范畴论描述。为了说明这种提法颇有道理，我们需要为读者简单介绍一下什么是范畴。在埃里奇·威特曼直觉思想的背后，便是克莱因的埃尔朗根纲领(Klein's Erlanger Programme)的一般化：如果你必须刻画某物，意味着可以用多少种方式投射于它自身，其他的物体以多少种方式投射于它，以及在其他的物体上，它可以用多少种方式来表达。范畴是上述这些过程执行中所使用的工具。

发展规律，作为有机体对环境映射这种方式的规律，它涉及有机体映射到自身以及环境映射到有机体的功能，在埃尔朗根纲领中也能非常自然地发现它的身影。发展规律的描述需要范畴概念（就像应用于逻辑系统时），这一点可通过 a 与 b 两个过程比较清晰地表达出来：

a. 首先，是范畴定义；

b. 其次，重新讨论发展规律。

范畴(MacLane，第10页）是对象）的集合，箭头（直觉上亦可称之为转换）的集合，两个函数的集合，这两个函数为每一个转换箭头分配可以运行的对象集（域），以及它产生的对象集（陪域）。两个转换可以组合，如果其中之一的陪域是另外一个域（转换2可以应用于第一个转换的结果）。对每一个对象而言，单位态射（箭头）对应于对象对其本身的映射[对于每一个 o，存在 $id(o)$]。对于每两个相组合的函数，满足结合率。在威特曼看来，群集概念可在范畴概念上加上另外两个限定条件而得到充分表达（皮亚杰曾经使用群集概念，描述INRC群和格最后的合成，以及描述受严格限制的八个具体运算群集序列和基本的分类形式）：

a. 所有的箭头（态射）都是属于基本集合C（和它们的逆）态射的组合；

b. 所有的箭头都是可逆的。

上述这种描述充分表现皮亚杰建构的一些有用的特征，但是它太一般性以至于不能表达他的直觉，也不能使发展规律得以开始讨论（参见 Wittman，第 36 页）。简言之，即是必须在发展的进程中加入更多的对象、箭头、组合及逆。然而，通过指出可逆性问题（在范畴与他们的逆他们的对立面之间的关系的研究）具有相当先进性，逻辑发展的代数研究可嵌入到比皮亚杰开启的严格限定的群集理论更一般的领域。这绝对是一个重大进展。而且，我们在本文也相当系统化地避免了目前的皮亚杰研究，即认知系统的代数发展的研究（限于篇幅，本文不能描述更多皮亚杰逻辑之外的其他主题，比如皮亚杰理论的代数部分）。我们甚至不想在此讨论范畴论（皮亚杰、霍夫曼以及威特曼都曾系统地讨论过），如果我们不是考虑到讨论认知系统的发展规律需要范畴论作为工具的话。实际上，假设我们将认知主体在特定阶段发展，视为一个输入集合（它自身的域）至一个输出集合（它的陪域）上的系统映射。我们称这种作用规律为 R。也许需要考虑一个多重的 R 箭头。如果因认知系统自身的行动规律需要改变，那么我们也必须加入规律 RR：R 至 R' 上的映射。但是，如果 RR 不是内在的，如果这样，它可以在只有行动时（理性主义）才增加 R，如果 R 早已应用了 n 次，或者（经验主义）如果在 R 的域或陪域上，特定具体规定的元素出现了 n 次。皮亚杰建构主义需要建构 RR：R 的应用必须作为它的结果 RR 之一（因而它的修改 R'）。显然，我们可以看出，为了建构这样一种发展规律，我们需要有规则来执行规则（规则就像对象那样）。这可以在范畴论中发生，也仅可以在其中发生，在对象与变换之间不存在本质差异（可以由他们的单位箭头取代）。皮亚杰式的发展规律应允许在 R 的域及其陪域上发生。因为此特殊原因，我们建议探索发展规律的未来应使用范畴论。对于哲学家而言，他们得到理解方面的智力满足，生物发展的规律一旦变成自我意识，就一定会在文化的历史中，发展出一种与复杂的范畴论类似的工具。

皮亚杰逻辑的中心意旨在于，尽他所能用逻辑的表达来呈现生命进化的发展阶段，这正是本文想表达的思想。但是，他过于被已有的形式化限制住了，以至于他不能够紧紧跟随现代逻辑的快速发展，以至于不能够认识到他探寻的“自然逻辑”迫使形式逻辑学家自身远离经典的系统。当然，这于他而言，也是不可避免。然而，他探寻的“自然逻辑”并没有使他简单地重复他人的研究，而是引导他到达一种新的自定的形式化。尽管这是通过旧有的方式进行了错误的表达，但是，我们还是可以重新辨识与发现其研究的意义。皮亚杰的逻辑研究以及对于发展规律的探寻，都值得继续。两者都可以通过数学史、逻辑史、心理史以及人类思维的教学法，应用来作为表达逻辑的工具，来表现逻辑与生命本身的联系。

注　　释

1. 主要的参考文献是《运算逻辑试论》(*Essai de Logistique Opératoire*, Dunod, Paris, 1972。文中缩写为 *ELO*)。它是格里兹在 1972 年对原版《逻辑通论》(*Traité de Logique. Essai de Logistique Operatoire*, 1949)进行修订后出版的第二版。其他的信息可参见《论逻辑运算的转换》(*Essai sur les Transformations des Opérations Logiques*, Presses Universitaires de France, Paris, 1952)一书。关于皮亚杰的命题逻辑与儿童行为之间的关系,需参考著作《从儿童到青少年逻辑思维的发展》(*The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*, 缩写 *GLTCA*, Basic Books, New York, 1958)。有关描述儿童行为的前形式阶段的应用资料,以及群集的形式化控制方面的资料,可以参阅《儿童早期逻辑的发展:分类和系列化》(缩写 *EGLC*, Routledge & Kegan Paul, London, 1964,其原版 *La Genèse des Structures Logiques Elementaires* 的翻译由 Delachaux et Niestle 完成, Neuchatel, 1959)。如果将皮亚杰描述的形式化思维的部分视为儿童整体发展的阶段,那么就可以理解本文的主要论点了。皮亚杰从未曾这样描述,只是试图以下列两种不同的方式给出了一般理论的形式化版本:Ⅰ. "Logique et Equilibre dans le Comportement du Sujet"(在"Logique et Equilibre Etudes d'Epistemologies Genetique," Vol. 2, Paris, PUF, 1957)和Ⅱ. "L'Equilibration des Structures Cognitives"(EEG, 33, Paris, PUF, 1975)。第一版使用了概率论与博弈论的马氏序列,第二版是一个关于发展得更好算法。在本文所涉及的范围内,我们不能:

(a) 对发展理论进行形式化的介绍;

(b) 罗列皮亚杰实际发展的那些逻辑类型,只能尽量在这些发展中去描述部分平衡。皮亚杰逻辑的未来必须解决这些问题。

2. 皮亚杰与英海尔德(Inhelder)合著的《逻辑思维的发展:一个逻辑学家的观点》,发表于 *British Journal of Psychology*, n° 51, 第 75—81 页, 1960 by Charles Parsons。

3. 要想清晰地理解关系逻辑的代数特性,应参阅塔斯基《关于关系的计算》("On the Calculus of Relation," *Journal of Symbolic Logic*, n 6, 第 73—89 页, 1941),以及塔斯基和 B. 琼森(Baarni Jonsson)合作的《布尔代数与运算 I》("Boolean Algebras with Operators I," *American Journal of Mathematics*, n° 73, 第 891—939 页, 1951)。如果皮亚杰式逻辑学家要融入逻辑研究的主流,那么就需致力于逻辑与代数的统一方向(这不是皮亚杰的研究目标,只是他所使用的工具之一),他们应参阅《圆柱代数》的参考书目(*Cylindrical Algebras*, by L. Henkin, J. D. Monk and A. Tarski;

North Holland Publishing Company, 1971)。

4. 关于内涵逻辑(也称模态逻辑)入门比较好的著作是:《内涵语义学》(By Godehard Link, *Intensionale Semantik*, Fink Verlay Munchen, 1976)以及《蕴涵:相关性与必然性的逻辑》(*Entailment. The Logic of Relevance and Necessity* by Alan D. R. Anderson and Nuel D. Belnap, Vol. 1. Princeton Univ. Press, 1975)。

5. 本文致力于介绍皮亚杰的逻辑。正如我们已介绍的,他的逻辑与代数密切关联。我们尽可能理解他的代数起源就像理解他的逻辑起源一样。但是,限于篇幅,对此的介绍不可能面面俱到。我们仅作两点评论:

(a) 格里兹在其著作《关于群集的布尔代数》(*Des Groupements à l'Algebre de Boole*, pp. 25-63 in La Filiation des Structure EEG, XV)早就将两个最初的结构定义为群集(从一开始就呈现了序和类两者的属性,但是具有严格的运算限定)。第一步,从群集至群,然后在更多的后续步骤中,通过对合以及将环与布尔代数相结合,从半格,再超越半格。即使我们认同他的这个起点(分类及序列的结合似乎已经够丰富以至于不充分)及终点(关系与类别结构的结合不是布尔代数而是具有算子的布尔代数),我们仍需强调一下他在群集至群的跨越过大。我们从半亚群(semi groupoid)开始,这是具有一个二元运算定义于其上的结构,而且运算处处不封闭。接着经由运算的封闭性,我们才能从半亚群达至半群。一方面,我们可以增加结合率(达至半群);另一方面可以通过部分逆(或左或右,在这个逆之下不总是闭合)。正如我们在第41页(B. Booss and Mogens Niss, eds., 'Mathematics and the Real World', Birkhauser, 1979)所见到的,在达到群之前有许多中间阶段。这些阶段具有哲学、生物学、心理学的重要性吗?我们不得不说这是想当然,现在还没有此类证据。我们将需要使用一本完善的代数教材(我们想到的教材是 J. Levy Bruhl, *Introduction aux Structures Algebriques* 或者 Birkhoff & Mac Lane, the standard *Algebra*;使用第二本的原因非常明显,使用第一本则因为比群与格更弱的结构对合在其中作用巨大。)以及回到皮亚杰的非形式化的研究工作,来澄清群集概念。他的非形式化研究,我们在注释1已提到的一般发展理论,它应该能以更充分的代数方式来重新建构。这个评论,作为反对格里兹在澄清群集概念所做努力的提议,尚未被提及。我们都可从中获得启发。

(b) 我们也顺带提一下安德森和贝尔纳普,因为他们的研究表明内涵的代数也是半单代数(involutionary algebras)。

6. 皮亚杰关于范畴论的基础文章出现在 Logique et Analyse "Structures et Catégories", 1974, n° 17, 第223—240页。格里兹也在"Analyse pour servir à l'Etude Epistemologique de la Notion de Fonction"(in EEG 23)一文中使用过。W. C. 霍夫曼则推荐《关于心理发展理论的皮亚杰心理学的数学模式》("Mathematical Models of Piagetian Psychology in Towards a Theory of Psychological Development," ed. by Modgil and Modgil, NFER Publishing Company, 1981, 第421—463页)。对我们而

言，对皮亚杰逻辑最自然的介绍是《自然数与群集》(Erich Wittman, "Natural number and Groupings," *Education Studies in Mathematics*, 1975, n°6, 第 53—75 页)，以及《皮亚杰心理学的群集概念：形式化与应用》(*ibidem*, 1973, n°5, 第 125—146 页)。范畴论肯定也早就以形式逻辑介绍过了。但是，我们再一次受篇幅限制，甚至不能系统比较皮亚杰的逻辑研究与范畴论，不管我们是将范畴论视为一种发展的结构，还是作为一种工具来理解发展结构。

7. 第 31、32 卷 EEG "Recherches sur la Contradiction" and "Les Formes Elementaires de la Dialectique" (Gallimard Idees, 1980)将是对此的明证。因为本文的限制，我不能将这种思维的新潮流置于注释 1 所引用的研究。更多的信息可查阅 "Reflexions sur la Theorie de L'Action, Dialectique, Implication et Signification," Communication and Cognition, 1982, and to Dirk Batemns, "Dynamic Dialectical Logics" (出现在 G. Priest and R. Routley, eds. "Paraconsistent Logic")。我们必须强调的是：在逻辑领域内，D. 贝通斯的文章对我们而言，似乎是首次以精确且清晰的方式介绍由矛盾驱动的系统的发展。如果这项研究可以扩展至

(a) 内涵的逻辑以及

(b) 如果它可以应用于类与关系或者是函项逻辑(有时也称谓词逻辑)，那么我们将更可能实现皮亚杰晚年多年研究的项目。

8. 在拓扑动力学中，已有的关于平衡与稳定的一般理论，它显然是用来使皮亚杰思维清晰的工具。可是对于我们而言，甚至都不能在此文中考虑关注皮亚杰思维发展的代数趋势。现在毫无疑问，需要为我们的读者呈现下列内容：

(a) 一般动力学；

(b) 它如何应用于认知系统。

然而，因为皮亚杰的研究经常性地使用平衡化(类似于没有矛盾)，这就使得平衡化成为任何完整的研究之必须。因此，会有更多遗憾，我们只是尝试用这个话题激发读者的兴趣，然后再放置一边。而且，我们在此将不平衡与平衡视为同等重要，就像不稳定与稳定，非群与群一样。尽管我们已认识到局部平衡的重要性，但是我们仍旧认为皮亚杰逻辑在未来有更多关于不平衡与不稳定的研究工作，就像研究平衡与稳定一样。

9. 对我们而言，这个问题有点言过其实。在皮亚杰对认知主体的形式化中，其中一个主要弱点是，缺乏外显的行动、强的有限论以及哥德尔式认知行动的自我表征。但是，这将会引导我们更加远离目前所真正研究的部分，因此我们不打算在此驳斥或取代它，而是要尽可能多地保存它。我们相信它将是最关键的部分。但是，我们必须在此表明我们的不同意见。

10. 最核心的资料来源是《生物学与知识》，芝加哥大学出版社，译自原版 *Biologie et Connaissance* (Gallimard, 1967) and *Le Comportement Moteur de l'Evolution* (Gallimard Idées, 1976)。

11. 约翰·冯·诺伊曼,《自繁殖自动机理论》(由 Burks 编辑,伊利诺伊大学出版社,1966)以及《细胞自动机论文集》(由 Arthur W. Burks 编辑)。

12. 数学-逻辑结构,作为对生物有机体自组织特性的镜像,连续地产生结构使我们得以增加对非生命的领悟。如果我们将皮亚杰所做的工作推进一步,这将可能是唯一解释:有机物质的自组织特性可以像这样产生宇宙的自组织特性。这是皮亚杰无法避免的结论,但他从未曾对此进行详细说明。因而,如果我们真正想倡导详细研究皮亚杰的提议,那么一般动力系统理论应结合理论生物学则是必然的。

13. 克劳斯·G. 维茨(Klaus G. Witz)所著《儿童认知过程与认知结构的表征》(*Archives de Psychologie*, n°160, 第 61—94 页)和《皮亚杰的群集结构》(*Archives de Psychologie*, n°159, 第 37—50 页)。

14. 我们对于群集的描述,尽管几乎表达了皮亚杰的直觉,但也排除了它的幂等性、包含的传递性、特殊的空类、非相关补集。这种情形并不令人意外,因为可以看出我们甚至比 Henri Wermus 对初始群集非常严格的限定开始的更早。他在"Formalisation de quelques Structures Initiales de la Psychologenese," *Archives de Psychologie*, n°163, 第 271—288 页,就将群集初始地界定为即时的后续者理论:第 278 页。Ax1(Ax) (Ay)(SXY ent non Syx) and Ax2: 每个元素有且仅有一个后续者(在其明显的量化形式中)。并且也介绍了 S 与其自身的第 n 个相关乘积 Sn 与它的逆 P^n。他的对应于 Grize's 的第三个原理突然从完全的局部(群集)跳跃至完全的整体(群)Ax3;这里几乎存在一个全局强函数(以至于所有的元素都是它的前面的项)。这不能表达皮亚杰经典的群集,它失去了与生物的灵感和思维的所有联系。而且,它比我们上文所提 $J-S$ 更贫乏,它是由其纯粹的外延立即跳跃至全局的强函数。但是必须注意的是,皮亚杰在后来曾声称在 Wermus 的建构中发现了对他的群集的充分定义。我们不同意这种说法,尽管在文中我们指出 Wermus 对皮亚杰逻辑有其他方面的重要贡献。

15. 无论何时,依据 ELO(Essai de Logique Operatoire),我们给不出清晰的参考说明。

16. "Elements of Symbolic Logic," by Hans Reichenbach, 1948 and "Nomological Statements," North Holland Publication Company, 1950.

17. Gerald Gazdar, "Pragmatics," Academic Press, 1979.

18. "Sur la Logique Piagetienne," by Seymour Papert in "La Filiation des Structures," 1963, PUF, EEG, 15, 第 107—129 页,但是,他没有意识到,他与帕森斯的论战如能被建设性采用的话,那么这是皮亚杰逻辑曾经遇到的最好的事情,他从未理解皮亚杰理论的全部。

(a) 全逻辑如何概括化成 n 个谓词和关系;

(b) 关于命题的 8 个群集本身的应用,如何与全命题逻辑内容进行组合。全命题

逻辑对应于其逆的不完全命题逻辑(In his "Essai de Developpement d'une Prelogique a partir de Fonctieurs Partiels" Henri Wermus, *Archives de Psychologie*, XLV, 1977, pp. 85-100)。在这本书中,他早就发现这种可能性,似乎是一种天然的皮亚杰式前命题逻辑。将丰富的命题逻辑与部分的命题逻辑进行组合,应该是自然的:应意识到对每一个逻辑常量并非只有一个真值。但是,并非我们考虑的由谓词与关系定义的所有逻辑空间,都是全或空。换言之,对于特定的个体的认识对象,在特定的情况下,以类和关系的术语描述的命题联结为真的情况,应该是没有价值的。

19. P. R. Halmos. "Algebraic Logic,"Chelsea, New York, 1962, Chapter 1.

20. 罗伯特·H. 恩尼斯(Robert H. Ennis)所著《儿童逻辑能力的概念化:皮亚杰的命题逻辑与一种可代替物》(第 201—260 页)在《皮亚杰的替代》(Siegel and C. Breinerd 编辑,学术出版社,1978),非常清晰地抨击了皮亚杰的逻辑,此书对于理解这个观点有主要贡献。当我们具备了皮亚杰的基本直觉后再阅读它时,才能为皮亚杰式命题逻辑的发展的后续研究做好准备。在命题逻辑上,这种特定的演绎框架将会比其他的可立即推导的演绎框架具有更多的困难。

(a) 从群集直觉至命题间关系的应用;

(b) 在皮亚杰逻辑中,从形式、内容与情境之间连续的相互作用中获得的启发与经典的形式逻辑相反。而且,恩尼斯似乎太着迷于经典的形式系统,这理所当然会被皮亚杰有时矛盾的陈述引向歧途。

21. Henri Wermus' "Les Transformations Involutives (Réciprocites) des Proposition Logiques" *Archives de psychologie*, n° 162, pp. 153-171. On other grounds we came to the same conclusion in our "structure et Genèse" (EEG, 1963). 即使我们将之视为重要工具,它也应一般化,以便使 INRC 阶段的多重性可以像 William M. Bart 曾经清晰地表达的那样。即便保留形式阶段的概念。《皮亚杰关于形式运算阶段的数学逻辑的归纳》("A Generalisation of Piaget's Logico Mathematical Model for the Stage of Formal Operations," *Journal of Mathematical Psychology*, n° 8, pp. 539-553)。在 Edgar Ascher 未发表的"A Propos d'INRC"论文中,将现代代数应用于皮亚杰想解释的问题,并将之与波利亚问题相关联(JSL, 1940)。这也表明,INRC 太过于一般且具体以至于不能表征形式思维。我们强烈推荐细读 Ascher 文章。Ascher 就职于日内瓦大学。

22. 赫尔曼和罗桑伯格(G. T. Herman& G. Rozenberg)所著的《发展的系统和语言》,由北荷兰出版社于 1975 年出版。如果我们阅读此书前言的第一句话"发展的系统和语言的理论,是将发生生物学思想融入形式语言理论的必然结果",我们立即会理解林登麦伊尔的研究与皮亚杰研究之间的内在关联。实际上,皮亚杰的工作,正是将发展与进化理论的思想注入形式逻辑理论的结果。

如果科学共同体愿意认真对待林登麦伊尔代数,那么出于相同的理由,也应理解与

接受并有兴趣尝试合并形式逻辑和进化与发展生物学模型。

23. D.贝通斯动态辩证逻辑与皮亚杰的逻辑关系更近(即便不是有意为之)。它是人工智能早已得到发展的非单调逻辑的发展。据我们所知,它也应视为研究认知系统中形式逻辑工具的发展的可能候选工具。

24. 参见注释1。

25. 参见注释6。

26. Saunders Mac Lane(1971),"Categories for the Working Mathematician," Springer.

27. 在《皮亚杰理论基础的笔记》一书中(*Cahiers de la Fondaion Jean Piaget*, n°1, April 1980),我们有机会对皮亚杰思想作更一般的总结与改进。有兴趣弄懂皮亚杰逻辑与现代哲学背景相违背原因的读者,可以阅读此书的《现代发生认识论的建构与效度》("Construction and Validation in Contemporary Epistemology," 第121—174页)部分。这篇文章将它与注释7提到的1982年文章中已有的观点作了比较。

译者简介

曹宁宁　东华大学心理健康教育与咨询中心副教授
程　科　西南民族大学教育学与心理学学院副教授
胡林成　泰州学院教科院教授
蒋　柯　温州医科大学精神医学学院教授
李梦霞　湖州师范学院教师教育学院副教授
李其维　华东师范大学心理与认知科学学院终身教授
陆有铨　中国著名教育学家，华东师范大学终身教授
孙志凤　南方科技大学思政教育与研究中心讲师
王云强　南京师范大学心理学院教授
肖　源　广东外语外贸大学外国文学文化研究中心博士生；湖南工商大学外国语学院法语系教师
姚桂明　湖南工商大学外国语学院讲师
应厚昌　20 世纪 70—80 年代曾在华东师范大学心理系工作，现居加拿大
查抒佚　西南民族大学教育学与心理学学院讲师
张蓉蓉　苏州科技大学天平学院讲师
张　野　沈阳师范大学教育科学学院教授
张　勇　西南民族大学教育学与心理学学院讲师
朱倩兰　鲁迅文学院第 35 届中青年作家高级研讨班（首届翻译家班）学员
左任侠　中国著名心理学家，华东师范大学教授